

45 ✓

CONTRIBUTI
DELL'OSSERVATORIO ASTRONOMICO DI MILANO-MERATE

a cura del Direttore
Prof. FRANCESCO ZAGAR

NUOVA SERIE

N. 224

EDOARDO PROVERBIO

★

Possibilità della misura di distanze nel campo
topografico con metodi ottici

Estratto dal *Bollettino di Geodesia e Scienze Affini*
Rivista dell'Istituto Geografico Militare
Anno XXIII - N. 1 - Gennaio - Febbraio - Marzo 1964

CONTRIBUTI
DELL'OSSERVATORIO ASTRONOMICO DI MILANO-MERATE
a cura del Direttore
Prof. FRANCESCO ZAGAR

NUOVA SERIE

N. 224

EDOARDO PROVERBIO

★

Possibilità della misura di distanze nel campo
topografico con metodi ottici

Estratto dal *Bollettino di Geodesia e Scienze Affini*
Rivista dell'Istituto Geografico Militare
Anno XXIII - N. 1 - Gennaio - Febbraio - Marzo 1964

Possibilità della misura di distanze nel campo topografico con metodi ottici

EDOARDO PROVERBIO

(Osservatorio Astronomico di Brera)

Riassunto. — Vengono prese in esame le precisioni fornite dai più moderni metodi di determinazione delle distanze.

Un'analisi rigorosa della precisione intrinseca dei metodi ottici impiegati nella misura di distanze porta alla conclusione che questi metodi permettono di ottenere nel campo delle distanze ettometriche e chilometriche precisioni relative variabili da 10^{-3} a 10^{-5} . Le migliori prestazioni teoriche sono fornite dall'uso di telescopi riflettori.

Queste precisioni permettono un particolare impiego di dispositivi ottici di accurata esecuzione in misure lineari topografiche e geodetiche nell'ambito di città o tra punti trigonometrici difficilmente accessibili, per la verifica ed il confronto con i dati basati sulla misura delle basi.

POSSIBILITE DANS LA MESURE DE DISTANCES DANS LE CHAMP TOPOGRAPHIQUE PAR DES METHODES OPTIQUES.

Résumé. — On prend en examen les précisions fournies par les plus modernes méthodes de détermination des distances.

Une analyse rigoureuse de la précision intrinsèque des méthodes optiques employées dans la mesure de distances porte à la conclusion que ces méthodes permettent d'obtenir dans le champ des distances hectométriques et kilométriques des précision relatives variables entre 10^{-3} à 10^{-5} . Les meilleures prestations théoriques sont fournies par l'emploi de télescopes réflecteurs. Ces précisions permettent un emploi particulier de dispositifs optiques d'exécution soignée dans des mesures linéaires topographiques et géodésiques dans les villes ou entre points trigonométriques difficilement accessibles, pour la vérification et la comparaison avec les données basées sur la mesure des bases.

POSSIBILITY OF THE MEASUREMENT OF DISTANCES IN TOPOGRAPHIC FIELD BY OPTICAL METHODS.

Summary. — The precision supplied for the most recent methods for measuring distances are examined.

The rigorous analysis of the intrinsic precision of the optic methods utilised for measuring distances comes to a conclusion these methods permit to obtain for ectometric and kilometeric distances an accuracy on the order of one part in $10^{-3} \div 10^{-5}$.

The greatest accuracy is obtained with reflecting telescope.

These accuracies permit a particular use of the careful optic equipments in measuring distances and surveys inside the towns or between inaccessible trigonometric points in which the distances were previously determined by triangulations.

MÖGLICHKEITEN DER ENTFERNUNGSMESSUNG IM TOPOGRAPHISCHEN FELDE DURCH OPTISCHES VERFAHREN.

Inhaltsangabe. — Hier wird die von den modernsten Enternungsbestimmungen erreichte Genauigkeit geprüft.

Eine strenge Analyse der inneren Genauigkeit der in der Entfernungsmessung gebrauchten optischen Methoden lässt folgern, dass diese Methoden im Felde der hektometrischen und kilometrischen Entfernungen relative Genauigkeiten erreichen lassen, die von 10^{-3} bis 10^{-5} reichen.

Die besten theoretischen Ergebnisse werden von den reflektierenden Fernrohren erhalten.

Diese Genauigkeiten erlauben eine besondere Verwendung von vollkommenen optischen Apparaten in linearen topographischen und geodätischen Messungen im Bereich der Stadt oder zwischen schwer zugänglichen Triangulationpunkten, für Nachprüfung und Vergleich zu den auf Basismessungen gegründeten Daten.

POSIBILIDAD DE LA MEDIDA DE DISTANCIAS EN EL CAMPO TOPOGRAFICO CON METODOS OPTICOS.

Vienen examinadas las precisiones suministradas por los más modernos métodos de determinación de las distancias.

Una análisis rigurosa de la precisión intrínseca de los métodos ópticos empleados en la medida de distancia, lleva a la conclusión de que estos métodos permiten obtener en el campo de las distancias hectométricas y kilométricas, precisiones relativas variables de 10^{-3} a 10^{-5} . Las mejores prestaciones teóricas vienen facilitadas por el uso de telescopios reflectores. Estas precisiones permiten un peculiar empleo de dispositivos ópticos esmeradamente realizados en medidas lineales topográficas y geodéticas en el ámbito de ciudades o entre punto trigonométricos de muy difícil acceso, para la comprobación y el cotejo con los datos fundados sobre la medida de las bases.

1. — La possibilità che può offrire nella misura di distanze il metodo ottico, utilizzato in determinazioni topografiche usando rifrattori astronomici o anallattici, si ritiene relativamente limitata. Questa nota è dedicata a ricercare, basandosi sull'analisi delle prestazioni e della precisione intrinseca, quale è la precisione massima raggiungibile con cannocchiali rifrattori e quali sono gli eventuali vantaggi che, in questa specifica applicazione, possono offrire i cannocchiali riflettori, quando si tenga conto delle loro diverse possibilità e si faccia uso di particolari tecniche e perfezionamenti, al fine di prendere in considerazione l'utilità di usare tali strumenti, con una precisione più adeguata, in casi particolari, ad esempio per la misura di distanze tra due punti visibili (nel campo topografico) ma non reciprocamente accessibili con misure dirette, quando non si possa o risulti disagevole ricorrere ad altri metodi od alla utilizzazione della rete geodetica.

Prima di esporre i risultati di questa ricerca riteniamo che una breve analisi delle precisioni che forniscono altri metodi di misura ed il loro campo di applicazione, ritenendo come limite superiore delle precisioni relative il valore di $1 \cdot 10^{-6}$ ottenibile nella misura delle basi geodetiche (2-10 km) con i moderni apparati in invar [1], costituisca a questo scopo un utile orientamento.

Nella tabella I sono raccolti alcuni dati significativi relativi alla misura di distanze con i metodi elettroottici e radioelettrici di maggiore impiego, particolarmente indicati nel caso di misure tra due punti inaccessibili con operazioni geodetiche. In essa x rappresenta la distanza media, Δx lo scarto medio assoluto rispetto a misure geodetiche e quindi $\Delta x/x$ l'errore medio unitario.

Si può dedurre dalla tabella che per distanze dell'ordine delle decine e centinaia di km l'utilizzazione di geodimetri e radar può fornire precisioni comparabili con quelle geodetiche (le precisioni interne risultano in teoria anche migliori [7]).

L'uso del geodimetro viene inoltre generalmente esteso con la stessa precisione anche a distanze inferiori dell'ordine del chilometro (mentre le tecniche

radar sono state finora particolarmente impiegate su medie e grandi distanze), per cui tale apparecchio risulta particolarmente idoneo a misure di distanze tra due punti inaccessibili.

Tabella I

Apparato	x (10^3 m)	Δx (mm)	$\Delta x/x$ ($1 \cdot 10^{-5}$)	Autorità
Geodimetro	$10 \div 30$	$5 \div 50$	0,1	[2]
Radar	$50 \div 100$	$300 \div 400$	0,5	[3]
Tellurometro	$0,5 \div 5$	40	(")	[4]
Tellurometro	$0,5 \div 30$	$30 \div 240$	$10 \div 1$	[5]
Tellurometro	$0,2 \div 32$	$7 \div 400$	$5 \div 1$	[6]

All' interno del campo topografico (fino a circa 10 km) l'uso di tellurometri fornisce invece precisioni senza dubbio inferiori dell'ordine di $1 \cdot 10^{-5}$ ed anche $1 \cdot 10^{-4}$.

