

CONFERENZE

Dell'Osservatorio Astronomico di Milano - Merate

a cura del Direttore

Prof. Francesco Zagar

Serie I

N.1

Edoardo Proverbio

LE OSSERVAZIONI DI OCCULTAZIONI LUNARI ED I PROBLEMI
AD ESSE CONNESSI

Milano

1958

CONFERENZE

Dell'Osservatorio Astronomico di Milano - Merate

a cura del Direttore

Prof. Francesco Zagar

Serie I

N.1

Edoardo Proverbio

LE OSSERVAZIONI DI OCCULTAZIONI LUNARI ED I PROBLEMI
AD ESSE CONNESSI

Milano
1958

INDICE

| | | |
|--|------|----|
| INTRODUZIONE | | |
| 1. | Pag. | 4 |
| LA TEORIA DEL MOTO LUNARE ED IL TEMPO DELLE EFFEMERIDI | | |
| 2. | " | 4 |
| 3. Il tempo delle effemeridi | " | 6 |
| 4. | " | 8 |
| 5. | " | 9 |
| LE OSSERVAZIONI DI OCCULTAZIONE | | |
| 6. | " | 9 |
| 7. | " | 11 |
| TEORIA DELLE OCCULTAZIONI | | |
| 8. | " | 11 |
| PREVISIONE DELLE OCCULTAZIONI | | |
| 9. Ricerca delle stelle occultate dalla Luna di magnitudine inferiore a 7,55 | " | 13 |
| 10. Ricerca delle stelle occultate dalla Luna e previsione delle occultazioni per stelle di magnitudine superiore a 7,55 | " | 16 |
| 11. | " | 18 |
| 12. Previsione delle occultazioni per stelle di magnitudine inferiore a 7,55 | " | 19 |
| 13. | " | 24 |
| 14. Schema di calcolo per la previsione delle occultazioni | " | 25 |
| RIDUZIONE DELLE OSSERVAZIONI DI OCCULTAZIONE | | |
| 15. | " | 27 |
| 16. | " | 29 |
| 17. Schema di calcolo per la riduzione di occultazioni | " | 29 |
| BIBLIOGRAFIA | " | 32 |

LE OSSERVAZIONI DI OCCULTAZIONI LUNARI ED I PROBLEMI AD ESSE CONNESSI

di Edoardo Proverbio

Riassunto. Dopo aver messo in evidenza l'importanza attualmente assunta dalle osservazioni di occultazioni lunari, soprattutto per la determinazione del Tempo delle Effemeridi, viene sinteticamente esposta la teoria di Bessel delle occultazioni. Partendo da questa teoria si risolve in seguito l'equazione fondamentale per approssimazioni successive, e si trovano diverse relazioni note che attraverso al calcolo di previsione delle occultazioni danno l'istante approssimato dell'occultazione per le stelle occultabili del NZC (magnitudine fino a 7,5).

Rifacendosi ai metodi di Browne e Dawson vengono quindi descritte le operazioni necessarie al calcolo di previsione di occultazioni per stelle di magnitudine superiore a 7,5 non riportate nel NZC.

Sono infine descritti il metodo e la teoria della riduzione delle occultazioni. Completano la presente nota due tabelle per l'impostazione pratica dei calcoli di previsione e di riduzione delle osservazioni di occultazioni, particolarmente adatte utilizzando macchine calcolatrici automatiche.

Resumé. Depuis avoir relevé l'importance que actuellement revêtent les observations d'occultations, surtout pour la détermination du Temps des Ephemerides, on vient d'exposer brièvement la théorie des occultations de Bessel. En partant de cette théorie on résout par approximations successives l'équation fondamentale des occultations et on trouve les relations, qui, au moyen des calculs de prévision des occultations, donnent l'instant approché de l'occultation pour les étoiles du NZC (magnitude jusqu'à 7,5).

A partir des méthodes de Browne et Dawson on vient d'exposer ensuite les opérations nécessaires aux calculs de prévision des occultations pour étoiles de magnitude plus grand que 7,5, et pas reportées dans le NZC. Nous avons enfin représenté la méthode et la théorie de réduction des observations d'occultation.

