1. Le equazioni del moto in coordinate eliocentriche

Le equazioni del moto di un sistema di $N+1$ corpi (esempio: Sole + N pianeti) che si attraggono secondo la legge di gravitazione universale (forza proporzionale all'inverso del quadrato della distanza), espresse in un sistema di riferimento inerziale, sono:

$$\frac{d^2\mathbf{R}_i}{dt^2} = -G\mu_0\frac{\mathbf{r}_{i0}}{r_{i0}^3} - G\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\mu_j\frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3}\,, \tag{1}$$

dove G è la costante universale di gravitazione, $\mathbf{R}_i$ $(i=0,1,\ldots N)$ sono le coordinate inerziali degli N pianeti, μ_i le loro masse, $\mathbf{R}_0$ ed μ_0 sono il vettore posizione e la massa del Sole; $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j$ sono i vettori posizione mutua. Per il Sole ovviamente vale un'equazione analoga

$$\frac{d^2\mathbf{R}_0}{dt^2} = G\sum_{j=1}^{N}\mu_j\frac{\mathbf{r}_{j0}}{r_{j0}^3}\,, \tag{2}$$

Siccome tuttavia le osservazioni astronomiche forniscono quasi sempre misure di posizione relativa, è più comune assumere come origine delle coordinate la posizione di uno dei corpi (comunemente il Sole μ_0) e scrivere le equazioni del moto per i vettori posizione relativa $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{i0} = \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_0$. Sottraendo membro a membro l'espressione (2) dalla (1) si ottengono le equazioni del moto in *coordinate eliocentriche*

$$\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = -G(\mu_0+\mu_i)\frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} + G\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\mu_j\left(\frac{\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i}{r_{ij}^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3}\right)\,. \tag{3}$$

Le differenze rispetto all'equazione (1) sono due: 1) il termine centrale contiene la somma delle masse del Sole e del pianeta $\mu_0+\mu_i$; 2) compare un nuovo termine perturbativo $-G\mu_j\mathbf{r}_j/r_j^3$ (detto *perturbazione indiretta*) che rappresenta l'effetto dell'attrazione degli altri pianeti sul Sole (in altre parole è una *forza apparente* introdotta dalla non-inerzialità del sistema di riferimento).

È noto che la forza kepleriana è conservativa e può essere espressa come il gradiente di un potenziale; ciò è vero anche per il secondo membro dell'equazione (3), che può essere scritta come

$$\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \nabla_i\left(U_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}F_{ij}\right)\,, \tag{4}$$

dove ∇_i è il gradiente rispetto ad $\mathbf{r}_i$. Il potenziale è stato così decomposto in un *termine centrale* o *kepleriano*

$$U_i = \frac{G(\mu_0 + \mu_i)}{r_i} \tag{5}$$

più una somma di termini perturbativi

$$F_{ij} = G\mu_j \left(\frac{1}{r_{ij}} - \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}{r_j^3} \right) ; \tag{6}$$

F_{ij} rappresenta l'effetto perturbativo del pianeta μ_j sul pianeta μ_i, e si chiama *funzione perturbatrice*. Anche per la funzione perturbatrice si può notare che, accanto al termine diretto (proporzionale al reciproco della distanza mutua), compare un termine indiretto.

2. Le equazioni di Lagrange

La soluzione del problema dei due corpi fornisce i vettori posizione e velocità di un pianeta in funzione di sei elementi orbitali, che indicheremo qui genericamente con c_i ($i = 1, \ldots, 6$):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(c_i) ; \qquad \mathbf{v} = \mathbf{v}(c_i) ; \tag{7}$$

di questi, cinque sono costanti del moto, mentre il sesto (anomalia media o qualche angolo ad essa collegato) aumenta linearmente nel tempo, con una frequenza costante pari al moto medio $n = \sqrt{G(\mu_0 + \mu_i)/a^3}$. In realtà non riusciamo a esprimere analiticamente le funzioni che compaiono nella (7) in forma chiusa in termini di funzioni elementari, perchè la soluzione del problema dei due corpi passa attraverso la soluzione di equazioni trascendenti (come l'equazione di Keplero), che non è esprimibile in forma chiusa. Questo però è un particolare che non ha importanza per quello che segue: ci basta sapere che le funzioni (7) sono definite ed esiste un algoritmo per calcolarle (basato su uno sviluppo in serie o su procedimenti iterativi).

Le equazioni (7) definiscono una corrispondenza biunivoca tra i vettori $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ ed i sei elementi orbitali c_i; possiamo perciò pensare di risolvere le (7) rispetto a c_i ed usare gli elementi orbitali come un nuovo sistema di coordinate generalizzate nello spazio delle fasi. In questo nuovo sistema di coordinate, una particella che è sottoposta ad un potenziale kepleriano (cioè un potenziale del tipo di U_i dell'equazione (5)) ha una dinamica banale: le prime cinque coordinate sono costanti, mentre la sesta aumenta linearmente nel tempo con frequenza nota; se, al contrario, la particella è sottoposta anche a forze di altro tipo (ad esempio, se aggiungiamo al potenziale kepleriano anche le perturbazioni mutue tra i pianeti

F_{ij}), questo non è più vero. Comunque, possiamo continuare ad usare gli elementi orbitali come coordinate generalizzate, ed anzi esprimere le equazioni del moto in queste nuove coordinate; questa forma delle equazioni del moto è nota come *equazioni di Lagrange*. La derivazione delle equazioni di Lagrange dalle equazioni del moto espresse in coordinate cartesiane richiede un procedimento di calcolo abbastanza lungo (che del resto si può trovare in ogni trattato di meccanica celeste); qui di seguito riporteremo solo i risultati.

Come è noto, gli elementi kepleriani possono essere definiti in parecchi modi diversi; ovviamente la forma delle equazioni di Lagrange è diversa a seconda del tipo di elementi orbitali che si usano. Una scelta molto comune è la seguente:

$a =$ semiasse maggiore;
$e =$ eccentricità;
$I =$ inclinazione dell'orbita rispetto al piano (x, y) del sistema di riferimento inerziale adottato;
$\Omega =$ longitudine del nodo ascendente (angolo tra l'asse x e la direzione del nodo ascendente del piano orbitale sul piano (x, y), contato in senso antiorario);
$\omega =$ argomento del perielio (angolo tra il nodo ascendente e la direzione del perielio, contato sul piano orbitale in senso antiorario);
$M =$ anomalia media;

una scelta un poco diversa è invece:

$a =$ semiasse maggiore;
$e =$ eccentricità;
$I =$ inclinazione;
$\Omega =$ longitudine del nodo ascendente;
$\varpi = \Omega + \omega =$ longitudine del perielio;
$\lambda = M + \varpi =$ longitudine media.

Le equazioni di Lagrange per questo insieme di elementi kepleriani hanno la forma:

$$
\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na}\frac{\partial F}{\partial \lambda} \\
\frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\frac{\partial F}{\partial \lambda} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial F}{\partial \varpi} \\
\frac{dI}{dt} &= -\frac{\tan(I/2)}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}+\frac{\partial F}{\partial \varpi}\right) - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin I}\frac{\partial F}{\partial \Omega} \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin I}\frac{\partial F}{\partial I} \\
\frac{d\varpi}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial F}{\partial e} + \frac{\tan(I/2)}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial F}{\partial I}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

dove $n = \sqrt{G(\mu_0+\mu_i)/a^3}$ è il moto medio del pianeta (abbiamo trascurato l'equazione relativa alla longitudine media perchè non verrà utilizzata nel seguito).

Gli elementi orbitali così definiti non sono però adatti al caso in cui le eccentricità ed inclinazioni orbitali sono piccole (che è proprio il caso del nostro Sistema Solare); infatti le longitudini del nodo Ω e del perielio ϖ risultano indefinite quando $I = 0$ ed $e = 0$. Questa singolarità è del tutto apparente e deriva semplicemente dal fatto che stiamo usando coordinate di tipo "polare"; l'inconveniente può essere risolto adottando invece coordinate di tipo "cartesiano", ad esempio usando

$$\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} h &= e\sin\varpi \\ k &= e\cos\varpi \end{aligned}\right\} \quad \text{al posto di} \quad e,\varpi \\ &\left.\begin{aligned} P &= \sin I\sin\Omega \\ Q &= \sin I\cos\Omega \end{aligned}\right\} \quad \text{al posto di} \quad I,\Omega\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Usando questi elementi orbitali, le equazioni di Lagrange prendono la forma

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} =& \frac{2}{na}\frac{\partial F}{\partial\lambda} \\
\frac{dh}{dt} =& \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2}\frac{\partial F}{\partial k} + \frac{k\cos I}{na^2\sqrt{1-e^2}(1+\cos I)}\left[P\frac{\partial F}{\partial P} + Q\frac{\partial F}{\partial Q}\right] + \\
& - \frac{h\sqrt{1-e^2}}{na^2\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)}\frac{\partial F}{\partial\lambda} \\
\frac{dk}{dt} =& -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2}\frac{\partial F}{\partial h} + \frac{h\cos I}{na^2\sqrt{1-e^2}(1+\cos I)}\left[P\frac{\partial F}{\partial P} + Q\frac{\partial F}{\partial Q}\right] + \\
& - \frac{k\sqrt{1-e^2}}{na^2(1-\sqrt{1-e^2})}\frac{\partial F}{\partial\lambda} \\
\frac{dP}{dt} =& \frac{\cos I}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial F}{\partial Q} - \frac{P\cos I}{na^2\sqrt{1-e^2}(1+\cos I)}\left[k\frac{\partial F}{\partial h} - h\frac{\partial F}{\partial k} + \frac{\partial F}{\partial\lambda}\right] \\
\frac{dQ}{dt} =& -\frac{\cos I}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial F}{\partial P} - \frac{Q\cos I}{na^2\sqrt{1-e^2}(1+\cos I)}\left[k\frac{\partial F}{\partial h} - h\frac{\partial F}{\partial k} + \frac{\partial F}{\partial\lambda}\right]
\end{aligned} \tag{10}$$

Una caratteristica delle equazioni di Lagrange è che le derivate degli elementi orbitali (fatta eccezione per la longitudine media) dipendono solamente dalla parte perturbativa F del potenziale; ciò torna particolarmente utile quando la perturbazione F è piccola rispetto alla parte principale del potenziale U, in quanto le equazioni si prestano naturalmente ad un procedimento risolutivo per approssimazioni successive. Questo è il caso dei pianeti maggiori del nostro Sistema Solare, le cui le masse sono molto più piccole di quella del Sole (il pianeta più grande, Giove, ha una massa pari a circa un millesimo di quella solare). Inoltre, poiché le orbite dei pianeti hanno moderata eccentricità e semiassi maggiori ben distanziati, le distanze mutue tra i pianeti non diventano mai troppo piccole (non si verificano mai *incontri ravvicinati*), ma sono dello stesso ordine di grandezza della loro distanza dal Sole. Questi due fatti hanno come conseguenza che il termine centrale del potenziale è sempre preponderante rispetto alla perturbazione F.

