

ESAME DEL CUNEO USATO NELLE OSSERVAZIONI FOTOMETRICHE ALL'OSSERVATORIO DI CATANIA

FATTO MEDIANTE IL FOTOMETRO ZÖLLNER - WOLFER DELL'OSSERVATORIO DI PADOVA.

NOTA DI G. SILVA

Il fotometro a cuneo adoperato all'Osservatorio astrofisico di Catania nelle osservazioni di variabili, costruito dal Töpfer di Potsdam secondo le idee del Müller, trovasi descritto nel pregevolissimo trattato di questo Autore " *Die Photometrie der Gestirne* ", a pag. 184. Fu usato nel 1901 dal prof. A. Riccò e dall'ing. A. Mascari nelle osservazioni fotometriche della *Nova Persei* ⁽¹⁾ e dal 1904 in poi dal prof. A. Bemporad, e talvolta da qualche suo collaboratore o allievo, per una lunga e importantissima serie di ricerche fotometriche.

Tra queste venne inclusa, fin dal principio, la determinazione della costante K del cuneo, la quale costante era stata bensì dedotta anche nel 1901 dalle stesse osservazioni che avevano servito a dare la grandezza della *Nova*, ma non era stata fatta oggetto di studio apposito. La determinazione eseguita dal Bemporad, mediante l'osservazione di coppie di stelle di diversa e nota grandezza prese dalla " *Photometrische Durchmusterung* " di Potsdam, condusse al risultato

$$K = 0.1622 \pm 0.0025$$

che però, nonostante la sua precisione, non veniva ritenuto dall'illustre Professore come definitivo ⁽²⁾.

Si desiderava dunque fin da allora che fossero fatte e una nuova determinazione della costante, possibilmente con altri metodi indipendenti dal sistema fotometrico di Potsdam, e uno studio delle variazioni di essa costante lungo il cuneo od altre ricerche che servir potessero a dare un giudizio della precisione di costruzione del cuneo stesso e della omogeneità del suo vetro.

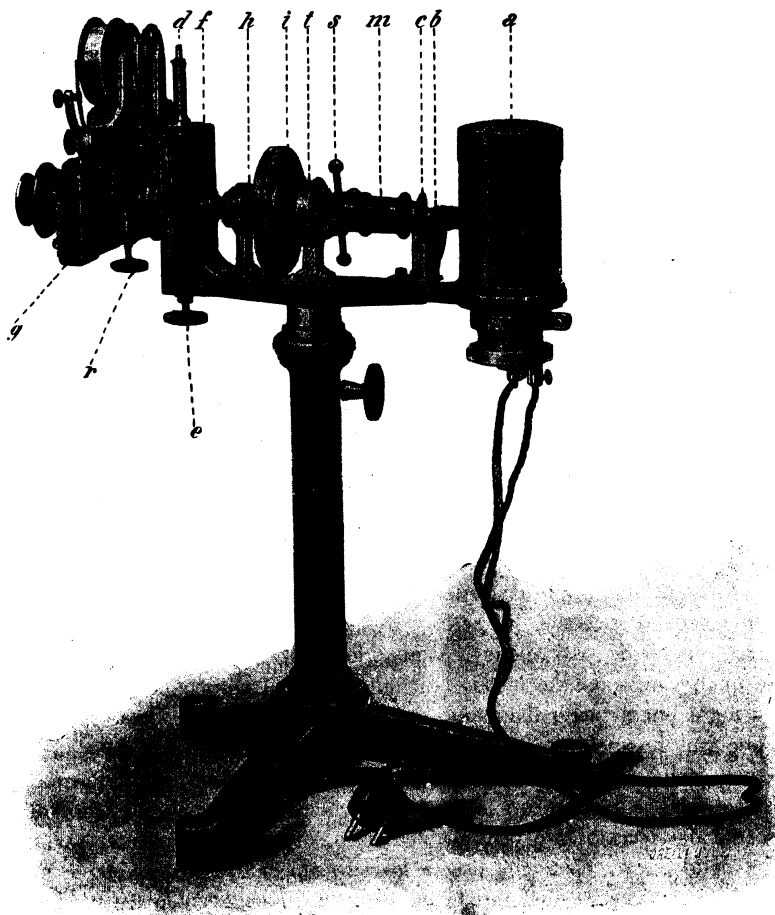
Le due ricerche possono essere fatte molto facilmente con il fotometro Zöllner nella forma nella quale venne costruito dallo stesso Töpfer di Potsdam sulle indicazioni a lui date dal prof. Wolfer di Zurigo. Questo strumento, acquistato dall'Osservatorio di Padova nel 1909, fu già applicato allo studio del cuneo del fotometro registratore Müller, di proprietà dello stesso Osservatorio, dal dott. E. Padova, il quale diede nella sua Nota: " *Il fotometro Zöllner-Wolfer ecc.* " ⁽³⁾ una descrizione particolareggiata dello strumento stesso e i risultati di quello studio. Passato il dott. E. Padova come assistente all'Osservatorio di Catania e desiderando egli occuparsi anche là, almeno in parte, di osservazioni fotometriche, mi propose, ed io ben volentieri accettai, ambedue col consenso dei nostri Direttori, di esaminare con il detto fotometro Zöllner-Wolfer il cuneo fotometrico di Catania. Eseguì

⁽¹⁾ v. Osservazioni astrofisiche della Nova (3, 1901) Persei fatte nell'Osservatorio di Catania. *Memorie*, Voi. XXX, 1901, pag. 77.

⁽²⁾ v. Osservazioni fotometriche eseguite nel triennio 1904-1906 nell'Osservatorio Astrofisico di Catania. *Memorie*, Vol. XXXVI, 1907, pag. 184.

⁽³⁾ Atti del R. Istituto Veneto di S. L. A. — Tomo LXX, 1910-11, pag. 675.

le osservazioni per questo scopo tra la fine del Dicembre 1912 e la fine del Gennaio 1913, e ne dò in questa Nota relazione per disteso, anche perchè in esse ho tenuto un procedimento alquanto diverso da quello seguito dal Padova. Non riporterò invece la descrizione particolareggiata del fotometro esaminatore; tuttavia, riproducendone la figura, accennerò alle sue parti con lo scopo di chiarire meglio le osservazioni.



