Sommario

Capitolo I

Le equazioni del moto e il problema dei due corpi

1.1 Le equazioni del moto

L'oggetto della Meccanica Celeste è principalmente lo studio di sistemi di corpi puntiformi soggetti alla reciproca attrazione gravitazionale, secondo la legge dell'inverso del quadrato delle distanze; quasi tutti i sistemi dinamici che si incontrano sono descrivibili dalla stessa equazione del moto:

$$\frac{d^2\mathbf{R}_i}{dt^2} = G\sum_{j=0}^{N} m_j \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \quad (j \neq i,\ i = 0, 1, \ldots N)\,, \tag{1.1}$$

dove G è la costante universale di gravitazione, $\mathbf{R}_i$ sono le coordinate degli $N+1$ punti ($i = 0, 1, \ldots N$), m_i le loro masse e $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i$ i vettori posizione mutua. È incredibile la complicazione e la varietà di configurazioni che possono nascere da un'equazione così semplice!

L'equazione (1.1) è ovviamente valida in un sistema di riferimento inerziale; siccome tuttavia le osservazioni forniscono quasi sempre misure relative, è più comune assumere come origine delle coordinate la posizione di uno dei corpi (diciamo m_0) e scrivere le equazioni del moto per i vettori posizione relativa $\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_0$. Nel caso del Sistema Solare usualmente m_0 è il Sole. Sottraendo membro a membro l'espressione (1.1) si ottengono le equazioni del moto in coordinate eliocentriche

$$\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = -G(m_0+m_i)\frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} + G\sum_{j=1}^{N} m_j \left(\frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{r_{ij}^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3}\right) \quad (j \neq i,\ i = 1, \ldots N)\,. \tag{1.2}$$

Le differenze rispetto all'equazione (1.1) sono due: 1) il termine centrale contiene la somma delle masse del Sole e del pianeta $m_0 + m_i$; 2) compare un nuovo termine perturbativo $-Gm_j\mathbf{r}_j/r_j^3$ (detto *perturbazione indiretta*) che rappresenta l'effetto dell'attrazione degli altri pianeti sul Sole (in altre parole è una *forza apparente* introdotta dalla non-inerzialità del sistema di riferimento). È noto che la forza kepleriana è conservativa e può essere espressa come il gradiente di un potenziale; ciò è vero anche per il secondo membro dell'equazione (1.2), che può essere scritta

$$\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \nabla_i(U_i + R_i)\,, \tag{1.3}$$

dove ∇_i è il gradiente rispetto ad $\mathbf{r}_i$ e

$$U_i = \frac{G(m_0 + m_i)}{r_i}, \qquad R_i = G\sum_{j=1}^{N} m_j \left(\frac{1}{r_{ij}} - \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}{r_j^3}\right) \quad (j \neq i) \tag{1.4}$$

sono rispettivamente il termine centrale del potenziale e la *funzione perturbatrice*. Anche per la funzione perturbatrice si può notare che, accanto al termine diretto (proporzionale al reciproco della distanza mutua) che esprime l'attrazione degli altri pianeti sul pianeta perturbato, compare un termine indiretto.

Le equazioni (1.1) possiedono dieci integrali del moto: di questi, sei sono collegati col moto del centro di massa $\mathbf{B}$ che, come per ogni sistema isolato, si muove di moto rettilineo uniforme:

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{N} m_i \mathbf{R}_i(t)}{\sum_{i=0}^{N} m_i} = \dot{\mathbf{B}}t + \mathbf{B}_0 \quad (\dot{\mathbf{B}}, \mathbf{B}_0 \text{ costanti})\,; \tag{1.5}$$

gli altri quattro sono rappresentati dalle tre componenti del momento angolare totale e dall'energia totale. Si noti che nel passaggio dalla formulazione inerziale (1.1) a quella eliocentrica (1.2) delle equazioni del moto si eliminano dal problema le sei coordinate (posizione e velocità) del Sole ma si perdono anche i sei integrali del centro di massa, per cui il numero di gradi di libertà del sistema rimane invariato.

1.2 Il problema di Keplero

Si chiama *problema di Keplero* il caso particolare dell'equazione (1.1) in cui $N = 1$ (si hanno cioè solo due corpi, ad esempio il Sole ed un pianeta). In coordinate eliocentriche il problema è descritto dall'equazione

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\mu\frac{\mathbf{r}}{r^3}\,, \tag{1.6}$$

dove $\mu = G(m_0 + m_1)$ e dove è sottinteso l'indice $i = 1$. In altre parole *il moto di un sistema isolato di due particelle sottoposte alla mutua attrazione kepleriana è equivalente al moto di una sola particella in un campo centrale prodotto da una massa pari alla somma delle due masse*, cioè ad un sistema non più isolato.

La soluzione dell'equazione (1.6) può essere ottenuta analiticamente. Cominciamo con il ridurre il numero di gradi di libertà sfruttando gli integrali primi; utilizziamo per primo il momento angolare

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$$

che è una costante del moto, come è logico trattandosi di forze centrali e come è immediato dimostrare direttamente dalla (1.6). Per comodità di notazione introduciamo un sistema di riferimento rotante definito dai tre versori $\mathbf{u}_r$ (parallelo ad $\mathbf{r}$), $\mathbf{u}_h$ (parallelo ad $\mathbf{h}$) ed $\mathbf{u}_\theta$ (tale che $\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\theta = \mathbf{u}_h$). Naturalmente l'asse $\mathbf{u}_h$ è fisso nello spazio, perché $\mathbf{h}$ è costante; ne consegue che il moto avviene in un piano (passante per l'origine ed ortogonale ad $\mathbf{u}_h$) e può quindi essere descritto da due sole coordinate polari $r = |\mathbf{r}|$ e θ (angolo misurato da un asse fisso, scelto a piacere nel piano); in questo sistema di riferimento i vettori posizione, velocità e momento angolare si scrivono

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = r\mathbf{u}_r\,; \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta\,; \\ \mathbf{h} = r\mathbf{u}_r \times (\dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta) = r^2\dot{\theta}\mathbf{u}_h\,. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Le componenti $\mathbf{u}_r$ ed $\mathbf{u}_\theta$ dell'equazione del moto (1.6) sono rispettivamente

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 &= -\frac{\mu}{r^2} \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) &= 0\,. \end{aligned} \tag{1.8}$$

La seconda delle (1.8) esprime semplicemente la costanza del modulo del vettore momento angolare e porta direttamente all'integrale primo

$$r^2\dot{\theta} = h\,. \tag{1.9}$$

Poichè $r^2\dot{\theta}/2 = dA/dt$ è la velocità areolare del pianeta, la (1.9) è equivalente alla seconda legge di Keplero (*il raggio vettore Sole-pianeta spazza aree uguali in tempi uguali*). Si noti che questo risultato è conseguenza unicamente della conservazione del momento angolare e pertanto è valido per qualsiasi campo di forza centrale.

Il problema di Keplero si riduce quindi alla soluzione del sistema formato dalla prima delle (1.8) e dalla (1.9). Come passo intermedio si può ricavare la forma della traiettoria: operando il cambiamento di variabile $u = 1/r$ ed eliminando il tempo t tra le due equazioni, si ottiene

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2}$$

che ha come soluzione generale

$$u = \frac{\mu}{h^2} + K\cos(\theta - \theta_0)$$

(K e θ_0 sono le costanti di integrazione); reintroducendo r e definendo

$$p = \frac{h^2}{\mu} \qquad e = \frac{Kh^2}{\mu} \tag{1.10}$$

la soluzione si può scrivere

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}\,, \tag{1.11}$$

dove e e θ_0 sono due nuove costanti di integrazione.[1] Come è noto, la (1.11) è l'equazione di una conica (un'ellisse se $0 \leq e < 1$, una parabola se $e = 1$ o un'iperbole se $e > 1$) rispetto ad uno dei fuochi; θ_0 definisce la direzione nel piano orbitale (*linea degli apsidi*) in cui si ha il punto di massimo avvicinamento del pianeta al Sole (*perielio* o, più genericamente, *pericentro*); è usuale assumere questa direzione come origine della coordinata polare angolare e scrivere la (1.11) nella forma

$$r = \frac{p}{1 + e\cos f}\,, \tag{1.12}$$

dove l'angolo $f = \theta - \theta_0$ è chiamato *anomalia vera*. Dunque la prima legge di Keplero (*i pianeti descrivono ellissi di cui il Sole occupa uno dei fuochi*) descrive solo un caso particolare della soluzione della (1.6). Per completezza notiamo anche che le *orbite rettilinee* (soluzioni caratterizzate da $h = 0$) sono escluse dalla presente trattazione.

Il parametro p che compare nella (1.12) è detto *semilatus rectum*, perché è la distanza Sole-pianeta quando il raggio vettore è ortogonale alla linea degli apsidi ($f = \pi/2, 3\pi/2$). Nel caso di un'orbita ellittica, le distanze al perielio r_p e all'afelio r_a sono date da

$$r_p = \frac{p}{1+e}\,, \qquad r_a = \frac{p}{1-e}\,, \tag{1.13}$$

mentre il semiasse maggiore dell'ellisse vale

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} = \frac{p}{1 - e^2}\,, \tag{1.14}$$

cioè

$$p = a(1 - e^2)\,; \quad r_p = a(1 - e)\,; \quad r_a = a(1 + e)\,. \tag{1.15}$$

---

[1] Si noti che il fatto che $r(\theta)$ sia una funzione periodica di periodo 2π implica che il pianeta ritorna allo stesso punto nello spazio dopo una rivoluzione, cioè che l'orbita è una *traiettoria chiusa*; ciò non è vero per un generico potenziale centrale, neppure della forma $1/r^k$, tranne che nel caso kepleriano $k = 1$.

1.3 L'integrale dell'energia

Un altro integrale primo della (1.6) è l'energia totale[2]

$$C = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} \tag{1.16}$$

(dove $v^2 = \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}$), come si può verificare direttamente calcolandone la derivata temporale e tenendo conto della (1.6)

$$\frac{dC}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} - \nabla\left(\frac{\mu}{r}\right) \cdot \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \left(\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^3}\mathbf{r}\right) = 0\,.$$

L'energia C *dipende solamente dal semiasse maggiore dell'orbita* e non dagli altri parametri orbitali. Ricaviamo questa importante proprietà, anche se la dimostrazione risulta un po' tediosa. Utilizzando le (1.7) e (1.9) ricaviamo

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}\,. \tag{1.17}$$

Cerchiamo ora delle espressioni per $\dot{r}^2$ e h^2/r^2 che dipendano solo da r ed f. Derivando la (1.12) rispetto al tempo si ottiene

$$\dot{r} = \frac{pe\dot{f}\sin f}{(1+e\cos f)^2} = \frac{r^2 e\dot{f}\sin f}{p} = \frac{h}{p}\,e\sin f\,, \tag{1.18}$$

dove si è sostituito $h = r^2\dot{f}$ (equazione (1.9)). Dalla (1.12) si ricava poi

$$\frac{h^2}{r^2} = \frac{h^2}{p^2}(1+e\cos f)^2\,. \tag{1.19}$$

Sostituendo le (1.18) ed (1.19) nella (1.17) e tenendo conto ancora della (1.12) si ottiene

$$\begin{aligned} v^2 &= \frac{h^2}{p^2}\left[1 + e^2 + 2e\cos f\right] = \frac{h^2}{p^2}\left[2(1+e\cos f) - (1-e^2)\right] \\ &= \frac{2h^2}{rp} - \frac{h^2}{p^2}(1-e^2) \end{aligned}$$

e, tenendo conto delle (1.10) e (1.14),

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)\,. \tag{1.20}$$

Sostituendo la (1.20) nella (1.16) si ha infine

$$C = -\frac{\mu}{2a} \tag{1.21}$$

che è la relazione cercata.

[2] A rigore l'espressione (1.16) non è l'energia del sistema di due corpi (1.1) ma quella del sistema fittizio (1.6) (particella di massa nulla in un campo centrale generato da una massa $m_0 + m_1$); si può comunque dimostrare che l'energia del sistema (1.1), calcolata nel sistema di riferimento baricentrico, coincide con C a meno di una costante di proporzionalità.