Deux tableaux pour la résolution pratique des formules et des calculs de prévision et de réduction des observations, au moyen d'une calculatrice automatique, sont données.

INTRODUZIONE

1. Data l'importanza sempre crescente che rivestono attualmente le osservazioni del moto della Luna, ci è sembrato cosa utile esporre in questa nota una sintesi che fosse il più possibile completa delle basi teoriche e dei metodi pratici di osservazione e di riduzione delle osservazioni di occultazioni della Luna, che, fra tutti i metodi di osservazione sono quelli più semplici ad eseguirsi, anche se discretamente complessi si presentano i calcoli di previsione e riduzione.

Le osservazioni di occultazioni lunari non richiedono strumenti particolarmente potenti, anche con modestissimi equatoriali di 10-15 cm si possono, con sufficiente chiarezza, seguire tutte le fasi del fenomeno. Esse perciò possono essere facilmente eseguite anche al di fuori dagli Osservatori Astronomici, da coloro che si vogliono dedicare con impegno a questa ricerca.

Se le osservazioni in se stesse non abbisognano di grandi strumenti, tuttavia, affinché i risultati delle osservazioni stesse siano utilizzabili è necessario che l'istante dell'occultazione della stella da parte della Luna venga determinato con la più grande precisione. L'osservazione di una occultazione acquista anzi particolare interesse proprio a causa del continuo perfezionarsi dei cronografi registratori, il che permette di ottenere per l'istante dell'occultazione valori più precisi e quindi più preziosi, e soprattutto con l'introduzione dell'uso di metodi fotoelettrici di osservazione, che eliminano gli errori personali di osservazione sempre presenti e spesso incontrollabili.

LA TEORIA DEL MOTO LUNARE ED IL TEMPO DELLE EFFEMERIDI

2. Fino a qualche tempo fa le osservazioni di occultazioni lunari servivano principalmente per controllare e correggere le tavole lunari dedotte dalla teoria di E. W. Brown, che ha portato tale teoria a una grande perfezione sviluppando direttamente i valori della longitudine, latitudine e parallasse equatoriale della Luna.

Come è noto, chiamando δ' la distanza angolare apparente della stella dal centro della Luna, e δ il semidiametro apparente della Luna, l'osservazione e la conseguente riduzione delle osservazioni permettono di calcolare la differenza $\Delta\delta = \delta' - \delta$.

Consideriamo infatti l'angolo φ che la direzione del moto lunare forma col cerchio orario passante per il centro lunare, facilmente ottenibile in prima approssimazione dalla relazione

$$\text{tang } \varphi = 15 \frac{\Delta\alpha}{\Delta\delta} \cos \delta_1, \quad (1)$$

dove $\Delta\alpha$ e $\Delta\delta$ rappresentano le differenze, espresse in secondi di tempo, tra le ascensioni rette (α_1, α_2) e le declinazioni (δ_1, δ_2) di due posi-

zioni lunari vicine ($\hat{\ }$). In particolare se le due posizioni sono prese a distanza di un'ora, $\Delta\alpha$ e $\Delta\delta$ sono evidentemente il moto orario della Luna nelle due coordinate.

Consideriamo in seguito l'angolo di posizione χ , detto angolo al polo, formato tra le due direzioni che dal centro lunare vanno al punto Nord della Luna ed alla stella occultata, e contato dal Nord verso Est. Indicando infine OS il semidiametro apparente δ e O'S la distanza apparente δ' , dal triangolo OO'S si ha subito (fig. 1),

$$\cos \delta' = \cos d\lambda \cos \delta + \sin d\lambda \sin \delta \cos (\chi - \varphi);$$

e poichè $d\lambda = OO'$ è molto piccolo, la precedente può essere trasformata, dividendo per $\sin \delta$, nella seguente

$$\frac{\cos \delta' - \cos \delta}{\sin \delta} = d\lambda \cos (\chi - \varphi).$$

Questa, ponendo inoltre $\delta' = \delta + \Delta\delta$, si può scrivere infine, considerando $\Delta\delta$ trascurabile,

$$\Delta\delta = d\lambda \cos (\chi - \varphi);$$

che ci permette, contenendo come unica incognita $d\lambda$, di ottenere, per ogni singola occultazione, dal valore di $\Delta\delta$ la correzione da apportare alla longitudine della Luna, contata in questo caso sull'orbita.