Entro il cappuccio metallico *a* trovasi una lampadina elettrica la cui luce può uscire da una finestrina del cappuccio, davanti alla quale sta il dischetto *b* attraversato da 5 fori: uno libero e 4 chiusi da vetri colorati. A seconda che con la rotazione del dischetto *b* si porta davanti alla finestrina l'uno o l'altro dei 5 fori, la luce prosegue col suo colore naturale (luce bianca) oppure con uno dei colori azzurro, verde, giallo aranciato, o rosso. Subito dopo, la luce incontra il dischetto *c*, attraversato da 8 forellini di diversa grandezza, che con la rotazione del dischetto possono essere successivamente portati nella direzione dell'asse del fotometro. I raggi che attraversano il forellino prescelto e di poi una lente divergente *m*, due nicol *i* e *h* e una lente convergente *f*, riunendosi nel campo del fotometro *g* formano l'immagine di una stella artificiale, il cui colore e la cui intensità dipendono dunque

rispettivamente dal foro del dischetto *b* e da quello del dischetto *c*, interposti sul tragitto dei raggi.

L'intensità luminosa della stella artificiale dipende però anche da quella della lampadina e dall'angolo α che fanno tra loro i due nicol: *i* mobile e *h* fisso. Quest'angolo viene misurato sul *cerchio di intensità*, situato tra *i* e *h* e diviso in 4 quadranti, ciascuno dei quali graduato da 0° a 90°; si ha la massima intensità luminosa della stella quando la lettura è 90° e oscurità completa quando la lettura è 0°.

La luce della lampadina elettrica di corredo del fotometro è abbastanza forte perchè l'immagine della stellina *bianca più luminosa possibile* (forellino maggiore, $\alpha = 90^\circ$) si estingua all'estremità più grossa del cuneo; la estinzione avviene invece in punti intermedi del cuneo con le stelline colorate, anche se $\alpha = 90^\circ$, e con la stellina bianca se $\alpha < 90^\circ$. Volendo ottenere una uniforme distribuzione delle osservazioni lungo tutto il cuneo, era però necessario che la estinzione potesse avvenire presso la detta estremità per tutte le stelle e non solamente per $\alpha = 90^\circ$ e per riuscire a ciò sostituii alla lampadina elettrica di corredo del fotometro, via via che se ne presentò la necessità, altre lampade più intense ed usai invece del vetro rosso cupo del dischetto *b*, che riduce di troppo la intensità luminosa della stellina, un vetro rosso chiaro interposto tra il foro libero del dischetto e la finestrina attraverso la quale esce la luce dal cappuccio metallico *a*. Le varie lampade adoperate erano sempre in serie con resistenze elettriche regolabili così da poter variare la intensità luminosa della stella artificiale anche con continuità e non solamente per salti, come avviene quando si sostituiscono l'uno all'altro i forellini del dischetto *c*.

Essendo il campo del fotometro affatto oscuro, le osservazioni riescono difficili e un po' incerte, in quanto che non si può essere certi di avere l'occhio disposto sull'asse ottico dell'oculare se non quando si vede la stellina e vi è quindi il pericolo di ritenere già avvenuta la estinzione totale della stellina a mezzo del cuneo, quando invece la sua sparizione sia dovuta a un semplice spostamento dell'occhio. A togliere questo inconveniente, dopo la prima serie di ricerche, ho cercato di insinuare nell'interno del fotometro una debolissima luce, ottenendo così anche il vantaggio di operare in condizioni più prossime a quelle nelle quali vengono fatte le osservazioni celesti, il campo del cannocchiale essendo in pratica sempre più o meno illuminato, o almeno reso visibile dalle stelline che vi si trovano. Sono riuscito nell'intento nel modo seguente. L'armatura della lente *f* termina (a sinistra nella figura) con un disco armillare che può essere portato contro la vicina parete verticale fissa a tappare un largo foro circolare in essa aperto, attraverso il quale la luce uscente dal piccolo foro centrale del disco, ove trovasi la lente, passa nel fotometro *g*. Ma il detto disco può anche essere lasciato staccato dalla parete, e in tal caso la faccia di esso rivolta verso quel foro, cioè verso il cuneo e l'oculare del fotometro, può venire illuminata di sbieco dall'esterno. Incollato su quella faccia un dischetto armillare di carta bianca e provveduto alla sua illuminazione con una piccola lampada elettrica da 4 Volts, ottenni nel campo una luce abbastanza uniforme e vivissima. Per renderla debole come meglio desideravo mi servivo di resistenze elettriche opportunamente disposte, con le quali diminuivo a piacimento l'intensità luminosa della lampadina. Ogni luce esterna veniva poi impedita con opportuni avvolgimenti fatti con panni neri, il che mi permetteva di compiere le osservazioni in ambiente perfettamente oscuro.

All'apparato esaminatore non potei applicare il fotometro registratore Müller dell'Osservatorio di Catania, perchè non si corrispondevano tra loro le dimensioni delle parti di raccordo dei due strumenti; vi applicai invece il fotometro registratore di Padova, al cuneo del quale mi fu facile sostituire quello del fotometro di Catania. Rettificai la posizione del fotometro: 1°) in maniera che l'immagine della stellina si formasse nel piano del cuneo o,

più esattamente, nel piano delle due lamine tra loro parallele che stanno subito dinanzi ad esso; 2°) in maniera che l'immagine della stellina cadesse lungo l'asse longitudinale del cuneo, cioè ad egual distanza dai suoi bordi superiore e inferiore, e feci in tali condizioni la prima e più importante parte delle osservazioni, avente per iscopo di determinare la costante del cuneo in varie regioni di esso lungo l'asse longitudinale.

Ricordo che, detta H l'intensità luminosa della stella artificiale quando l'angolo letto sul cerchio di intensità è 90° , e h quella corrispondente ad un angolo qualunque α , per la legge di MALUS si ha:

$$h = H \operatorname{sen}^2 \alpha$$

Ma la variazione Δm della *grandezza stellare* che si osserva è proporzionale alla variazione del logaritmo della intensità luminosa h , con il coefficiente di proporzionalità eguale a 2.5, cioè, senza tener conto del senso delle variazioni e quindi del segno:

$$\Delta m = 2.5 \Delta(\log h) = 5 \Delta(\log \operatorname{sen} \alpha)$$

E poichè la stessa variazione è anche proporzionale secondo la costante K allo spostamento s del cuneo che la misura, si avrà:

$$s K = \Delta m = 5 \Delta(\log \operatorname{sen} \alpha)$$

Il valore già noto di K mi faceva conoscere che la variazione di *una* grandezza corrispondeva a un intervallo $s = 6$ mm. circa, intervallo contenuto poco più di 10 volte in tutta la lunghezza utile del cuneo; infatti la lettura sul fotometro era 16 quando la stellina veniva ad essere coperta dall'origine (il taglio) del cuneo, ed era 80 quando, introdotto questo fino al massimo possibile, la stellina veniva coperta dall'estremità più grossa. Non volendo scegliere valori di s troppo piccoli affinché i corrispondenti valori calcolati per K non risultassero troppo incerti, mi sembrò sufficiente ed opportuno determinare il valore di K di 12 in 12 mm. circa, in 5 intervalli diversi e consecutivi del cuneo, dando alla stellina artificiale variazioni successive di 2 grandezze.