1.4 La legge oraria (orbita ellittica)

L'equazione (1.12) fornisce la forma dell'orbita ma non dà indicazioni sui tempi in cui essa viene percorsa, cioè sulla legge oraria. Limitiamoci al caso di un'orbita ellittica (i casi parabolico ed iperbolico richiederebbero una trattazione a parte). Il periodo orbitale T può essere ricavato direttamente dalla velocità areolare $dA/dt = h/2$ e dall'area dell'ellisse $A = \pi ab$

$$T = \frac{A}{dA/dt} = \frac{\pi ab}{h/2}\,,$$

dove

$$b = a\sqrt{1-e^2} \tag{1.22}$$

è il semiasse minore dell'ellisse. Esprimendo h e b in funzione del semiasse maggiore a (equazioni (1.10), (1.15) e (1.22)) si ottiene

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2}\,, \tag{1.23}$$

che costituisce la terza legge di Keplero (*i quadrati dei periodi orbitali dei pianeti sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori*).(3) Indicando con $n = 2\pi/T$ la velocità angolare media del pianeta sull'orbita (detta *moto medio*), dalla (1.23) si ricava l'equazione fondamentale che lega il moto medio al semiasse maggiore

$$n^2 a^3 = \mu\,. \tag{1.24}$$

Per quanto riguarda la legge oraria, dalle (1.17) e (1.20) si ricava

$$r\frac{dr}{dt} = \sqrt{v^2 r^2 - h^2} = \sqrt{2\mu r - \frac{\mu r^2}{a} - h^2}$$

e, tenendo conto delle (1.10), (1.15) e (1.24),

$$\begin{aligned} r\frac{dr}{dt} &= \sqrt{2\mu r - \frac{\mu r^2}{a} - \mu a(1-e^2)} = na\sqrt{2ar - r^2 - a^2(1-e^2)} \\ &= na\sqrt{a^2e^2 - (r-a)^2}\,. \end{aligned}$$

La determinazione di r in funzione del tempo è perciò ricondotta ad una integrazione diretta

$$n\,dt = \frac{r\,dr}{a\sqrt{a^2e^2 - (r-a)^2}} \tag{1.25}$$

(3) Si noti tuttavia che, in coordinate eliocentriche, la legge così enunciata è valida solo approssimativamente, in quanto μ contiene la somma delle masse del Sole e del pianeta, e quindi è leggermente diversa per pianeti diversi.

che può essere eseguita facilmente introducendo una variabile ausiliaria E (detta *anomalia eccentrica*), definita da

$$r - a = -ae\cos E\,, \qquad dr = ae\sin E\,dE\,. \tag{1.26}$$

Con questa sostituzione la (1.25) diventa

$$n\,dt = (1 - e\cos E)\,dE$$

che ha per soluzione

$$n(t - t_0) = E - e\sin E \tag{1.27}$$

(relazione nota come *equazione di Keplero*), dove t_0 è una costante di integrazione. L'angolo definito da

$$M = n(t - t_0) \tag{1.28}$$

è detto *anomalia media*. Dalle equazioni (1.12), (1.26) e (1.28) si deduce che il valore delle tre anomalie (media, eccentrica e vera) coincide quando il pianeta passa al perielio o all'afelio

$$\begin{aligned} M = E = f = 0 + 2k\pi\ (k = 0, 1, 2, \ldots) \quad &\text{per } r = r_p = a(1-e)\,; \\ M = E = f = \pi + 2k\pi\ (k = 0, 1, 2, \ldots) \quad &\text{per } r = r_a = a(1+e)\,; \end{aligned}$$

in particolare, i tre angoli compiono una rivoluzione nel medesimo tempo, con velocità angolare media pari al moto medio n. Ne consegue anche che la costante t_0 nella (1.27) definisce un istante di tempo in cui $M = 0$, cioè una *epoca di passaggio al perielio.*

1.5 Derivazione geometrica della legge oraria

L'equazione di Keplero può essere dedotta anche per mezzo di una elegante costruzione geometrica, che utilizza solamente le prime due leggi di Keplero ed ha il vantaggio di mostrare il significato dell'anomalia vera ed eccentrica. Nel piano orbitale scegliamo un sistema di riferimento (ξ, η) in cui l'asse ξ è diretto lungo la linea degli apsidi (perielio) e tracciamo un cerchio di raggio a circoscritto all'ellisse (Figura 1).

Indichiamo con S il fuoco dell'ellisse occupato dal Sole, con A la posizione del perielio e con P la posizione del pianeta sull'orbita. La seconda legge di Keplero dice che l'area del settore di ellisse SPA è proporzionale al tempo, cioè all'anomalia media; deve perciò essere

$$\text{area } SPA = \pi ab\,\frac{M}{2\pi} = \frac{1}{2}abM$$

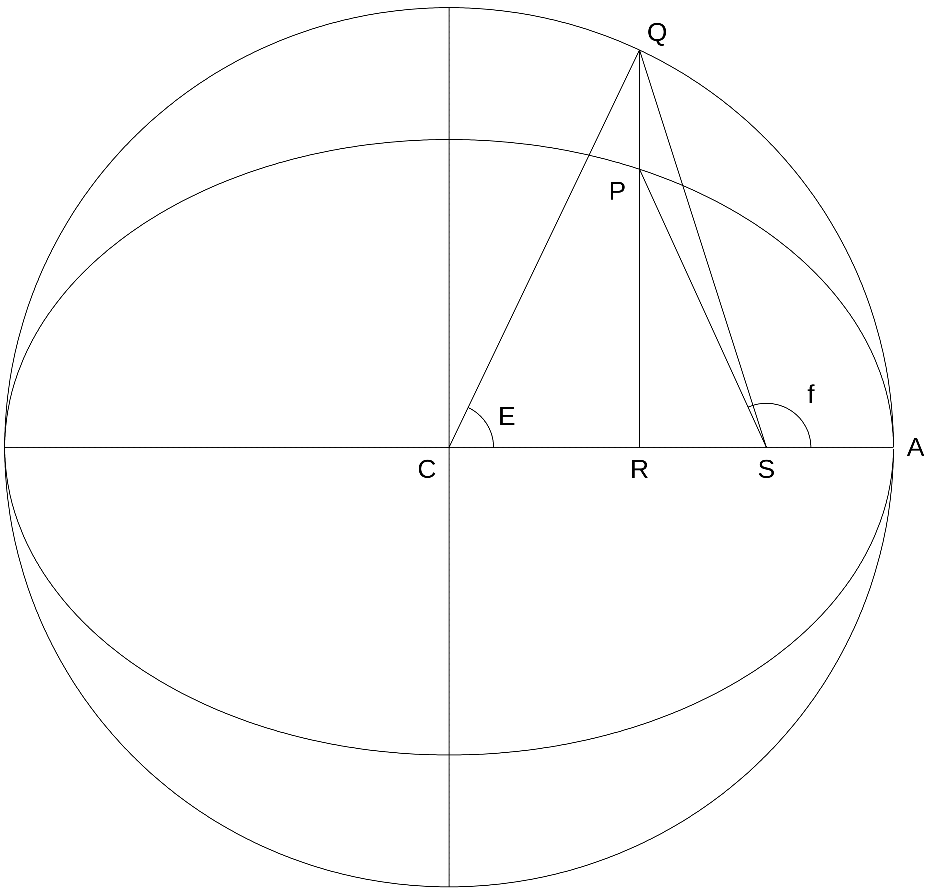

Figura 1. Costruzione geometrica per derivare l'equazione di Keplero.

(quando il pianeta ha compiuto una rivoluzione completa, l'area spazzata è uguale all'area totale dell'ellisse πab). Tracciamo ora una retta passante per P ed ortogonale all'asse maggiore dell'ellisse (retta SA) ed indichiamo rispettivamente con R e Q le intersezioni di tale retta con l'asse maggiore ed il cerchio circoscritto. Si noti che il triangolo mistilineo SQA si può ottenere da SPA moltiplicando la dimensione ortogonale all'asse maggiore di SPA per un fattore a/b (l'ellisse è un "cerchio schiacciato"), per cui risulta anche

$$\text{area } SQA = \frac{a}{b} \text{ area } SPA = \frac{1}{2} a^2 M$$

Introduciamo ora l'anomalia eccentrica E come l'angolo (misurato dal *centro* dell'ellisse C) tra l'asse maggiore e Q. ACQ è un settore circolare e dunque

$$\text{area } ACQ = \frac{1}{2} a^2 E\,; \tag{1.29}$$

d'altra parte ACQ è l'unione di SQA con il triangolo CQS, da cui

$$\text{area } ACQ = \text{area } SQA + \text{area } CQS = \frac{1}{2}a^2 M + \frac{1}{2}a^2 e \sin E \tag{1.30}$$

(la distanza CS tra il centro ed il fuoco di un'ellisse è uguale ad ae). Eguagliando le (1.29) ed (1.30) si ottiene nuovamente l'equazione di Keplero

$$M = E - e \sin E\,. \tag{1.31}$$

Le coordinate del pianeta nel piano dell'orbita sono date da

$$\begin{aligned} \xi &= \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CR} = -ae + a\cos E \\ \eta &= \overrightarrow{RP} = \frac{b}{a}\,\overrightarrow{RQ} = b \sin E\,. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Il confronto di queste relazioni con le coordinate polari

$$\xi = r\cos f\,, \qquad \eta = r \sin f \tag{1.33}$$

permette di stabilire una relazione diretta tra anomalia vera ed anomalia eccentrica

$$\tan\left(\frac{f}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\left(\frac{E}{2}\right)\,. \tag{1.34}$$

1.6 Il vettore di Laplace-Lenz

Un altro integrale primo dell'equazione (1.6) è il *vettore di Laplace-Lenz*, definito come

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\mu}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} - \mathbf{u}_r\,. \tag{1.35}$$

Per dimostrare che si tratta effettivamente di una costante del moto, calcoliamo

$$\mu\dot{\mathbf{e}} = \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} - \mu\dot{\mathbf{u}}_r\,. \tag{1.36}$$

Introducendo nella (1.36) l'equazione del moto (1.6) e ponendo in evidenza i versori, e sostituendo

$$\dot{\mathbf{u}}_r = \dot{\theta}\mathbf{u}_\theta\,,$$

la (1.36) diventa

$$\mu\dot{\mathbf{e}} = -\frac{\mu h}{r^2}\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_h + \mu\dot{\theta}\mathbf{u}_r\,. \tag{1.37}$$

Sostituendo nella (1.37)

$$\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_h = -\mathbf{u}_\theta \, ,$$

si ha

$$\mu \dot{\mathbf{e}} = -\mu \mathbf{u}_\theta \left[\frac{h}{r^2} - \dot{\theta} \right] \, , \tag{1.38}$$

che è uguale a zero in virtù della (1.9). Notiamo perciò che, mentre l'integrale dell'energia e del momento angolare valgono per vaste classi di sistemi dinamici (rispettivamente per campi di forza conservativi e centrali), il vettore di Laplace-Lenz è un integrale del moto caratteristico del problema dei due corpi. Ricaviamo ora una espressione alternativa di $\mathbf{e}$ che permette di comprenderne meglio il significato geometrico. Dalla definizione (1.35) segue

$$\mathbf{e} = \frac{r^2 \dot{\theta}}{\mu} \left[\dot{r} \mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_h + r\dot{\theta} \mathbf{u}_\theta \times \mathbf{u}_h \right] - \mathbf{u}_r = \left[\frac{r^3 \dot{\theta}^2}{\mu} - 1 \right] \mathbf{u}_r - \frac{\dot{r} r^2 \dot{\theta}}{\mu} \mathbf{u}_\theta$$

e, tenendo conto delle (1.9), (1.10), (1.18) e (1.12),

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \left[\frac{h^2}{\mu r} - 1 \right] \mathbf{u}_r - \frac{\dot{r} h}{\mu} \mathbf{u}_\theta = \left[\frac{p}{r} - 1 \right] \mathbf{u}_r - \frac{h^2}{p\mu} e \sin f \, \mathbf{u}_\theta \\ &= e \cos f \, \mathbf{u}_r - e \sin f \, \mathbf{u}_\theta \, . \end{aligned} \tag{1.39}$$

Questa espressione dimostra che il vettore di Laplace-Lenz ha modulo pari all'eccentricità orbitale e punta nella direzione del perielio (infatti l'angolo compreso tra $\mathbf{e}$ ed $\mathbf{r}$ è uguale all'anomalia vera f).

Ricapitolando, abbiamo ricavato sei integrali primi indipendenti dell'equazione del moto (1.6): l'energia totale, tre componenti del momento angolare totale e due componenti del vettore di Laplace-Lenz (la terza componente non è indipendente, perchè $\mathbf{e}$ giace nel piano orbitale e perciò è ortogonale al momento angolare $\mathbf{h}$, cioè è vincolato dalla condizione $\mathbf{e} \cdot \mathbf{h} = 0$).

1.7 Soluzione numerica dell'equazione di Keplero

Nella maggior parte delle applicazioni l'equazione di Keplero (1.31) deve essere risolta rispetto ad E. Il caso più normale è quello del calcolo delle effemeridi di un pianeta, di cui si conoscono gli elementi orbitali e si vuole determinare la posizione ad un certo istante t; nella (1.31) sono dunque noti M (dalla (1.28)) ed e e si vuole determinare E.

Si possono trovare in letteratura decine di metodi diversi per la soluzione di questo problema; la maggior parte di questi si basa su un processo iterativo, che è composto da due ingredienti:

1) una *formula di partenza* che fornisce un valore approssimato E_0;

2) una *formula iterativa* che corregge un valore approssimato E_n fornendo un nuovo valore E_{n+1} più vicino alla soluzione.