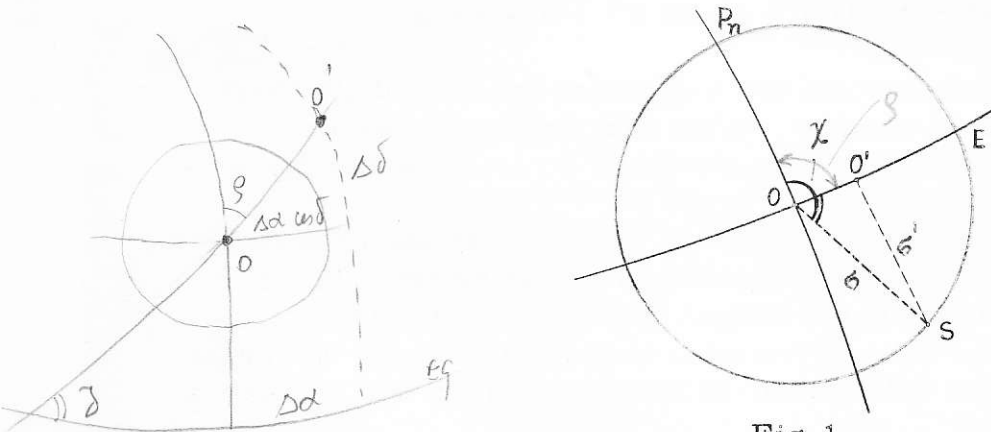


Fig. 1

($\hat{\ }$) L'angolo φ si può pure ottenere conoscendo l'inclinazione J dell'orbita sull'equatore vero, in tal modo si ottiene facilmente $\sin \varphi = \cos J \sec \delta$.

Indicando $d\beta$, la correzione da apportare alla latitudine, sempre contata sull'orbita, si ottiene analogamente

$$\Delta\delta = -d\beta \sin(\chi - \varrho).$$

In definitiva ogni occultazione ci permette di ottenere una equazione del tipo

$$\Delta\delta = d\lambda \cos(\varrho - \chi) + d\beta \sin(\varrho - \chi).$$

Disponendo quindi di un certo numero di tali equazioni, col metodo dei minimi quadrati possiamo ricavare per ogni serie di osservazioni giornaliere $d\lambda$ e $d\beta$, da cui si passa facilmente alle correzioni delle longitudini e latitudini eclittiche lunari.

3. Il Tempo delle Effemeridi. Successivamente, e con l'affinarsi dei metodi di osservazione, le occultazioni acquistarono una primaria importanza nella determinazione del Tempo Newtoniano o delle Effemeridi.

Nel 1939 H. Spencer Jones aveva mostrato che la relazione di Newcomb

$$L = L_0 + 129\,602\,768''.13 T + 1''.089 T^2, \quad L_0 = 279^\circ 41' 48''.04$$

nella quale T è espresso in secoli giuliani di 36 525 giorni, a partire dal mezzogiorno T. U. dell'1 gennaio 1900, che dà la longitudine media del Sole in funzione del tempo, non era sufficientemente esatta e che essa andava corretta della quantità

$$\Delta L = 1''.00 + 2''.97 T + 1''.23 T^2 + 0.0748 B, \quad \begin{array}{l} \text{0.0748 rappresenta la } \delta \text{ mot. della} \\ \text{Sole } \end{array}$$

dove i primi tre termini rappresentano una variazione secolare della longitudine media, mentre il quarto termine, in cui B si esprime in secondi di arco, ha origine da fluttuazioni irregolari attribuite a variazioni dei momenti d'inerzia della Terra ⁽¹⁾.