Per maggior brevità delle osservazioni presi ordinariamente in esame due intervalli consecutivi per volta ⁽¹⁾ nel modo che viene chiarito dal seguente esempio, che riguarda gli intervalli III e IV, compresi all'incirca tra le letture 42 e 66 mm. e separati dalla lettura 54 mm. Scelto come valore arbitrario per α quello $\alpha_0 = 90^\circ.0$, per il quale $5 \log \operatorname{sen} \alpha = 0$, i due valori α_1 e α_2 per i quali $5 \log \operatorname{sen} \alpha$ è rispettivamente eguale a -2 e a -4 sono $\alpha_1 = 23^\circ.5$, $\alpha_2 = 9^\circ.1$. Posto dunque il cerchio di intensità alla lettura $9^\circ.1$ del primo quadrante, scelgo il forellino del dischetto c e regolo la luce della lampadina del fotometro in modo che l'estinzione della stellina avvenga molto prossimamente al principio dell'intervallo III, cioè alla lettura 42 mm.; nel tempo impiegato a ciò, l'occhio, da poco abituato all'oscurità dell'ambiente, va aumentando la sua sensibilità fino a raggiungere quel limite che poi mantiene quasi invariato durante tutta l'osservazione. Raggiunto lo scopo, faccio e registro tre misure di estinzione, ne faccio altre tre con il cerchio di intensità alla lettura $23^\circ.5$ e tre ancora alla lettura $90^\circ.0$.

L'ultima di esse dovrebbe essere di circa 66 mm, secondo estremo del IV intervallo; se invece risulta sensibilmente superiore o inferiore a questo valore in causa di variazioni

⁽¹⁾ Volendo prenderne in esame tre o più, sarebbe stato necessario dare all'angolo α , letto sul cerchio di intensità, valori molto piccoli e in tal caso l'errore di lettura, proporzionale al differenziale di $\log \operatorname{sen} \alpha$, e quindi a $\cotg \alpha$, avrebbe avuto sensibile influenza sui risultati delle misure.

avvenute nella sensibilità dell'occhio σ nella intensità luminosa della lampadina, ⁽¹⁾ diminuisco o aumento questa intensità, servendomi della apposita resistenza elettrica regolabile, e ripeto per il secondo quadrante le osservazioni del primo nell'ordine 90°. 0, 23°. 5, 9°. 1; in modo analogo procedo poi per il 3° e 4° quadrante. Chiamo per brevità senso *diretto* quello dell'osservazione ora descritta e senso *inverso* quello in cui le letture sul I°, II°, III° e IV° quadrante si succedono nell'ordine 90°. 0, 23°. 5, 9°. 1; 9°. 1, 23°. 5 90°. 0 ecc.

Oltre alle cautele usate affinché le osservazioni abbracciassero gli intervalli voluti del cuneo e riuscissero tra loro simmetriche, avevo quella di osservare le estinzioni con l'occhio destro e di leggere il cerchio di intensità e la scala del fotometro con il sinistro, tenendo cioè chiuso il destro quando, per tali letture, accendevo una lampadina elettrica. Altre cautele, che non è il caso di descrivere, tenevo poi quando l'osservazione cadeva al principio del cuneo, affinché la estinzione della stellina venisse osservata quando questa si trovava certamente coperta dal cuneo, ma solo pochissimi millimetri dopo l'origine.

La osservazione precedentemente descritta diede le seguenti letture (medie di tre misure), succedutesi nell'ordine indicato dai numeri 1), 2), 3) ecc.

α	I° quadr.	II° quadr.	III° quadr.	IV° quadr.	medie
9°. 1	1) 44. 8	6) 41. 0	7) 40. 4	12) 43. 1	42. 3
23. 5	2) 56. 6	5) 53. 6	8) 54. 3	11) 52. 0	54. 1
90. 0	3) 71. 6	4) 64. 9	9) 63. 5	10) 65. 2	66. 3

Se ne deducono le differenze s seguenti e, con la divisione per esse del $\Delta m = 2$ grandezze, i corrispondenti valori di K , scritti qui sotto tra parentesi:

(23°. 5 — 9°. 1)	11. 8 (0. 169)	12. 6 (0. 159)	13. 9 (0. 144)	8. 9 (0. 225)	11. 8 (0. 169)
(90. 0 — 23. 5)	15. 0 (0. 133)	11. 3 (0. 177)	9. 2 (0. 217)	13. 2 (0. 152)	12. 2 (0. 164)

Noto subito che le medie dei primi quattro valori di K e dei quattro sottostanti sono rispettivamente 0.174 e 0.170, cioè un poco superiori ai quozienti di 2 per le medie delle differenze s . Il fatto che ciò doveva avvenire sistematicamente in tutte le serie, mi ha spinto a ricercare in quale relazione stavano con gli errori di osservazione le differenze tra i risultati finali, ai quali potevo giungere con metodi di calcolo diversi, e a ricercare altresì quale metodo doveva essere preferito, avendo riconosciuto che quelle differenze non erano trascurabili.