Con questi due ingredienti è possibile costruire una successione di valori E_0, E_1, ..., E_n, ... che converga verso la soluzione esatta: il procedimento viene arrestato dopo un numero finito di passi, quando l'errore è sceso al disotto di un valore prefissato. Senza entrare in particolari, citiamo due metodi iterativi molto semplici, consigliabili per valori di eccentricità non troppo elevati. Il primo è il metodo di Newton-Raphson, che cerca la soluzione di una equazione del tipo $F(E) = 0$ approssimando la funzione F con il suo sviluppo di Taylor troncato al primo termine

$$F(E_{n+1}) \simeq F(E_n) + F'(E_n)(E_{n+1} - E_n);$$

imponendo $F(E_{n+1}) = 0$ si ottiene

$$E_{n+1} = E_n - \frac{F(E_n)}{F'(E_n)}$$

che, nel caso dell'equazione di Keplero

$$F(E) = E - e \sin E - M$$

diventa

$$E_{n+1} = E_n + \frac{M - E_n + e \sin E_n}{1 - e \cos E_n}\,. \tag{1.40}$$

Un altro metodo molto usato (anche se converge un po' più lentamente) consiste nel porre semplicemente

$$E_{n+1} = M + e \sin E_n\,; \tag{1.41}$$

esso si basa sul fatto che l'applicazione $E_n \to E_{n+1}$ così definita è una contrazione, perciò la successione $\{E_n\}$ tende ad un limite che è il punto unito della (1.41), cioè la soluzione cercata. Come valore di partenza per le iterazioni si può adottare per entrambi i metodi il valore[4]

$$E_0 = M\,. \tag{1.42}$$

---

[4] Bisogna però notare che, con il valore di partenza (1.41), il metodo di Newton-Raphson non è convergente per valori dell'eccentricità maggiori di circa 0.9733

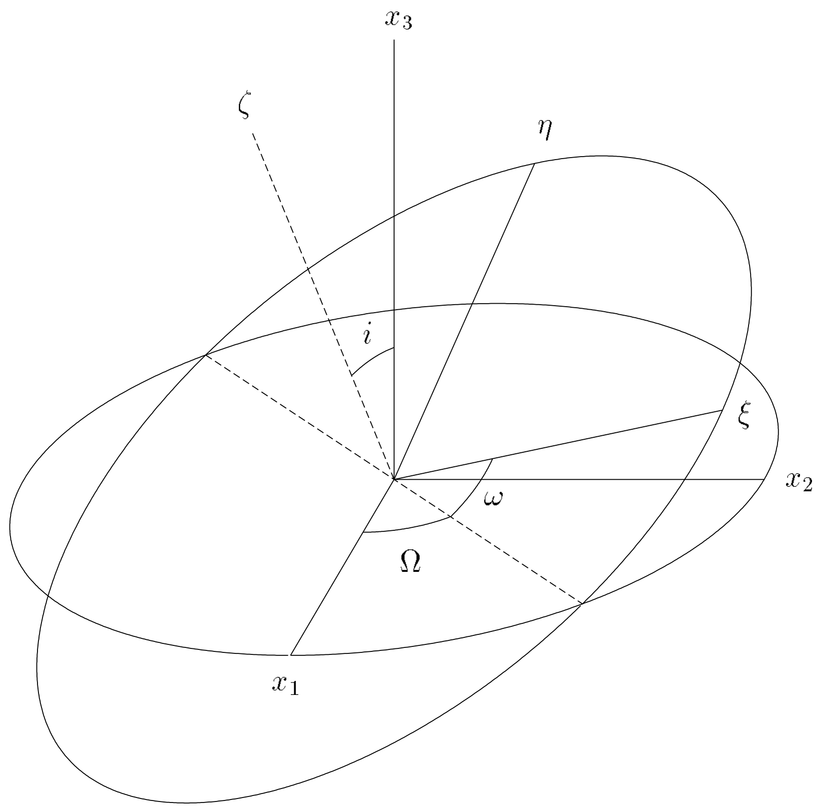

Figura 2. Elementi che definiscono l'orientazione dell'orbita nello spazio.

1.8 L'orbita nello spazio

Ci siamo fino ad ora occupati del moto del pianeta nel piano orbitale; in particolare le equazioni (1.32) forniscono la soluzione nel *sistema di riferimento orbitale* (ξ, η, ζ), in cui il piano (ξ, η) coincide con il piano dell'orbita (ζ è parallelo al momento angolare $\mathbf{h}$) e l'asse ξ è diretto verso il perielio. Per passare alla posizione del pianeta in un generico sistema di riferimento (x_1, x_2, x_3) occorre conoscere l'orientazione degli assi (ξ, η, ζ) rispetto agli assi (x_1, x_2, x_3); questa è descritta, come è usuale in geometria, da una terna di angoli di Eulero che, nel caso del problema dei due corpi, assumono nomi particolari (Figura 2):

- l'*inclinazione* orbitale i è l'angolo tra il piano orbitale ed il piano (x_1, x_2), cioè tra il vettore momento angolare $\mathbf{h}$ e l'asse x_3;
- la *longitudine del nodo ascendente* Ω è l'angolo tra l'asse x_1 e la linea dei nodi (intersezione del piano orbitale con il piano (x_1, x_2)), misurato sul piano

(x_1, x_2) in senso diretto (antiorario), dall'asse x_1 al nodo ascendente (punto in cui il pianeta attraversa il piano (x_1, x_2) passando da valori negativi a valori positivi di x_3);

– l'*argomento del perielio* ω è l'angolo tra la linea dei nodi e la linea degli apsidi, misurato sul piano orbitale in senso diretto, dal nodo ascendente alla direzione del perielio.

In alternativa all'argomento del perielio ω viene a volte usata la *longitudine del perielio*, definita come $\varpi = \Omega + \omega$.

È comodo esprimere la trasformazione tra (ξ, η, ζ) e (x_1, x_2, x_3) in funzione delle matrici di rotazione; si chiama *matrice di rotazione* $\mathbf{R}_j(\alpha)$ la matrice che trasforma la terna di coordinate (x_1, x_2, x_3) nelle coordinate (x'_1, x'_2, x'_3) associate ad un nuovo sistema di riferimento, ruotato di un angolo α attorno all'asse x_j (in senso diretto)

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \mathbf{R}_j(\alpha) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} .$$

La matrice di rotazione $\mathbf{R}_3(\alpha)$ attorno all'asse x_3 è data da

$$\mathbf{R}_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \tag{1.43}$$

le matrici di rotazione attorno agli altri assi possono essere ricavate da $\mathbf{R}_3(\alpha)$ per permutazione ciclica delle linee e delle colonne:

$$\mathbf{R}_1(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} ; \qquad \mathbf{R}_2(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} . \tag{1.44}$$

Come si può ricavare dalla Figura 2, la terna (x_1, x_2, x_3) può essere ottenuta dalla terna (ξ, η, ζ) per mezzo di tre rotazioni successive: 1) una rotazione di $-\omega$ attorno all'asse ζ, che porta l'asse ξ a coincidere con la linea dei nodi (nodo ascendente); 2) una rotazione di $-i$ attorno al nuovo asse ξ (risultato della precedente rotazione), che porta l'asse ζ a coincidere con l'asse x_3; 3) una rotazione di $-\Omega$ attorno al nuovo asse ζ (risultato delle due precedenti rotazioni). La trasformazione cercata è dunque

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{R}(\Omega, i, \omega) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} , \qquad \text{dove} \quad \mathbf{R}(\Omega, i, \omega) = \mathbf{R}_3(-\Omega)\, \mathbf{R}_1(-i)\, \mathbf{R}_3(-\omega) ; \tag{1.45}$$

sostituendo le espressioni esplicite delle matrici di rotazione si ottiene

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i \\
R_{12} &= -\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\sin\Omega\cos i \\
R_{13} &= \sin\Omega\sin i \\
R_{21} &= \cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i \\
R_{22} &= -\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega\cos i \\
R_{23} &= -\cos\Omega\sin i \\
R_{31} &= \sin\omega\sin i \\
R_{32} &= \cos\omega\sin i \\
R_{33} &= \cos i\,.
\end{aligned} \tag{1.46}$$

In definitiva l'orbita di un pianeta può essere specificata per mezzo dei sei *elementi kepleriani* a, e, i, ω, Ω ed M; di questi due (a ed e) descrivono la forma e le dimensioni dell'orbita; altri tre (i, ω, ed Ω) danno l'orientazione del piano orbitale nel sistema di riferimento usato; l'ultimo (M) indica la posizione del pianeta lungo l'orbita ad un certo istante di tempo.

1.9 Le serie f e g

In alcune applicazioni (ad esempio, nella determinazione degli elementi orbitali a partire da tre osservazioni) è conveniente usare una soluzione approssimata dell'equazione del moto (1.6) che abbia la forma di una serie di Taylor, cioè un'espressione del tipo

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \dot{\mathbf{r}}_0\Delta t + \frac{1}{2!}\ddot{\mathbf{r}}_0\Delta t^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}\right|_0 \Delta t^3 + \frac{1}{4!}\left.\frac{d^4\mathbf{r}}{dt^4}\right|_0 \Delta t^4 + \ldots\,, \tag{1.47}$$

dove tutte le derivate sono calcolate al tempo t_0 e $\Delta t = t - t_0$. Il secondo membro della (1.47) può essere trasformato in modo da contenere solamente $\mathbf{r}_0$ e la sua derivata prima; infatti derivando successivamente l'equazione del moto (1.6) e sostituendo $\ddot{\mathbf{r}}_0$ con il suo valore $-\mu\mathbf{r}_0/r_0^3$ si ottengono espressioni sostitutive per le derivate di ordine superiore

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{r}}_0 &= -\mu\frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3} \\
\left.\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}\right|_0 &= -\mu\left(\frac{1}{r_0^3}\dot{\mathbf{r}}_0 - \frac{3\mathbf{r}_0}{r_0^5}\,\mathbf{r}_0\cdot\dot{\mathbf{r}}_0\right) \\
&\ldots
\end{aligned} \tag{1.48}$$

Utilizzando le (1.48), la (1.47) si può scrivere

$$\mathbf{r}(t) = f\,\mathbf{r}_0 + g\,\dot{\mathbf{r}}_0\,, \tag{1.49}$$

dove f e g sono due serie

$$\begin{aligned} f &= 1 - \frac{1}{2}u\Delta t^2 + \frac{1}{2}us\Delta t^3 + \frac{1}{24}u(3w-2u-15s^2)\Delta t^4 + \\ &\qquad\qquad - \frac{1}{8}us(3w-2u-7s^2)\Delta t^5 + \ldots \\ g &= \Delta t - \frac{1}{6}u\Delta t^3 + \frac{1}{4}us\Delta t^4 + \frac{1}{120}u(9w-8u-45s^2)\Delta t^5 + \ldots \end{aligned} \tag{1.50}$$

in cui s, u e w sono tre costanti, funzioni delle condizioni iniziali solamente

$$s = \frac{1}{r_0^2}\,\mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0\,; \qquad u = \frac{\mu}{r_0^3}\,; \qquad w = \frac{1}{r_0^2}\dot{\mathbf{r}}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0\,. \tag{1.51}$$

1.10 Elementi orbitali non singolari

I sei elementi kepleriani a, e, i, ω, Ω ed M sopra introdotti non sono ben definiti per orbite di eccentricità e/o inclinazione prossime a zero: in particolare, la longitudine del nodo Ω e l'argomento del perielio ω risultano indeterminati per $i = 0$; ancora l'argomento del perielio ω e l'anomalia media M sono indeterminati per $e = 0$. Ciò significa che la trasformazione di coordinate da elementi kepleriani a vettori posizione e velocità è localmente non invertibile nell'intorno di $i = 0$, $e = 0$, cioè la matrice jacobiana della trasformazione è singolare; questo fatto introduce instabilità numeriche in alcune applicazioni (ad esempio, nella determinazione degli elementi orbitali a partire da osservazioni con il metodo dei minimi quadrati), per cui è talvolta consigliabile utilizzare una parametrizzazione dell'orbita che non presenti questo inconveniente. Ciò può essere ottenuto usando due accorgimenti:

1) poiché le direzioni della linea dei nodi e del perielio sono indeterminate per $i = 0$, $e = 0$, occorre evitare di usare angoli che siano definiti a partire da tali direzioni; in particolare, l'argomento del perielio ω e le anomalie (media M ed eccentrica E) vanno sostituiti dalle corrispondenti *longitudini*

$$\begin{aligned} &\text{longitudine del perielio:} && \varpi = \Omega + \omega\,, \\ &\text{longitudine media:} && L = M + \varpi\,, \\ &\text{longitudine eccentrica:} && F = E + \varpi\,; \end{aligned} \tag{1.52}$$

2) le coppie di variabili di tipo "polare" (e, ϖ) ed (i, Ω) vanno sostituite con le corrispondenti variabili "cartesiane"

$$\begin{aligned} h &= e \sin \varpi\,, & k &= e \cos \varpi\,; \\ P &= \tan(i/2) \sin \Omega\,, & Q &= \tan(i/2) \cos \Omega\,. \end{aligned} \tag{1.53}$$

Con queste sostituzioni, l'*equazione di Keplero* (1.31) prende la forma

$$L = F + h \cos F - k \sin F\,; \tag{1.54}$$

i metodi numerici introdotti per la soluzione della (1.31) possono essere facilmente adattati alla (1.54).