Un'analisi più dettagliata e completa può essere ricavata dai risultati di ricerche più estese come ad esempio quelle condotte da J. E. Lilly con l'uso di tellurometri sulla rete geodetica canadese [8]. La tabella II nella quale sono rappresentati i risultati di J. E. Lilly ed in cui i valori di $\Delta x/x$ sono le medie di diversi valori relativi agli intervalli considerati, caratterizza il netto peggioramento delle misure tellurometriche su distanze ettometriche ed anche chilometriche.

Tabella II

x (10^3 m)	$\Delta x/x$ ($1 \cdot 10^{-5}$)
$0,19 \div 0,40$	22,6
$0,40 \div 0,95$	15,3
$0,95 \div 10,17$	2,3
$10,17 \div 21,10$	0,2



Poichè la distanza tra due punti non accessibili con misure geodetiche può essere ottenuta indirettamente anche per mezzo di triangolazioni abbiamo ritenuto utile considerare, come ulteriore elemento di paragone, le precisioni ottenibili ad esempio con i metodi della intersezione laterale e di Hansen, particolarmente idonei a risolvere questo problema specifico.

È noto che chiamando ϵ_x , ϵ_a gli errori medi della distanza $x = AB$ incognita e della distanza $a = BX$ determinata, tra un estremo di x e un terzo punto X si ha :

$$(1) \quad \epsilon_x^2 = \frac{x^2}{a^2} \epsilon_x^2 + x^2 (\cot^2 A + \cot^2 X) \epsilon''^2 \cdot \frac{10^{-10}}{4'' \cdot 25}$$

ove A e X sono gli angoli che sottendono rispettivamente le distanze a e x mentre ϵ'' è l'errore medio degli angoli misurati.

Se facciamo l'ipotesi semplificatrice e d'altra parte generalmente soddisfatta nella pratica, che il triangolo si possa considerare isoscele, avendosi:

$$\cot A = -\cot 2X, \quad 2 \cos X = \frac{a}{x},$$

e posto:

$$\varepsilon_a = 1.10^{-3} m, \quad \varepsilon'' = 0''.2,$$

la (1) si può scrivere:

$$(1') \quad \varepsilon_x^2 = 1.10^{-6} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1.10^{-12} \frac{x^2}{4} \left[\frac{5}{4\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} + 4\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 3 \right],$$

nella quale per ipotesi $x \geq \frac{a}{2}$.

Dai diagrammi di fig. 1 calcolati per mezzo della precedente si possono ottenere in funzione di x/a e per vari valori della distanza x espressa in metri gli errori medi ε_x .

Si può osservare che per valori di x sufficientemente elevati il valore più conveniente di ε_x si ha per triangoli quasi equilateri. Per distanze x comprese nel campo topografico si ottiene un errore medio minimo per $x < a$, quest'ultimo tende però subitamente dopo il minimo a valori molto grandi. Notiamo inoltre che per distanze x dell'ordine del chilometro, basi a rispettivamente di 100 m e 10 m, misurate nell'ordine dell'errore medio ε_a introdotto, forniscono errori medi ε_x di 1 cm e 10 cm rispettivamente, e cioè precisioni relative di 10^{-4} e 10^{-5} .

Analizzando infine la (1') si può vedere che per distanze x dell'ordine del chilometro e superiori il secondo termine diventa sempre più preponderante rispetto al primo, ciò significa che ε_x , in questo campo, risulta indipendente da ε_a . Per x inferiore al chilometro al contrario è il primo termine che risulta preponderante e in questo caso la precisione relativa di x eguaglia quella di a . Conclusioni analoghe si hanno facilmente modificando il valore di ε_a . Nel caso che il segmento a non sia adiacente ad x si ha il problema di Hansen, in cui dai punti A, B , estremi della distanza incognita x sono visibili due punti X, Y di distanza nota $a = XY$ (fig. 2).

In tal caso x si ottiene, come è noto, dalla relazione:

$$(2) \quad x = \frac{a \sin(\beta - \alpha)}{\sin(X \hat{A} B)},$$

nella quale la distanza $a = \overline{XB}$ risulta:

$$(3) \quad a = \frac{d \sin \delta}{\sin(\alpha + \delta)}.$$

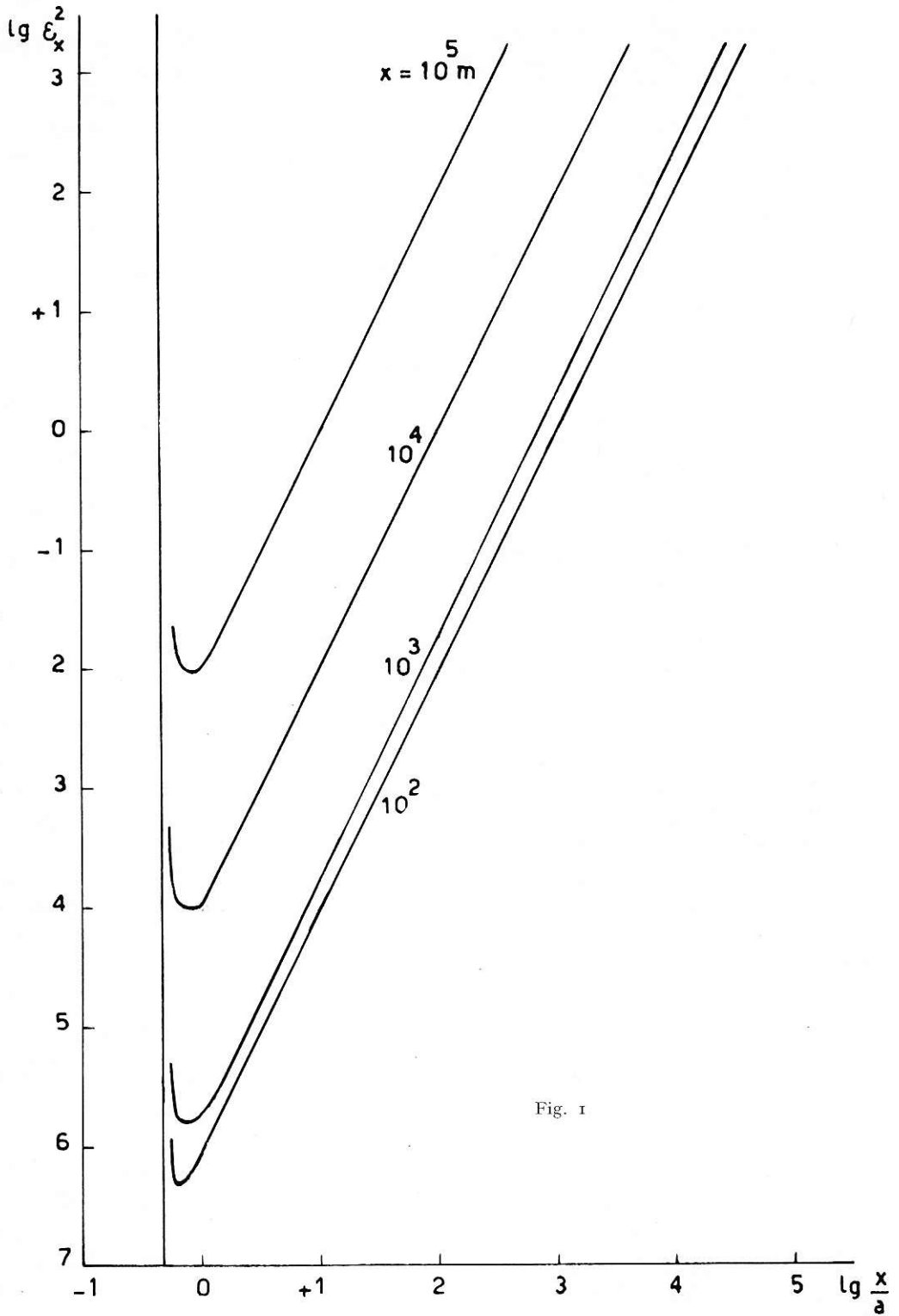


Fig. 1

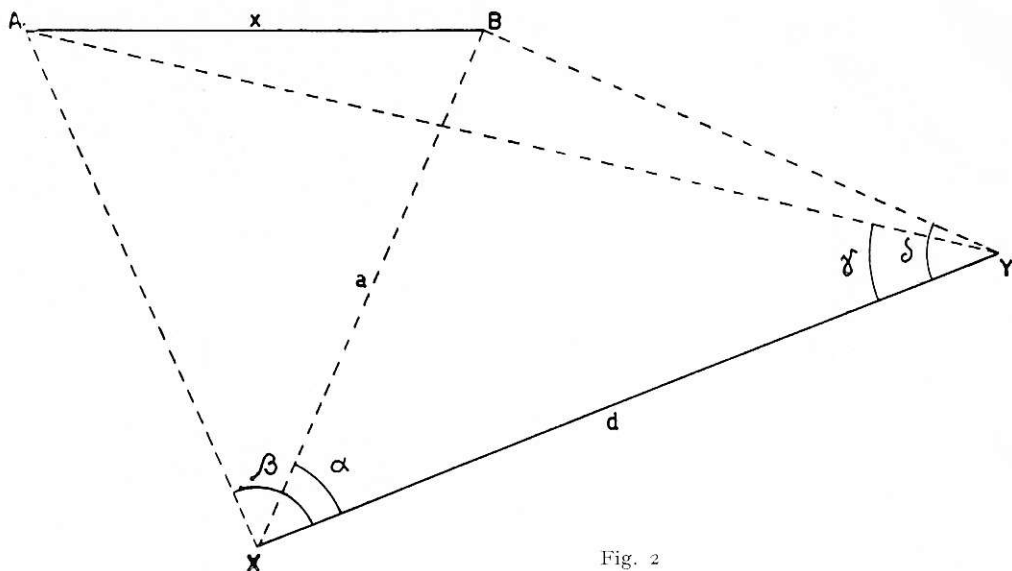


Fig. 2

L'angolo in \hat{A} si può pure ottenere dai dati osservati ma può comunque sup-
 porsi anche dato direttamente dalle osservazioni.

La (2) e la (3) ammettono per gli errori medi ε_x e ε_a relazioni analoghe alla (1).
 Ne consegue che, nelle ipotesi precedentemente ammesse, ε_x risulterà nello stesso
 ordine di ε_a solo nel caso in cui i due triangoli ABX e CXY , con lati dell'ordine
 del chilometro o inferiori, risultano quasi equilateri. In caso contrario l'errore
 medio viene comunque esaltato in misura più o meno notevole. Se si tiene presente
 che nei casi concreti a e d possono risultare spesso molto inferiori ad x ($0,1 \div 0,01$) si
 vede come le precisioni relative fornite risultano comprese entro limiti molto bassi.

Come conclusione di questa breve analisi preliminare si può dunque argomen-
 tare che solo l'uso di geodimetri permette in ogni caso di garantire nella misura di
 distanze tra due punti visibili ma non direttamente accessibili una precisione rela-
 tiva dell'ordine delle determinazioni geodetiche di tipo classico. La precisione otte-
 nibile con altri metopi, diretti o indiretti, risulta ad eccezione di casi particolari,
 senza dubbio inferiore ($10^{-3} \div 10^{-5}$).

2. — Il metodo ottico viene usato comunemente per la misura di distanze
 per mezzo di dispositivi distanziometrici. Esaminiamo con il necessario rigore
 quale è la precisione assoluta e relativa dei dispositivi basati sull'uso di rifrattori
 di tipo astronomico confrontandola con quella fornita dai sistemi riflettori, cer-
 cando di determinarne il limite superiore.

A questo proposito attiriamo l'attenzione sul fatto che l'analisi della precisione
 di un procedimento di misura che fornisce il valore di una grandezza in funzione
 di altre grandezze osservate o costanti, non può essere unicamente appoggiata
 sulla teoria dei minimi quadrati che dà l'espressione dell'errore medio della gran-
 dezza da determinare in funzione dell'errore medio delle quantità osservate. I
 risultati di un tale criterio forniscono infatti, a posteriori, significativi orientamenti

per quanto riguarda gli errori accidentali di osservazione, inversamente proporzionali alla radice quadrata del numero delle osservazioni e quindi, anche in pratica, variamente riducibili, ma non danno nessun elemento atto a mettere in evidenza variazioni sistematiche in funzione di eventuali errori sistematici delle grandezze osservate.

L'analisi degli errori sistematici permette di determinare le condizioni più opportune nelle quali effettuare le misure dirette, fornendo, a priori, l'ordine di grandezza del limite superiore degli errori medi di una osservazione, prescindendo naturalmente dalla considerazione degli errori accidentali di osservazione esterni, cioè di quegli errori che si manifestano durante la misura a causa delle circostanze ambientali.

Prendiamo in considerazione il caso ristretto in cui la distanza incognita AB risulta perpendicolare alla linea di mira AA' . Se chiamiamo $a = \overline{AA'}$ l'elemento lineare di lunghezza nota (mira), b la sua immagine fornita dal sistema ottico, f la distanza focale di questo sistema, l'ottica geometrica permette di scrivere per la distanza x , incognita, del punto A dal primo punto principale della lente obbiettiva sferica o dal centro (polo) dello specchio sferico, la relazione:

$$(4) \quad x = f \left(\frac{a}{b} + 1 \right)$$



Da questa si ha subito, a meno di termini di ordine superiore,

$$(4') \quad \Delta x = \frac{x}{a} \left(1 - \frac{f}{x} \right) \Delta a - \frac{x}{b} \left(1 - \frac{f}{x} \right) \Delta b + \frac{x}{f} \Delta f,$$

nella quale gli incrementi possono essere intesi come errori delle grandezze rispetto al loro valore nominale misurato o calcolato. Notiamo inoltre che nell'ipotesi, generalente soddisfatta, in cui $x < f$ la (4') stessa si semplifica nella seguente semplice relazione:

$$(4'') \quad \Delta x = \frac{x}{a} \Delta a - \frac{x}{b} \Delta b + \frac{x}{f} \Delta f,$$

che fornisce per gli errori relativi:

$$(4''') \quad \left| \frac{\Delta x}{x} \right| \ll \left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \frac{\Delta b}{b} \right| + \left| \frac{\Delta f}{f} \right|.$$

I tre termini del secondo membro delle (4') (4'') (4''') sono indipendenti e possono essere studiati separatamente, mettendone in particolare in evidenza il significato fisico ed il valore che assumono i simboli differenziali.

3. — Lo scarto Δa dell'elemento lineare comparatore a può essere attribuito a due errori fondamentali, cioè l'imprecisione Δa_1 con cui è conosciuto o misurato

il segmento stesso, e le variazioni Δa_2 che il segmento subisce a causa del coefficiente di dilatazione termica per cui si può scrivere,

$$(5) \quad \frac{\Delta a}{a} = \frac{1}{a} (\Delta a_1 + \Delta a_2) .$$

Per quanto riguarda la prima causa ricordiamo che i metodi classici di comparazione delle misure lineari basati sull'uso di microscopi ottici forniscono errori relativi di $1 \div 2 \cdot 10^{-7}$ per lunghezze dell'ordine del metro, mentre la precisione raggiungibile con i più moderni metodi interferometrici, usando lunghezze d'onda campionate, può raggiungere valori relativi di qualche unità su 10^9 [9].

Il secondo termine della (5) può a sua volta essere messo, trascurandone i termini di ordine superiore, sotto la forma $\Delta a_2 = a \alpha \Delta t$, ove α rappresenta il coefficiente di dilatazione lineare della mira in funzione della temperatura t . I valori dei coefficienti di dilatazione lineare di alcuni solidi e leghe sono indicate nella tabella III.

Tabella III

solidi	α (10^{-6})
Quarzo	7.1
Tungsteno	4.3
Grafite	3.2
Vetro pirex	3.2
Porcellana di Berlino	2.7
Nilo 36	1.2
Quarzo fuso	0.5
Invar	0.5

Tenendo conto della possibilità di determinare con sufficiente precisione il valore di Δa_2 e quindi di correggere il valore di a in funzione della temperatura, si vede come non sia difficile arrivare a conoscere la misura della lunghezza della mira con precisioni relative estremamente elevate, anche dell'ordine di 10^{-6} .