Per poter utilizzare le equazioni di Lagrange è però necessario calcolare le derivate della funzione perturbatrice F rispetto agli elementi orbitali; bisogna perciò eseguire esplicitamente il cambiamento di variabili indicato nell'equazione (7). Questa è la parte più pesante di tutto il procedimento di calcolo, e prende il nome di *sviluppo della funzione perturbatrice*.

3. Lo sviluppo della funzione perturbatrice

Come abbiamo già notato, il cambiamento di variabili (7) non è esprimibile in forma chiusa: cerchiamo perciò di ottenere lo sviluppo della funzione perturbatrice F nella forma di uno sviluppo in serie. Per semplificare la notazione, consideriamo la perturbazione F di un pianeta di massa μ e posizione $\mathbf{r}$ su un pianeta di massa μ' e posizione $\mathbf{r}'$ e riscriviamo la (6) nella forma

$$F = G\mu \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) , \tag{11}$$

dove $\Delta = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ è la distanza tra i due corpi; indichiamo anche con $(a, e, I, \Omega, \varpi, \lambda)$ ed $(a', e', I', \Omega', \varpi', \lambda')$ rispettivamente gli elementi orbitali dei due pianeti.

Notiamo che tre dei sei elementi orbitali (e precisamente Ω, ϖ e λ) sono angoli: la funzione perturbatrice è cioè periodica con periodo 2π in questi elementi. L'inclinazione I non è un angolo in questo senso, in quanto ha significato fisico solamente nell'intervallo $[0, \pi]$. La funzione perturbatrice F deve perciò potersi esprimere come una serie di Fourier multipla nei sei angoli Ω, ϖ, λ, Ω', ϖ' e λ', cioè come una somma di funzioni trigonometriche di tutte le possibili combinazioni lineari a coefficienti interi di tali angoli

$$F = \sum_{jj'll'mm'} F_{jj'll'mm'} \cos(j\lambda + j'\lambda' + l\varpi + l'\varpi' + m\Omega + m'\Omega') , \tag{12}$$

dove $(jj'll'mm')$ è un *multi-indice* (un vettore di dimensione 6 a componenti intere) e la sommatoria è estesa a tutti i possibili valori del multi-indice (il motivo per cui nella (12) non compaiono termini con i seni degli angoli sarà spiegato nel prossimo paragrafo). I coefficienti dello sviluppo di Fourier (12) rimangono funzioni dei sei rimanenti elementi orbitali, cioè

$$F_{jj'll'mm'} = F_{jj'll'mm'}(a, e, I, a', e', I') . \tag{13}$$

Nel caso dei pianeti principali del Sistema Solare, le eccentricità e le inclinazioni sono generalmente piccole (dell'ordine di pochi centesimi, se si escludono Mercurio e Plutone). Risulta quindi naturale cercare di esprimere i coefficienti (13) nella forma di uno sviluppo in serie di Taylor rispetto alle quattro variabili e, e', $\sin I$, $\sin I'$. La forma che cerchiamo per la funzione perturbatrice è perciò quella di uno sviluppo misto in serie di Fourier rispetto agli angoli Ω, ϖ, λ, Ω', ϖ' e λ' e in serie di Taylor rispetto alle variabili e, e', $\sin I$ e $\sin I'$ (uno sviluppo di questo genere viene chiamato *serie di Poisson*); è chiaro che i coefficienti di tale serie rimangono ancora funzioni dei semiassi maggiori a ed a'.

4. Le regole di D'Alembert

Prima di passare ad un calcolo esplicito dei termini dello sviluppo della funzione perturbatrice che sono necessari per la teoria secolare di Lagrange è utile ricavare alcune proprietà generali di tale sviluppo, che derivano essenzialmente dalle proprietà di simmetria e di invarianza dell'espressione (11) (che contiene solamente moduli e prodotti scalari di vettori) rispetto a trasformazioni di coordinate.

Proprietà 1. *Lo sviluppo della funzione perturbatrice non contiene termini nei seni degli angoli.* Richiamiamo l'espressione delle componenti del vettore posizione $\mathbf{r}$ in funzione degli angoli Ω, ω (argomento del perielio) ed f (anomalia vera):

$$\begin{aligned} x &= r\big[\cos\Omega\cos(\omega+f) - \sin\Omega\sin(\omega+f)\cos I\big] \\ y &= r\big[\sin\Omega\cos(\omega+f) + \cos\Omega\sin(\omega+f)\cos I\big] \\ z &= r\sin(\omega+f)\sin I\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Dalla (14) risulta che un cambiamento di segno degli angoli Ω, ϖ, λ, Ω', ϖ' e λ' (e perciò anche di ω, f, ω' ed f') lascia invariate le componenti x dei vettori $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{r}'$, mentre cambia segno alle componenti y e z. Una tale trasformazione lascia perciò invariati i prodotti scalari e i moduli dei vettori, e quindi non cambia la funzione perturbatrice. Ne consegue che lo sviluppo (12) non può contenere termini con i seni degli angoli.

Proprietà 2. *La serie* (12) *contiene solo termini per i quali la somma dei sei indici* $(jj'll'mm')$ *è uguale a zero.* Questa proprietà deriva dal fatto che la funzione perturbatrice è invariante rispetto ad un cambiamento di sistema di riferimento. In particolare, se gli assi x e y sono ruotati di un angolo arbitrario ϕ attorno all'asse z, tutti gli angoli Ω, ϖ, λ, Ω', ϖ' e λ' risultano aumentati di ϕ; ne risulta che la combinazione lineare

$$j\lambda + j'\lambda' + l\varpi + l'\varpi' + m\Omega + m'\Omega'$$

si trasforma in

$$j\lambda + j'\lambda' + l\varpi + l'\varpi' + m\Omega + m'\Omega' + (j + j' + l + l' + m + m')\phi\,.$$

Siccome una tale trasformazione deve lasciare invariata la funzione perturbatrice, ne consegue che i coefficienti $F_{jj'll'mm'}$ possono essere diversi da zero solo per quei termini per cui

$$j + j' + l + l' + m + m' = 0\,. \tag{15}$$

Proprietà 3. *La serie* (12) *contiene solo termini per i quali* $m + m'$ *è un numero pari (positivo, negativo o zero).* Se l'orbita dei due pianeti viene scambiata con la propria immagine riflessa sul piano (x, y), le longitudini dei nodi Ω ed Ω' aumentano di π (il nodo ascendente viene scambiato con il nodo discendente), mentre tutti gli altri elementi orbitali rimangono invariati.[(1)] Perciò la combinazione lineare

$$j\lambda + j'\lambda' + l\varpi + l'\varpi' + m\Omega + m'\Omega'$$

si trasforma in

$$j\lambda + j'\lambda' + l\varpi + l'\varpi' + m\Omega + m'\Omega' + (m + m')\pi\,;$$

siccome tale trasformazione deve lasciare invariata la funzione perturbatrice, ne consegue che i coefficienti $F_{jj'll'mm'}$ possono essere diversi da zero solo per quei termini per cui $m + m'$ è un numero pari.

Proprietà 4. *Il termine di grado minimo nello sviluppo in serie di Taylor del coefficiente* $F_{jj'll'mm'}$ *è uguale al prodotto di* $e^{|l|}e'^{|l'|}\sin^{|m|}I\sin^{|m'|}I'$ *per una funzione dei soli semiassi maggiori* a, a', *cioè ha grado complessivo* $|l| + |l'| + |m| + |m'|$. *I termini di grado superiore hanno esponenti aumentati di multipli interi di 2 rispetto al termine di grado minimo: la forma generale della serie è quindi descritta dall'espressione* (21). Per dimostrare questa proprietà occorre pensare ad uno sviluppo in serie di Poisson della funzione perturbatrice rispetto alle variabili a, h, k, P, Q, λ; in questo caso solo λ è un angolo, quindi F può essere sviluppata in una serie di Fourier del tipo

$$F = \sum_{jj'} F^*_{jj'} \cos(j\lambda + j'\lambda')\,, \tag{16}$$

in cui la sommatoria è estesa sul multi-indice (jj') e in cui i coefficienti $F^*_{jj'}$ possono essere sviluppati in serie di Taylor rispetto alle variabili h, k, P e Q.

[(1)] l'anomalia media M non cambia, l'argomento del perielio ω cambia di π a causa dello scambio del nodo ascendente con quello discendente: ne consegue che la longitudine del perielio $\varpi = \Omega + \omega$ rimane invariata, e quindi rimane invariata anche la longitudine media $\lambda = \varpi + M$.

Ovviamente gli sviluppi (12) e (16) sono equivalenti: in particolare, il coefficiente $F^*_{jj'}$ può essere espresso come una opportuna combinazione lineare dei coefficienti $F_{jj'll'mm'}$ al variare del multi-indice $(ll'mm')$. Per capire come avviene questa trasformazione, consideriamo un generico termine dello sviluppo di $F^*_{jj'}$; questo sarà della forma

$$C(a,a')h^{n_1}k^{n_2}P^{n_3}Q^{n_4}h'^{n'_1}k'^{n'_2}P'^{n'_3}Q'^{n'_4}\,, \tag{17}$$

dove $C(a,a')$ è una generica funzione dei soli semiassi maggiori. Dalla definizione di h e k segue

$$h^{n_1}k^{n_2} = e^{n_1+n_2}\sin^{n_1}\varpi\cos^{n_2}\varpi\,. \tag{18}$$

Applicando le formule di prostaferesi sviluppiamo ora le potenze delle funzioni trigonometriche che compaiono nella (18) come combinazioni lineari di funzioni trigonometriche dei multipli degli angoli; è noto che, ad esempio, $\cos^n\alpha$ può essere espresso come

$$\cos^n\alpha = \sum_{p=0}^{[n/2]}\sigma_{np}\cos(n-2p)\alpha\,, \tag{19}$$

dove $[n/2]$ indica la parte intera di $n/2$. Non ci interessa qui l'espressione esplicita dei coefficienti σ_{np}, ma solo il fatto che, nella (19), compaiono solo i multipli interi $i\alpha$ dell'angolo α fino ad un valore massimo di $i=n$, e che tutti i valori di i hanno la stessa parità di n; ad esempio

$$\begin{aligned}\cos^4\alpha &= \frac{1}{8}\cos 4\alpha + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{3}{8}\,;\\ \cos^5\alpha &= \frac{1}{16}\cos 5\alpha + \frac{5}{16}\cos 3\alpha + \frac{5}{8}\cos\alpha\,;\end{aligned}$$

espressioni analoghe valgono anche per $\sin^n\alpha$. Applicando ancora le formule di prostaferesi, la (18) può dunque essere espressa come

$$h^{n_1}k^{n_2} = e^{n_1+n_2}\sum_{p=0}^{[(n_1+n_2)/2]} B_{n_1n_2p}\left\{\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}(n_1+n_2-2p)\varpi\,, \tag{20}$$

dove $B_{n_1n_2p}$ sono opportuni coefficienti; la (20) può quindi dare un contributo solamente ai coefficienti $F_{jj'll'mm'}$ per i quali $|l| = n_1+n_2-2p$; ciò significa che lo sviluppo in serie di Taylor di $F_{jj'll'mm'}$ contiene solo le potenze di grado $|l|+2r$ $(r=0,1,\ldots)$ di e. Un ragionamento del tutto analogo vale anche per le altre coppie di variabili (P,Q), (h',k') e (P',Q'), per cui possiamo concludere che lo sviluppo di $F_{jj'll'mm'}$ ha l'espressione generale

$$F_{jj'll'mm'} = \sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\sum_{r_3=0}^{\infty}\sum_{r_4=0}^{\infty} c_{r_1r_2r_3r_4}e^{|l|+2r_1}e'^{|l'|+2r_2}\sin^{|m|+2r_3}I\sin^{|m'|+2r_4}I'\,, \tag{21}$$

dove i coefficienti $c_{r_1r_2r_3r_4}$ sono funzioni dei soli semiassi maggiori.