Poichè la causa di queste anomalie tra la teoria e l'osservazione si fa risalire unicamente ad una variazione della velocità di rotazione della Terra, ne consegue un'alterazione della scala dei tempi. Tra il Tempo Universale, legato alla velocità di rotazione della Terra ed il tempo indipendente da questa rotazione, cioè il Tempo delle Effemeridi, si manifesta quindi una differenza data in tempo da

$$\Delta T = 24^s.349\,48 \Delta L,$$

dove il coefficiente di ΔL rappresenta il tempo impiegato dal Sole a percorrere $1''$ sopra l'eclittica.

In definitiva la relazione precedente si può scrivere

$$\Delta T = f(T) + 1.821 B.$$

$$f(T) = 24^s.349.48 + 72^s.31796 T + 29^s.94986 T^2$$

[$\sim 2 \cdot 10^{-8}$ al giorno $\sim 3 \cdot 10^{-6}$ all'anno] *unità relative*

Sotto questa forma essa mette meglio in evidenza la natura dei termini che costituiscono l'espressione di ΔT . La prima parte, come si è detto, rappresenta l'allungamento secolare della durata del giorno ed è stata dedotta direttamente dall'analisi degli scarti O - C tra la longitudine osservata e la longitudine calcolata secondo la teoria di Newcomb. La seconda parte invece, dipende unicamente dalle accennate fluttuazioni della velocità di rotazione della Terra e rappresenta attualmente il termine incognito che è necessario determinare per avere il Tempo delle Effemeridi. Questo termine si ricava dalla relazione, analoga alla precedente, che fornisce lo scarto $\Delta L'$ tra la longitudine osservata ^{della Luna} e le tavole del Brown (^)

$$\Delta L' = 4''.65 + 12,96 T + 5''.22 T^2 + B,$$

e risulta quindi eguale alla differenza tra le longitudini osservate e la pura teoria della gravitazione, per cui si può scrivere (^^)

$$B = \text{Longitudine osservata} - (\text{Tavole Brown} + 4''.65 + 12''.96 T + 5''.22 T^2).$$

Utilizzando inoltre nuove effemeridi lunari corrette dal termine secolare $f'(T)$, la relazione fra il Tempo delle Effemeridi ed il Tempo Universale può essere scritta, a meno di $f(T)$

$$T.E. - T.U. = \Delta T = 1.821 B.$$

La Tabella I riporta i valori delle fluttuazioni B e i corrispondenti valori delle correzioni ΔT . Essa mostra abbastanza eloquentemente l'importanza del termine B nella determinazione del Tempo delle Effemeridi e la sua variazione irregolare.

E' evidente quindi, per quanto è stato esposto, l'importanza che rivestono le osservazioni per la determinazione del termine irregolare B. E poichè praticamente questo termine si ottiene con osservazioni di posizioni della Luna, che per il suo grande moto è preferita alla osservazione del Sole,

(^*) Notiamo che benchè il moto medio della Luna sia 13,37 volte maggiore di quello del Sole, la sua accelerazione dedotta dalle osservazioni, come risulta dalla relazione soprascritta, non risulta $16''.4$ ma bensì solo $5''.22$, valore che era già stato trovato in precedenza dal De Sitter. Questa differenza, da attribuirsi all'influenza del rallentamento secolare della velocità di rotazione terrestre sul moto orbitale della Luna, non è ancora ben spiegata teoricamente.

(^^) E' da tener presente che si presuppone in questo caso, che le Tavole del Brown siano corrette del termine empirico di Newcomb - $10''.71 \sin(140^\circ T + 240^\circ .7)$, che il Newcomb stesso determinò per spiegare gli scarti irregolari del moto lunare, e che il Brown introdusse nella sua teoria.

$$f'(T) = 4''.65 + 12''.96 T + 5''.22 T^2$$

ne consegue l'interesse che hanno oggi le osservazioni di occultazioni lunari, se si tien conto che esse hanno attualmente quasi del tutto sostituito le osservazioni meridiane della Luna.