Le cause di errori intrinseche che alterano la misura dell'immagine b della mira, sono d'altra parte da attribuirsi essenzialmente:

- a) al fenomeno della diffrazione,
- b) a fenomeni di aberrazione cromatica e geometrica,
- c) al potere separatore del dispositivo di misura,
- d) ad errori sistematici della vite micrometrica.

La diffrazione produce come è noto, lungo i bordi delle immagini delle superfici estese una frangia di diffrazione il cui effetto è quello di dilatarne il diametro geometrico della quantità:

$$\Delta b_1 = 1.22 \lambda \frac{f}{2h} ,$$

ove h è la semiapertura lineare dell'obiettivo e λ la lunghezza d'onda impiegata. Se con n indichiamo il numero di volte in cui b è contenuto in h si ha: $h = n b$, e la precedente si può scrivere:

$$\frac{\Delta b_1}{b} = 1.22 \lambda \frac{n f}{2 h^2} ,$$

da cui per $\lambda = 0,55 \cdot 10^{-3}$ mm (corrispondente al massimo fattore di visibilità) si ha

$$(6) \quad \frac{\Delta b_1}{b} = 3.4 n \frac{f}{h^2} \cdot 10^{-4} .$$

Nella fig. 3 sono dati i diagrammi rappresentativi di $\Delta b_1/b$ in funzione di f/h , per quattro valori di h (in mm), e per $n = 1$. Da essa si può subito dedurre che per quanto riguarda la diffrazione un riflettore sferico presenta indubbi vantaggi data la possibilità di utilizzare rapporti f/h piccoli e per contro semiampiezze anche notevoli. Dalla (6) si vede però che la precisione relativa è proporzionale al valore di n e cioè, in ultima analisi, alla possibilità di utilizzare la massima ampiezza di campo (corrispondente al massimo valore angolare di b) compatibile con gli errori dovuti alle aberrazioni geometriche che dipendono da questa ultima. Nell'approssimazione del terzo ordine l'ottica geometrica fornisce per le aberrazioni di coma e astigmatismo le seguenti espressioni che danno il diametro massimo della figura di diffrazione distorta sul piano focale in funzione della distanza b dal centro,

$$(7) \quad \Delta b_c = 3 B \frac{h^2}{f^2} b \quad , \quad \Delta b_a = H \frac{b^2}{f^2} h \quad ,$$

da cui:

$$(8) \quad \frac{\Delta b_c}{b} = 3 B \frac{h^2}{f^2} \quad \quad \quad \frac{\Delta b_a}{b} = H \frac{h^2}{f^2} \cdot \frac{1}{n} .$$

Eguagliando queste ultime alla (6) si trova in funzione di f/h il valore minimo di n/h e quindi l'ampiezza massima utilizzabile di $b = 1/n$ (in unità di h) entro la quale l'effetto delle aberrazioni è trascurabile.

Nella tabella IV sono dati in funzione di f/h i valori approssimati di n_c/h e n_a/h relativi agli errori di coma e astigmatismo, rispettivamente in unità dei coefficienti B ed H che assumono generalmente valori dell'ordine dell'unità o inferiore.

Tabella IV

$\frac{f}{h}$	$\frac{n_c}{h}$ (in unità di B)	$\frac{n_a}{h}$ (in unità di H)
5	80	5.2
10	10	1.8
20	1.3	0.68
30	0.4	0.36
40	0.15	0.22
60	0.05	0.13

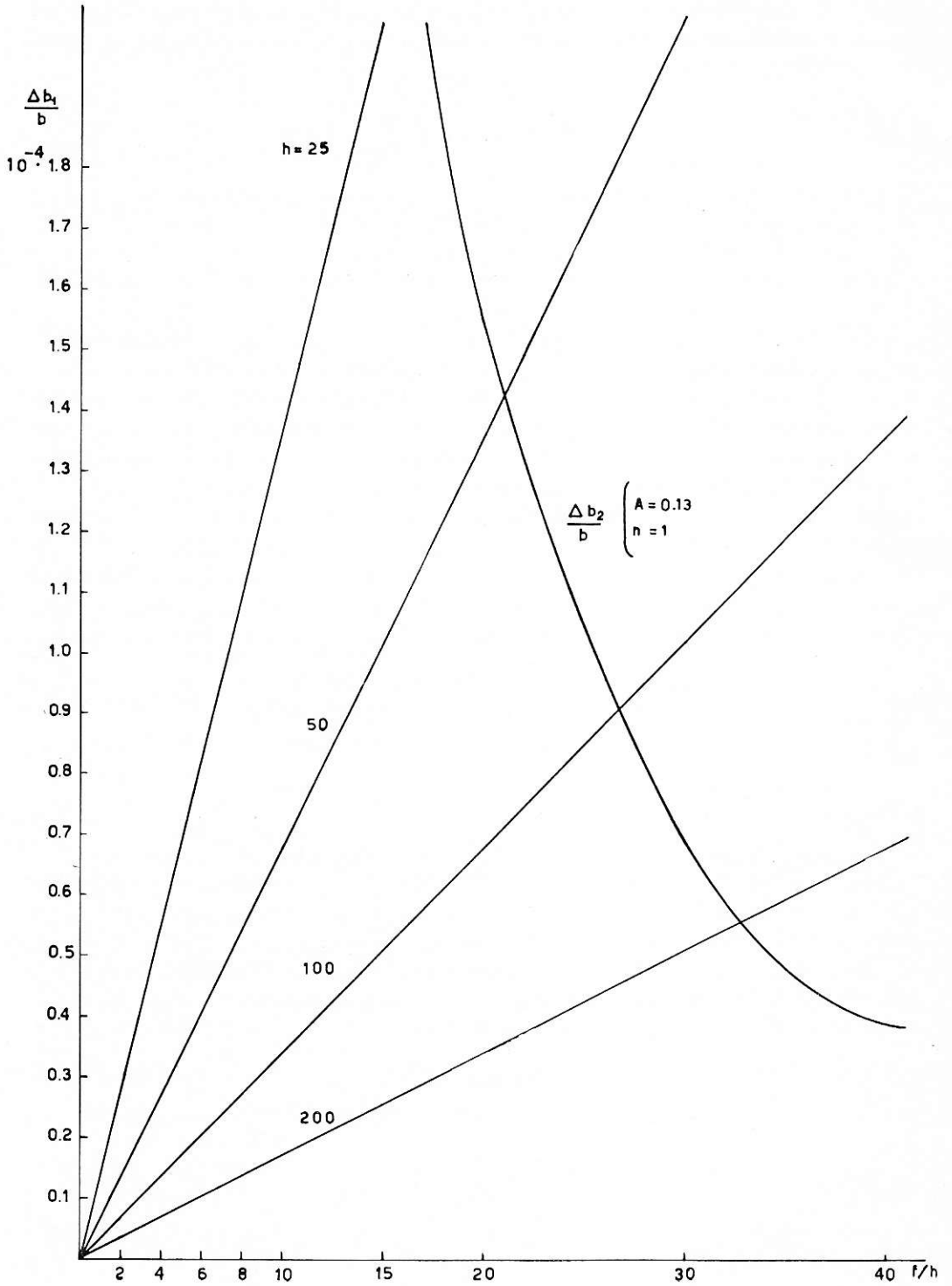


Fig. 3

Dalla stessa tabella si vede agevolmente che queste aberrazioni limitano sostanzialmente la precisione di questo metodo di misura delle distanze, obbligando ad utilizzare focali notevoli, a scapito dell'errore di diffrazione.

L'utilizzazione di obbiettivi aplanatici ed anastigmatici risulta quindi indispensabile.

In tal caso, l'errore relativo di diffrazione può essere praticamente ridotto, usando obbiettivi a riflessione a fuoco corto, a valori dell'ordine di 10^{-4} ed anche inferiore.

L'uso di obbiettivi aplanatici permetterebbe peraltro di ridurre notevolmente l'aberrazione sferica che a sua volta determina, come è noto, una superficie caustica che provoca una apparente dilatazione delle superfici estese di una quantità che, in prima approssimazione, si può porre eguale al diametro del cerchio di minima aberrazione,

$$d = \frac{A}{2} \frac{h^3}{f^2},$$

da cui si ricava,

$$(7) \quad \frac{\Delta b_2}{b} = \frac{A}{2} n \frac{h^2}{f^2}.$$

Il coefficiente dell'aberrazione principale sferica risulta, in valore assoluto $A = 1,1$ per i rifrattori, $A = 0,13$ per i riflettori, e cioè circa dieci volte inferiore al precedente.