5. Le equazioni secolari

La teoria lineare delle perturbazioni secolari di Lagrange deriva dalle particolari approssimazioni con cui viene risolto il sistema di equazioni (10). La prima approssimazione riguarda il grado massimo totale in h, k, P e Q a cui viene troncato lo sviluppo del secondo membro delle equazioni del moto, che viene scelto uguale ad 1. Questa approssimazione ha ovviamente lo scopo di ottenere equazioni differenziali lineari, e quindi sicuramente risolubili. Il fatto che le quattro variabili h, k, P e Q siano trattate nello stesso modo (tutti i termini quadratici h^2, k^2, ..., P^2, Q^2 sono scartati comunque) è giustificato dall'osservazione che, nel caso dei pianeti principali del Sistema Solare, queste sono tutte dello stesso ordine di grandezza; un'approssimazione del genere non sarebbe adeguata nella trattazione di orbite per le quali l'ordine di grandezza delle eccentricità e delle inclinazioni è diverso.

La seconda approssimazione consiste nel mediare il secondo membro delle equazioni rispetto alle longitudini medie di tutti i pianeti: ciò risponde al criterio di rinunciare a studiare le variazioni degli elementi orbitali che avvengono su tempi brevi (dell'ordine dei periodi di rivoluzione dei pianeti) ed interessarsi solamente all'evoluzione su scale temporali molto più lunghe (da cui il nome di *equazioni secolari*). Per lo stesso motivo si rinuncia a studiare l'evoluzione delle longitudini medie (cioè della variabile che descrive in quale punto dell'orbita il pianeta si trova ad un dato istante) e si usano solamente le equazioni del moto relative agli elementi che descrivono la forma e le dimensioni dell'orbita (e cioè a, h, k, P e Q).

La giustificazione del processo di media è strettamente connessa con le proprietà particolari della soluzione del problema dei due corpi e con l'aspetto perturbativo del metodo, cioè con il fatto che nel secondo membro delle equazioni di Lagrange compare solo la funzione perturbatrice, che è più piccola del termine kepleriano del potenziale di un fattore $\varepsilon \ll 1$ (nel Sistema Solare ε è dell'ordine del rapporto tra la massa di Giove e quella del Sole, cioè $\sim 10^{-3}$): la soluzione delle equazioni del moto sarà dunque in qualche modo vicina alla soluzione kepleriana, in cui tutti i pianeti percorrono orbite ellittiche. Nel sistema imperturbato (kepleriano) le variabili legate alle variabili azione (e cioè a, e e $\sin I$) sono costanti del moto, mentre le variabili angolo (ϖ, Ω e λ) circolano con frequenza costante; è una particolare degenerazione del potenziale $1/r$ (connessa con la proprietà delle orbite kepleriane di chiudersi su se stesse) il fatto che la frequenza di circolazione delle longitudini del nodo e del perielio sia esattamente zero, ossia che nel problema dei due corpi anche ϖ ed Ω siano costanti. Se ora aggiungiamo una piccola perturbazione di ordine ε, ci aspettiamo che le variabili angolo continuino a circolare con frequenza leggermente cambiata; in particolare i periodi orbitali cambieranno di poco, mentre le longitudini del nodo e del perielio cominceranno a circolare con frequenze molto più piccole (dell'ordine di ε volte) dei periodi orbitali.

Nello sviluppo (12) della funzione perturbatrice possiamo quindi fare una distinzione tra termini a corto periodo (quelli che contengono le longitudini medie λ e λ') e termini a lungo periodo o *secolari* (quelli che non le contengono, cioè con $j = j' = 0$). Le equazioni secolari di Lagrange si ottengono appunto trascurando tutti i termini a corto periodo della funzione perturbatrice: tale procedura è equivalente ad applicare ai secondi membri delle equazioni del moto (che indichiamo genericamente con $d\alpha_i/dt = \Phi(\alpha_j)$, dove α_i è un generico elemento orbitale e $\Phi(\alpha_j)$ una funzione che dipende da tutti gli elementi orbitali) un operatore di media, definito da

$$\langle \Phi(\alpha_j) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{2\pi} d\lambda' \, \Phi(\alpha_j) \,. \tag{22}$$

Facendo questo ci aspettiamo che la derivata temporale del valore medio di α_i sia uguale al valore medio del secondo membro, cioè che

$$\frac{d \langle \alpha_i \rangle}{dt} = \langle \Phi(\alpha_j) \rangle \ .$$

Rigorosamente, ciò è vero solo se la media è eseguita *sull'orbita perturbata*, cioè sulla soluzione esatta delle equazioni del moto complete. La procedura di media indicata dalla (22) corrisponde invece ad eseguire la media sull'orbita imperturbata (kepleriana), perché presuppone che le longitudini medie aumentino linearmente nel tempo (così da poter sostituire le medie temporali con medie sulle longitudini) e che tutti gli altri elementi orbitali siano costanti. Ciò introduce un errore relativo dell'ordine di ε nella stima di $\langle \Phi \rangle$ e quindi un errore dell'ordine di ε^2 nella soluzione, dato che Φ stesso è dell'ordine di ε. In altre parole, la procedura di media indicata dalla (22) è corretta *fino al primo ordine* nel parametro perturbativo ε.

Una prima immediata conseguenza delle approssimazioni ora descritte è che l'equazione secolare per i semiassi maggiori diventa semplicemente

$$\frac{d \langle a \rangle}{dt} = \frac{2}{na} \left\langle \frac{\partial F}{\partial \lambda} \right\rangle = 0 \,;$$

infatti la derivata di F rispetto a λ contiene ovviamente solo termini a corto periodo

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = - \sum_{\substack{jj'll'mm' \\ j \neq 0}} j F_{jj'll'mm'} \sin(j\lambda + j'\lambda' + l\varpi + l'\varpi' + m\Omega + m'\Omega') \,,$$

per cui la sua media (nel senso della (22)) è zero. In altre parole *i semiassi maggiori sono costanti del moto* nelle equazioni secolari di Lagrange.

Un altro risultato importante è che *la parte indiretta della funzione perturbatrice non contiene termini secolari.* Per dimostrare questa proprietà riscriviamo la parte indiretta della (11) nella forma

$$-G\mu \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r^3} = -G\mu \frac{r' \cos S}{r^2} \,,$$

dove S è l'angolo compreso tra i vettori $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{r}'$, ed eseguiamo la media

$$\left\langle \frac{r' \cos S}{r^2} \right\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} r' \, d\lambda' \int_0^{2\pi} \frac{\cos S}{r^2} \, d\lambda \,. \tag{23}$$

Operiamo ora una sostituzione di variabile nel secondo integrale della (23), introducendo la *longitudine vera* θ al posto della longitudine media λ; per la legge delle aree (seconda legge di Keplero)

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = g \,,$$

dove g è una costante (= modulo del vettore momento angolare), per cui

$$d\lambda = n \, dt = \frac{n}{g} \, r^2 \, d\theta$$

e l'integrale diventa

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos S}{r^2} \, d\lambda = \frac{n}{g} \int_0^{2\pi} \cos S \, d\theta = \frac{n}{g} \int_0^{2\pi} \cos(\theta - \theta') \, d\theta = 0 \,, \tag{24}$$

dove θ' è la longitudine della proiezione del vettore $\mathbf{r}'$ sul piano orbitale di $\mathbf{r}$; a causa della (24) l'espressione (23) è quindi uguale a zero.

Utilizzando le proprietà della funzione perturbatrice descritte nel paragrafo precedente cerchiamo ora di ricavare il grado delle derivate parziali di $\langle F \rangle$ che compaiono nelle equazioni (10), in modo da poter operare l'approssimazione lineare in modo corretto. Innanzitutto notiamo che non è necessario spingere lo sviluppo di F oltre il grado 2 (dato che nelle (10) compaiono solo le derivate parziali prime); ciò significa, in base all'equazione (21), che dobbiamo considerare solo i termini per cui

$$|l| + |l'| + |m| + |m'| \leq 2 \,; \tag{25}$$

inoltre per i termini secolari la (15) si riduce a

$$l + l' + m + m' = 0 \,. \tag{26}$$

Queste due equazioni insieme comportano che $|l| + |l'| + |m| + |m'|$ possa assumere solamente i valori 0 o 2 ($|l| + |l'| + |m| + |m'| = 1$ implicherebbe che solo uno tra gli indici l, l', m, m' sia uguale a ± 1 e tutti gli altri nulli, il che sarebbe incompatibile con la (26)). Perciò la parte secolare della funzione perturbatrice può contenere, fino al grado 2, solo gli argomenti 0, $\varpi - \varpi'$ e $\Omega - \Omega'$ (argomenti "misti" del tipo di $\varpi - \Omega$ sono proibiti dalla Proprietà 3 del paragrafo precedente); in definitiva, tenendo ancora conto della (21), $\langle F \rangle$ è composta solamente dai seguenti termini

$$1,\ e^2,\ e'^2,\ \sin^2 I,\ \sin^2 I',\ ee'\cos(\varpi - \varpi'),\ \sin I \sin I' \cos(\Omega - \Omega')$$

(fino al grado 2 ed a meno di coefficienti moltiplicativi che sono funzioni solamente dei semiassi maggiori) ossia, introducendo le variabili non singolari (9),

$$1,\ (h^2 + k^2),\ (h'^2 + k'^2),\ (P^2 + Q^2),\ (P'^2 + Q'^2),\ (hh' + kk'),\ (PP' + QQ').$$

Ne consegue che le derivate parziali di $\langle F \rangle$ rispetto ad h, k, P e Q che compaiono nelle (10) sono di primo grado in queste variabili; l'approssimazione al primo grado delle (10) può dunque scriversi

$$\begin{aligned}
&\frac{da}{dt} = 0\,, \\
&\frac{dh}{dt} = \frac{1}{na^2}\frac{\partial F}{\partial k}\,, \qquad \frac{dk}{dt} = -\frac{1}{na^2}\frac{\partial F}{\partial h} \\
&\frac{dP}{dt} = \frac{1}{na^2}\frac{\partial F}{\partial Q}\,, \qquad \frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{na^2}\frac{\partial F}{\partial P}\,,
\end{aligned} \tag{27}$$

dove per brevità abbiamo sottinteso il segno di media $\langle\cdot\rangle$. Queste sono dunque le equazioni secolari di Lagrange che dobbiamo risolvere.