Le *coordinate nel piano orbitale* (1.32) non possono più essere riferite alla direzione del perielio ξ; introduciamo perciò nel piano orbitale un nuovo sistema di assi (ξ', η') ruotato di un angolo $-\varpi$ rispetto a (ξ, η), cioè ruotato di un angolo $-\Omega$ rispetto alla direzione del nodo ascendente

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{R}_3(-\varpi) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix}\;; \tag{1.55}$$

in questo modo l'asse ξ' viene a coincidere con l'asse x_1 del sistema di riferimento inerziale quando l'inclinazione i tende a zero. Esplicitando la (1.55) ed introducendo le nuove variabili la (1.32) diventa

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi \cos \varpi - \eta \sin \varpi = a\big[(1 - \gamma h^2) \cos F + \gamma h k \sin F - k\big]\,, \\ \eta' &= \xi \sin \varpi + \eta \cos \varpi = a\big[(1 - \gamma k^2) \sin F + \gamma h k \cos F - h\big]\,, \\ &\text{dove} \quad \gamma = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e^2} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - e^2}}\,. \end{aligned} \tag{1.56}$$

La relazione tra il sistema di riferimento orbitale (ξ', η', ζ') e quello inerziale (x_1, x_2, x_3) diventa

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{R}(P, Q) \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix}\,, \tag{1.57}$$

dove la nuova matrice di rotazione $\mathbf{R}(P, Q)$ è definita come

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(P, Q) &= \mathbf{R}_3(-\Omega)\, \mathbf{R}_1(-i)\, \mathbf{R}_3(-\omega)\, \mathbf{R}_3(\varpi) \\ &= \mathbf{R}_3(-\Omega)\, \mathbf{R}_1(-i)\, \mathbf{R}_3(\Omega)\,. \end{aligned} \tag{1.58}$$

Le funzioni trigonometriche di Ω ed i che compaiono nelle matrici di rotazione della (1.58) si possono esprimere in funzione delle variabili non singolari P e Q

$$\cos\Omega = \frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2}}\,, \qquad \sin\Omega = \frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}\,,$$

$$\sin i = \frac{2\sqrt{P^2+Q^2}}{1+P^2+Q^2}\,, \qquad \cos i = \frac{1-P^2-Q^2}{1+P^2+Q^2}\,,$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_3(-\Omega) &= \begin{pmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega & 0 \\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{P^2+Q^2}} \begin{pmatrix} Q & -P & 0 \\ P & Q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{R}_1(-i) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{1+P^2+Q^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-P^2-Q^2 & -2\sqrt{P^2+Q^2} \\ 0 & 2\sqrt{P^2+Q^2} & 1-P^2-Q^2 \end{pmatrix} \\
\mathbf{R}_3(\Omega) &= \begin{pmatrix} \cos\Omega & \sin\Omega & 0 \\ -\sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{P^2+Q^2}} \begin{pmatrix} Q & P & 0 \\ -P & Q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,.
\end{aligned}$$

Sostituendo queste espressioni nella (1.58) si ottiene l'espressione esplicita della matrice di rotazione

$$\mathbf{R}(P,Q) = \frac{1}{1+P^2+Q^2} \begin{pmatrix} 1-P^2+Q^2 & 2PQ & 2P \\ 2PQ & 1+P^2-Q^2 & -2Q \\ -2P & 2Q & 1-P^2-Q^2 \end{pmatrix}\,. \quad (1.59)$$

Capitolo II

Determinazione degli elementi orbitali di un pianeta da osservazioni angolari

2.1 Gli osservabili

Nel capitolo precedente si è visto come, a partire dagli elementi orbitali di un pianeta che percorre un'orbita kepleriana, è possibile calcolarne la posizione in funzione del tempo. Questa a sua volta può essere usata per produrre una *effemeride*, cioè una tavola che riporta, ad intervalli prefissati di tempo, la *posizione angolare apparente* del pianeta rispetto all'osservatore, cioè il versore $\mathbf{s}$ del vettore posizione relativa

$$\Delta\mathbf{r} = \rho\mathbf{s} = \mathbf{r} - \mathbf{R}$$

(dove $\mathbf{r}$ e $\mathbf{R}$ sono rispettivamente le posizioni eliocentriche del pianeta osservato e dell'osservatore); questo perché le misure astrometriche classiche sono misure solamente angolari, mentre il modulo ρ del vettore posizione apparente (cioè la distanza tra il pianeta e l'osservatore) non è osservabile. La direzione di osservazione $\mathbf{s}$ è usualmente espressa in coordinate polari (*ascensione retta* α e *declinazione* δ)

$$\begin{cases} s_1 = \cos\delta\cos\alpha \\ s_2 = \cos\delta\sin\alpha \\ s_3 = \sin\delta\,. \end{cases} \tag{2.1}$$

Nel presente capitolo ci occupiamo del corrispondente *problema inverso*: calcolare gli elementi orbitali di un pianeta del Sistema Solare a partire da un certo insieme di osservazioni angolari. Notiamo innanzitutto che, poiché ogni osservazione fornisce la misura di due quantità scalari indipendenti (ascensione retta e declinazione), ci aspettiamo di aver bisogno di tre osservazioni (eseguite a tre tempi diversi t_k, $k = 1, 2, 3$) per poter ricavare i sei elementi kepleriani dell'orbita; perciò il metodo che studieremo (dovuto a Gauss) è anche chiamato *determinazione dell'orbita da tre osservazioni*. La relazione da cui partiamo è quindi

$$\mathbf{r}_k = \rho_k\mathbf{s}_k + \mathbf{R}_k \qquad (k = 1, 2, 3)\,, \tag{2.2}$$

dove l'indice k si riferisce ai tre diversi istanti di tempo t_k. Nella (2.2) supporremo note la posizione dell'osservatore $\mathbf{R}_k$ e la posizione angolare apparente del pianeta osservato $\mathbf{s}_k$, mentre la posizione eliocentrica del pianeta $\mathbf{r}_k$ e la sua distanza dall'osservatore ρ_k sono incognite. Assumeremo inoltre che l'orbita del pianeta osservato sia ellittica.

2.2 Il metodo di Gauss

Cerchiamo di ridurre il numero di incognite che compaiono nell'equazione (2.2). A questo scopo osserviamo che, poichè il pianeta osservato si muove su un'orbita kepleriana, i tre vettori $\mathbf{r}_k$ devono essere complanari; ciò significa che, a meno di casi particolari degeneri, esistono tre scalari c_k (non nulli) tali che

$$c_1\mathbf{r}_1 + c_2\mathbf{r}_2 + c_3\mathbf{r}_3 = 0\,. \tag{2.3}$$

I coefficienti c_k sono ovviamente determinati a meno di una costante moltiplicativa arbitraria, per cui possiamo imporre, ad esempio, $c_2 = -1$ e trascrivere la (2.3) nella forma

$$\mathbf{r}_2 = c_1\mathbf{r}_1 + c_3\mathbf{r}_3\,. \tag{2.4}$$

Eseguendo i prodotti vettoriali tra i vettori $\mathbf{r}_k$ e tenendo conto della (2.4)

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 &= c_3\,\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3\\ \mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_2 &= c_1\,\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1\end{aligned}$$

otteniamo per c_1 e c_3 le seguenti espressioni

$$c_1 = \frac{\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3}{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3}\,, \qquad c_3 = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3}\,. \tag{2.5}$$

Per semplificare queste equazioni esprimiamo $\mathbf{r}_1$ ed $\mathbf{r}_3$ in funzione di $\mathbf{r}_2$ ed $\dot{\mathbf{r}}_2$, usando le serie f e g centrate al tempo t_2; per semplificare la notazione scegliamo l'origine dell'asse dei tempi al tempo t_2, cioè assumiamo $t_2 = 0$; la (1.49) si può riscrivere

$$\mathbf{r}_1 = f_1\mathbf{r}_2 + g_1\dot{\mathbf{r}}_2\,, \qquad \mathbf{r}_3 = f_3\mathbf{r}_2 + g_3\dot{\mathbf{r}}_2\,, \tag{2.6}$$

dove si è posto per brevità $f_k = f(t_k)$, $g_k = g(t_k)$. Usando le (2.6), i prodotti vettoriali che compaiono nelle (2.5) diventano

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3 &= \mathbf{r}_2 \times \big(f_3\mathbf{r}_2 + g_3\dot{\mathbf{r}}_2\big) = g_3\mathbf{h}\\ \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 &= \big(f_1\mathbf{r}_2 + g_1\dot{\mathbf{r}}_2\big) \times \mathbf{r}_2 = -g_1\mathbf{h}\\ \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3 &= \big(f_1\mathbf{r}_2 + g_1\dot{\mathbf{r}}_2\big) \times \big(f_3\mathbf{r}_2 + g_3\dot{\mathbf{r}}_2\big) = \big(f_1g_3 - f_3g_1\big)\mathbf{h}\end{aligned}$$

(dove $\mathbf{h} = \mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2$ è il vettore momento angolare) che, sostituite nelle (2.5), forniscono

$$c_1 = \frac{g_3}{f_1g_3 - f_3g_1}\,, \qquad c_3 = \frac{-g_1}{f_1g_3 - f_3g_1}\,. \tag{2.7}$$

Sostituendo le (2.2) nella (2.3) si ottiene

$$c_1\rho_1\mathbf{s}_1 + c_2\rho_2\mathbf{s}_2 + c_3\rho_3\mathbf{s}_3 + c_1\mathbf{R}_1 + c_2\mathbf{R}_2 + c_3\mathbf{R}_3 = 0\,, \tag{2.8}$$

che è un sistema di tre equazioni nelle tre incognite ρ_k; inoltre, in esse compaiono le quantità c_k, che contengono un numero di incognite che dipende dal punto in cui decidiamo di troncare le serie f e g. Infatti, se negli sviluppi (1.52) tenessimo solo il primo termine (cioè ponessimo $f_k = 1$, $g_k = t_k$), i coefficienti c_k sarebbero direttamente calcolabili: questa sarebbe però un'approssimazione veramente rozza, equivalente alla sostituzione dell'orbita ellittica con un moto rettilineo uniforme! Al contrario, usando un numero arbitrario di termini, si introducono nell'espressione di c_k le quantità s, u e w (equazione (1.53)), con l'effetto di introdurre nuovamente nella (2.8) i vettori $\mathbf{r}_2$ e $\dot{\mathbf{r}}_2$ che siamo appena riusciti ad eliminare. Nel metodo di Gauss si fa una scelta intermedia, usando solo i primi due termini delle (1.52), che contengono solamente il modulo del vettore $\mathbf{r}_2$ tramite il coefficiente $u = \mu/r_2^3$. Così, ponendo

$$f_k \simeq 1 - \frac{\mu t_k^2}{2r_2^3}\,, \qquad g_k \simeq t_k - \frac{\mu t_k^3}{6r_2^3}\,, \tag{2.9}$$

si introduce nelle (2.8) solo una incognita aggiuntiva (r_2). Occorre dunque un'altra equazione da aggiungere al sistema: questa può essere ottenuta elevando al quadrato la (2.2) nel caso $k = 2$

$$r_2^2 = \rho_2^2 + 2\rho_2\,\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{R}_2 + R_2^2\,; \tag{2.10}$$

le (2.8) e (2.10) costituiscono quindi un sistema di quattro equazioni nelle quattro incognite ρ_1, ρ_2, ρ_3 ed r_2, che deve essere risolto per poter ottenere i vettori $\mathbf{r}_k$ (dalla (2.2)) ed $\dot{\mathbf{r}}_2$ (per mezzo delle (2.6)); i due vettori $\mathbf{r}_2$ ed $\dot{\mathbf{r}}_2$ definiscono le condizioni iniziali del moto, cioè costituiscono la soluzione cercata del problema; gli elementi orbitali possono essere ricavati dai vettori $\mathbf{r}_2$ ed $\dot{\mathbf{r}}_2$ con il metodo esposto nell'Appendice A). Prima di procedere con la soluzione notiamo che il fatto di aver introdotto le approssimazioni (2.9) produce due effetti:

1) la soluzione trovata dalle equazioni (2.8) e (2.10) non sarà una soluzione esatta del problema posto, cioè l'orbita corrispondente alle condizioni iniziali $(\mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_2)$ non sarà esattamente compatibile con le osservazioni $\mathbf{s}_k$; si rende perciò necessario un secondo stadio di calcolo (basato su un procedimento iterativo), in cui la precisione della soluzione è migliorata;

2) siccome le serie troncate (2.9) sono in grado di rappresentare approssimativamente l'orbita solo per un tempo abbastanza corto (una frazione non troppo grande del periodo orbitale), ne consegue che il metodo di Gauss è applicabile solo quando le tre osservazioni disponibili sono abbastanza ravvicinate nel tempo. Questa non è di solito una grave limitazione, in quanto il metodo è utile soprattutto nel caso di oggetti appena scoperti (tipicamente asteroidi), di cui non si conosce ancora l'orbita e che perciò devono essere "seguiti" notte per notte per non essere "persi"; di solito quindi le prime misurazioni astrometriche disponibili sono per forza di cose ravvicinate. In seguito, quando

le osservazioni si accumulano, il problema diventa quello di migliorare e correggere la determinazione iniziale dell'orbita tenendo conto delle nuove misurazioni; questo problema però richiede procedimenti di altro tipo, basati sul metodo dei minimi quadrati (vedi Capitolo IV).

2.3 La soluzione preliminare

Per risolvere il sistema costituito dalle (2.8) e (2.10), calcoliamo dapprima l'espressione esplicita dei coefficienti c_1 e c_3: dalle (2.9) si ricava

$$f_1 g_3 - f_3 g_1 \simeq \left(t_3 - t_1\right)\left[1 - \frac{\mu(t_3 - t_1)^2}{6r_2^3} + \frac{\mu^2 t_1^2 t_3^2}{12 r_2^6}\right] ,$$

che si può approssimare (trascurando le potenze di t_k superiori alla terza come infinitesimi di ordine superiore, analogamente a quanto fatto nelle (2.9)) come

$$f_1 g_3 - f_3 g_1 \simeq \tau_{13}\left[1 - \frac{t_{13}^2}{6r_2^3}\right] , \qquad \left(\text{dove } t_{13} = t_3 - t_1\right).$$

Per $|\alpha|, |\beta| \ll 1$ si può porre $(1+\alpha)^{-1} \simeq 1-\alpha$ e $(1+\alpha)(1+\beta) \simeq 1+\alpha+\beta$ (a meno di infinitesimi di ordine superiore); mantenendo lo stesso grado di approssimazione delle formule precedenti si può dunque scrivere

$$\frac{1}{f_1 g_3 - f_3 g_1} \simeq \frac{1}{t_{13}}\left[1 + \frac{\mu t_{13}^2}{6r_2^3}\right] ,$$

e le (2.7) diventano

$$\begin{aligned} c_1 &\simeq \frac{t_3}{t_{13}}\left[1 + \frac{\mu}{6r_2^3}\left(t_{13}^2 - t_3^2\right)\right] = A_1 + \frac{B_1}{r_2^3} \\ c_3 &\simeq -\frac{t_1}{t_{13}}\left[1 + \frac{\mu}{6r_2^3}\left(t_{13}^2 - t_1^2\right)\right] = A_3 + \frac{B_3}{r_2^3} , \end{aligned} \tag{2.11}$$

dove si è posto per brevità

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{t_3}{t_{13}} , \qquad & B_1 &= \frac{\mu t_3}{6t_{13}}\left(t_{13}^2 - t_3^2\right) , \\ A_3 &= -\frac{t_1}{t_{13}} , \qquad & B_3 &= -\frac{\mu t_1}{6t_{13}}\left(t_{13}^2 - t_1^2\right) . \end{aligned} \tag{2.12}$$