Il diagramma di $\Delta b_2/b$, nel caso di uno specchio sferico (per $n = 1$), rappresentato nella figura 2, mostra l'inconciliabilità del fenomeno della diffrazione con quello dell'aberrazione sferica, ciò che è messo facilmente in evidenza dal tipo delle relazioni (6) e (7).

Quest'ultima infatti introdurrebbe errori già superiori a $1 \cdot 10^{-4}$ per rapporti $f/h = 20$, con tendenza ad aumentare iperbolicamente per valori minori.

Gli effetti più dannosi per i rifrattori semplici nella determinazione di b sono comunque quelli derivanti dalla aberrazione cromatica il cui cerchio di minima aberrazione presenta un diametro $d_3 \sim h/60$ per cui si ha:

$$\frac{\Delta b_3}{b} = \frac{n}{60},$$

valore assolutamente inaccettabile.

Nemmeno l'uso di semplici obbiettivi acromatici risulta soddisfacente, potendosi con questi ultimi ridurre il valore di $\Delta b_3/b$ solo a $\sim n \cdot 10^{-3}$, per cui si richiede, in questo caso, l'uso di speciali obbiettivi apocromatici a spettro secondario ridotto o a tripletti apocromatici.

Anche tenendo conto dei vantaggi che presentano a questo proposito i cannocchiali riflettori, la soluzione più razionale è quindi quella di fare uso di luce monocromatica, illuminando ad esempio con sorgente monocromatica (lampade al sodio o simili) la mira, costituita con asta di invar o quarzo, resa il più possibile riflettente.

Un miglioramento sensibile nelle misure di b può essere ottenuto utilizzando specchi parabolici con montatura newtoniana. In questo caso l'aberrazione sferica, nulla per immagini di oggetti infinitamente lontani, si mantiene molto piccola ed in generale trascurabile risultando inversamente proporzionale alla distanza x . Per quanto riguarda il coma e l'astigmatismo, risultano valide le relazioni (8), nelle quali i coefficienti assumono i valori:

$$B = 1/4, H = 1.$$

Senza scendere in particolari che esulano dalle presenti considerazioni, notiamo inoltre che per specchi parabolici è possibile ridurre anche gli effetti delle suddette aberrazioni di campo dando allo specchio secondario, piano per la montatura newtoniana, opportuna curvatura e ricorrendo di conseguenza a montature tipo Cassegrain [10].

4. — Il dispositivo di misura del sistema ottico è costituito dal sistema oculare e dal micrometro vero e proprio.

È ovvio che questi due elementi devono essere in grado di mettere in evidenza e quindi di permettere la rilevazione di quantità lineari o angolari il cui limite inferiore è dato dagli errori in precedenza analizzati. Tenendo conto del potere separatore dell'occhio umano ($\sim 60''$) e chiamando β l'angolo sotto cui è visto dal centro dell'obbiettivo l'elemento Δb_1 dovuto all'effetto di diffrazione si può scrivere:

$$\beta = \frac{60''}{I_0} \sin \alpha'',$$

nella quale I_0 rappresenta l'ingrandimento risolutore. D'altra parte avendosi:

$$\beta = \Delta b_1/f$$

si ha subito la nota relazione $I_0 = h$ (in mm).

Per quanto riguarda il dispositivo micrometrico di lettura, munito di tamburo o anello circolare per stimare le frazioni di rivoluzione della vite micrometrica, esso deve permettere di stimare la frazione Δs_1 del passo s della vite in modo che:

$$(8) \quad \frac{\Delta s_1}{s} = m \cdot 10^{-n}$$

dove l'esponente n ed il coefficiente m caratterizzano l'ordine di precisione richiesto, variabile nel nostro caso da 10^{-3} a 10^{-5} .

In genere i tamburi micrometrici permettono di leggere a stima o con nonio il millesimo, comunque non è difficile aumentando adeguatamente il diametro del tamburo di arrivare a determinare il decimillesimo. Notiamo inoltre che un errore di stima nella lettura sul tamburo presenta, eseguendo un elevato numero di letture, carattere accidentale, per cui anche una imprecisione di un ordine di grandezza nella lettura può essere facilmente compensata.

Esaminiamo infine gli errori sistematici dipendenti dalla vite micrometrica, dovuti alla dilatazione termica (Δs_2) ed alla variabilità del passo. I primi possono essere calcolati dalle relazioni $\Delta s_2 = \alpha s \Delta t$, dove α è il coefficiente termico del metallo impiegato, in genere ottone o bronzo ($\alpha = 1,8 \cdot 10^{-5}$).

Anche gli errori periodici e progressivi della vite micrometrica danno luogo ad errori relativi esprimibili mediante la (8). Essi devono quindi essere misurati e conosciuti con adeguata precisione ($10^{-3} s \div 10^{-5} s$). La determinazione di questi errori presuppone la conoscenza del passo. Dalla (4) discende che per rendere indipendente la distanza x dal campione di misura rispetto al quale sono riferite le misure assolute di a e b è necessario che questo campione sia unico per ambedue. In tal caso la misura del passo deve essere eseguita direttamente o indirettamente con gli stessi dispositivi ottici od interferometrici impiegati per la misura dell'elemento lineare (mira), ne consegue, tra l'altro, che anche per la determinazione del passo è possibile raggiungere precisioni senza dubbio superiore a quelle consentite nella misura di b .

5. — La determinazione della lunghezza focale f del sistema ottico presenta difficoltà analoghe a quelle che si incontrano nelle misure di b . Le misure ottiche di laboratorio sono infatti generalmente basate, per la misura di f , su relazioni del tipo (4).

L'errore sistematico Δf , o quello relativo, si ottengono quindi direttamente dalla (4'') o (4''') nella quale si suppone nota la distanza x .

In tal caso, se in luogo di una distanza nota arbitraria x si considera la lunghezza di una base geodetica fondamentale x_0 , tenendo presente quanto è stato detto per la misura di a e b , ed a meno degli errori sistematici di queste due ultime grandezze, la distanza focale f , e di conseguenza le successive distanze x determinate utilizzando il sistema ottico, risultano tutte tarate rispetto alla misura di riferimento campione x_0 .

Questo procedimento presenta il grande vantaggio di omogeneizzare le misure ottiche con quelle geodetiche, orientamento d'altra parte seguito generalmente anche per la taratura dei moderni procedimenti elettroottici e radioelettrici.

Poichè per la misura di una base geodetica si può porre $\Delta x/x = 10^{-5} \div 10^{-6}$, gli errori sistematici più notevoli sono quindi introdotti dalle misure di b . Questi errori agiscono fornendo un valore di f diverso da quello reale, che risulta però tarato sulla misura della base x_0 . Effettuata una prima determinazione di f per mezzo della base x_0 , si misuri successivamente con questo valore di f la base stessa, lo scarto Δx , tra il valore osservato e quello noto è imputabile agli errori accidentali di osservazione, a fluttuazioni degli errori sistematici di b tra i quali esercitano la loro influenza l'errore di fuocatura e l'aberrazione sferica longitudinale. Questo scarto permetterà per mezzo della (4), nella quale si ponga $\Delta a = \Delta b = 0$, di determinare una eventuale correzione Δf di f .

Il valore più probabile di questa correzione ed il suo errore quadratico medio può essere ottenuto ripetendo un certo numero di volte queste operazioni e considerandone la media dei risultati.

Per quanto riguarda l'errore massimo di fuocatura, nel caso di una figura di diffrazione perfetta si trova che una variazione della distanza focale diventa percettibile quando,

$$\Delta f_1 = \frac{1}{2} \frac{f^2}{h^2} \lambda ,$$

da cui per $\lambda = 0,55 \mu$,

$$\frac{\Delta f_1}{f} = 2,25 \frac{f}{h^2} \cdot 10^{-4} ,$$

e quindi inferiore agli errori $\Delta b_1/b$ per $n = 1$ rappresentati in fig. 3. Per l'effetto dell'aberrazione sferica, nel caso di specchi o lenti sferiche, si ottiene in modo analogo dall'ottica geometrica:

$$\frac{\Delta f_2}{f} = A \frac{h^2}{f^2} ,$$

e quindi questo errore, come il precedente, risulta più piccolo del rapporto n rispetto all'errore $\Delta b_2/b$ dato dalla (7) e rappresentato in fig. 3 per $n = 1$. Di conseguenza questi errori, che si manifestano secondo la (4''') sulla misura di b , possono essere considerati di secondaria importanza durante le misure di x_0 e di x .