6. I coefficienti di Laplace

Procediamo ora con lo sviluppo esplicito della funzione perturbatrice; come abbiamo visto nel paragrafo precedente, ci serve solo la parte secolare del termine diretto della (11), cioè (a meno di una costante moltiplicativa) $\langle a'/\Delta \rangle$, dove abbiamo indicato con a' il semiasse maggiore del *pianeta più esterno* (supponiamo cioè $a' > a$). La distanza istantanea tra i due pianeti Δ ha la seguente espressione

$$\Delta^2 = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2 = r'^2 - 2rr'\cos S + r^2 = r'^2 \left[1 - 2\left(\frac{r}{r'}\right)\cos S + \left(\frac{r}{r'}\right)^2\right]\,,$$

dove S è l'angolo compreso tra i due vettori posizione $\mathbf{r}'$ ed $\mathbf{r}$. Si ha dunque

$$\frac{a'}{\Delta} = \frac{a'}{r'}\left[1 - 2\xi\cos S + \xi^2\right]^{-1/2}\,, \tag{28}$$

dove $\xi = r/r'$ è il rapporto tra le distanze istantanee dei due pianeti dal Sole. L'espressione di $\cos S$ risulta notevolmente semplificata se si sceglie opportunamente il sistema di riferimento: pertanto adotteremo come piano (x, y) il piano orbitale del pianeta μ, con l'asse x diretto lungo la linea del nodo ascendente dell'orbita del pianeta μ' sul piano (x, y). In tale riferimento le coordinate istantanee dei due pianeti sono date da

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r\cos(\Pi + f) \\ r\sin(\Pi + f) \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \mathbf{r}' = \begin{pmatrix} r'\cos(\Pi' + f') \\ r'\sin(\Pi' + f')\cos\beta \\ r'\sin(\Pi' + f')\sin\beta \end{pmatrix} ,$$

dove Π, Π' sono gli argomenti del perielio dei due pianeti misurati dal nodo mutuo, f, f' le loro anomalie vere e β l'inclinazione mutua di μ' su μ. Risulta quindi

$$\begin{aligned} \cos S = \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{rr'} &= \cos(\Pi + f)\cos(\Pi' + f') + \sin(\Pi + f)\sin(\Pi' + f')\cos\beta \\ &= \cos(\Pi - \Pi' + f - f') - 2\sin(\Pi + f)\sin(\Pi' + f')\sin^2\frac{\beta}{2} \, . \end{aligned} \tag{29}$$

Separiamo ora nella (28) la parte dipendente dalla inclinazione mutua da quella che non ne dipende, sviluppando la (28) in serie di Taylor rispetto alla variabile $\cos S$ nell'intorno di $\cos S = \cos(\Pi - \Pi' + f - f')$

$$\begin{aligned} \frac{a'}{\Delta} &= \frac{a'}{r'}\left[1 - 2\xi\cos(\Pi - \Pi' + f - f') + \xi^2\right]^{-1/2} + \\ &\quad + \frac{a'}{r'}\frac{\partial}{\partial\cos S}\left[1 - 2\xi\cos S + \xi^2\right]^{-1/2}\Big|_{\cos S = \cos(\Pi - \Pi' + f - f')} \times \\ &\quad \times (-2\sin(\Pi + f)\sin(\Pi' + f')\sin^2\frac{\beta}{2}) + 0(\sin^4\frac{\beta}{2}) \\ &= \frac{a'}{r'}\left[1 - 2\xi\cos(\Pi - \Pi' + f - f') + \xi^2\right]^{-1/2} + \\ &\quad - 2\frac{a'}{r'}\left[1 - 2\xi\cos(\Pi - \Pi' + f - f') + \xi^2\right]^{-3/2} \times \\ &\quad \times \xi\sin(\Pi + f)\sin(\Pi' + f')\sin^2\frac{\beta}{2} + 0(\sin^4\frac{\beta}{2}) ; \end{aligned} \tag{30}$$

l'approssimazione fino al secondo grado in $\sin(\beta/2)$ è sufficiente in quanto β è dello stesso ordine di grandezza delle inclinazioni I, I'. Nella (30), le espressioni del tipo $\left[1 - 2\alpha\cos\phi + \alpha^2\right]^{-s}$ possono essere sviluppate in serie di Fourier rispetto all'angolo ϕ; indicando con i simboli $b_s^{(j)}(\alpha)$ gli integrali

$$b_s^{(j)}(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[1 - 2\alpha\cos\phi + \alpha^2\right]^{-s}\cos j\phi \, d\phi \tag{31}$$

(funzioni del parametro α) otteniamo

$$\left[1-2\alpha\cos\phi+\alpha^2\right]^{-s}=\frac{1}{2}b_s^{(0)}(\alpha)+\sum_{j=1}^{\infty}b_s^{(j)}(\alpha)\cos j\phi\,. \tag{32}$$

Gli integrali (31) sono conosciuti come *coefficienti di Laplace*: essi non possono essere espressi in forma chiusa in termini di funzioni elementari; il loro valore in ogni punto può comunque essere ottenuto con metodi numerici o con sviluppi in serie. Bisogna perciò fare in modo che essi compaiano nelle equazioni avendo come argomento solamente costanti: in questo modo essi possono venir trattati come coefficienti costanti e non ostacolano il procedimento di media. Ciò si può ottenere ricorrendo ad uno sviluppo in serie di Taylor; esprimiamo ξ in funzione delle *anomalie eccentriche* E ed E' dei due pianeti e del rapporto $\alpha=a/a'$ tra i loro semiassi maggiori

$$\xi=\frac{r}{r'}=\frac{a(1-e\cos E)}{a'(1-e'\cos E')}=\alpha\,\frac{1-e\cos E}{1-e'\cos E'}=\alpha\,(1+\delta)\,; \tag{33}$$

notiamo che, per la scelta di notazione fatta, $\alpha<1$, mentre δ è dello stesso ordine di grandezza delle eccentricità

$$\delta=\frac{1-e\cos E}{1-e'\cos E'}-1=0(e,e')\,. \tag{34}$$

Per i coefficienti $b_{1/2}^{(j)}(\xi)$ che compaiono nel primo termine a secondo membro della (30) è dunque sufficiente uno sviluppo di Taylor fino al secondo grado in δ nell'intorno di $\delta=0$

$$\begin{aligned} b_{1/2}^{(j)}(\xi) &= b_{1/2}^{(j)}(\alpha)+\frac{db_{1/2}^{(j)}}{d\delta}\delta+\frac{1}{2}\frac{d^2b_{1/2}^{(j)}}{d\delta^2}\delta^2+0(e^3,e'^3)\\ &= b_{1/2}^{(j)}(\alpha)+\alpha\frac{db_{1/2}^{(j)}}{d\alpha}\delta+\frac{1}{2}\alpha^2\frac{d^2b_{1/2}^{(j)}}{d\alpha^2}\delta^2+0(e^3,e'^3)\,, \end{aligned} \tag{35}$$

dove tutte le derivate che compaiono sono calcolate nel punto $\xi=\alpha$. In questo modo abbiamo trasportato la parte che dipende dalle longitudini (δ) al di fuori dei coefficienti di Laplace, mentre questi (assieme alle loro derivate fino all'ordine 2) sono da calcolare solamente in corrispondenza di α.[2] Il secondo termine (proporzionale a $\sin^2(\beta/2)$) è già di secondo grado; è quindi sufficiente porre

$$b_{3/2}^{(j)}(\xi)=b_{3/2}^{(j)}(\alpha)+0(e,e')\,; \tag{36}$$

[2] le derivate dei coefficienti di Laplace possono essere calcolate derivando le (31) sotto il segno di integrale e calcolando numericamente gli integrali risultanti.

per lo stesso motivo, in questo termine si può approssimare ξ con α ed a'/r' con 1. Abbiamo dunque ottenuto per a'/Δ l'espressione

$$\begin{aligned}\frac{a'}{\Delta} = \frac{1}{1-e'\cos E'} &\left[\frac{1}{2}b^{(0)}_{1/2}(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} b^{(j)}_{1/2}(\xi)\cos j(\Pi - \Pi' + f - f')\right] + \\ &- 2\alpha\left[\frac{1}{2}b^{(0)}_{3/2}(\alpha) + \sum_{j=1}^{\infty} b^{(j)}_{3/2}(\alpha)\cos j(\Pi - \Pi' + f - f')\right] \times \\ &\times \sin(\Pi + f)\sin(\Pi' + f')\sin^2\frac{\beta}{2} + \ldots\end{aligned} \tag{37}$$

dove i puntini indicano termini di grado superiore al secondo nelle eccentricità ed inclinazioni e le funzioni $b^{(j)}_{1/2}(\xi)$ sono date dalla (35).

7. Lo sviluppo dell'anomalia eccentrica

Per poter eseguire la media (22) occorre esprimere tutte le quantità che compaiono nella (37) (in particolare δ) in funzione dell'anomalia media M piuttosto che dell'anomalia eccentrica E. La relazione tra le due anomalie è data dalla *equazione di Keplero*

$$E = M + e\sin E\,, \tag{38}$$

che però non è risolubile analiticamente; perciò dobbiamo ancora una volta ricorrere ad uno sviluppo in serie di Taylor. A questo scopo notiamo che, in base alla (38), E coincide con M a meno di un errore dell'ordine dell'eccentricità e: $E = M + 0(e)$. Sostituendo questa relazione nel secondo membro della (38) otteniamo perciò una espressione di E che è corretta fino all'ordine e

$$E = M + e\sin M + 0(e^2)\,.$$

Analogamente quest'ultima relazione può essere introdotta nella (38) per ottenere una espressione corretta fino all'ordine e^2

$$E = M + e\sin(M + e\sin M) + 0(e^3)\,,$$

cioè, sviluppando $\sin(M + e\sin M)$ in serie di Taylor fino al primo ordine,

$$\begin{aligned}E &= M + e\sin M + (e\cos M)(e\sin M) + 0(e^3) \\ &= M + e\sin M + \frac{1}{2}e^2\sin 2M + 0(e^3)\,.\end{aligned} \tag{39}$$

Il procedimento potrebbe continuare fino ad un grado arbitrario, ma per i nostri scopi la (39) è sufficiente.