La (2.8) può essere espressa in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1\rho_1 \\ c_2\rho_2 \\ c_3\rho_3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

con

$$G_i = \sum_{k=1}^{3} R_{ik} c_k\,, \tag{2.14}$$

dove si sono indicate con S_{ik} ed R_{ik} le componenti $i$esime dei vettori $\mathbf{s}_k$ ed $\mathbf{R}_k$. Invertendo la matrice S_{ik} si ottiene

$$c_k \rho_k = -\sum_{i=1}^{3} S^{-1}_{ki} G_i \tag{2.15}$$

cioè, nel caso di $k = 2$,

$$\rho_2 = \sum_{i=1}^{3} S^{-1}_{2i} G_i\,.$$

Sostituendo in questa espressione le (2.14) e (2.11) si ottiene

$$\rho_2 = \sum_{i=1}^{3} S^{-1}_{2i} \sum_{k=1}^{3} R_{ik} c_k = A^*_2 + \frac{B^*_2}{r_2^3}\,, \tag{2.16}$$

dove

$$A^*_2 = \sum_{i=1}^{3} S^{-1}_{2i} \sum_{k=1}^{3} R_{ik} A_k\,, \qquad B^*_2 = \sum_{i=1}^{3} S^{-1}_{2i} \sum_{k=1}^{3} R_{ik} B_k\,. \tag{2.17}$$

Sostituendo la (2.16) nella (2.10) si ottiene infine

$$r_2^8 - \big[A^{*2}_2 + 2A^*_2 \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{R}_2 + R_2^2\big] r_2^6 - \big[2A^*_2 B^*_2 + 2B^*_2 \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{R}_2\big] r_2^3 - B^{*2}_2 = 0\,, \tag{2.18}$$

che è un'equazione di ottavo grado nell'unica incognita r_2: la sua soluzione[(1)] fornisce quindi il valore di r_2. Da r_2 si possono poi ricavare i valori di f_k e g_k (dalle (2.9)) e i coefficienti c_1 e c_3 (dalle (2.11)), quindi i valori ρ_k delle distanze pianeta-osservatore al tempo delle misure (dalla (2.15)). Dalle (2.2) si ottengono quindi le tre posizioni eliocentriche del pianeta $\mathbf{r}_k$; le (2.6) permettono poi di ottenere $\dot{\mathbf{r}}_2$, ad esempio

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = \frac{\mathbf{r}_1 - f_1 \mathbf{r}_2}{g_1}\,. \tag{2.19}$$

I due vettori $(\mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_2)$ così trovati costituiscono la prima approssimazione alle condizioni iniziali cercate.

---

(1) Non esiste un metodo algebrico per trovare la soluzione di un'equazione di ottavo grado del tipo della (2.18); esistono però diversi metodi numerici (su cui qui non ci soffermiamo) per calcolare gli zeri di un polinomio di grado arbitrario; in una implementazione del metodo su calcolatore, questi possono usualmente essere utilizzati "a scatola chiusa" come chiamate a sottoprogrammi di libreria.

Bisogna notare che la (2.18) può ammettere più di una soluzione reale positiva. Infatti un polinomio di ottavo grado ha in generale otto zeri nel campo complesso; ovviamente nel nostro caso hanno significato fisico solo le soluzioni della (2.18) che sono reali e positive; il numero di queste soluzioni sarà variabile da caso a caso, in funzione del valore dei coefficienti dell'equazione (2.18). Si ha quindi il problema di scegliere tra le varie soluzioni "a priori possibili" quella che corrisponde all'orbita reale del pianeta osservato. A volte alcune soluzioni possono essere scartate per considerazioni di verosimiglianza: ad esempio, alcune radici possono portare ad orbite iperboliche, caso che per semplicità abbiamo escluso dalla presente trattazione e che si considera non realistico per un asteroide (ma attenzione: alcune comete si muovono su orbite iperboliche, e non è sempre facile distinguere una cometa da un asteroide!). In generale però la scelta tra le diverse soluzioni può essere fatta con sicurezza solo ricorrendo ad un'altra osservazione, che sarà compatibile solo con una delle orbite calcolate.

2.4 La correzione della soluzione preliminare

La correzione della soluzione preliminare ottenuta nel paragrafo precedente al fine di ottenere condizioni iniziali che siano esattamente compatibili con le osservazioni può essere effettuata con diversi metodi, che hanno però in comune lo stesso procedimento iterativo. Questo si basa sul fatto che, utilizzando i valori preliminari di $(\mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_2)$, è possibile calcolare le serie f e g (e quindi i coefficienti c_1 e c_3) con una precisione superiore a quella consentita dalle espressioni (2.9); con questi nuovi valori di c_k è possibile ricalcolare G_i (equazione (2.14)) e ρ_k (equazione (2.15)); dalle (2.2) si ottengono dunque $\mathbf{r}_k$ e da questi (per mezzo della (2.19)) i nuovi valori di $(\mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_2)$. A questo punto il procedimento può essere ripetuto un numero arbitrario di volte, fino al raggiungimento della convergenza. I diversi metodi si differenziano solamente per il modo in cui i valori di f_k e g_k sono calcolati a partire da $(\mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_2)$.

Il procedimento più ovvio sembrerebbe quello di utilizzare direttamente le definizioni (1.52) delle serie f e g. Questo metodo però non è molto adatto alla implementazione in un programma di calcolo automatico: infatti i termini delle serie (1.52) hanno espressioni diverse gli uni dagli altri e vanno quindi programmati separatamente. Inoltre sarebbe comunque inevitabile troncare la serie ad un potenza prefissata di t: ciò introduce ancora una approssimazione, mentre in questo stadio vorremmo usare espressioni esatte. Una espressione esatta ed in forma chiusa delle serie f e g è ricavata nell'Appendice B; nel nostro caso, le equazioni

$(B.7)$ e $(B.8)$ prendono la forma

$$
\begin{aligned}
f_k &= 1 - \left[\frac{1 - \cos(E_k - E_2)}{1 - e\cos E_2} \right] \,, \\
g_k &= t_k - \frac{1}{n} \Big[(E_k - E_2) - \sin(E_k - E_2) \Big] \,.
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

Nelle espressioni (2.20) compaiono l'eccentricità orbitale e, il moto medio n ed i valori dell'anomalia eccentrica E_k ai tempi delle osservazioni t_k; questi possono essere ricavati trasformando le condizioni iniziali del moto $(\mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_2)$ in elementi orbitali, come spiegato nell'Appendice A. Riassumendo, i passi da eseguire per la correzione dei valori di $(\mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_2)$ sono:

1) ricavare da $(\mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_2)$ gli elementi orbitali (seguendo il procedimento indicato nell'Appendice A); in particolare occorre ottenere e, n ed M_2 (valore dell'anomalia media al tempo t_2);

2) calcolare i valori dell'anomalia media ai tempi delle misure

$$M_k = M_2 + n(t_k - t_2)\,;$$

3) calcolare i valori E_k dell'anomalia eccentrica ai tempi delle misure, risolvendo l'equazione di Keplero

$$M_k = E_k - e\sin E_k\,;$$

4) calcolare i valori di f_k e g_k usando l'equazione (2.20);

5) calcolare i valori di c_1 e c_3 usando l'equazione (2.7);

6) calcolare G_i dalla (2.14);

7) ricavare ρ_k dalla (2.15);

8) ricalcolare $\mathbf{r}_k$ dalla (2.2);

9) ricalcolare $\dot{\mathbf{r}}_2$ dalla (2.19).

Con i nuovi valori di $(\mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_2)$ così ottenuti si può ritornare al punto 1) ed iterare il procedimento quante volte è necessario. Siccome in questo algoritmo non è stata introdotta nessuna approssimazione, il valore delle condizioni iniziali che si ottiene a convergenza raggiunta corrisponde all'orbita che passa esattamente per le tre osservazioni date.

Capitolo III

Cenni sul metodo dei minimi quadrati

3.1 Modello dell'esperimento e osservabili

Un tipo di problema molto comune in fisica sperimentale è quello della *stima di parametri fisici non direttamente osservabili* attraverso la misura di grandezze che siano ad essi collegate per mezzo di una espressione matematica nota (legge fisica) che si assume come modello dell'esperimento; un problema di questo tipo è ad esempio quello della determinazione degli elementi orbitali di un pianeta a partire da un certo insieme di osservazioni della sua posizione apparente sulla volta celeste.

In termini del tutto generali la formulazione matematica del problema è di questo tipo: si vuole determinare il valore di un certo insieme di M parametri β_k ($k = 1, 2, \ldots, M$) attraverso la misurazione di un certo numero N di *osservabili* x_i ($i = 1, 2, \ldots, N$); le osservabili sono funzioni dei parametri attraverso funzioni *note* f_i dei parametri, che si assumono come modello matematico in grado di descrivere l'esperimento

$$x_i = f_i(\beta_k) \tag{3.1}$$

(*equazioni di osservazione*). Si possono quindi avere tre casi:

1) $N < M$: il numero di osservabili è minore del numero di parametri da determinare;

2) $N = M$: il numero di osservabili è uguale al numero di parametri da determinare;

3) $N > M$: il numero di osservabili è maggiore del numero di parametri da determinare.

Nel primo caso il problema è indeterminato (l'esperimento è progettato male perché nelle osservabili non c'è abbastanza informazione per ricavare tutti i parametri); nel secondo caso la soluzione è (in linea di principio) banale: si tratta solo di invertire il sistema di equazioni (3.1). Il caso che ci interessa è invece il terzo, in cui l'informazione fornita dall'esperimento è sovrabbondante; questo fa sì che in generale le equazioni di osservazione non siano risolubili esattamente. Infatti il modello adottato per l'esperimento ha sempre un certo grado di approssimazione (a seconda dei punti di vista si può dire che la teoria è incompleta o che le misure sono soggette ad errore); in altre parole le equazioni di osservazione vanno riscritte più esattamente

$$x_i = f_i(\beta_k) + \varepsilon_i \tag{3.2}$$

dove ε_i sono gli *scarti*. Si noti il diverso ruolo che hanno le variabili che compaiono nella (3.2): le x_i sono i risultati delle misure e quindi sono note; i parametri β_k sono ignoti e devono essere determinati; gli scarti ε_i sono ignoti e per definizione non possono essere conosciuti (se si avesse idea dei meccanismi che li producono, questi potrebbero essere inclusi nel modello deterministico f_i, eventualmente introducendo nuovi parametri β_k che li descrivano), quindi devono essere trattati da un punti di vista *statistico*, sfruttando la sovrabbondanza delle misure per ridurre l'indeterminazione introdotta dalla presenza degli errori.

In altre parole la presenza degli errori rende impossibile la determinazione del valore "vero" dei parametri β_k; il massimo che si può ottenere è una stima $\hat{\beta}_k$, soggetta ad un margine di incertezza, dedotta da una ipotesi sul comportamento degli scarti; in particolare, una richiesta che sembra ragionevole è che gli scarti siano il più possibile piccoli. Il metodo dei minimi quadrati si basa sul principio che la stima più attendibile dei parametri $\hat{\beta}_k$ sia quella che si ottiene imponendo che la somma dei quadrati degli scarti

$$\phi = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^2 \tag{3.3}$$

sia minima. Accettando questo principio come un assioma, cerchiamo ora di ricavarne un algoritmo per il calcolo dei parametri $\hat{\beta}_k$.

3.2 Minimi quadrati (caso lineare)

Semplifichiamo la matematica del problema supponendo che le funzioni f_i siano *lineari* nei parametri β_k; in altre parole supponiamo che la (3.2) sia della forma(1)

$$x_i = A_{ik}\beta_k + \varepsilon_i \tag{3.4}$$

dove A_{ik} è una matrice rettangolare $N \times M$ generica (ma nota). Nella funzione da minimizzare

$$\phi = \varepsilon_i \varepsilon_i \tag{3.5}$$

gli scarti ε_i sono funzioni dei parametri da determinare e delle misure

$$\varepsilon_i = x_i - A_{ik}\beta_k \, . \tag{3.6}$$

(1) Usiamo qui la convenzione per cui si sottintende la sommatoria su indici ripetuti.

La soluzione che risponde al criterio dei minimi quadrati si ottiene imponendo

$$\frac{\partial \phi}{\partial \beta_k} = 0$$

cioè

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \phi}{\partial \beta_k} = \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \beta_k}\varepsilon_i = -A_{ik}(x_i - A_{ij}\beta_j) = 0 \tag{3.7}$$

che si può scrivere

$$A_{ik}A_{ij}\beta_j = A_{ik}x_i$$

o, usando una notazione matriciale più compatta,

$$A'A\beta = A'x\,, \tag{3.8}$$

dove con A' si è indicata la trasposta della matrice A. Se la matrice $A'A$ è invertibile, la (3.8) fornisce una unica soluzione

$$\hat{\beta} = (A'A)^{-1}A'x\,. \tag{3.9}$$

Ricordiamo a questo punto un risultato generale di algebra lineare secondo cui, per una generica matrice A $(N \times M)$, il rango della matrice prodotto $A'A$ è uguale al rango di A; ne consegue che $A'A$ è invertibile se e solo se A ha rango uguale ad M. È facile convincersi che questa è una richiesta abbastanza ragionevole per un esperimento ben progettato; infatti, se A ha rango minore di M vuol dire che l'applicazione $\beta \mapsto x$ possiede un nucleo non banale, cioè che *esistono combinazioni lineari non banali dei parametri β che non incidono sulle osservabili*; in altre parole, alcuni dei parametri β sono inutili alla descrizione dell'esperimento e posso eliminarli, riducendo le dimensioni della matrice fino a che M coincide con il rango di A. Nel seguito supporremo sempre di non avere parametri sovrabbondanti; in questo caso il problema dei minimi quadrati ha un'unica soluzione che è data dalla (3.9).