Indicato a questo scopo con n il numero delle osservazioni e con s_1, s_2, \dots, s_n i valori da esse dedotti per l'intervallo del cuneo corrispondente a una variazione di grandezza stellare Δ , sempre la stessa, si hanno le n equazioni $s_i K = \Delta$. Se esse si scrivono sotto la forma:

$$\Delta \cdot \frac{1}{K} = s_i$$

le n osservazioni danno per $\frac{1}{K}$ il valore più probabile $\frac{[s]}{n\Delta}$ e quindi per K il valore

$$K_0 = \frac{\Delta}{s_0}$$

⁽¹⁾ La sorgente elettrica tra i cui poli venne inserita, in serie con altra lampada funzionante da resistenza e con la resistenza regolabile, la lampadina del fotometro, è la corrente alternata di città, che certamente non è di voltaggio costante.

dove s_0 indica la media degli n valori s_r . Risolvendo invece le equazioni

$$s_r K = \Delta$$

col solito metodo dei minimi quadrati, risulta

$$K_0^{(1)} = \frac{\Delta [s_r]}{[s_r^2]}$$

E determinando, in fine, per ogni valore s_r il corrispondente valore $K_r = \frac{\Delta}{s_r}$ (come sopra si è fatto e come aveva fatto il dott. Padova nelle sue ricerche, da lui esposte nella Nota già citata) e facendo poi la media dei K_r , si giunge al risultato

$$K_0^{(2)} = \frac{\Delta}{n} \left[\frac{1}{s_r} \right]$$

Ora, detto ϵ l'error medio della misura di un s_r e v_r lo scostamento di s_r dalla media s_0 , risulta:

$$K_0^{(1)} = \frac{n\Delta s_0}{\left[s_0^2 \left(1 + \frac{v_r}{s_0} \right)^2 \right]} = \frac{\Delta}{s_0 \left(1 + \frac{2[v_r]}{n s_0} + \frac{[v_r^2]}{n s_0^2} \right)} = K_0 \left(1 - \frac{n-1}{n} \frac{\epsilon^2}{s_0^2} + \dots \right)$$

$$K_0^{(2)} = \frac{\Delta}{n} \left[\frac{1}{s_0 \left(1 + \frac{v_r}{s_0} \right)} \right] = \frac{\Delta}{s_0} \left(1 - \frac{[v_r]}{n s_0} + \frac{[v_r^2]}{n s_0^2} - \frac{[v_r^3]}{n s_0^3} + \dots \right) = K_0 \left(1 + \frac{n-1}{n} \frac{\epsilon^2}{s_0^2} + \dots \right)$$

a meno di termini che in tutti e due i casi si possono ritenere dell'ordine della quarta potenza del rapporto $\frac{\epsilon}{s}$. Si vede dunque che le differenze $K_0 - K_0^{(1)}$ e $K_0^{(2)} - K_0$, eguali tra loro, sono dell'ordine del quadrato di questo rapporto e quindi, lievissime. Tuttavia, se ϵ non è molto piccolo rispetto ad s_0 ed n è molto grande, le dette differenze possono avere importo maggiore dell'error medio $\frac{\epsilon \Delta}{s_0^2 \sqrt{n}}$ della media K_0 e non essere quindi trascurabili. Nelle osservazioni che saranno riassunte nella Tab. I (nella quale le quantità $l'' - l'$ sono già le medie di 4 valori s) si ha $s_0 = 12.12$, $K_0 = 0.1650$, $n = 320$ e approssimativamente $\epsilon = \pm 1.6$, quindi le differenze predette hanno il valore $K_0^{(2)} - K_0 = K_0 - K_0^{(1)} = 0.0029$, mentre l'error medio $\frac{\epsilon \Delta}{s_0^2 \sqrt{n}}$ di K_0 è ± 0.0012 . Nelle osservazioni analoghe del dott. Padova si ha, per quelle fatte con luce bianca, $n = 308$ e approssimativamente $s_0 = 6.0$, $K_0 = 0.17$, $\epsilon = \pm 1.4$, sicchè il valore che egli trova $K_0^{(2)} = 0.176 \pm 0.003$ supera il K_0 di 0.009 ed il $K_0^{(1)}$ del doppio.

Volendo decidere quale fra i tre valori K_0 , $K_0^{(1)}$, $K_0^{(2)}$ sia preferibile accettare in tali casi, si noti che se gli errori di osservazione fossero nella grandezza Δ e le s_r fossero quantità bene determinate, il principio che sia minima la somma dei quadrati di quelli errori condurrebbe al valore $K_0^{(1)}$; se viceversa fosse Δ una grandezza ben definita e gli errori di osservazione riguardassero le sole s_r , scrivendo le equazioni in guisa da mettere in evidenza questi errori, cioè sotto la forma $(s_r + v_r) K = \Delta$ e determinando il valore di K in modo da rendere minimo $[v_r^2]$, si giungerebbe al risultato K_0 . Il terzo valore $K_0^{(2)}$, maggiore dei due precedenti, non sarebbe invece giustificato dalla teoria dei minimi quadrati.

Nel nostro caso vi sono errori di osservazione non solo nelle s_r , ma anche nel Δ , poichè questo rappresenta la variazione di grandezza della stellina, variazione prodotta

dalla rotazione del cerchio di intensità, e che, ritenuta eguale a 2 grandezze, non lo è esattamente in causa degli errori di lettura e di graduazione del cerchio, delle variazioni dell'intensità luminosa della lampadina, ecc. Il risultato finale più probabile dovrebbe dunque essere compreso tra K_0 e $K_0^{(1)}$. Per maggiore semplicità di calcolo e di discussione ritenni opportuno calcolare K_0 , riunendo in medie semplici le s_r , il che mi sembrò giustificato anche dal fatto che gli errori di osservazione devono essere molto più sensibili sulle s_r che non su Δ .

Dopo quanto è stato esposto risulterà chiaro il contenuto della Tab. I che si riferisce a 16 serie di misure. Come risulta dall'esame delle tre prime colonne, le prime 4 serie furono fatte col campo perfettamente oscuro e le 12 seguenti col campo debolmente illuminato; le prime 8 con luce bianca, e le 8 successive con luci colorate. Le letture α sul cerchio di intensità furono 90.1 , $23^{\circ}.5$, $90^{\circ}.0$ per le prime 4 serie; $8^{\circ}.0$, $20^{\circ}.5$, $61^{\circ}.4$ per le 4 successive e $8^{\circ}.6$, $22^{\circ}.0$, $70^{\circ}.2$, (intermedie tra quelle precedenti) per le ultime 8 serie.

Con la rotazione del cerchio di intensità passando da una di queste letture α' alla successiva α'' , o viceversa, la stella artificiale subiva una variazione di grandezza $\Delta = 5 \log \sin \alpha'' - 5 \log \sin \alpha'$, il cui valore numerico, se non rigorosamente eguale a 2 (per avere limitato naturalmente al decimo di grado la stima dell'angolo letto sul cerchio di intensità, diviso in gradi) vi è però sempre molto prossimo, come si vede dalla colonna quinta.