Utilizzando la (39) si possono ottenere gli sviluppi in serie di Taylor di tutte le funzioni dell'anomalia eccentrica che compaiono nella funzione perturbatrice; in particolare risulta

$$\begin{aligned} 1 - e\cos E &= 1 - e\cos M + \frac{1}{2}e^2\left[1 - \cos 2M\right] + 0(e^3)\,, \\ \frac{1}{1 - e'\cos E'} &= 1 + e'\cos M' + e'^2\cos 2M' + 0(e'^3)\,; \end{aligned} \tag{40}$$

moltiplicando termine a termine le (40) si ottiene

$$\begin{aligned} \delta &= e'\cos M' + e'^2\cos 2M' - e\cos M + \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^2\cos 2M + \\ &\qquad - ee'\cos M\cos M' + 0(e^3, e'^3)\,, \\ \delta^2 &= \frac{1}{2}(e^2 + e'^2) + \frac{1}{2}e^2\cos 2M + \frac{1}{2}e'^2\cos 2M' + \\ &\qquad - 2ee'\cos M\cos M' + 0(e^3, e'^3)\,. \end{aligned} \tag{41}$$

Tenendo conto delle (41) possiamo eseguire la media della prima parte della (37)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left\langle \frac{b_{1/2}^{(0)}(\xi)}{1 - e'\cos E'} \right\rangle &= \frac{1}{2}b_{1/2}^{(0)}\left\langle \frac{1}{1 - e'\cos E'} \right\rangle + \frac{1}{2}\alpha\frac{db_{1/2}^{(0)}}{d\alpha}\left\langle \frac{\delta}{1 - e'\cos E'} \right\rangle + \\ &\qquad + \frac{1}{4}\alpha^2\frac{d^2b_{1/2}^{(0)}}{d\alpha^2}\left\langle \frac{\delta^2}{1 - e'\cos E'} \right\rangle + 0(e^3, e'^3) \\ &= \frac{1}{2}b_{1/2}^{(0)} + \frac{1}{4}\left[\alpha\frac{db_{1/2}^{(0)}}{d\alpha} + \frac{1}{2}\alpha^2\frac{d^2b_{1/2}^{(0)}}{d\alpha^2}\right](e^2 + e'^2) + 0(e^3, e'^3) \end{aligned} \tag{42}$$

dove, come al solito, tutti i coefficienti di Laplace che compaiono nel secondo membro delle (42) e le loro derivate si intendono calcolati in α.

8. Lo sviluppo dell'anomalia vera

La parte successiva della (37) (proporzionale a $b_{1/2}^{(j)}$, con $j \geq 1$) contiene le anomalie vere dei due pianeti f ed f'; bisogna dunque ottenere anche lo sviluppo dell'anomalia vera in funzione dell'anomalia media. Come è noto, l'anomalia vera f è legata all'anomalia eccentrica E dalla relazione

$$\tan\frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}\tan\frac{E}{2}\,;$$

da questa si può ottenere lo sviluppo in serie dell'anomalia vera in funzione della anomalia eccentrica

$$f = E + e\sin E + \frac{1}{4}e^2\sin 2E + 0(e^3)\,.$$

Introducendo nella precedente relazione lo sviluppo (39) per E si ottiene

$$f = M + 2e\sin M + \frac{5}{4}e^2\sin 2M + 0(e^3)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \cos f &= \left(1 - \frac{9}{8}e^2\right)\cos M - e + e\cos 2M + \frac{9}{8}e^2\cos 3M + 0(e^3) \\ \sin f &= \left(1 - \frac{7}{8}e^2\right)\sin M + e\sin 2M + \frac{9}{8}e^2\sin 3M + 0(e^3)\,; \end{aligned} \tag{43}$$

più in generale si ha

$$\cos jf = \cos jM + 0(e)\,; \qquad \sin jf = \sin jM + 0(e)\,. \tag{44}$$

Le espressioni (43) sono i "mattoni" con cui costruire gli sviluppi in serie delle quantità

$$\begin{aligned} \cos j(\Pi - \Pi' + f - f') &= \cos j(\Pi - \Pi')\cos j(f - f') - \sin j(\Pi - \Pi')\sin j(f - f') \\ &= \cos j(\Pi - \Pi')\big[\cos jf\cos jf' + \sin jf\sin jf'\big] + \\ &\quad - \sin j(\Pi - \Pi')\big[\sin jf\cos jf' - \cos jf\sin jf'\big] \end{aligned} \tag{45}$$

che compaiono nella prima serie della (37), per valori di j che, in linea di principio, vanno da 1 ad ∞. Notiamo però che, nella (37), la (45) è moltiplicata per delle serie di Taylor (gli sviluppi di $1/(1 - e'\cos E')$ e delle potenze di δ) in cui i termini che contengono funzioni trigonometriche del tipo $\cos jM\cos jM'$ hanno sempre coefficiente proporzionale ad $(ee')^j$: questa è naturalmente una conseguenza delle regole di D'Alembert e può essere verificata direttamente, fino al grado che ci interessa, nelle espressioni (40) e (41). Ora, per ottenere termini secolari (cioè che non contengano M ed M') dalla (45) occorre moltiplicarla per un termine che contenga $\cos jM\cos jM'$ proveniente dagli sviluppi di $1/(1 - e'\cos E')$ e δ; ne consegue che

$$\langle\cos j(\Pi - \Pi' + f - f')\rangle = 0\big((ee')^j\big)\,; \tag{46}$$

ciò significa che, se vogliamo limitarci ai termini secolari di grado non superiore a 2 nelle eccentricità, è sufficiente considerare nella serie suddetta solamente i termini con $j = 1$.

Tenendo conto di queste considerazioni e della (35), la media della seconda parte della (37) si riduce a

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \frac{1}{1-e'\cos E'} \sum_{j=1}^{\infty} b_{1/2}^{(j)}(\xi) \cos j(\Pi - \Pi' + f - f') \right\rangle = \\
&\quad = \left\langle \left[b_{1/2}^{(1)}(\alpha) + \alpha \frac{db_{1/2}^{(1)}}{d\alpha}\delta + \frac{1}{2}\alpha^2 \frac{d^2 b_{1/2}^{(1)}}{d\alpha^2}\delta^2 \right] \frac{\cos(\Pi - \Pi' + f - f')}{1-e'\cos E'} \right\rangle + \cdots
\end{aligned}
\tag{47}
$$

Utilizzando gli sviluppi (40), (41) e (43) si ottiene

$$
\begin{aligned}
\left\langle \frac{\cos f \cos f'}{1-e'\cos E'} \right\rangle &= \frac{1}{2}ee' + 0(e^2e'^2) \\
\left\langle \delta \frac{\cos f \cos f'}{1-e'\cos E'} \right\rangle = \left\langle \delta^2 \frac{\cos f \cos f'}{1-e'\cos E'} \right\rangle &= -\frac{1}{2}ee' + 0(e^2e'^2)\,,
\end{aligned}
\tag{48}
$$

mentre per tutte le altre combinazioni di funzioni trigonometriche delle due anomalie vere si ha

$$
\left\langle \delta^k \frac{\cos f \sin f'}{1-e'\cos E'} \right\rangle = \left\langle \delta^k \frac{\sin f \cos f'}{1-e'\cos E'} \right\rangle = \left\langle \delta^k \frac{\sin f \sin f'}{1-e'\cos E'} \right\rangle = 0(e^2e'^2)
$$

(per $k = 0, 1, 2$). Tenendo conto della (45) (per $j = 1$) si ottiene infine

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \frac{1}{1-e'\cos E'} \sum_{j=1}^{\infty} b_{1/2}^{(j)}(\xi) \cos j(\Pi - \Pi' + f - f') \right\rangle = \\
&\quad = \frac{1}{2}\left[b_{1/2}^{(1)} - \alpha \frac{db_{1/2}^{(1)}}{d\alpha} - \frac{1}{2}\alpha^2 \frac{d^2 b_{1/2}^{(1)}}{d\alpha^2} \right] ee' \cos(\Pi - \Pi') + 0(e^3, e'^3)\,.
\end{aligned}
\tag{49}
$$

9. La parte dipendente dall'inclinazione mutua

L'ultima porzione che rimane ancora da mediare della (37) è quella proporzionale a $\sin^2(\beta/2)$. Essa è già di secondo grado nelle inclinazioni e quindi il procedimento di media (a causa delle (44)) può trascurare la differenza tra anomalia vera ed anomalia media; in altre parole possiamo scrivere

$$
\begin{aligned}
&\langle \sin(\Pi + f)\sin(\Pi' + f') \rangle = \langle \sin u \sin u' \rangle_{u,u'} + 0(ee')\,, \\
&\langle \cos j(\Pi - \Pi' + f - f')\sin(\Pi + f)\sin(\Pi' + f') \rangle = \\
&\qquad = \left\langle \left[\cos ju \cos ju' + \sin ju \sin ju'\right] \sin u \sin u' \right\rangle_{u,u'} + 0(ee')\,,
\end{aligned}
$$

dove si è indicato con $\langle\cdot\rangle_{u,u'}$ l'operatore di media (22) rispetto agli angoli $u = \Pi + f$ ed $u' = \Pi' + f'$ anziché alle anomalie medie M ed M'. Si ottiene poi immediatamente

$$\begin{aligned} \langle \sin u \sin u' \rangle_{u,u'} &= 0 \\ \langle \cos ju \cos ju' \sin u \sin u' \rangle_{u,u'} &= 0 \\ \langle \sin ju \sin ju' \sin u \sin u' \rangle_{u,u'} &= \begin{cases} 1/4 & \text{se } j = 1 \\ 0 & \text{se } j \neq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

cosicché anche la seconda sommatoria della (37) si riduce al solo termine con $j = 1$; risulta quindi

$$\begin{aligned} \left\langle -2\alpha \left[\frac{1}{2} b_{3/2}^{(0)}(\alpha) + \sum_{j=1}^{\infty} b_{3/2}^{(j)}(\alpha) \cos j(u - u') \right] \sin u \sin u' \sin^2 \frac{\beta}{2} \right\rangle = \\ = -\frac{1}{2} \alpha b_{3/2}^{(1)} \sin^2 \frac{\beta}{2} + 0(e^3, e'^3) \,. \end{aligned} \tag{50}$$

L'espressione completa di $\langle a'/\Delta \rangle$ fino al grado 2 nelle inclinazioni ed eccentricità è quindi data dalla somma delle espressioni (42), (49) e (50). Essa può venire espressa in una forma semplificata, sfruttando le seguenti relazioni esistenti tra le derivate dei coefficienti di Laplace[3]

$$\begin{aligned} \alpha \frac{db_{1/2}^{(0)}}{d\alpha} + \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{d^2 b_{1/2}^{(0)}}{d\alpha^2} &= \frac{1}{2} \alpha b_{3/2}^{(1)} \\ b_{1/2}^{(1)} - \alpha \frac{db_{1/2}^{(1)}}{d\alpha} - \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{d^2 b_{1/2}^{(1)}}{d\alpha^2} &= -\frac{1}{2} \alpha b_{3/2}^{(2)} \,. \end{aligned} \tag{51}$$

Con queste sostituzioni si ottiene infine

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{a'}{\Delta} \right\rangle = & \frac{1}{2} b_{1/2}^{(0)} + \frac{1}{8} \alpha b_{3/2}^{(1)} (e^2 + e'^2) - \frac{1}{4} \alpha b_{3/2}^{(2)} e e' \cos(\Pi - \Pi') + \\ & - \frac{1}{2} \alpha b_{3/2}^{(1)} \sin^2 \frac{\beta}{2} + 0(e^3, e'^3) \,. \end{aligned} \tag{52}$$

(3) per una dimostrazione delle (51) si veda ad esempio: D. Brouwer and G. M. Clemence, *Methods of Celestial Mechanics*, Academic Press (1961), capitolo XV.