Una notevole proprietà della soluzione (3.9) è espressa dalla (3.7), che riscriviamo nella forma

$$\varepsilon_i A_{ik} = 0\,; \tag{3.10}$$

questa è una relazione di ortogonalità tra il vettore degli scarti e le colonne della matrice A. Poiché le colonne di A costituiscono i vettori di base della varietà di

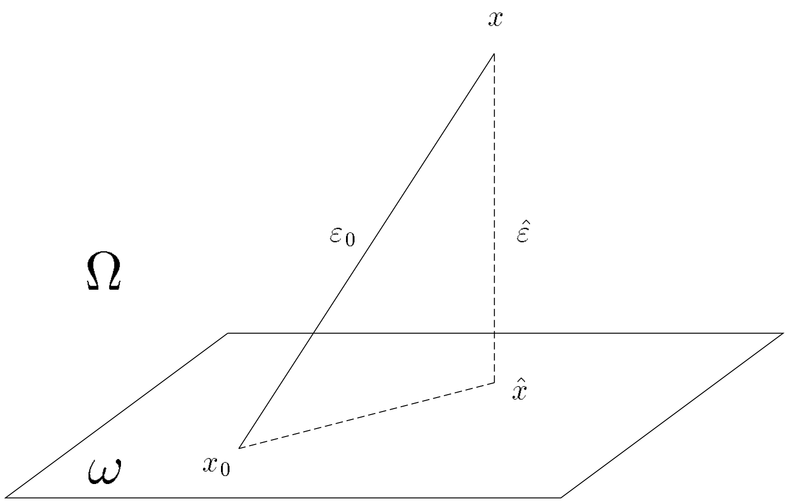

Figura 1. Interpretazione geometrica del metodo dei minimi quadrati.

tutti i risultati conformi alla teoria, questa proprietà si può esprimere dicendo che *gli scarti sono ortogonali alla varietà dei risultati ammissibili.*

Si può quindi dare una semplice interpretazione geometrica del metodo dei minimi quadrati (Figura 1). Il risultato della misura x è un punto in uno spazio Ω di dimensione N; la teoria prevede che i risultati ammissibili dell'esperimento non siano punti qualsiasi di Ω, ma appartengano ad una varietà lineare $\omega \subset \Omega$ avente dimensione $M < N$. Anche il valore "vero" x_0 del risultato dell'esperimento (il valore che si otterrebbe se si potessero eliminare tutte le cause di errore) appartiene a tale varietà: $x_0 \in \omega$. Il risultato sperimentale x però non coincide con il valore ideale x_0 perché contiene anche un errore di misura: $x = x_0 + \varepsilon_0$; siccome lo scarto ε_0 è un vettore generico di Ω, ne consegue che in generale x non appartiene alla varietà ω. Il problema consiste allora nell'associare ad x un punto $\hat{x} \in \omega$ che costituisca la nostra stima di x_0: il metodo dei minimi quadrati sceglie come $\hat{x}$ il punto di ω più vicino ad x secondo la metrica euclidea (3.5), cioè la proiezione ortogonale di x sulla varietà ω. In questo modo si ottiene anche una stima degli errori di misura $\hat{\varepsilon} = x - \hat{x}$.

3.3 La propagazione della covarianza

Introduciamo ora una interpretazione statistica del metodo dei minimi quadrati: assumiamo che gli scarti ε_i siano variabili stocastiche, cioè quantità il cui valore è sconosciuto nella particolare realizzazione dell'esperimento (misurazione) con cui abbiamo a che fare, ma di cui si suppone di conoscere le *proprietà medie* (dove la media si intende rispetto ad una ipotetica ripetizione della misura nelle stesse condizioni).

In generale una variabile stocastica è descritta da una *misura di probabilità* definita sull'insieme dei possibili valori assunti dalla variabile stessa (cioè dei possibili risultati dell'esperimento). Nel caso di una variabile x definita sulla retta reale $\Re$, tale misura può essere espressa nella forma di una funzione non negativa $p(x)$ (*densità di probabilità*); la probabilità $P(S)$ che l'esito dell'esperimento dia un valore $x \in S \subset \Re$ è data dall'integrale di $p(x)$ su S

$$P(S) = \int_S p(x)\, dx\,;$$

il *valore atteso* o di aspettazione di una qualsiasi funzione $y(x)$ della variabile stocastica x è definito da

$$E[y] = \int_{\Re} y(x)\, p(x)\, dx\,. \tag{3.11}$$

La misura di probabilità definisce completamente la variabile stocastica, nel senso che tutte le proprietà statistiche della variabile possono essere dedotte da questa; spesso però una informazione così completa non è disponibile, o non è comoda da usare, e ci si limita a particolari integrali di probabilità, detti momenti. Si chiama *momento semplice* di ordine k della variabile stocastica x la quantità

$$m_k = E\left[x^k\right] = \int_{\Re} x^k\, p(x)\, dx\,; \tag{3.12}$$

in particolare il momento semplice del primo ordine $m_1 = \overline{x}$ è il *valore medio* di x. Si chiama *momento centrato* di ordine k la quantità

$$\mu_k = E\left[(x-\overline{x})^k\right] = \int_{\Re} (x-\overline{x})^k\, p(x)\, dx\,; \tag{3.13}$$

il momento centrato del secondo ordine $\mu_2 = \mathrm{var}(x) = \sigma^2$ è la *varianza* della variabile x; la sua radice quadrata σ è la *deviazione standard* di x. Spesso una variabile stocastica è descritta usando semplicemente la sua media (che dà un'indicazione sul valore su cui è centrata la distribuzione di probabilità) e la sua varianza (che descrive la dispersione della distribuzione di probabilità attorno al suo valore medio).

Nel caso di una variabile stocastica vettoriale $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Re^n$, il valore medio $\overline{x}$ è ovviamente un vettore; la varianza è sostituita da una matrice $n \times n$ (*matrice di covarianza*)[2]

$$C_{xx} = E\left[(x - \overline{x})(x - \overline{x})'\right] \; ; \tag{3.14}$$

gli elementi diagonali $c_{ii} = E[(x_i - \overline{x}_i)^2]$ sono le varianze σ_i^2 degli elementi del vettore x_i; gli elementi fuori diagonale $c_{ik} = E[(x_i - \overline{x}_i)(x_k - \overline{x}_k)]$ sono le *covarianze* tra gli elementi x_i e x_k; la quantità adimensionale

$$\rho_{ik} = \frac{c_{ik}}{\sqrt{c_{ii}c_{kk}}} = \frac{c_{ik}}{\sigma_i \sigma_k} \tag{3.15}$$

è il *coefficiente di correlazione* tra x_i ed x_k.

Poiché il valore di aspettazione (3.11) è un funzionale lineare, l'operatore di media $E[\cdot]$ commuta con una trasformazione lineare della variabile stocastica; cioè, se $y \in \Re^m$ è una funzione lineare di $x \in \Re^n$

$$y = Bx$$

(dove B è una matrice $m \times n$), risulta

$$\overline{y} = E[y] = E[Bx] = B\,E[x] = B\overline{x} \, ; \tag{3.16}$$

analogamente, la matrice di covarianza si trasforma secondo una trasformazione di equivalenza

$$\begin{aligned} C_{yy} &= E[(y - \overline{y})(y - \overline{y})'] = E[(Bx - B\overline{x})(Bx - B\overline{x})'] \\ &= E[B(x - \overline{x})(x - \overline{x})'B'] = B\,E[(x - \overline{x})(x - \overline{x})']\,B' \\ &= BC_{xx}B' \end{aligned} \tag{3.17}$$

(*legge di propagazione della covarianza*).

---

(2) La matrice di covarianza è sempre una matrice *definita positiva*: infatti il prodotto

$$\alpha' C_{xx} \alpha$$

(dove $\alpha \in \Re^n$) è la varianza della combinazione lineare $s = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$ (questo è un caso particolare della (3.17), in cui $m = 1$) e quindi è una quantità positiva.

Ritornando al metodo dei minimi quadrati, spesso si assume (per semplicità o per mancanza di informazioni più precise) che gli scarti ε_i siano variabili stocastiche non correlate ed aventi la stessa varianza σ_0^2; si assume cioè che la matrice di covarianza degli scarti sia proporzionale alla matrice unità I

$$C_{\varepsilon\varepsilon} = \sigma_0^2\, I\,; \tag{3.18}$$

applicando la legge di propagazione della covarianza (3.17) allo stimatore (3.9) si ottiene allora l'espressione della matrice di covarianza dei parametri stimati

$$\begin{aligned} C_{\hat\beta\hat\beta} &= (A'A)^{-1}A'C_{\varepsilon\varepsilon}A(A'A)^{-1} = \sigma_0^2(A'A)^{-1}A'IA(A'A)^{-1} \\ &= \sigma_0^2(A'A)^{-1} \end{aligned} \tag{3.19}$$

3.4 Minimi quadrati pesati

La scelta di minimizzare la funzione definita dalla (3.3) è naturale quando la matrice di covarianza degli scarti è della forma (3.18) (se tutti gli scarti hanno uguale varianza e sono non correlati, non c'è ragione di pesarli in modo diverso nella forma quadratica ϕ). Più rigorosamente, è possibile dimostrare che, nell'ipotesi (3.18), lo stimatore che deriva dalla (3.3) gode di alcune proprietà di ottimalità: in particolare, è lo stimatore *lineare* di minore varianza. Se inoltre si assume che la distribuzione degli scarti sia *normale*, si ha un risultato ancora più forte: lo stimatore (3.9) è quello di minore varianza tra tutti gli stimatori (lineari e non) *centrati*, cioè che conservano il valore medio.

Consideriamo ora il caso in cui la matrice di covarianza degli scarti $C_{\varepsilon\varepsilon}$ sia piena; questo caso si può sempre ricondurre al caso (3.18) (scarti non correlati e varianze uguali) attraverso una opportuna trasformazione lineare

$$\eta = P\varepsilon\,, \tag{3.20}$$

tale che la nuova matrice di covarianza $C_{\eta\eta}$ sia la matrice unità[3]

$$C_{\eta\eta} = PC_{\varepsilon\varepsilon}P' = I\,. \tag{3.21}$$

---

[3] Dimostrazione: siccome $C_{\varepsilon\varepsilon}$ è una matrice definita positiva, può sempre essere diagonalizzata con una matrice ortogonale; esiste cioè una matrice ortogonale Q tale che

$$QC_{\varepsilon\varepsilon}Q' = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2)\,,$$

e gli autovalori σ_i^2 sono positivi; perciò la matrice P definita da

$$P = \mathrm{diag}(1/\sigma_1, 1/\sigma_2, \ldots, 1/\sigma_n)\, Q$$

soddisfa la (3.21).

Applicando la trasformazione P, il problema originario (3.4) può essere formalmente trasformato in un nuovo problema ai minimi quadrati

$$y = Bx + \eta \qquad (\text{dove } y = Px,\ B = PA)$$

in cui la matrice di covarianza degli scarti è uguale alla matrice unità. Dalla (3.21) risulta

$$C_{\varepsilon\varepsilon} = P^{-1}P'^{-1} = (P'P)^{-1}$$

e quindi la funzione da minimizzare (3.3) diventa

$$\phi = \varepsilon' P' P \varepsilon = \varepsilon' W \varepsilon\,; \tag{3.22}$$

il criterio dei minimi quadrati è stato modificato introducendo una *matrice dei pesi* $W = P'P$ uguale all'inversa della matrice di covarianza degli scarti

$$W = C_{\varepsilon\varepsilon}^{-1}\,. \tag{3.23}$$

La soluzione, applicando la (3.9), risulta

$$\hat\beta = (B'B)^{-1}B'y = (A'P'PA)^{-1}A'P'Px = (A'WA)^{-1}A'Wx\,; \tag{3.24}$$

la matrice di covarianza dei parametri stimati $\hat\beta$ è data da

$$C_{\hat\beta\hat\beta} = (A'WA)^{-1}\,. \tag{3.25}$$

Geometricamente, il criterio (3.22) può ancora essere interpretato come la ricerca del punto x_0 dell'ipersuperficie delle soluzioni ammissibili più vicino al valore osservato x, in uno spazio in cui la metrica non è più quella euclidea, ma è data dalla forma quadratica (3.22).