Le colonne seguenti contengono i risultati medi delle misure effettuate in ogni osservazione sui quattro quadranti del cerchio di intensità; così nella colonna dell'*Interv. III*, riga 1 e in quella dell'*Interv. IV* riga 2, si trovano quelli fra i risultati dell'osservazione descritta precedentemente, che riportati a pag. 48 furono scritti in carattere corsivo. Ogni osservazione analoga dà origine a risultati che trovano posto nella riga dispari per il primo dei due intervalli del cuneo studiati e nella riga pari successiva per il secondo intervallo. Invece i risultati scritti nelle righe pari della colonna *Interv. I* e in quelle dispari della colonna *Interv. V* furono determinati con osservazioni comprendenti il solo intervallo I e V, ma simili nel resto alle altre. Per le serie il cui numero di ordine è scritto in carattere diritto le osservazioni furono fatte in senso *diretto* negli intervalli I, III, V e in senso *inverso* negli intervalli II, IV, e viceversa per le serie il cui numero d'ordine è scritto in carattere corsivo. La Tabella contiene inoltre le medie per righe e per colonne e i valori di K che si deducono da queste medie dandole per divisore ai corrispondenti numeri Δ della colonna quinta.

Tab. I. — RIASSUNTO DELLE OSSERVAZIONI FATTE PER DETERMINARE LA COSTANTE K LUNGO L'ASSE LONGITUDINALE DEL CUNEO.

Campo	Serie	Luce	α'	α''	$\Delta \log \text{sen } \alpha$	Interv. I λ' λ''	S_I $\lambda'' - \lambda'$	Interv. II λ' λ''	S_{II} $\lambda'' - \lambda'$	Interv. III λ' λ''	S_{III} $\lambda'' - \lambda'$	Interv. IV λ' λ''	S_{IV} $\lambda'' - \lambda'$	Interv. V λ' λ''	S_V $\lambda'' - \lambda'$	Medie $(\lambda'' - \lambda')$	K $\Delta : (\lambda'' - \lambda')$
oscuro	1	bianca	9.1 - 23.5	2.008	20.4 - 32.9	12.5	32.4 - 43.9	11.5	42.3 - 54.1	11.8	51.9 - 63.2	11.3	65.4 - 77.8	12.4	11.90	0.169	
	2	»	23.5 - 90.0	1.996	18.7 - 29.6	10.9	32.9 - 45.2	12.3	43.9 - 56.1	12.2	54.1 - 66.3	12.2	63.2 - 76.0	12.8	12.08	165	
	3	»	9.1 - 23.5	2.008	19.5 - 33.7	14.2	33.7 - 44.0	10.3	42.0 - 52.3	10.3	52.1 - 63.1	11.0	64.7 - 77.4	12.7	11.70	172	
	4	»	23.5 - 90.0	1.996	19.2 - 31.6	12.4	33.7 - 44.7	11.0	44.0 - 56.7	12.7	52.3 - 66.4	14.1	63.1 - 77.2	14.1	12.86	155	
	5	»	8.0 - 20.5	2.004	20.5 - 33.9	13.4	30.4 - 42.1	11.7	39.3 - 51.1	11.8	53.3 - 65.3	12.0	65.4 - 78.5	13.1	12.40	162	
	6	»	20.5 - 61.4	1.996	17.5 - 29.2	11.7	33.9 - 44.5	10.6	42.1 - 54.0	11.9	51.1 - 63.0	11.9	65.3 - 78.0	12.7	11.76	170	
	7	»	8.0 - 20.5	2.004	18.1 - 30.6	12.5	30.0 - 42.6	12.6	40.7 - 53.2	12.5	51.7 - 64.5	12.8	64.3 - 78.3	14.0	12.88	156	
	8	»	20.5 - 61.4	1.996	18.5 - 30.4	11.9	30.6 - 43.3	12.7	42.6 - 54.1	11.5	53.2 - 66.1	12.9	64.5 - 77.8	13.3	12.46	160	
illuminato	9	azzurra	8.6 - 22.0	1.994	17.8 - 29.3	11.5	31.8 - 43.4	11.6	43.4 - 54.5	11.1	54.1 - 66.5	12.4	65.4 - 78.6	13.2	11.96	167	
	10	»	22.0 - 70.2	2.000	19.5 - 31.3	11.8	29.3 - 41.0	11.7	43.4 - 55.7	12.3	54.5 - 64.9	10.4	66.5 - 77.3	10.8	11.40	175	
	11	verde	8.6 - 22.0	1.994	18.8 - 32.6	13.8	28.7 - 41.9	13.2	41.2 - 53.9	12.7	53.2 - 65.9	12.7	64.5 - 78.6	14.1	13.30	150	
	12	»	22.0 - 70.2	2.000	18.1 - 30.7	12.6	32.6 - 42.4	9.8	41.9 - 53.3	11.4	53.9 - 66.1	12.2	65.9 - 77.6	11.7	11.54	173	
	13	gialla	8.6 - 22.0	1.994	19.1 - 30.7	11.6	29.7 - 41.9	12.2	44.1 - 57.3	13.2	54.1 - 67.5	13.4	64.1 - 76.6	12.5	12.58	159	
	14	»	22.0 - 70.2	2.000	19.6 - 32.0	12.4	30.7 - 43.2	12.5	41.9 - 52.8	10.9	57.5 - 67.4	10.1	67.5 - 77.7	10.2	11.22	178	
	15	rossa	8.6 - 22.0	1.994	19.1 - 30.1	11.0	30.8 - 41.8	11.0	42.8 - 53.1	10.3	51.9 - 63.9	12.0	62.6 - 76.2	13.6	11.58	172	
	16	»	22.0 - 70.2	2.000	18.4 - 29.5	11.1	30.1 - 41.4	11.3	41.8 - 54.2	12.4	53.1 - 65.8	12.7	63.9 - 77.7	13.8	12.26	163	
Medie $\Delta_m, \lambda'_m, \lambda''_m$				1.999	18.92-31.13	12.21	31.33-42.96	11.63	42.34-54.15	11.81	53.24-65.37	12.43	64.77-77.58	12.81		0.1650	
K = $\Delta_m : (\lambda''_m - \lambda'_m)$						0.164	0.172	0.169	0.165	0.156							

I valori di K dell'ultima riga dimostrano che la costante del cuneo è un po' minore verso gli estremi che non nella parte centrale; le differenze non sono però molto forti.