TABELLA I[^]

| V | B | $\Delta^{\dagger} T$ | B | $\Delta^{\dagger} T$ | |
|--------|-----------|-----------------------|--------|----------------------|-----------------------|
| 1681.0 | - 12", 72 | - 23 ^S , 2 | 91.5 | - 14", 34 | - 26 ^S , 1 |
| 1710.0 | - 3 , 92 | - 7 , 1 | 94.5 | - 15 , 23 | - 27 , 7 |
| 27.0 | + 2 , 15 | + 3 , 9 | 97.5 | - 15 , 99 | - 29 , 1 |
| 37.0 | + 5 , 97 | + 10 , 9 | 1900.5 | - 15 , 87 | - 28 , 9 |
| 47.0 | + 8 , 49 | + 15 , 5 | 03.5 | - 14 , 50 | - 26 , 4 |
| 55.0 | + 10 , 34 | + 18 , 8 | 06.5 | - 13 , 43 | - 24 , 5 |
| 71.0 | + 13 , 54 | + 24 , 7 | 09.5 | - 12 , 78 | - 23 , 3 |
| 85.0 | + 14 , 84 | + 27 , 0 | 12.5 | - 11 , 62 | - 21 , 2 |
| 92.0 | + 14 , 53 | + 26 , 5 | 15.5 | - 10 , 35 | - 18 , 8 |
| 1801.5 | + 13 , 09 | + 23 , 8 | 18.5 | - 10 , 20 | - 18 , 6 |
| 09.5 | + 11 , 80 | + 21 , 5 | 21.5 | - 10 , 18 | - 18 , 5 |
| 13.0 | + 11 , 28 | + 20 , 5 | 24.5 | - 11 , 82 | - 21 , 5 |
| 21.8 | + 10 , 02 | + 18 , 2 | 26.5 | - 12 , 11 | - 22 , 1 |
| 31.5 | + 6 , 85 | + 12 , 5 | 28.5 | - 12 , 90 | - 23 , 5 |
| 37.4 | + 4 , 91 | + 8 , 9 | 30.5 | - 13 , 83 | - 25 , 2 |
| 43.1 | + 4 , 31 | + 7 , 8 | 32.5 | - 14 , 81 | - 27 , 0 |
| 48.8 | + 3 , 97 | + 7 , 2 | 34.5 | - 15 , 98 | - 29 , 1 |
| 52.5 | + 3 , 37 | + 6 , 1 | 36.5 | - 16 , 48 | - 30 , 0 |
| 57.5 | + 2 , 40 | + 4 , 4 | 38.5 | - 17 , 57 | - 32 , 0 |
| 62.5 | + 0 , 91 | + 1 , 7 | 40.5 | - 18 , 48 | - 33 , 7 |
| 67.5 | - 1 , 57 | - 2 , 9 | 42.5 | - 19 , 08 | - 34 , 8 |
| 72.5 | - 6 , 38 | - 11 , 6 | 44.5 | - 19 , 53 | - 35 , 6 |
| 77.5 | - 9 , 38 | - 17 , 1 | 46.5 | - 20 , 22 | - 36 , 8 |
| 82.5 | - 11 , 31 | - 20 , 6 | 48.5 | - 20 , 46 | - 37 , 3 |
| 87.5 | - 13 , 05 | - 23 , 8 | | | |

4. Oltre alle accennate variazioni secolari e irregolari, la velocità di rotazione della Terra è affetta, come è noto, anche da variazioni periodiche a periodo annuo e semestrale, messe in evidenza da N. Stoyko (2). Queste variazioni, quantunque possano essere trascurate per la determinazione del ΔT , essendo il loro valor medio sulla durata di un anno pressochè nullo, acquistano invece grandissima importanza in numerosi problemi astronomici, geodetici e nel campo dello studio e della misura delle frequenze. Generalmente esse vengono determinate comparando le osservazioni astronomiche di tempo con la marcia di orologi a quarzo di alta qualità; ma misure di grande precisione in questo campo possono essere ottenute anche con osservazioni lunari, soprattutto utilizzando il metodo fotografico di Markowitz (3).

$$\lambda_C = \lambda_0 + n_C t + n t^2 + \sum B_i$$

9

$$B_k = -4958.2 \frac{\pi_0}{\pi_C} \frac{1-\mu}{1+\mu} \sin(\lambda_C - \lambda_0)$$

5. Accenniamo infine ad alcuni problemi per la risoluzione pratica dei quali vengono utilizzate con vantaggio le osservazioni di occultazioni lunari visuali e fotoelettriche.