10. La trasformazione del sistema di riferimento

Prima di poter procedere con la scrittura delle equazioni del moto è necessario riscrivere il potenziale (52) in un sistema di riferimento inerziale, sostituendo gli argomenti del perielio Π e Π' riferiti al nodo mutuo con angoli riferiti ad un piano fisso in un sistema inerziale. Per ottenere le trasformazioni richieste partiamo dall'espressione delle componenti del versore momento angolare $\hat{\mathbf{g}}$ (ortogonale al piano orbitale) in funzione degli elementi orbitali definiti nel paragrafo 2

$$\hat{\mathbf{g}} = \begin{pmatrix} \sin I \sin \Omega \\ \sin I \cos \Omega \\ \cos I \end{pmatrix} \tag{53}$$

Il coseno dell'inclinazione mutua è dato dal prodotto scalare dei versori momento angolare dei due pianeti

$$\cos \beta = \hat{\mathbf{g}} \cdot \hat{\mathbf{g}}' = \cos I \cos I' + \sin I \sin I' \cos(\Omega - \Omega')\,,$$

da cui

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = \sin^2 I + \sin^2 I' - 2 \sin I \sin I' \cos(\Omega - \Omega') + 0(I^4, I'^4) \tag{54}$$

e, introducendo le (9),

$$\begin{aligned} 2 \sin^2 \frac{\beta}{2} &= 1 - \cos \beta = 1 - \cos I \cos I' - \sin I \sin I' \cos(\Omega - \Omega') \\ &= 1 - \sqrt{1 - P^2 - Q^2}\sqrt{1 - P'^2 - Q'^2} - QQ' - PP' \\ &= \frac{1}{2}(P^2 + Q^2 + P'^2 + Q'^2) - QQ' - PP' + 0(P^4, Q^4)\,. \end{aligned} \tag{55}$$

L'argomento del perielio Π è l'angolo compreso tra il versore del nodo mutuo $\mathbf{M}$ ed il versore $\hat{\mathbf{p}}$ diretto verso il perielio; il versore $\mathbf{M}$ si ricava dalla relazione $\mathbf{M} \sin \beta = \hat{\mathbf{g}} \times \hat{\mathbf{g}}'$

$$\mathbf{M} \sin \beta = \begin{pmatrix} \sin I \cos I' \cos \Omega - \cos I \sin I' \cos \Omega' \\ \cos I \sin I' \sin \Omega' - \sin I \cos I' \sin \Omega \\ \sin I \sin I' \sin(\Omega - \Omega') \end{pmatrix} \tag{56}$$

mentre il versore $\hat{\mathbf{p}}$ si ottiene dalla (14) per $r = 1$, $f = 0$

$$\hat{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \cos \Omega \cos \omega - \cos I \sin \Omega \sin \omega \\ \sin \Omega \cos \omega + \cos I \cos \Omega \sin \omega \\ \sin I \sin \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varpi + (1 - \cos I) \sin \Omega \sin \omega \\ \sin \varpi - (1 - \cos I) \cos \Omega \sin \omega \\ \sin I \sin \omega \end{pmatrix} \tag{57}$$

I coseni degli angoli Π e Π' sono quindi deducibili dalle relazioni $\cos\Pi = \mathbf{M}\cdot\hat{\mathbf{p}}$ e $\cos\Pi' = \mathbf{M}\cdot\hat{\mathbf{p}}'$; dalle (56) e (57) si ricava

$$\begin{aligned} \sin\beta\cos\Pi &= \sin I\cos(\varpi+\Omega) - \sin I'\cos(\varpi+\Omega') + 0(I^3, I'^3) \\ \sin\beta\cos\Pi' &= \sin I\cos(\varpi'+\Omega) - \sin I'\cos(\varpi'+\Omega') + 0(I^3, I'^3) \end{aligned} \tag{58}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \sin\beta\sin\Pi &= \sin I\sin(\varpi+\Omega) - \sin I'\sin(\varpi+\Omega') + 0(I^3, I'^3) \\ \sin\beta\sin\Pi' &= \sin I\sin(\varpi'+\Omega) - \sin I'\sin(\varpi'+\Omega') + 0(I^3, I'^3)\,. \end{aligned} \tag{59}$$

Utilizzando le (58) e (59) si ottiene

$$\begin{aligned} &\sin^2\beta\cos(\Pi-\Pi') = \\ &\qquad = \sin^2\beta\big[\cos\Pi\cos\Pi' + \sin\Pi\sin\Pi'\big] \\ &\qquad = \big[\sin^2 I + \sin^2 I' - 2\sin I\sin I'\cos(\Omega-\Omega')\big]\cos(\varpi-\varpi') + 0(I^4, I'^4) \end{aligned}$$

e infine, tenendo conto della (54) e delle definizioni (9),

$$\begin{aligned} \cos(\Pi-\Pi') &= \cos(\varpi-\varpi') + 0(I^2, I'^2) \\ ee'\cos(\Pi-\Pi') &= hh' + kk' + 0(h^4, k^4)\,; \end{aligned} \tag{60}$$

sostituendo le (9), (55) e (60) nella (52) si ha l'espressione finale di $\langle a'/\Delta\rangle$ in coordinate inerziali, completa fino al grado 2 in h, k, P, Q e h', k', P', Q'

$$\begin{aligned} \left\langle\frac{a'}{\Delta}\right\rangle =& \frac{1}{2}b_{1/2}^{(0)} + \frac{1}{8}\alpha b_{3/2}^{(1)}(h^2+k^2+h'^2+k'^2) - \frac{1}{4}\alpha b_{3/2}^{(2)}(hh'+kk') + \\ & - \frac{1}{8}\alpha b_{3/2}^{(1)}\big[P^2+Q^2+P'^2+Q'^2-2(QQ'+PP')\big] + \cdots\,. \end{aligned} \tag{61}$$

11. Le equazioni del moto

Ritorniamo ora alla notazione (6) per la funzione perturbatrice F_{ij} e scriviamo il valore mediato $\langle F_{ij}\rangle$ utilizzando i risultati dei paragrafi precedenti (gli indici i e j contraddistinguono gli elementi orbitali di μ_i e μ_j). Nel fare ciò bisogna ricordarsi che, nella (61), a' rappresenta il semiasse maggiore del *pianeta più esterno*: si ha quindi

$$\begin{aligned} \langle F_{ij}\rangle =& \frac{1}{2}\frac{G\mu_j}{a_{ij}}b_{1/2}^{(0)}(\alpha_{ij}) + \frac{G\mu_j\alpha_{ij}}{a_{ij}}\bigg\{\frac{1}{8}b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{ij})(h_i^2+k_i^2+h_j^2+k_j^2) + \\ & - \frac{1}{4}b_{3/2}^{(2)}(\alpha_{ij})(h_ih_j+k_ik_j) + \\ & - \frac{1}{8}b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{ij})\big[P_i^2+Q_i^2+P_j^2+Q_j^2-2(Q_iQ_j+P_iP_j)\big]\bigg\} + \cdots\,, \end{aligned} \tag{62}$$

dove si è indicato per brevità $a_{ij} = \max\{a_i, a_j\}$ e $\alpha_{ij} = \min\{a_i, a_j\}/\max\{a_i, a_j\}$. Le equazioni secolari del moto (27) hanno dunque la forma

$$\begin{aligned}
\frac{dh_i}{dt} &= \sum_{j=1}^{N} A_{ij} k_j \,, \qquad & \frac{dk_i}{dt} &= -\sum_{j=1}^{N} A_{ij} h_j \,, \\
\frac{dP_i}{dt} &= \sum_{j=1}^{N} B_{ij} Q_j \,, \qquad & \frac{dQ_i}{dt} &= -\sum_{j=1}^{N} B_{ij} P_j \,,
\end{aligned} \tag{63}$$

dove le matrici A_{ij} e B_{ij} sono definite da

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= -\frac{G}{4n_i a_i^2} \frac{\mu_j \alpha_{ij}}{a_{ij}}\, b_{3/2}^{(2)}(\alpha_{ij}) \qquad & (\text{per } i \neq j) \\
A_{ii} &= \frac{G}{4n_i a_i^2} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{\mu_j \alpha_{ij}}{a_{ij}}\, b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{ij}) & \\
B_{ij} &= \frac{G}{4n_i a_i^2} \frac{\mu_j \alpha_{ij}}{a_{ij}}\, b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{ij}) \qquad & (\text{per } i \neq j) \\
B_{ii} &= -\frac{G}{4n_i a_i^2} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{\mu_j \alpha_{ij}}{a_{ij}}\, b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{ij}) = -A_{ii} \,. &
\end{aligned} \tag{64}$$

Le equazioni (63) hanno la forma delle equazioni del moto di un sistema di N oscillatori armonici accoppiati e possono essere risolte con gli stessi metodi; in particolare, la notazione può essere semplificata introducendo le variabili complesse

$$\begin{aligned}
\eta_i &= e_i \exp\left(\sqrt{-1}\,\varpi_i\right) &&= k_i + \sqrt{-1}\, h_i \\
\nu_i &= \sin I_i \exp\left(\sqrt{-1}\,\Omega_i\right) &&= Q_i + \sqrt{-1}\, P_i \,,
\end{aligned} \tag{65}$$

in funzione delle quali le equazioni (63) si scrivono

$$\frac{d\eta_i}{dt} = \sqrt{-1}\, \sum_{j=1}^{N} A_{ij} \eta_j \,, \qquad \frac{d\nu_i}{dt} = \sqrt{-1}\, \sum_{j=1}^{N} B_{ij} \nu_j \,. \tag{66}$$

Le variabili complesse η e ν acquistano un immediato significato geometrico assimilando il piano complesso con il piano (x, y) del sistema di riferimento inerziale. In particolare, ν rappresenta un vettore diretto lungo il nodo ascendente dell'orbita e di lunghezza pari a $\sin I$ o equivalentemente, tenendo conto della (53), il vettore $P_i + \sqrt{-1}\, Q_i$ è la proiezione del versore momento angolare $\hat{\mathbf{g}}$ sul piano (x, y). Analogamente η è assimilabile alla proiezione sul piano (x, y) del vettore di Laplace-Lenz[4] (definito come il vettore orientato lungo la direzione del perielio e di lunghezza uguale all'eccentricità orbitale e).