3.5 La stima di σ_0^2

Spesso l'informazione *a priori* che si ha sulla matrice di covarianza è incompleta; in molti casi si assume una espressione del tipo (3.18), in cui la costante di proporzionalità σ_0^2 non è nota e deve essere stimata *a posteriori* dai risultati della stima. Uno stimatore di σ_0^2 sarebbe $\varepsilon'\varepsilon/N$, ma dobbiamo notare che non conosciamo i valori "veri" degli scarti ε, ma solo una loro stima $\hat\varepsilon$, dipendente dalla stima dei parametri (3.9); le due quantità sono collegate dalla relazione

$$\varepsilon = x - A\beta = (x - A\hat\beta) + A(\hat\beta - \beta) = \hat\varepsilon + A(\hat\beta - \beta)\,. \tag{3.26}$$

In questa equazione, $A(\hat\beta-\beta)$ è un vettore appartenente all'immagine di A, mentre $\hat\varepsilon$ è ortogonale all'immagine di A (equazione (3.10)). Possiamo quindi scegliere in

$\Re^N$ una nuova base ortonormale tale che il vettore ε si trasformi in un vettore $\delta = T\varepsilon$ (dove T è una matrice ortogonale) i cui primi M elementi costituiscono una base per la varietà delle soluzioni possibili, e i rimanenti $N - M$ elementi costituiscono una base per la varietà degli scarti stimati $\hat{\varepsilon}$; in questa nuova base il vettore $\hat{\varepsilon}$ assume dunque la forma[(4)]

$$\hat{\varepsilon} = (\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \ldots, \hat{\varepsilon}_N) \mapsto (0, 0, \ldots, 0, \delta_{M+1}, \delta_{M+2}, \ldots, \delta_N)\,. \tag{3.27}$$

Notiamo a questo punto che una trasformazione ortogonale T lascia invariata la forma (3.18) della matrice di covarianza

$$C_{\delta\delta} = \sigma_0^2 TIT' = \sigma_0^2 TT^{-1} = \sigma_0^2 I\,,$$

per cui il calcolo della varianza di $\hat{\varepsilon}$ risulta immediato

$$E[\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}] = \sum_{i=M+1}^{N} E[\delta_i^2] = (N - M)\sigma_0^2\,,$$

da cui si ricava l'espressione di uno stimatore per σ_0^2

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{N - M}\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}\,. \tag{3.28}$$

In modo analogo si può procedere se si assume per la matrice di covarianza degli errori un modello del tipo

$$C_{\varepsilon\varepsilon} = \sigma_0^2 \Sigma\,. \tag{3.29}$$

dove Σ è una matrice nota e σ_0^2 è un parametro da determinare[(5)]; in questo caso l'espressione dello stimatore per σ_0^2 è

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{N - M}\hat{\varepsilon}'\Sigma^{-1}\hat{\varepsilon}\,. \tag{3.30}$$

---

(4) Riprendendo l'analogia geometrica della Figura 1, si può dire che M componenti del vettore degli scarti sono proiettate sulla varietà ω e determinano l'errore di stima $\hat{\beta} - \beta$; solo le rimanenti $N - M$ componenti rimangono nel vettore dei residui $\hat{\varepsilon}$, la cui "lunghezza" è perciò ridotta da $\sqrt{N}\sigma_0$ a $\sqrt{N - M}\sigma_0$.

(5) Si noti che il valore di σ_0^2 è ininfluente sulla soluzione (3.24), che è invariante rispetto ad un fattore moltiplicativo arbitrario in W, per cui si può porre ad esempio $W = \Sigma^{-1}$.

3.6 Linearizzazione di un problema non lineare

Ritorniamo ora al caso di un problema di stima *non lineare*, descritto da un'equazione generica del tipo (3.1); questo problema si può risolvere approssimativamente con un metodo di linearizzazione ed approssimazioni successive, che si compone dei seguenti passi:

1) si parte da una stima iniziale dei parametri $\beta_k^{(0)}$, sufficientemente vicina al valore "vero", a cui corrisponde una soluzione di tentativo $x_i^{(0)} = f_i(\beta_k^{(0)})$;

2) si linearizza l'equazione (3.1) nell'intorno di $\beta_k^{(0)}$ con uno sviluppo di Taylor troncato al primo termine

$$x_i^{(0)} + \Delta x_i = f_i(\beta_k^{(0)}) + \frac{\partial f_i}{\partial \beta_k} \Delta \beta_k \, ; \tag{3.31}$$

le equazioni di osservazione per gli incrementi Δx, $\Delta\beta$ sono ora del tipo della (3.4), dove il ruolo della matrice A è svolto dalla matrice jacobiana della funzione f calcolata nel punto $\beta^{(0)}$;

3) si risolve il problema così linearizzato secondo il procedimento solito (equazione (3.9) o (3.24)) e si trova una nuova stima dei parametri $\hat{\beta} = \beta^{(0)} + \Delta\hat{\beta}$;

4) si assume la soluzione trovata come nuovo punto di linearizzazione $\beta^{(0)}$ e si itera il procedimento fino a convergenza, cioè finché la variazione dei parametri $\Delta\beta$ tra un passo e il successivo è molto più piccola della loro incertezza statistica (data dalla (3.19) o (3.25)).

Capitolo IV

Correzione differenziale di un'orbita kepleriana

4.1 Definizione delle osservabili

Affrontiamo ora il problema della correzione differenziale dei parametri orbitali di un'orbita kepleriana; supponiamo cioè di avere una serie di osservazioni della posizione di un corpo celeste a tempi diversi e di voler determinare i parametri orbitali che meglio si adattano ad esse, assumendo come modello dinamico un'orbita kepleriana (trascurando cioè ogni possibile perturbazione al problema dei due corpi). Questo è un tipico problema di minimi quadrati e, siccome le equazioni che danno la soluzione del problema dei due corpi sono non lineari, dobbiamo linearizzarle, riducendoci ad un sistema di equazioni di osservazione del tipo (3.31). Ciò significa tra l'altro che il metodo che andiamo a descrivere presuppone la conoscenza di un valore approssimato degli elementi orbitali da cui far partire il procedimento iterativo di linearizzazione e correzione; tale valore di partenza può essere ottenuto utilizzando uno dei metodi di determinazione dell'orbita a partire da tre osservazioni, applicato a tre osservazioni opportunamente scelte tra quelle disponibili.

Riguardo alla natura delle osservabili, consideriamo due casi: 1) osservazione di un sistema stellare binario (visuale); 2) osservazione di un pianeta o asteroide del Sistema Solare, cioè in orbita attorno al Sole.

4.2 Sistema binario visuale

Nel caso di di un sistema stellare binario la riduzione della lastra o la misurazione micrometrica visuale forniscono direttamente (a meno di un fattore di scala introdotto dalla distanza) la proiezione della posizione relativa dei due astri su di un piano ortogonale alla linea di vista; assumendo per convenzione tale piano come piano (x_1, x_2), si può dire che l'osservazione fornisce direttamente le coordinate inerziali x_1 e x_2; la coordinata x_3 si traduce in una variazione della distanza tra la stella e l'osservatore e non è perciò direttamente misurabile. Ciò implica che l'orientazione dell'orbita nello spazio non è completamente determinabile: infatti se l'orbita viene trasformata nella sua immagine riflessa sul piano (x_1, x_2), la sua proiezione su tale piano non cambia. Tale riflessione corrisponde ad uno scambio tra nodo ascendente e discendente, cioè ad una trasformazione $\Omega \to \Omega + \pi$, $\omega \to \omega + \pi$, e quindi i parametri orbitali sono determinabili dalle osservazioni a meno di una trasformazione simile.[1] È convenzione assumere l'asse x_1 orientato nella direzione del polo nord celeste e l'asse x_2 orientato nella direzione della ascensione retta crescente.

Poiché la distanza del sistema binario dalla Terra non è mai nota con precisione sufficiente, le osservazioni di x_1 e x_2 sono mantenute nella forma di angoli (in secondi d'arco); ciò significa che anche il valore del semiasse maggiore a risulterà espresso in secondi d'arco. Inoltre la costante di massa del sistema $\mu = G(m_0+m_1)$ è sconosciuta, quindi anche il moto medio n (o il periodo orbitale T) deve essere determinato *indipendentemente dal semiasse maggiore*. Se d'altra parte è nota la distanza del sistema dalla Terra, dagli elementi orbitali ottenuti è possibile ottenere una stima della somma delle masse delle due stelle.

In conclusione, per poter applicare il metodo dei minimi quadrati a misure di posizione relativa di stelle binarie è necessario ricavare le derivate parziali

$$\frac{\partial x_1}{\partial \beta_k} \quad \text{e} \quad \frac{\partial x_2}{\partial \beta_k} \qquad (k = 1, 2, \dots, 7)$$

delle ccordinate x_1 e x_2 rispetto ai sei elementi kepleriani e al moto medio.

4.3 Pianeta del Sistema Solare

Nel caso di di un pianeta del Sistema Solare le osservazioni astrometriche forniscono la posizione apparente del corpo sulla volta celeste, cioè la sua ascensione retta α e declinazione δ, che sono le coordinate polari angolari del vettore posizione relativa del pianeta rispetto all'osservatore $\mathbf{r} - \mathbf{r}_{oss}$

$$\begin{cases} x_1 - x_{1oss} = \rho \cos\delta \cos\alpha \\ x_2 - x_{2oss} = \rho \cos\delta \sin\alpha \\ x_3 - x_{3oss} = \rho \sin\delta \,. \end{cases} \tag{4.1}$$

Le derivate parziali degli osservabili α e δ rispetto agli elementi orbitali β_k sono gli elementi della matrice jacobiana $\partial(\rho, \alpha, \delta)/\partial(\beta_k)$, che può essere ottenuta come prodotto delle due matrici jacobiane

$$\frac{\partial(\rho, \alpha, \delta)}{\partial(\beta_k)} = \frac{\partial(\rho, \alpha, \delta)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \, \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\beta_k)} \,. \tag{4.2}$$

[1] Questa proprietà si può dimostrare anche analiticamente: infatti la trasformazione $\Omega \to \Omega + \pi$, $\omega \to \omega + \pi$ lascia invariati gli elementi R_{11}, R_{12}, R_{21} ed R_{22} della matrice di rotazione $\mathbf{R}(\Omega, i, \omega)$ (equazioni (1.45) e (1.46)), che sono gli unici che influenzano gli osservabili x_1 e x_2.

Derivando la (4.1) si ottiene la matrice

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\rho, \alpha, \delta)} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\delta & -\rho\sin\alpha\cos\delta & -\rho\cos\alpha\sin\delta \\ \sin\alpha\cos\delta & \rho\cos\alpha\cos\delta & -\rho\sin\alpha\sin\delta \\ \sin\delta & 0 & \rho\cos\delta \end{pmatrix},$$

invertendo la quale si ottiene la prima matrice jacobiana che compare nella (4.2)

$$\frac{\partial(\rho, \alpha, \delta)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \rho\cos\alpha\cos\delta & \rho\sin\alpha\cos\delta & \rho\sin\delta \\ -\sin\alpha/\cos\delta & \cos\alpha/\cos\delta & 0 \\ -\cos\alpha\sin\delta & -\sin\alpha\sin\delta & \cos\delta \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Rimangono quindi da calcolare le derivate parziali $\partial x_i/\partial\beta_k$ delle coordinate del pianeta rispetto agli elementi orbitali; dobbiamo però osservare che, a differenza del caso di un sistema stellare binario, per un pianeta del Sistema Solare di solito si può supporre di conoscere la costante di massa del sistema.[2] In questo caso quindi, nel calcolare le derivate parziali il moto medio non va considerato come una variabile indipendente ma come una funzione del semiasse maggiore.

4.4 Derivate parziali del vettore posizione

Per calcolare le derivate del vettore posizione rispetto agli elementi orbitali usiamo la formulazione delle leggi del moto in variabili non singolari (1.57), che trascriviamo

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{R}(P, Q) \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix}. \tag{1.57}$$

Notiamo subito che in questa espressione gli elementi P e Q compaiono solo nella matrice di rotazione $\mathbf{R}(P, Q)$, per cui

$$\frac{\partial}{\partial(P, Q)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial\mathbf{R}(P, Q)}{\partial(P, Q)} \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

mentre i rimanenti elementi orbitali β_k compaiono solo nell'espressione delle coordinate nel sistema di riferimento orbitale (ξ', η', ζ'), quindi

$$\frac{\partial}{\partial(\beta_k)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{R}(P, Q) \frac{\partial}{\partial(\beta_k)} \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix} \quad (\text{per } \beta_k \neq P, Q). \tag{4.5}$$

---

[2] La massa del Sole m_S e dei pianeti maggiori del Sistema Solare m_p è conosciuta, cosicché $\mu = G(m_S + m_p)$ è noto; la massa degli asteroidi è di solito scarsamente conosciuta, ma è così piccola che si può porre con grande approssimazione $\mu = Gm_S$.

Le derivate parziali della matrice di rotazione $\mathbf{R}(P,Q)$ possono essere ottenute direttamente derivando la (1.59)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{R}(P,Q)}{\partial P} &= \frac{1}{(1+P^2+Q^2)^2}\times \\
&\begin{pmatrix} -4P(1+Q^2) & 2Q(1-P^2+Q^2) & 2(1-P^2+Q^2) \\ 2Q(1-P^2+Q^2) & 4PQ^2 & 4PQ \\ -2(1-P^2+Q^2) & -4PQ & -4P \end{pmatrix} \\
\frac{\partial \mathbf{R}(P,Q)}{\partial Q} &= \frac{1}{(1+P^2+Q^2)^2}\times \\
&\begin{pmatrix} 4P^2Q & 2P(1+P^2-Q^2) & -4PQ \\ 2P(1+P^2-Q^2) & -4Q(1+P^2) & -2(1+P^2-Q^2) \\ 4PQ & 2(1+P^2-Q^2) & -4Q \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

4.5 Derivate parziali nel sistema di riferimento orbitale

Le derivate parziali di ξ' ed η' rispetto ad h e k si ottengono direttamente dalle espressioni (1.56), tenendo conto che queste dipendono da h e k sia esplicitamente, sia attraverso γ (che è funzione di $e^2 = h^2+k^2$), sia attraverso la longitudine eccentrica F (che è funzione della longitudine media L e di h e k attraverso l'equazione di Keplero non singolare (1.54)):

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \xi'}{\partial h} &= a\gamma\big[-2h\cos F + k\sin F\big] + \frac{\partial \xi'}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial h} + \frac{\partial \xi'}{\partial F}\frac{\partial F}{\partial h} \\
\frac{\partial \xi'}{\partial k} &= a\big[\gamma h\sin F - 1\big] + \frac{\partial \xi'}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial k} + \frac{\partial \xi'}{\partial F}\frac{\partial F}{\partial k} \\
\frac{\partial \eta'}{\partial h} &= a\big[\gamma k\cos F - 1\big] + \frac{\partial \eta'}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial h} + \frac{\partial \eta'}{\partial F}\frac{\partial F}{\partial h} \\
\frac{\partial \eta'}{\partial k} &= a\gamma\big[-2k\sin F + h\cos F\big] + \frac{\partial \eta'}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial k} + \frac{\partial \eta'}{\partial F}\frac{\partial F}{\partial k}\,,
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

dove

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \xi'}{\partial \gamma} &= ah\big[-h\cos F + k\sin F\big] \\
\frac{\partial \eta'}{\partial \gamma} &= ak\big[-k\sin F + h\cos F\big]
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \xi'}{\partial F} &= a\big[-(1-\gamma h^2)\sin F + \gamma hk\cos F\big] \\
\frac{\partial \eta'}{\partial F} &= a\big[(1-\gamma k^2)\cos F - \gamma hk\sin F\big]
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

e inoltre

$$\frac{\partial\gamma}{\partial h} = \frac{h\gamma^2}{\sqrt{1-e^2}}\,, \qquad \frac{\partial\gamma}{\partial k} = \frac{k\gamma^2}{\sqrt{1-e^2}}\,. \tag{4.10}$$