Utilizzando in luogo di specchi sferici uno specchio parabolico l'aberrazione sferica longitudinale, anche per oggetti a distanza finita, può essere ridotta a quantità addirittura trascurabile. Infatti quest'ultima dà luogo ad un errore il cui importo è dato in prima approssimazione, sempre nell'ipotesi $x \gg f$, dalla relazione:

$$\Delta f_3 = \frac{h^2}{2 x} ,$$

da cui si ha facilmente:

$$\frac{\Delta f_3}{f} = \frac{n^2}{2} \left(\frac{a}{x} \right)^2 \frac{f}{x} .$$

La precedente ed i diagrammi di fig. 4 mostrano che la misura di x risulta tanto più precisa quanto più lunga si presenta la base x stessa, così ad esempio per $x = 1000$ m, $f = a = 1$ m, si ha: $\Delta f_3/f = 0,5 \cdot n^2 \cdot 10^{-9}$, valore senza dubbio più che soddisfacente e che mostra ancora una volta i vantaggi che può presentare l'uso dei cannocchiali riflettori.

6. — Prima di riassumere e di trarre le conclusioni della precedente analisi, consideriamo ora il caso generale in cui l'estremo inferiore della mira di lunghezza lineare a sia situato ad una distanza zenitale $z \neq 90^\circ$, inoltre la mira stessa risulti inclinata rispetto alla verticale di un angolo i , la cui direzione positiva è quella indicata nella figura 5.

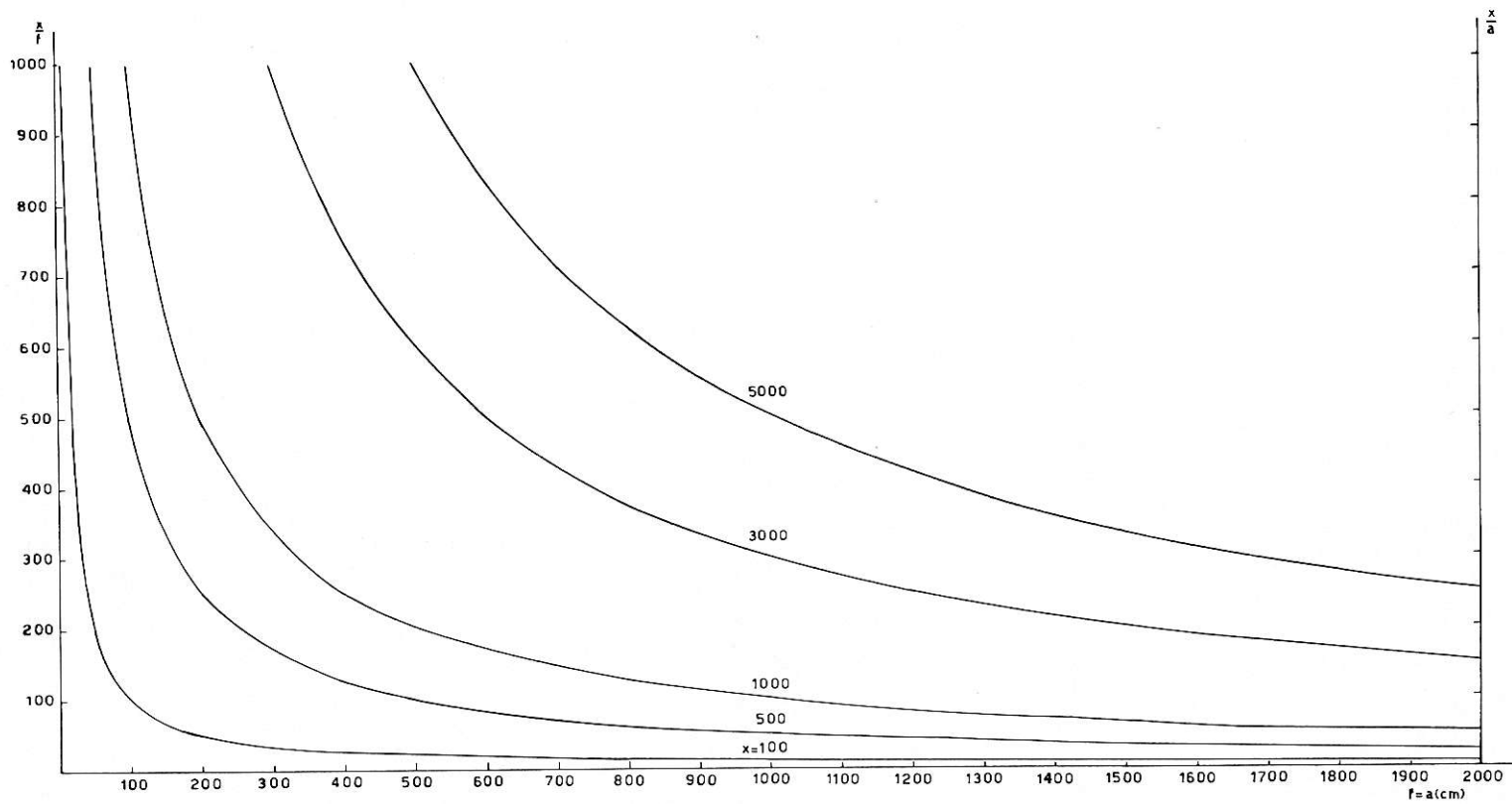


Fig. 4

In queste condizioni si ha per la distanza $x = AB$ del punto B sull'orizzonte di A ,

$$(9) \quad x = x_1 \sin z,$$

nella quale la distanza x_1 è data dalla (4) in cui l'elemento lineare non sarà più a bensì,

$$a' = a \sin (i + z) (1 - \operatorname{tg} \alpha \cotg z)$$

per cui sarà,

$$x_1 = f \left[1 + \frac{a}{b} \sin (i + z) (1 - \operatorname{tg} \alpha \cotg z) \right].$$

Da questa si ha facilmente nell'ipotesi che $a \ll x_1$,

$$\frac{\Delta x_1}{x_1} = \cotg (i + z) \Delta (i + z),$$

da cui,

$$\Delta (i + z)'' = 2.10^5 \operatorname{tg} (i + z) \frac{\Delta x_1}{x_1}.$$

Quest'ultima permette dunque di ottenere la precisione con cui è necessario conoscere gli angoli i e z per garantire una precisione relativa $\Delta x_1/x_1$.

I valori di $(i + z)''$ dati nella tabella V nel caso $\Delta x_1/x_1 = 10^{-5}$, mostrano quale è l'ordine di precisione richiesto per variazioni di $i + z$ fino a 10^0 .

Tabella V

$(i + z)^\circ$	$\Delta (i + z)''$
80.	11''
85.	23''
86.	29''
87.	38''
88.	57''
89.	115''
89.5	229''