---

[4] a rigore, la longitudine del perielio $\varpi = \Omega + \omega$ non coincide con la longitudine

12. La soluzione

La soluzione di un sistema del tipo (66) si ottiene, secondo il metodo usuale di trattare il problema degli oscillatori armonici accoppiati,[5] cercando i *modi propri di oscillazione del sistema*, cioè diagonalizzando le matrici A e B. A questo proposito è importante dimostrare che le matrici A e B sono diagonalizzabili ed hanno solamente autovalori reali. Quest'ultima caratteristica corrisponde ad una proprietà di *stabilità* della soluzione; infatti ad autovalori reali corrispondono soluzioni puramente oscillatorie del sistema (66), mentre ad autovalori complessi $\alpha \pm \sqrt{-1}\,\beta$ (con $\beta > 0$) corrisponderebbero soluzioni che si smorzano nel tempo come $\exp(-\beta t)$ o che divergono come $\exp(\beta t)$. Per dimostrare queste proprietà operiamo una trasformazione di scala delle variabili η e ν, definendo

$$\eta_i^* = a_i\sqrt{\mu_i n_i}\;\eta_i\,, \qquad \nu_i^* = a_i\sqrt{\mu_i n_i}\;\nu_i\,; \tag{67}$$

in funzione di queste nuove variabili le equazioni del moto mantengono una forma simile alla (66)

$$\frac{d\eta_i^*}{dt} = \sqrt{-1}\,\sum_{j=1}^{N} A_{ij}^*\eta_j^*\,, \qquad \frac{d\nu_i^*}{dt} = \sqrt{-1}\,\sum_{j=1}^{N} B_{ij}^*\nu_j^*\,, \tag{68}$$

in cui le matrici A^* e B^* sono definite da

$$\begin{aligned}
A_{ij}^* &= \frac{a_i\sqrt{\mu_i n_i}}{a_j\sqrt{\mu_j n_j}}A_{ij} = -\frac{G}{4a_ia_j}\sqrt{\frac{\mu_i\mu_j}{n_in_j}}\,\frac{\alpha_{ij}}{a_{ij}}\,b_{3/2}^{(2)}(\alpha_{ij}) \qquad (\text{per } i\neq j)\\
A_{ii}^* &= A_{ii} = \frac{G}{4n_ia_i^2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{\mu_j\alpha_{ij}}{a_{ij}}\,b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{ij})\\
B_{ij}^* &= \frac{a_i\sqrt{\mu_i n_i}}{a_j\sqrt{\mu_j n_j}}B_{ij} = \frac{G}{4a_ia_j}\sqrt{\frac{\mu_i\mu_j}{n_in_j}}\,\frac{\alpha_{ij}}{a_{ij}}\,b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{ij}) \qquad (\text{per } i\neq j)\\
B_{ii}^* &= B_{ii} = -\frac{G}{4n_ia_i^2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{\mu_j\alpha_{ij}}{a_{ij}}\,b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{ij}) = -A_{ii}^*\,,
\end{aligned} \tag{69}$$

---

della proiezione del vettore di Laplace-Lenz sul piano (x, y), perché la longitudine del nodo Ω e l'argomento del perielio ω sono misurati su piani diversi (il piano (x, y) ed il piano dell'orbita, rispettivamente). Si può tuttavia dimostrare (procedendo in modo analogo a quanto fatto per ottenere la (60)) che i due angoli differiscono di infinitesimi dell'ordine del quadrato dell'inclinazione orbitale; nell'ambito delle approssimazioni adottate dalla teoria lineare possiamo dunque considerare i due angoli come coincidenti.

[5] si veda ad esempio H. Goldstein, *Meccanica classica*, Zanichelli (1971), capitolo 10; L. D. Landau ed E. M. Lifšits, *Fisica teorica - Vol. 1: Meccanica*, Editori Riuniti (1979), § 23.

e sono quindi simmetriche. Come è noto, una matrice reale simmetrica è sempre diagonalizzabile per mezzo di una matrice ortogonale ed i suoi autovalori sono tutti reali; possiamo dunque scrivere

$$\sum_{j=1}^{N} A^*_{ij} u^*_{jl} = \gamma_l \, u^*_{il} \,, \qquad \sum_{j=1}^{N} B^*_{ij} v^*_{jl} = \sigma_l \, v^*_{il} \,,$$

dove γ_i e σ_i sono gli N autovalori delle matrici A^* e B^* ed u^*_{ij} e v^*_{ij} sono due matrici ortogonali le cui colonne sono costituite dagli autovettori corrispondenti. Ciò dimostra che

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij} u_{jl} = \gamma_l \, u_{il} \,, \qquad \sum_{j=1}^{N} B_{ij} v_{jl} = \sigma_l \, v_{il} \,, \tag{70}$$

cioè anche le matrici A e B sono diagonalizzabili ed hanno gli stessi autovalori (reali) delle matrici A^* e B^*, mentre gli autovettori sono dati dalle relazioni

$$u_{ij} = \frac{u^*_{ij}}{a_i \sqrt{\mu_i n_i}} \,, \qquad v_{ij} = \frac{v^*_{ij}}{a_i \sqrt{\mu_i n_i}}$$

(le matrici u_{ij} e v_{ij} non sono in generale ortogonali). La soluzione generale delle (66) può dunque essere espressa nella forma

$$\eta_i(t) = \sum_{j=1}^{N} u_{ij} \Gamma_j \exp\left(\sqrt{-1}\,\gamma_j t\right) \,, \quad \nu_i(t) = \sum_{j=1}^{N} v_{ij} \Sigma_j \exp\left(\sqrt{-1}\,\sigma_j t\right) \,, \tag{71}$$

dove Γ_j e Σ_j sono costanti di integrazione (complesse) che possono essere determinate in funzione delle condizioni iniziali; esse hanno il significato di *ampiezza di eccitazione e fase iniziale* dei modi propri di oscillazione del sistema. Possiamo dunque concludere che la soluzione delle equazioni secolari di Lagrange può essere descritta come un moto di precessione dei piani orbitali e dei perieli delle orbite planetarie; i vettori η_i e ν_i di ciascun pianeta possono essere rappresentati con un sistema di *cicli ed epicicli*, cioè come una somma vettoriale di segmenti di lunghezza costante nel tempo, ciascuno dei quali ruota con una frequenza propria caratteristica; le frequenze proprie sono gli autovalori delle matrici A^* e B^* (69).

TABELLA I

Masse e semiassi maggiori dei pianeti esterni

Pianeta	$M_\odot/\mu_i$	a_i
Giove	1047.349	5.202582
Saturno	3497.915	9.545543
Urano	22941.	19.194230
Nettuno	19432.	30.070971

13. Esempio: il Sistema Solare esterno

Come esempio numerico di applicazione della teoria lineare di Lagrange riportiamo per esteso i calcoli relativi ad un sottoinsieme del Sistema Solare, costituito dal Sole con i pianeti esterni (Giove, Saturno, Urano e Nettuno). Tale sottosistema può essere considerato in prima approssimazione come un sistema isolato (e quindi può essere studiato separatamente) in quanto i pianeti interni (da Mercurio a Marte) hanno massa molto più piccola dei pianeti esterni. Per la stessa ragione anche il pianeta Plutone può essere trascurato.

Partendo dai valori dei semiassi maggiori[6] riportati in Tabella I si ottiene la seguente matrice α_{ij} (poiché la matrice è simmetrica, è riportato solo il triangolo superiore; inoltre gli elementi diagonali non sono definiti)

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} - & 0.545027 & 0.271049 & 0.173010 \\ & - & 0.497313 & 0.317434 \\ & & - & 0.638298 \\ & & & - \end{pmatrix}$$

da cui si ricavano, calcolando numericamente gli integrali (31), i seguenti valori per i coefficienti di Laplace

$$\left(b^{(1)}_{3/2}(\alpha_{ij})\right) = \begin{pmatrix} - & 3.181078 & 0.938434 & 0.549484 \\ & - & 2.549335 & 1.162654 \\ & & - & 5.159180 \\ & & & - \end{pmatrix}$$

(6) le grandezze che compaiono nel presente paragrafo e nelle tabelle sono espresse nel sistema di unità di misura comunemente utilizzato in meccanica celeste: l'unità astronomica (AU) per le lunghezze, la massa solare ($M_\odot$) per le masse ed il giorno solare medio (d) per i tempi; in tali unità la costante gravitazionale di Gauss vale $\sqrt{G} = 0.01720209895$.

TABELLA II

Autofrequenze della soluzione di Lagrange per i pianeti esterni

i	γ_i (arcsec/y)	$2\pi/\gamma_i$ (y)	σ_i (arcsec/y)	$-2\pi/\sigma_i$ (y)
1	3.710327	$3.492953 \cdot 10^5$	0.000000	∞
2	22.393375	$5.787426 \cdot 10^4$	−25.855537	$5.012466 \cdot 10^4$
3	2.707014	$4.787563 \cdot 10^5$	−2.910778	$4.452418 \cdot 10^5$
4	0.634658	$2.042044 \cdot 10^6$	−0.679060	$1.908521 \cdot 10^6$

$$\left(b_{3/2}^{(2)}(\alpha_{ij})\right) = \begin{pmatrix} - & 2.078237 & 0.314963 & 0.118384 \\ & - & 1.531567 & 0.455331 \\ & & - & 3.874593 \\ & & & - \end{pmatrix}$$

Adottando per il calcolo dei moti medi n_i un valore della massa del Sole pari a $1.00000598\, M_\odot$ (che comprende anche la massa dei pianeti interni), le matrici A^* e B^* (espresse in unità di secondi d'arco per anno: una frequenza di 1 arcsec/y corrisponde ad un periodo di $1.296 \cdot 10^6$ y) risultano

$$(A^*_{ij}) = \begin{pmatrix} 7.477389 & -7.564121 & -0.092975 & -0.013828 \\ & 18.551456 & -0.390069 & -0.045886 \\ & & 2.748866 & -0.257474 \\ & & & 0.667664 \end{pmatrix}$$

$$(B^*_{ij}) = \begin{pmatrix} -7.477389 & 11.578110 & 0.277019 & 0.064181 \\ & -18.551456 & 0.649280 & 0.117167 \\ & & -2.748866 & 0.342837 \\ & & & -0.667664 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di tali matrici sono riportati in Tabella II, mentre gli autovettori corrispondenti delle matrici A e B sono

$$(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 0.611308 & -0.307023 & 0.069396 & 0.006375 \\ 0.481686 & 0.951030 & 0.063186 & 0.007178 \\ -0.627493 & -0.035664 & 0.989860 & 0.150150 \\ 0.023110 & -0.002663 & -0.106630 & 0.988617 \end{pmatrix}$$

TABELLA III

Condizioni iniziali secolari per i pianeti esterni
(t=0, corrispondente al 28 giugno 1969)

Pianeta	h	k	P	Q
Giove	0.00902321	0.04762961	−0.00413489	0.00397713
Saturno	0.05561108	0.00057410	0.01404137	−0.00828909
Urano	0.00847023	−0.04561283	−0.01402005	0.01124608
Nettuno	0.00628194	0.00639541	−0.00246688	−0.01239461

$$(v_{ij}) = \begin{pmatrix} 0.500000 & -0.371828 & -0.053927 & -0.097605 \\ 0.500000 & 0.927389 & -0.044062 & -0.094110 \\ 0.500000 & -0.040907 & 0.990780 & 0.091029 \\ 0.500000 & -0.004542 & -0.116213 & 0.986575 \end{pmatrix}$$

Le costanti di integrazione Γ_i e Σ_i possono essere determinate imponendo che la soluzione (71) coincida ad un certo istante di tempo (che assumeremo convenzionalmente come origine dell'asse dei tempi, $t = 0$) con un insieme dato di condizioni iniziali: queste però devono corrispondere ad elementi orbitali non *osculanti* (istantanei, cioè ottenuti direttamente dalle osservazioni astrometriche) ma *secolari*, cioè mediati sui termini a corto periodo, secondo la logica esposta nel paragrafo 5. Gli elementi mediati possono essere ottenuti da quelli osculanti sia per mezzo di un procedimento analitico (sottrazione di una teoria analitica per i termini a corto periodo), sia con metodi numerici (integrazione numerica dell'orbita e filtraggio digitale dei termini ad alta frequenza). Un esempio di condizioni iniziali di questo tipo è riportato in Tabella III. I valori corrispondenti per le costanti di integrazione sono elencati in Tabella IV; i moduli delle ampiezze della soluzione (71) sono

$$(|u_{ij}\Gamma_j|) = \begin{pmatrix} 0.04323347 & -0.01563025 & 0.00206793 & 0.00006197 \\ 0.03406623 & 0.04841610 & 0.00188287 & 0.00006977 \\ -0.04437816 & -0.00181561 & 0.02949692 & 0.00145951 \\ 0.00163437 & -0.00013558 & -0.00317747 & 0.00960974 \end{pmatrix}$$

$$(|v_{ij}\Gamma_j|) = \begin{pmatrix} 0.00000629 & -0.00632255 & -0.00096188 & -0.00116005 \\ 0.00000629 & 0.01576929 & -0.00078593 & -0.00111851 \\ 0.00000629 & -0.00069558 & 0.01767252 & 0.00108190 \\ 0.00000629 & -0.00007723 & -0.00207288 & 0.01172559 \end{pmatrix}$$