Riunendo poi in opportune medie i valori della penultima colonna e calcolando i corrispondenti valori di K , si hanno i seguenti risultati:

campo oscuro	;	luce bianca	;	serie 1-4	;	$s = 12.13$		$K = 0.1650$	
		»	»	» 5-8		12.37		0.1616	
» illuminato	}	»	»	» qualunque	»	5-16		12.11	0.1650
		luce bianca	»	»	1-8		12.25		0.1633
		» colorata	»	9-16		11.98		0.1667	

Le differenze tra questi valori medi sono anche più piccole delle differenze tra quelli dell'ultima riga della Tabella.

Volendo riconoscere per quale parte tutte queste differenze sieno giustificate dagli errori di osservazione giova separare gli errori accidentali da quelli sistematici e a questo scopo sembrami opportuna la via seguente.

I valori s della Tabella possono avere:

a) errori costanti per tutti quelli di una stessa riga e variabili da una riga all'altra, cioè errori propri di quelle condizioni di osservazione che rimasero le stesse per tutta una serie e furono in tutto o in parte diverse in serie differenti (oscurità o luce nel campo, colore della stella artificiale, valori α' , α'' dell'angolo α , senso diretto o inverso delle osservazioni)

b) errori costanti per tutti i valori di una stessa colonna e variabili da una colonna all'altra; questi dipendono dal diverso calibro del cuneo nei successivi intervalli,

c) errori di osservazione di carattere del tutto accidentale, dipendenti da cause comuni a tutte le serie e a tutti gli intervalli del cuneo.

Per conseguenza l'error medio di un valore s si compone di tre parti ε_a , ε_b , ε_c , dovute rispettivamente alle tre specie di errori ora enunciate. Per determinarle si osservi:

1°) Poichè i valori di una stessa riga non differiscono tra loro e dalla loro media che per gli errori b) e c), l'error medio ε_1 di un valore, che si deduce dagli scostamenti v' dei 5 valori di ciascuna riga dalla loro media, scritta nella penultima colonna, soddisferà alla relazione

$$\varepsilon_1^2 = \frac{[v' v']}{5 \times 16 - 16} = \varepsilon_b^2 + \varepsilon_c^2$$

2°) Per analoga ragione, l'error medio ε_2 di un valore, che si deduce dagli scostamenti v'' dei 16 valori di ciascuna colonna dalla loro media, soddisferà alla relazione

$$\varepsilon_2^2 = \frac{[v'' v'']}{16 \times 5 - 5} = \varepsilon_a^2 + \varepsilon_c^2$$

3°) I valori medi della penultima colonna differiscono tra loro e dalla loro media per effetto degli errori a) e c) e non degli errori b), che hanno la stessa influenza sui valori di una stessa colonna e quindi anche sulle medie della penultima colonna.

Gli errori a), essendo gli stessi per tutti e 5 i valori di una riga, rimangono per intero anche nella media di questi, mentre gli errori c) si riducono in ragione inversa di $\sqrt{5}$. Per queste ragioni, facendo gli scostamenti δ' dei detti valori medi della penultima colonna dalla media finale, l'error medio ε' di uno di essi sarà dato dall'espressione:

$$\varepsilon'^2 = \frac{[\delta' \delta']}{16 - 1} = \varepsilon_a^2 + \frac{1}{5} \varepsilon_c^2$$

4^o) Per ragioni analoghe, dagli scostamenti δ'' dei valori medi delle 5 colonne dalla media finale si avrà l'error medio ϵ'' di uno di questi così espresso:

$$\epsilon''^2 = \frac{[\delta'' \delta'']}{5-1} = \epsilon_b^2 + \frac{1}{16} \epsilon_c^2$$

Riassumendo si hanno le quattro equazioni:

$$\begin{aligned} [v' v'] &= (80-16)(\epsilon_b^2 + \epsilon_c^2) & [\delta' \delta'] &= (16-1)(\epsilon_a^2 + \frac{1}{5} \epsilon_c^2) \\ [v'' v''] &= (80-5)(\epsilon_a^2 + \epsilon_c^2) & [\delta'' \delta''] &= (5-1)(\epsilon_b^2 + \frac{1}{16} \epsilon_c^2) \end{aligned}$$

Esse non sono indipendenti, poichè se si indicano con v gli scostamenti di ciascun valore s della tabella dalla media finale si ha

$$v = v' + \delta' = v'' + \delta''$$

dalle quali, in unione alle precedenti, si deduce facilmente:

$$\begin{aligned} [v v] &= [v' v'] + 5 [\delta' \delta'] = [v'' v''] + 16 [\delta'' \delta''] \\ &= (80-5) \epsilon_a^2 + (80-16) \epsilon_b^2 + (80-1) \epsilon_c^2 \end{aligned}$$

Osservo che l'eguaglianza tra il primo e l'ultimo membro si sarebbe potuta ricavare anche direttamente con ragionamenti analoghi a quelli sopra esposti. Effettuando i calcoli e risolvendo le equazioni si ottengono i seguenti errori medi, espressi in mm.

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \pm 0^{\text{mm}}.97 & \epsilon_2 &= \pm 0^{\text{mm}}.99 & \epsilon' &= \pm 0^{\text{mm}}.59 & \epsilon'' &= \pm 0^{\text{mm}}.46 \\ \epsilon_a &= \pm 0.44 & \epsilon_b &= \pm 0.40 & \epsilon_c &= \pm 0.89 \end{aligned}$$

Tenendo presente il significato dell' ϵ_b che più ci interessa, si può dunque concludere che, se si potessero misurare ripetutamente variazioni di luce di una stella sempre identiche tra loro ed eguali a 2 grandezze, senza commettere alcun errore di osservazione e sempre nelle stesse condizioni, ma con intervalli del cuneo distribuiti su tutta la sua lunghezza, si otterrebbero per questi intervalli valori di circa 12 mm. i quali, per il solo fatto delle irregolarità del calibro, avrebbero tra loro tali differenze che l'error medio di uno di essi sarebbe $\pm 0^{\text{mm}}.40 = \pm 0^{\text{m}}.064$. Analoga considerazione si può fare con l' ϵ_a . Si può inoltre notare che questi due errori medi ϵ_a , ϵ_b , approssimativamente dello stesso importo, sono all'incirca la metà dell'error medio ϵ_c di un valore s della Tabella dovuto agli errori di carattere del tutto accidentale, benchè un tale valore sia già la media di quattro altri, ciascuno dei quali risultante da tre misure di estinzione ad ambedue gli estremi dell'intervallo corrispondente.