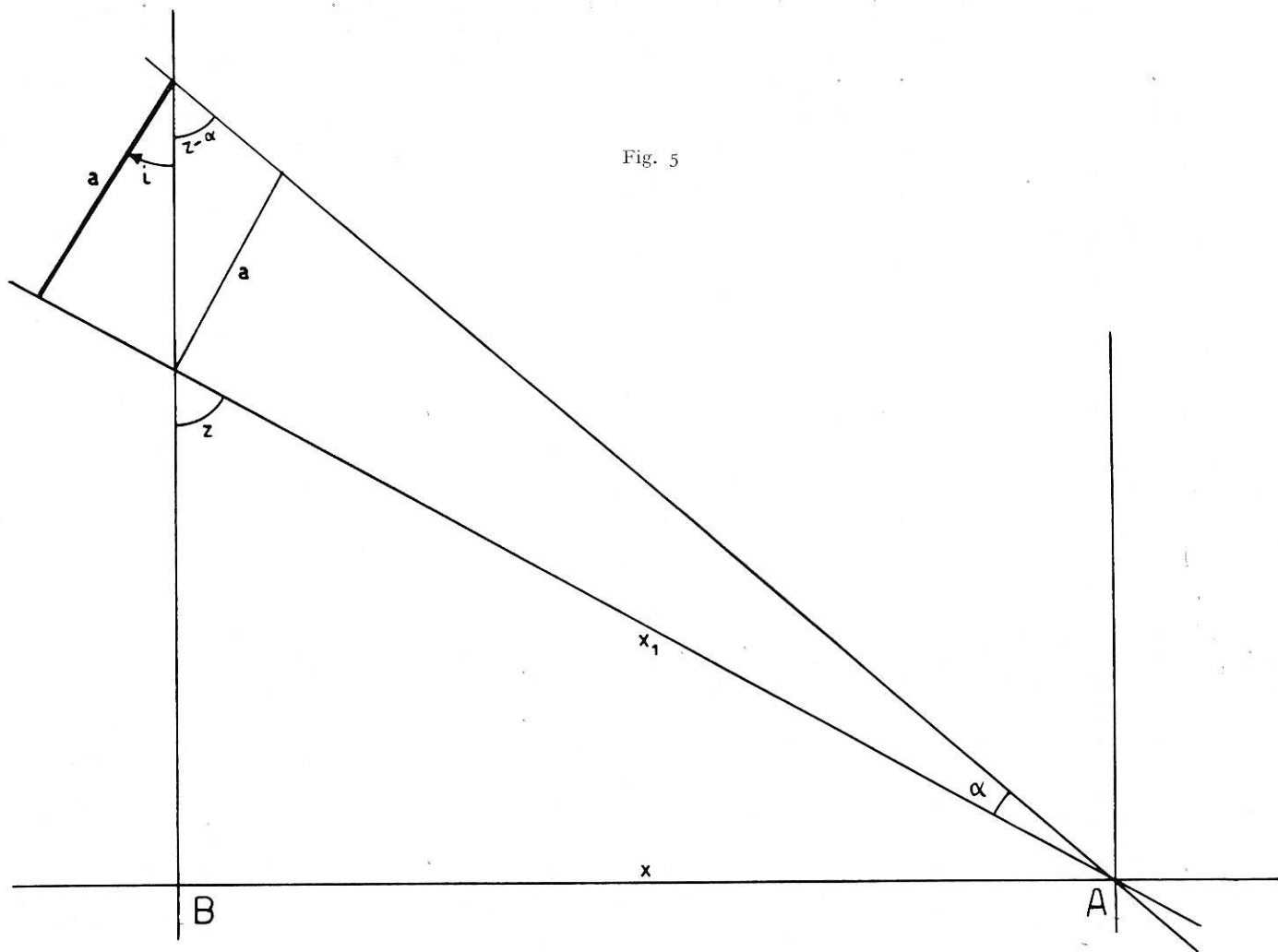
Dalla (9) potendosi scrivere inoltre :

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta x'}{x'} + \cotg z \Delta z$$

e ritenendo $\Delta z = \Delta i$, si ha infine,

$$\Delta z'' = \Delta i'' = \frac{2}{2 \cot (i + z) + \cot z}$$

Fig. 5



da cui si vede che, pur considerando il valore relativo dell'inclinazione i , anche rispetto alla misura di x , le tolleranze di i e z risultano nell'ordine di grandezza riportato nella tabella V.

7. — La precedente ricerca è stata sviluppata dall'analisi della (4'') e (4''') nella quale gli incrementi sono stati considerati come errori sistematici.

Questa ipotesi risulta generalmente giustificata anche nei casi in cui essa può sembrare discutibile, come ad esempio nel caso degli errori tipo Δf , peraltro di non primaria importanza, che in effetti possono apparire di tipo accidentale data la casualità con la quale essi forzatamente si manifestano.

In questi casi è però da tener presente che in una pratica determinazione anche l'errore di fuocatura o di aberrazione longitudinale, assume un carattere costante e quindi sistematico, a meno di non ripetere la delicata operazione di fuocatura ad ogni puntata della mira, ciò che non si ritiene consigliabile.

Da questo punto di vista tali errori costituiscono quindi un limite per la precisione intrinseca delle misure, oltre il quale è illusorio voler procedere.

Da quanto è stato esposto risulta molto chiaramente che le condizioni più restrittive sono imposte dagli errori sistematici introdotti dal sistema ottico sull'immagine b della mira.

Questi ultimi, come si è visto, assumono valori molto elevati nel caso di semplici obbiettivi rifrattori.

L'uso di speciali obbiettivi aplanatici (ed acromatici impiegando luce non monocromatica) permette di stabilire come limite di precisione relativa parecchie unità di 10^{-4} , e solo con l'uso di riflettori sferici, che permettono tra l'altro maggiore possibilità in fatto di apertura e curvatura dello specchio, si può arrivare ad un ordine di 1.10^{-4} .

Un miglioramento effettivo mostrano di garantire i riflettori parabolici, con i quali è possibile pensare di raggiungere precisioni relative intrinseche dell'ordine di 10^{-5} .

Strumenti di misura con queste possibilità richiedono particolare cura sia nella esecuzione che nell'uso, perlomeno non inferiori a quelle che vengono generalmente impiegate nella taratura o nell'impiego degli apparati geodetici classici.

Questi risultati, se pur non competitivi con le migliori precisioni di questi ultimi apparati, tuttavia mostrano a nostro avviso le possibilità che il metodo ottico, utilizzando telescopi riflettori, può fornire, se ad esso ci si rivolga con più adeguata attenzione. Tanto più se si considera il particolare campo di applicazione, su distanze ettometriche e chilometriche, nel quale gli altri metodi, ad esclusione, sinora, di quelli elettroottici, hanno mostrato di garantire precisioni spesso inferiori.

L'uso di apparati ottici di elevata precisione risulterebbe particolarmente idoneo in misure lineari ed in triangolazioni topografiche e geodetiche nell'ambito di reti urbane del primo ordine o in altre zone dotate di punti trigonometrici non direttamente accessibili e per la verifica ed il confronto con le misure ricavate dalle recenti o passate triangolazioni fondate sulla misura delle basi.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BONIFACINO B., *La misura delle basi geodetiche con apparati invar.* « Riv. Cat. e SS.TT.EE. » II (1), 13, 1947.
- [2] CARLA C., *I moderni metodi per la misura diretta delle distanze.* « Boll. Geod. e Sc. affini », I, 113, 1956.
- [3] CARLA C., *Methods to the measurements of distances.* « Bull. Geod », 66, 317, 1962.
- [4] KRZEMINSKI W., DABROWSKI W., MAIADANOVA Z., *The results of first examinations of electronic distance-measuring equipment.* I.U.G.G., XIII General Assembly, Abstracts of papers, Vol. II, A 1, 02, 1963.
- [5] KRZEMINSKI W., DABROWSKI W., MAIADANOVA Z., *Some results of telluometric measurements on geodetical bases in Poland.* I.U.G.G., XIII General Assembly, Abstracts of papers, Vol. II, A 1, 03, 1963.
- [6] STANCZYK Z., *Results of measurement of distances with a telluometer.* I.U.G.G., XIII General Assembly, Abstracts of papers, Vol. II, A 1, 04, 1963.
- [7] MEZZANI L., *Criteri generali di progetto di una apparecchiatura radar per la misura di precisione delle distanze col metodo impulsivo.* « Alta Frequenza », XXXI (10), 644, 1962.
- [8] LILLY J. E., *Canadian telluometer investigations 1957-1959.* « Bull. Geod. », 66, 287, 1962.
- [9] PETTAVEL J., *La nouvelle définition du mètre.* « Bull. Annuel de la Soc. Suisse de Chron. », IV, 659, 1962.
- [10] CHRETIEN H., *Le telescope de Newton et le telescope aplanetique.* « Revue d'Optique », I, 13, 1922.
- [11] COUDER A., *Sur un type nouveau de telescope photographique.* C. R. de l'Acad. de Sc., 183 (II), 1276, 1926.