TABELLA IV

Costanti di integrazione della soluzione di Lagrange
corrispondente alle condizioni iniziali della Tabella III

	Γ_i		Σ_i	
i	ampiezza	fase (gradi)	ampiezza	fase (gradi)
1	0.07072294	26.639	0.00001258	108.524
2	0.05090912	127.414	0.01700397	123.974
3	0.02979910	105.052	0.01783697	312.232
4	0.00972039	65.225	0.01188515	199.653

L'aspetto della soluzione (su un intervallo di tempo di $2 \cdot 10^6$ y) è mostrato nelle figure 1–4; per confronto le figure 5–8 riportano il risultato di una integrazione numerica delle equazioni complete del moto (3) (a partire dalle stesse condizioni iniziali e sullo stesso intervallo di tempo), opportunamente filtrato con tecniche digitali in modo da cancellare i termini a corto periodo. La Tabella V riporta i valori "sperimentali" delle autofrequenze del sistema, ottenute da un'analisi di Fourier della serie temporale di elementi orbitali generata dall'integrazione numerica. Come si nota dal confronto delle figure e delle tabelle II e V, la teoria analitica dà risultati molto migliori per le variabili P e Q che non per h e k: ciò è dovuto al fatto che, nel nostro caso, le eccentricità sono sensibilmente più grandi delle inclinazioni e quindi l'errore che si commette trascurando i termini di grado superiore è più grave per le variabili h e k.

14. La conservazione del momento angolare

Nella soluzione numerica delle equazioni di Lagrange descritta nel paragrafo precedente si può notare come una delle autofrequenze σ_i (per fissare le idee, diciamo σ_1) è uguale a zero; inoltre l'autovettore corrispondente della matrice B ha tutte le componenti uguali ossia, a meno di un fattore di normalizzazione

$$v_{i1} = 1 \qquad (i = 1, \ldots, N) . \tag{72}$$

TABELLA V

Autofrequenze secolari per i pianeti esterni
ricavate dall'integrazione numerica delle equazioni del moto

i	γ_i (arcsec/y)	$2\pi/\gamma_i$ (y)	σ_i (arcsec/y)	$-2\pi/\sigma_i$ (y)
1	4.24470	$3.053219 \cdot 10^5$	0.00000	∞
2	28.23856	$4.589469 \cdot 10^4$	-26.33917	$4.920428 \cdot 10^4$
3	3.08695	$4.19831 \cdot 10^5$	-2.99265	$4.33062 \cdot 10^5$
4	0.67268	$1.92663 \cdot 10^6$	-0.69143	$1.87437 \cdot 10^6$

Questa è una proprietà generale della matrice B che può essere facilmente dimostrata; dalle espressioni (64) si ottiene infatti immediatamente

$$B_{ii} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} B_{ij} \,,$$

cioè

$$\sum_{j=1}^{N} B_{ij} = 0 \,. \tag{73}$$

L'equazione (73) implica quindi che la matrice B ammette l'autovettore (72), associato all'autovalore $\sigma_1 = 0$.

Da un punto di vista meno formale, questa proprietà garantisce l'esistenza di una soluzione particolare delle equazioni secolari in cui i piani orbitali di tutti i pianeti si mantengono immobili e complanari (in cui cioè $\nu_i = \bar{\nu} =$ costante, $(i = 1, \ldots, N)$). L'esistenza di una tale soluzione (che corrisponde nell'equazione (71) all'eccitazione del solo modo proprio associato all'autofrequenza nulla σ_1: $\Sigma_1 = \bar{\nu}$, $\Sigma_i = 0$ per $i \neq 1$) è richiesta da considerazioni di simmetria: se ad un certo istante di tempo tutte le orbite sono complanari, anche tutti i vettori forza sono contenuti nello stesso piano e quindi i piani orbitali rimangono immobili e complanari.

Questa proprietà della soluzione di Lagrange è strettamente connessa con la conservazione del momento angolare totale del sistema. Nel sistema di riferimento inerziale adottato il vettore momento angolare $\mathbf{g}_i$ del pianeta μ_i ha l'espressione

$$\mathbf{g}_i = \mu_i n_i a_i^2 (1 - e_i^2) \begin{pmatrix} \sin I_i \sin \Omega_i \\ \sin I_i \cos \Omega_i \\ \cos I_i \end{pmatrix} = \mu_i n_i a_i^2 \begin{pmatrix} P_i \\ Q_i \\ 1 \end{pmatrix} + 0(e_i^2, I_i^2) \,. \tag{74}$$

Nella soluzione secolare di Lagrange l'invarianza del vettore momento angolare totale $\mathbf{g} = \sum_{i=1}^N \mathbf{g}_i$ si deve dunque tradurre nell'invarianza del vettore complesso

$$\nu = \sum_{i=1}^N \mu_i n_i a_i^2 \nu_i \,. \tag{75}$$

La relazione $d\nu/dt = 0$ è deducibile direttamente dalle equazioni del moto (63), tenendo conto dell'espressione (64) della matrice B, ma è anche dimostrabile come una conseguenza della proprietà (73) e del fatto che la trasformazione (67) rende simmetrica la matrice B. Infatti, tenendo conto della relazione tra B e B^* espressa dalla (69), la (73) implica

$$\sum_{j=1}^N a_j \sqrt{\mu_j n_j}\, B^*_{ij} = 0 \,,$$

che può anche scriversi come

$$\sum_{i=1}^N a_i \sqrt{\mu_i n_i}\, B^*_{ij} = 0$$

(dato che B^*_{ij} è simmetrica). Utilizzando ancora le (69), quest'ultima relazione comporta

$$\sum_{i=1}^N a_i^2 \mu_i n_i B_{ij} = 0 \,,$$

da cui si deduce immediatamente

$$\begin{aligned} \frac{d\nu}{dt} &= \sum_{i=1}^N \mu_i n_i a_i^2 \frac{d\nu_i}{dt} = \sqrt{-1} \sum_{i=1}^N \mu_i n_i a_i^2 \sum_{j=1}^N B_{ij} \nu_j \\ &= \sqrt{-1} \sum_{j=1}^N \left[\sum_{i=1}^N \mu_i n_i a_i^2 B_{ij} \right] \nu_j = 0 \,. \end{aligned} \tag{76}$$

15. Perturbazioni secolari di un asteroide

Poiché la massa di un asteroide è solitamente così piccola da non produrre nessuna perturbazione misurabile sulle orbite dei pianeti maggiori del Sistema Solare (e comunque è generalmente sconosciuta), è comune trattare la dinamica di questi oggetti nel limite per la massa tendente a zero, cioè nell'ambito di un *problema ristretto*. Nel caso della teoria secolare di Lagrange tale assunzione produce una modificazione della forma della soluzione, dato che il cambiamento di variabili (67) che rende simmetriche le matrici A e B perde di significato.

Consideriamo dunque le equazioni secolari di Lagrange per un sistema formato da N pianeti aventi massa μ_i $(i = 1, \ldots, N)$ ed un asteroide (che indicheremo con l'indice $i = 0$) di massa nulla $\mu_0 = 0$. Ovviamente il moto orbitale dei pianeti non risente della presenza dell'asteroide, ed è ancora descritto dalle equazioni (66) e dalla soluzione (71). Le equazioni del moto per l'asteroide, in analogia alle (66), sono

$$
\begin{aligned}
\frac{d\eta_0}{dt} &= \sqrt{-1}\; A_{00}\eta_0 + \sqrt{-1}\; \sum_{i=1}^{N} A_{0i}\eta_i\,, \\
\frac{d\nu_0}{dt} &= \sqrt{-1}\; B_{00}\nu_0 + \sqrt{-1}\; \sum_{i=1}^{N} B_{0i}\nu_i\,,
\end{aligned}
\tag{77}
$$

dove gli elementi di matrice A_{0i} e B_{0i} sono definiti da

$$
\begin{aligned}
A_{0i} &= -\frac{G}{4n_0 a_0^2}\frac{\mu_i\alpha_{0i}}{a_{0i}}\, b_{3/2}^{(2)}(\alpha_{0i}) \qquad (\text{per } i \neq 0) \\
A_{00} &= \frac{G}{4n_0 a_0^2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\mu_i\alpha_{0i}}{a_{0i}}\, b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{0i}) \\
B_{0i} &= \frac{G}{4n_0 a_0^2}\frac{\mu_i\alpha_{0i}}{a_{0i}}\, b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{0i}) \qquad (\text{per } i \neq 0) \\
B_{00} &= -\frac{G}{4n_0 a_0^2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\mu_i\alpha_{0i}}{a_{0i}}\, b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{0i}) = -A_{00}\,.
\end{aligned}
\tag{78}
$$

Le (77) sono le equazioni di un oscillatore armonico (con un grado di libertà) con un termine forzante; la soluzione generale è data da

$$
\begin{aligned}
\eta_0(t) &= \Gamma_0 \exp\left(\sqrt{-1}\,\gamma_0 t\right) + \sum_{j=1}^{N}\frac{\sum_{i=1}^{N} A_{0i}u_{ij}\Gamma_j}{\gamma_j - \gamma_0}\exp\left(\sqrt{-1}\,\gamma_j t\right) \\
\nu_0(t) &= \Sigma_0 \exp\left(\sqrt{-1}\,\sigma_0 t\right) + \sum_{j=1}^{N}\frac{\sum_{i=1}^{N} B_{0i}v_{ij}\Sigma_j}{\sigma_j - \sigma_0}\exp\left(\sqrt{-1}\,\sigma_j t\right)\,,
\end{aligned}
\tag{79}
$$

dove le frequenze γ_0 e σ_0 valgono

$$\gamma_0 = A_{00}\,, \qquad \sigma_0 = B_{00} = -\gamma_0\,. \tag{80}$$

Nella (79), Γ_0 e Σ_0 sono costanti di integrazione complesse che dipendono dalle condizioni iniziali dell'asteroide e che perciò sono diverse per ogni oggetto; per questo esse sono chiamate *elementi orbitali propri* dell'asteroide (in particolare $|\Gamma_0|$ e $|\Sigma_0|$ costituiscono l'eccentricità e il seno dell'inclinazione propri). Al contrario, la parte forzata della soluzione (79) dipende solo dagli elementi orbitali dei pianeti e dalle autofrequenze γ_0 e σ_0 dell'asteroide e quindi è uguale per asteroidi aventi lo stesso semiasse maggiore.