Le derivate della longitudine eccentrica F si ottengono differenziando l'equazione di Keplero (1.54)

$$dL = (1 - h\sin F - k\cos F)\,dF + \cos F\,dh - \sin F\,dk\,, \tag{4.11}$$

da cui

$$\frac{\partial F}{\partial h} = -\frac{\cos F}{1 - h\sin F - k\cos F}\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial k} = \frac{\sin F}{1 - h\sin F - k\cos F}\,. \tag{4.12}$$

Le derivate rispetto al semiasse maggiore a hanno forma diversa a seconda che il moto medio n sia considerato una variabile indipendente (da determinare separatamente) oppure una funzione del semiasse maggiore stesso attraverso la terza legge di Keplero (1.24); nel primo caso è sufficiente considerare la dipendenza esplicita delle (1.56) da a

$$\begin{aligned} \frac{\partial\xi'}{\partial a} &= (1-\gamma h^2)\cos F + \gamma hk\sin F - k \\ \frac{\partial\eta'}{\partial a} &= (1-\gamma k^2)\sin F + \gamma hk\cos F - h\,; \end{aligned} \tag{4.13}$$

nel secondo caso è necessario tenere conto anche della dipendenza implicita attraverso la longitudine eccentrica F che è funzione della longitudine media L, a sua volta funzione del moto medio

$$L = L_0 + n(t - t_0)\,. \tag{4.14}$$

In tal caso si ha quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial\xi'}{\partial a} &= (1-\gamma h^2)\cos F + \gamma hk\sin F - k + \frac{\partial\xi'}{\partial F}\frac{\partial F}{\partial L}\frac{\partial L}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial a} \\ \frac{\partial\eta'}{\partial a} &= (1-\gamma k^2)\sin F + \gamma hk\cos F - h + \frac{\partial\eta'}{\partial F}\frac{\partial F}{\partial L}\frac{\partial L}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial a}\,; \end{aligned} \tag{4.13$'$}$$

dalla (4.11) si ricava

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \frac{1}{1 - h\sin F - k\cos F}\,; \tag{4.15}$$

dalla (4.14)

$$\frac{\partial L}{\partial n} = t - t_0\,, \tag{4.16}$$

mentre differenziando la (1.24) si ha

$$\frac{\partial n}{\partial a} = -\frac{3a^2}{2n}\,. \tag{4.17}$$

Nel caso che il moto medio sia un parametro indipendente da determinare occorrono ancora le derivate parziali

$$\frac{\partial \xi'}{\partial n} = \frac{\partial \xi'}{\partial F}\frac{\partial F}{\partial L}\frac{\partial L}{\partial n}, \qquad \frac{\partial \eta'}{\partial n} = \frac{\partial \eta'}{\partial F}\frac{\partial F}{\partial L}\frac{\partial L}{\partial n}. \tag{4.18}$$

Infine, le derivate rispetto al valore iniziale della longitudine media L_0 sono

$$\frac{\partial \xi'}{\partial L_0} = \frac{\partial \xi'}{\partial F}\frac{\partial F}{\partial L_0} \qquad \frac{\partial \eta'}{\partial L_0} = \frac{\partial \eta'}{\partial F}\frac{\partial F}{\partial L_0}, \tag{4.19}$$

dove

$$\frac{\partial F}{\partial L_0} = \frac{\partial F}{\partial L} = \frac{1}{1 - h\sin F - k\cos F}. \tag{4.20}$$

Appendice A

Formule di trasformazione tra elementi kepleriani e vettori posizione e velocità

A.1 Passaggio da elementi kepleriani a coordinate cartesiane

Riassumiamo qui i passaggi che permettono di ottenere le coordinate cartesiane $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ a partire dai sei elementi kepleriani a, e, i, ω, Ω ed M (limitatamente al caso di un'orbita ellittica, cioè per $e < 1$):

1) si ricava l'anomalia eccentrica E risolvendo l'equazione di Keplero:

$$M = E - e \sin E\,; \tag{A.1}$$

2) si calcolano le componenti del vettore posizione $\mathbf{r}'$ nel sistema di riferimento orbitale (asse $/xi$ diretto lungo la linea degli apsidi)

$$\begin{aligned} r'_1 &= \xi = a(\cos E - e) \\ r'_2 &= \eta = a\sqrt{1-e^2}\sin E \\ r'_3 &= \zeta = 0\,; \end{aligned} \tag{A.2}$$

le formule per le componenti della velocità $\mathbf{v}'$ nello stesso sistema di riferimento si ottengono derivando le $(A.2)$ rispetto al tempo

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{d\xi}{dt} = -a\sin E\,\frac{dE}{dt} \\ v'_2 &= \frac{d\eta}{dt} = a\sqrt{1-e^2}\cos E\,\frac{dE}{dt} \\ v'_3 &= \frac{d\zeta}{dt} = 0\,; \end{aligned}$$

la derivata dell'anomalia eccentrica E si ottiene derivando la $(A.1)$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{n}{1 - e\cos E}\,,$$

dove

$$n = \frac{dM}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\,, \tag{A.3}$$

da cui

$$
\begin{aligned}
v_1' &= \frac{d\xi}{dt} = \frac{-na\sin E}{1-e\cos E}\\
v_2' &= \frac{d\eta}{dt} = \frac{na\sqrt{1-e^2}\cos E}{1-e\cos E}\\
v_3' &= \frac{d\zeta}{dt} = 0\,;
\end{aligned}
\tag{A.4}
$$

3) si calcola la matrice di rotazione $\mathbf{R}(\Omega, i, \omega)$ che trasforma il sistema di riferimento orbitale nel sistema di riferimento inerziale; le sue componenti sono date da

$$
\begin{aligned}
R_{11} &= \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i\\
R_{12} &= -\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\sin\Omega\cos i\\
R_{13} &= \sin\Omega\sin i\\
R_{21} &= \cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i\\
R_{22} &= -\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega\cos i\\
R_{23} &= -\cos\Omega\sin i\\
R_{31} &= \sin\omega\sin i\\
R_{32} &= \cos\omega\sin i\\
R_{33} &= \cos i\,;
\end{aligned}
\tag{A.5}
$$

4) si ruotano i vettori $\mathbf{r}'$ e $\mathbf{v}'$ nel sistema di riferimento inerziale

$$
\mathbf{r} = \mathbf{R}(\Omega, i, \omega)\,\mathbf{r}'\,; \qquad \mathbf{v} = \mathbf{R}(\Omega, i, \omega)\,\mathbf{v}'\,. \tag{A.6}
$$

A.2 Passaggio da coordinate cartesiane a elementi kepleriani

I passaggi per operare la trasformazione inversa (da coordinate cartesiane $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ a elementi kepleriani a, e, i, ω, Ω ed M, sempre limitandosi al caso di un'orbita ellittica) sono:

1) si calcola il vettore momento angolare $\mathbf{h}$

$$
\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}\,, \tag{A.7}
$$

le cui componenti nel sistema di riferimento inerziale sono

$$
\begin{aligned}
h_1 &= h\sin\Omega\sin i\\
h_2 &= -h\cos\Omega\sin i\\
h_1 &= h\cos i\,;
\end{aligned}
$$

l'inclinazione orbitale i e la longitudine del nodo Ω possono quindi essere calcolate dalle seguenti formule

$$\cos i = \frac{h_3}{h}\,, \qquad \sin i = \frac{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}{h} \tag{A.8}$$

e

$$\cos \Omega = \frac{-h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}\,, \qquad \sin \Omega = \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}\,; \tag{A.9}$$

2) si calcola il semiasse maggiore a dalla formula

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu}\,; \tag{A.10}$$

3) si calcolano il vettore di Laplace-Lenz

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{h}}{\mu} - \frac{\mathbf{r}}{r} \tag{A.11}$$

(il cui modulo è uguale all'eccentricità orbitale e) ed il versore della linea dei nodi

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{x}_3 \times \mathbf{h}}{h} = \begin{pmatrix} \cos \Omega \\ \sin \Omega \\ 0 \end{pmatrix} \tag{A.12}$$

(dove $\mathbf{x}_3$ è il versore dell'asse x_3); l'argomento del perielio ω è l'angolo compreso tra i vettori $\mathbf{k}$ ed $\mathbf{e}$, quindi il suo coseno è uguale al prodotto scalare dei due versori corrispondenti, mentre il suo seno è uguale alla proiezione del loro prodotto vettoriale lungo la direzione del momento angolare

$$\cos \omega = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}}{e}\,, \qquad \sin \omega = \left(\frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}}{e}\right) \cdot \left(\frac{\mathbf{h}}{h}\right)\,; \tag{A.13}$$

4) analogamente, l'anomalia vera f è l'angolo compreso tra la linea degli apsidi $\mathbf{e}$ ed il vettore posizione $\mathbf{r}$, quindi

$$\cos f = \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}}{er}\,, \qquad \sin f = \left(\frac{\mathbf{e} \times \mathbf{r}}{er}\right) \cdot \left(\frac{\mathbf{h}}{h}\right)\,; \tag{A.14}$$

dall'anomalia vera f si ricava l'anomalia eccentrica E

$$\tan\left(\frac{E}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,\tan\left(\frac{f}{2}\right) \tag{A.15}$$

e da questa l'anomalia media M, utilizzando l'equazione di Keplero $(A.1)$.

Appendice B

Forma chiusa delle serie f e g

Riportiamo qui la derivazione delle espressioni in forma chiusa per le serie f e g che sono necessarie nel procedimento di correzione della soluzione preliminare del metodo di Gauss (paragrafo 2.4).

Riscriviamo la definizione delle serie f e g (1.49)

$$\mathbf{r} = f\,\mathbf{r}_0 + g\,\dot{\mathbf{r}}_0\,, \tag{B.1}$$

dove $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$ e $\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{r}}(0)$. Eseguendo il prodotto vettoriale della $(B.1)$ con $\dot{\mathbf{r}}_0$ e $\mathbf{r}_0$ si ottiene

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}_0 &= f\mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{r}}_0 = f\mathbf{h}\\ \mathbf{r} \times \mathbf{r}_0 &= g\dot{\mathbf{r}}_0 \times \mathbf{r}_0 = -g\mathbf{h}\end{aligned}$$

(dove $\mathbf{h} = \mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)$ è il vettore momento angolare, costante del moto nel problema dei due corpi), cioè

$$f = \frac{\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}_0}{\mathbf{h}}\,, \qquad g = \frac{-\mathbf{r} \times \mathbf{r}_0}{\mathbf{h}}\,. \tag{B.2}$$

I prodotti vettoriali che compaiono nelle $(B.2)$ possono essere calcolati facilmente nel sistema di riferimento orbitale (asse ξ diretto lungo la linea degli apsidi, asse η nel piano orbitale ed ortogonale all'asse ξ, asse ζ parallelo al momento angolare); in tale riferimento le $(B.2)$ diventano

$$f = \frac{\xi\dot{\eta}_0 - \eta\dot{\xi}_0}{h}\,, \qquad g = \frac{\eta\xi_0 - \xi\eta_0}{h}\,. \tag{B.3}$$

Introducendo nelle $(B.3)$ le espressioni esplicite delle componenti dei vettori posizione e velocità (equazioni $(A.2)$ ed $(A.4)$) si ottiene

$$\begin{aligned} f &= \frac{a(\cos E - e)\,na\sqrt{1-e^2}\cos E_0 + a\sqrt{1-e^2}\sin E\,na\sin E_0}{h(1 - e\cos E_0)}\\ &= \frac{na^2\sqrt{1-e^2}}{h}\left[\frac{\cos(E-E_0) - e\cos E_0}{1 - e\cos E_0}\right]\end{aligned} \tag{B.4}$$

e

$$\begin{aligned} g &= \frac{a\sqrt{1-e^2}\sin E\,a(\cos E_0 - e) - a(\cos E - e)\,a\sqrt{1-e^2}\sin E_0}{h}\\ &= \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{h}\left[\sin(E-E_0) + e\sin E_0 - e\sin E\right]\,.\end{aligned} \tag{B.5}$$

La $(B.4)$ può essere semplificata introducendo l'espressione di h che si può ricavare dalle (1.10), (1.15) e (1.24)

$$h = \sqrt{\mu p} = \sqrt{\mu a}\sqrt{1-e^2} = na^2\sqrt{1-e^2}\,, \qquad (B.6)$$

ottenendo

$$f = \frac{\cos(E-E_0) - e\cos E_0}{1 - e\cos E_0} = 1 - \left[\frac{1-\cos(E-E_0)}{1-e\cos E_0}\right]\;; \qquad (B.7)$$

nella $(B.5)$, oltre alla $(B.6)$, si può sostituire

$$e\sin E = E - M = E - nt$$

(ed un'espressione analoga per $e\sin E_0$), conseguenza dell'equazione di Keplero (1.31), ottenendo

$$g = t - \frac{1}{n}\Big[(E-E_0) - \sin(E-E_0)\Big]\,. \qquad (B.8)$$