CONTRIBUTI DELL'OSSERVATORIO ASTRONOMIC DI MILANO-MERATE

NUOVA SERIE

- » 150 - E. PROVERBIO, *La détermination théorique et expérimentale des retards dans la comparaison des signaux horaires.*
- » 151 - A. MASANI, *The early evolutionary phases of stars of small masses.*
- » 152 - M. HACK, *The spectrum of Upsilon Sagittarii.*
- » 153 - E. PROVERBIO, *Determinazioni di ascensioni rette e semidiametri del pianeta Marte.*
- » 154 - E. PROVERBIO, *Il servizio dell'ora all'Osservatorio Astronomico di Brera-Milano.*
- » 155 - P. BROGLIA, *Curve di luce in due colori ed elementi fotometrici della binaria ad eclisse SU Bootis.*
- » 156 - F. ZAGAR, *Nuove prospettive nello studio del sistema solare.*
- » 157 - M. HACK, *Macro e microturbolenza nell'atmosfera di ϵ Aurigae.*
- » 158 - E. PROVERBIO, *Nuovo studio di un apparato esaminatore di livelle Bamberg.*
- » 159 - M. HACK, *Ricerche sulle stelle A peculiari: Analisi quantitativa di γ Equulei.*
- » 160 - E. PROVERBIO, *Osservazioni di occultazioni da parte della Luna e correzione del moto lunare.*
- » 161 - F. ZAGAR, *Giovanni Schiaparelli.*
- » 162 - E. PROVERBIO, *Les signaux de temps et leurs utilisation a l'Observatoire Astronomique de Brera-Milano.*
- » 163 - J. O. FLECKENSTEIN, *Il problema della cattura nella cosmogonia delle binarie.*
- » 164 - A. MASANI, *La polittropica di indice 3 nello studio della costituzione interna di stelle appartenenti a sistemi binari stretti.*
- » 165 - P. BROGLIA, *Sulle variazioni delle curve di luce e degli elementi della variabile ad eclisse RZ Comae.*
- » 166 - M. HACK, *Sulla natura del compagno di ϵ Aurigae.*
- » 167 - E. PROVERBIO, *Sul calcolo d'orbita di stelle doppie a lungo periodo tenendo conto della legge delle aeree.*
- » 168 - T. TAMBURINI e G. THIESSEN, *On the origin of the slowly variable soft x-ray radiation of the sun.*
- » 169 - A. MASOTTI, *Sull'estensione della formula di Lambert al moto apparente delle stelle doppie.*
- » 170 - E. PROVERBIO, *Determinazioni meridiane di ascensioni rette di pianeti esterni.*
- » 171 - E. PROVERBIO, *I micrometri e le livelle dello strumento dei passaggi AP 100 dell'Osservatorio di Brera.*
- » 172 - T. TAMBURINI e G. THIESSEN, *On the existence of a new polarization effect in stellar spectral lines.*
- » 173 - M. HACK e M. FRACASSINI, *Studio sulla polarizzazione della corona solare.*
- » 174 - E. L. PASINETTI, *Sulla possibilità dell'impiego di microfotogrammi nello studio della corona solare.*
- » 175 - P. BROGLIA, *Sui periodi di alcune variabili di tipo RR Lyrae.*
- » 176 - E. GULISANO e E. PROVERBIO, *Riduzioni delle posizioni apparenti stellari per mezzo di un calcolatore IBM 650.*
- » 177 - P. BROGLIA, *Osservazioni fotoelettriche di due variabili a eclisse.*
- » 178 - E. PROVERBIO - *Le misure dei ritardi alla ricezione dei segnali orari ect.*
- » 179 - E. PROVERBIO - *Comparaisons entre etalons atomiques de fréquence.*
- » 180 - F. ZAGAR - *L'attività di R. Boscovich a Milano.*
- » 181 - E. PROVERBIO, *Sulla riduzione teorica dei diametri dei pianeti esterni.*
- » 182 - L. E. PASINETTI, *Confronto quantitativo di tre coppie di stelle a righe forti e a righe deboli.*
- » 183 - F. ZAGAR-L. GRATTON - *Emilio Bianchi nel ventennio della morte - In memoria di Emilio Bianchi.*

- » 184 - J. O. FLECKENSTEIN - *Variazioni della latitudine e costante dell'aberrazione annua 1951-52.*
- » 185 - M. HACK - *A new explanation of the binary system ϵ Aurigae.*
- » 186 - F. ZAGAR - *L'eclisse totale di Sole del 15 febbraio 1961.*
- » 187 - F. ZAGAR - *Sulle perturbazioni orbitali di un satellite terrestre artificiale.*
- » 188 - A. PASINETTI - L. E. PASINETTI - *Aspetti astrofisici e raido biologici del volo umano nel cosmo.*
- » 189 - M. HACK - *Radio emission at 21 cm in a region close to the Persei cluster.*
- » 190 - P. BROGLIA - *Curva di luce in tre colori ed elementi della variabile ad eclisse SW Lac.*
- » 191 - M. FRACASSINI, M. HACK, L. PASINETTI - *Project for a system for the automation of stellar quantitative spectrography.*
- » 192 - E. PROVERBIO, *Sul calcolo rigoroso delle posizioni apparenti delle stelle.*
- » 193 - A. MASANI e G. OCCHINI, *The propagation of perturbation and shock waves in the inside of stars I.*
- » 194 - P. BOTTO e M. HACK, *A two dimensional classification of stars of class O.*
- » 195 - E. PROVERBIO - *Latitudine e longitudine astronomica provvisorie della stazione di M.te Conero durante l'eclisse totale di Sole del 15-2-1961.*
- » 196 - A. GÖRGÖZ, M. HACK, I. KENDIR - *Study of the spectrum and radial velocities of ζ Tauri in 1958 and 1959.*
- » 197 - M. FRACASSINI, M. HACK - *Intensities, polarization and electron density of the solar corona from photographs taken during the total solar eclipse of 1961, february 15.*
- » 198 - E. PROVERBIO - *Recherches dans le champs de la metrologie du temps.*
- » 199 - R. FARAGGIANA, M. HACK - *Peculiar A stars studies of 73 Draconis.*
- » 200 - G. DE MOTTONI - *Nuovi specchi telescopici metallici.*
- » 201 - F. ZAGAR, *L'Osservatorio di Milano nella storia.*
- » 202 - M. HACK - *Absolute Magnitude of O-type stars.*
- » 203 - G. DE MOTTONI - *Il nuovo riflettore di 1,37 m dell'Osservatorio di Merate.*
- » 204 - M. FRACASSINI - *The solution of the van de Hulst's integral equations for computing electron of the solar corona.*
- » 205 - M. HACK - *The shell spectrum of W Serpentis.*
- » 206 - A. GÖKGÖZ, M. HACK, I. KENDIR, *Study of the spectrum of ζ Tauri in 1960.*
- » 207 - J. O. FLECKENSTEIN, *Boscovich als Mithegründer der sphärischen Trigonometrie.*
- » 208 - A. MASANI, *The propagation of shock waves in the inside of Stars II.*
- » 209 - F. ZAGAR - F. ZAGAR, *Galileo astronomo.*
- » 210 - E. PROVERBIO, *Condizioni per la determinazione della costante micrometrica per mezzo di coppie stellari fondamentali.*
- » 211 - A. MASOTTI, *Sopra alcuni cimeli bibliografici della Specola braidense.*
- » 212 - M. FRACASSINI, *The solution of the van de Hulst's integral equations ecc.*
- » 213 - E. PROVERBIO, *Determinazione fotografica di precisi istanti dei contatti durante l'eclisse totale di Sole del 15 febbraio 1961.*
- » 214 - G. DE MOTTONI, *Considerazioni sulla Collaborazione internazionale nello studio fotografico del Pianeta Marte.*
- » 215 - M. HACK e L. PASINETTI, *Quantitative analysis of the Hydrogen - poor star ν Sagittarii.*
- » 216 - A. MASANI, *Sui recenti sviluppi della teoria delle stelle variabili.*
- » 217 - M. FRACASSINI e M. HACK, *Intensities, polarization and electron density of the solar corona during the total solar eclipse of 1961, february 15: (final results) paper II.*
- » 218 - R. FARAGGIANA e M. HACK, *The magnetic star γ Equulei.*
- » 219 - E. PROVERBIO, *La variazione della latitudine di Milano (Brera) nel periodo 1960.1-1961.3.*
- » 220 - E. PROVERBIO, *Sul problema della determinazione dell'azimut strumentale meridiano.*
- » 221 - R. FARAGGIANA e M. HACK, *Results obtained from the 1961-62 eclipses of 31 Cygni.*
- » 222 - P. BROGLIA, *The ultrashort period variable SZ Lyncis.*
- » 223 - A. PASINETTI e L. E. PASINETTI, *The problem of ionizing radiations in space flight.*