L'error medio del risultato finale K_0 , calcolato con gli scostamenti dei valori dell'ultima colonna dalla loro media, (ed eguale anche a $\frac{\epsilon'}{\sqrt{16}} \cdot \frac{2}{s_0^2}$) è $\pm 0^{\text{m}}.0020$; esso discende a ± 0.0015 se lo si calcola riunendo prima in media ciascun valore dell'ultima colonna scritto in una riga dispari con quello della riga pari successiva e facendo poi gli scostamenti dalla media finale delle 8 medie così ottenute. Come è facile vedere, ricordando la osservazione descritta a pag. 48, ciò succede perchè questi risultati medi si possono considerare come calcolati dividendo una variazione di luce di 4 grandezze per un intervallo del cuneo di circa 24 mm. e cioè per un intervallo doppio di quelli che determinano i valori K di ogni riga, ma dello stesso loro error medio; per questa ragione ciascuno degli 8 valori sopradetti ha error medio eguale alla metà circa di quello di ciascuno dei 16 va-

lori dell'ultima colonna e quindi l'error medio della media di quelli sta all'error medio della media di questi approssimativamente nel rapporto $1:\sqrt{2}$.

Noterò in fine l'ottimo accordo tra il risultato finale qui dedotto:

$$K_0 = 0.1650 \pm 0.0015$$

e quello determinato dal prof. Bemporad e riportato in principio di questa nota. Osserverò anzi che, per le considerazioni svolte a pag. 49 e 50 un'applicazione più rigorosa della teoria dei minimi quadrati ai risultati delle mie osservazioni dovrebbe condurre a un valore un po' più piccolo del precedente e quindi anche più prossimo a quello del Bemporad.

La seconda parte delle osservazioni ebbe il solo scopo di riconoscere la regolarità del cuneo nel senso parallelo al taglio di esso. Si deve infatti osservare che, specialmente quando il fotometro è applicato a un equatoriale non munito di apparato motore o a strumento diverso dall'equatoriale, le estinzioni possono avvenire anche un po' lontano dall'asse longitudinale del cuneo ed è quindi importante sapere se, lungo una retta parallela al taglio del cuneo stesso, questo ha identico spessore e omogeneità di tinta, per modo da dare, astrazione fatta dagli errori di osservazione, una stessa lettura nella estinzione di una stella, sia che questa estinzione avvenga sull'asse, cioè a distanze eguali dai bordi, sia che avvenga fuori dell'asse. Anche per questa ricerca il fotometro Zöllner-Wolfer si presta benissimo. Infatti il fotometro a cuneo g (vedasi la figura) non è direttamente applicato alla parte fissa di quello Zöllner-Wolfer, ma ad una slitta che, mediante la vite e e la contromolla d , può essere fatta scorrere verticalmente lungo apposite incanalature della parete verticale, alla quale sono applicate vite e molla. Facendo ruotare il fotometro g entro l'anello che porta la vite r , previo allentamento di questa, si può ottenere facilmente che il movimento apparente della stellina artificiale, prodotto dal movimento reale impresso alla slitta con la vite e , avvenga parallelamente alle due lamelle, visibili nel campo di vista del fotometro g , che determinano la direzione parallela al taglio del cuneo.

Rettificato il fotometro anche in questo modo (ciò che avevo già fatto, benchè non fosse necessario, prima delle precedenti osservazioni e ciò che ho verificato avanti di ricominciare le nuove) risultò che su un'apposita scala, divisa in millimetri, che misurava gli spostamenti della slitta, si aveva la lettura 2.5 quando la stella artificiale era sotto il bordo inferiore del cuneo e la lettura 12.5 quando la stella era sotto il bordo superiore. Per conseguenza alla lettura $1/2 (2.5 + 12.5) = 7.5$, che avevo mantenuta in tutte le precedenti osservazioni, la stella era ad egual distanza dai bordi e alle letture 5.0 e 10.0 essa era distante dall'uno e dall'altro bordo di $1/4$ della larghezza λ del cuneo. Mi proposi appunto di determinare quali differenze di lettura avevo estinguendo una medesima stella alle tre diverse distanze $1/4 \lambda$, $1/2 \lambda$, $3/4 \lambda$ dal bordo inferiore, (corrispondenti rispettivamente alle letture 5.0, 7.5, 10.0 sulla scala della slitta) e questo in 5 diversi luoghi del cuneo distribuiti uniformemente sulla sua lunghezza; come tali scelsi quelli situati in corrispondenza ai punti di mezzo degli intervalli I, II, ... V, considerati nelle precedenti osservazioni.

Un esempio può servire anche in questo caso a chiarire il procedimento tenuto nell'osservare. Regolata la luce della lampadina del fotometro per modo da ottenere l'estinzione della stella artificiale alla lettura 25 mm. circa (egualmente distante dagli estremi dell'intervallo I) feci una prima serie di tre misure di estinzione per ognuna delle tre successive posizioni della slitta nell'ordine 5.0, 7.5, 10.0; poi, regolata di nuovo, se ne fu il caso, la luce della lampadina, feci una seconda serie di tre misure per ognuna delle posizioni 10.0, 7.5, 5.0, succedentisi in ordine inverso a quello di prima e così via per 5 serie in tutto. In una seconda osservazione rifeci poi altre 5 serie di misure, incominciando

dall'ordine 10.0, 7.5, 5.0. Per portare la slitta da una posizione all'altra non accendevo alcuna lampadina, ma contavo i giri della vite e , della quale avevo reso sensibile al tatto un diametro della testa mediante un filo metallico opportunamente applicatovi.

La prima osservazione diede i seguenti valori medi di tre letture e le differenze sottostanti $d_5 = (7.5 - 5.0)$ e $d_{10} = (7.5 - 10.)$

slitta	serie I	serie II	serie III	serie IV	serie V	medie
5.0	1) 24.8	6) 24.4	7) 25.8	12) 25.5	13) 25.2	25.14
7.5	2) 24.3	5) 26.0	8) 26.1	11) 26.3	14) 26.0	25.74
10.0	3) 24.6	4) 24.5	9) 24.3	10) 23.9	15) 24.3	24.32
d_5	- 0.5	+ 1.6	+ 0.3	+ 0.8	+ 0.8	+ 0.60
d_{10}	- 0.3	+ 1.5	+ 1.8	+ 2.4	+ 1.7	+ 1.42

I numeri 1) 2) ecc. indicano l'ordine con cui si sono eseguite le misure. Le differenze delle ultime due righe, insieme con quelle ottenute in tutte le altre osservazioni, sono riunite nella Tab. II, così disposta. Nella riga I_1 (o II_1 , o III_1 , ecc.) sono contenuti i valori delle differenze d_5 o d_{10} determinate nella serie I (o II, o III, ecc.) e rispettivamente nella seconda o nella prima delle due osservazioni sopradette, per modo che, per i valori della riga stessa, le letture corrispondenti a 7.5 furono osservati *prima* di quelle corrispondenti a 5.0 o 10.0. Nella riga I_2 (o II_2 , o III_2 , ecc.) sono contenuti i valori ottenuti nella serie I (o II, o III, ecc.) delle due osservazioni per i quali le letture a 7.5 furono fatte *dopo* di quelle a 5.0 o 10.0 e così via.

Tab. II. — RIASSUNTO DELLE OSSERVAZIONI FATTE PER ESAMINARE IL CUNEO NEL SENSO PARALLELO AL TAGLIO.

Serie	$(7.5 - 5.0) = d_5$						$(7.5 - 10.0) = d_{10}$						Medie $\frac{1}{2} (d_5 + d_{10})$	
	letture medie a 7.5					medie	letture medie a 7.5					medie		
	25.0	35.4	48.5	60.1	72.9		25.0	35.4	48.5	60.1	72.9			
I_1	-1.5	-1.5	-1.0	-0.9	+0.5	-0.88	-0.3	-0.2	-1.8	-0.7	-1.0	-0.80	-0.84	-0.45
I_2	-0.5	-0.6	+0.5	+1.8	-0.6	+0.12	-0.2	-0.1	-1.3	-1.1	+1.4	-0.26	-0.07	
II_2	+0.6	1.0	-1.6	+2.4	-1.0	-0.12	+1.5	-0.7	-0.7	+0.8	+1.2	+0.42	+0.15	+0.20
II_1	+1.6	-1.5	-0.6	+1.2	+1.3	+0.40	+1.4	+0.1	+0.1	-0.2	-0.8	+0.12	+0.26	
III_1	-0.7	+0.7	-1.2	-0.9	+0.2	-0.38	+1.8	+1.9	-1.0	-1.2	+0.9	+0.48	+0.05	+0.24
III_2	+0.3	+0.5	+0.7	-0.8	-0.8	-0.02	+1.6	+0.3	+1.0	+1.0	+0.6	+0.90	+0.44	
IV_2	+1.3	-0.6	+0.6	+2.5	+1.4	+1.04	+2.4	+0.7	-0.8	+0.1	+2.3	+0.94	+0.99	+0.85
IV_1	+0.8	-1.3	+0.6	-0.6	+1.2	+0.14	+1.8	+0.5	+1.3	+2.5	+0.4	+1.30	+0.72	
V_1	+1.2	+1.0	+0.5	-0.2	+2.4	+0.98	+1.7	+3.1	+1.4	+2.9	+0.6	+1.94	+1.46	+1.19
V_2	+0.8	-0.1	+1.5	+1.3	-0.2	+0.66	-0.8	+1.2	+3.0	+0.6	+2.0	+1.20	+0.93	
medie	+0.39	-0.44	0.00	+0.58	+0.44	+0.19	+1.09	+0.68	+0.12	+0.47	+0.76	+0.62	+0.41	

Come si rileva dalle colonne della Tabella intestate medie, e specialmente dalle due ultime, i valori delle d_5 e d_{10} vanno aumentando sensibilmente con il numero d'ordine della serie dalla quale sono dedotte, cioè con la distanza in tempo dal principio delle osservazioni. Ciò dimostra che le dette differenze dipendono in primo luogo da diversa sensibilità dell'occhio a seconda che esso osserva nel centro del campo del fotometro oppure verso il basso o verso l'alto di esso, poichè solo questa differenza di sensibilità può variare nel corso delle osservazioni. Noterò poi che per le differenze d_{10} la variazione è maggiore che per le differenze d_5 , come è pur maggiore il valor medio di quelle: $+0.62$, in confronto del valor medio di queste: $+0.19$.

Con lo stesso procedimento tenuto nella discussione delle osservazioni precedenti, ho determinato anche in questo caso le tre parti ϵ_a , ϵ_b , ϵ_c , che costituiscono l'error medio di un valore della Tab. II e che dipendono rispettivamente

- a) dagli errori costanti per tutti i valori di una riga,
- b) dagli errori costanti per tutti i valori di una colonna,
- c) dagli errori di carattere del tutto accidentale.

Risultò :

	ϵ_a	ϵ_b	ϵ_c
per la differenza d_5	± 0.31	± 0.32	± 1.06
• • • d_{10}	± 0.63	± 0.20	± 1.09
e in media	± 0.49	± 0.27	± 1.07

Inoltre l'error medio della media finale delle differenze d_5 , calcolato dagli scostamenti di detta media dai 10 valori della colonna in cui essa sta scritta, risultò eguale a ± 0.19 , cioè dello stesso importo del valore a cui si riferisce; mentre l'analogo error medio ± 0.26 della media delle differenze d_{10} risultò notevolmente inferiore a questa media. Tuttavia non si può trarre da quest'ultimo fatto il giudizio che il cuneo sia più grosso o di tinta più densa verso il suo bordo superiore, come vorrebbe il segno della differenza media d_{10} , poichè questa differenza può essere con maggior ragione imputata all'occhio dell'osservatore.

L'essere poi ϵ_b abbastanza piccolo dimostra che i valori medi delle differenze d_5 e quelli delle differenze d_{10} , scritti nell'ultima riga della tabella, differiscono rispettivamente tra loro e dalle loro medie più che tutto per gli errori accidentali di osservazione.

Se oltre a ciò si tien conto che le misure nei 5 luoghi del cuneo sottoposti ad esame furono fatte in tempi diversi e che su quelle relative a uno dei 5 luoghi può avere influenza sistematica la particolare disposizione ad osservare che aveva l'occhio nel tempo in cui furono fatte, si possono spiegare anche le differenze sistematiche che esistono tra i valori medi dell'ultima riga e che danno origine all' ϵ_b , pur ritenendo il cuneo del tutto esente da irregolarità nel senso parallelo al suo taglio.