Nella teoria del moto lunare, è noto che l'ineguaglianza parallattica, provocando una variazione della curvatura dell'orbita lunare, che risulta massima nelle due fasi opposte di Luna Piena e Luna Nuova, determina un ritardo di circa $3^m 48^s$ al primo quarto, ed un avanzo dello stesso valore all'ultimo quarto. Poichè questo ritardo è facilmente determinabile con grande precisione per mezzo di osservazioni di occultazioni, esso ci permette di ricavare per questa via il coefficiente della funzione perturbatrice con più grande precisione che non quella fornita dalla teoria. Indirettamente poi, dalla conoscenza del coefficiente dell'ineguaglianza parallattica si può risalire al calcolo della parallasse solare, che compare in questo coefficiente unitamente alla parallasse lunare. I valori trovati per questa via della parallasse solare danno per essa il valore (4)

$$\pi_0 = 8''.7925$$

Le osservazioni di occultazioni di grande precisione, come quelle fotoelettriche o quelle effettuate utilizzando la camera di Markowitz, permettono inoltre una revisione capillare della pure quasi perfetta teoria del Brown, come hanno mostrato Brouwer e Watts (5) confrontando osservazioni meridiane e occultazioni lunari, e mettendo in evidenza l'imprecisione di alcune costanti e correzioni che entrano nella teoria lunare.

Grande importanza assumono poi attualmente le osservazioni fotoelettriche nella determinazione del contorno lunare (6), che genera il ben noto effetto di contorno e, per indagini speciali, come quella riguardante il diametro apparente delle stelle.

Per tutte queste questioni, come per quelle assai importanti che legano le osservazioni di occultazioni alla soluzione di importanti problemi geodetici ed alla determinazione delle coordinate geografiche (7), l'interesse di molti astronomi è indirizzato attualmente verso il miglioramento delle tecniche di osservazione ed il potenziamento delle stesse.

LE OSSERVAZIONI DI OCCULTAZIONE

6. Per l'osservazione di un'occultazione è necessaria la conoscenza dell'istante approssimato dell'occultazione e dell'angolo al polo χ per tutte le stelle occultate relative ad un Osservatorio L' . L'istante approssimato T' dell'occultazione si può in alcuni casi ricavare, come è noto, indirettamente per mezzo della facile relazione

$$T'_0 = T_0 + a \Delta\lambda + b \Delta\beta$$

in cui T_0 è l'istante approssimato conosciuto dell'occultazione per un luogo

L che non disti più di 300 km dalla località nella quale vengono effettuate le osservazioni (se si vuole che l'errore non superi il minuto), $\Delta\lambda$, $\Delta\beta$ sono le differenze di longitudine e latitudine, tra detta località ed il luogo L di cui si conosce l'istante T, contate positivamente verso Ovest e verso Nord ed espresse in frazioni di grado, e a e b sono costanti del luogo per ogni astro occultato e rappresentano la variazione dell'istante T per grado di Longitudine e Latitudine rispettivamente.

Aumentando la distanza a 350 km, si può ottenere un risultato della stessa precisione utilizzando la relazione

$$T'_0 = T_0 + a \Delta\lambda + b \Delta\beta \pm 0^m.075 \cos^2\varphi' \Delta\varphi^2,$$

nella quale il segno positivo si riferisce alle immersioni, il negativo alle emersioni. Se poi nella relazione precedente, alle costanti \underline{a} e \underline{b} relative a L, si sostituiscono quelle che si ottengono dalle seguenti relazioni

$$a = a_1 + K (a_2 - a_1),$$

$$b = b_1 + K (b_2 - b_1),$$

$$K = (\varphi' - \varphi_1) / 2 (\varphi_2 - \varphi_1),$$

dove $a_1, b_1, \varphi_1, a_2, b_2, \varphi_2$, rappresentano i valori delle costanti e le latitudini geografiche degli Osservatori L_1, L_2 situati da parti opposte rispetto al luogo L' di latitudine φ' , essa ci fornisce, con la stessa precisione (errore massimo circa 1 minuto), l'istante dell'occultazione T' per un luogo che può distare da L_1 e L_2 fino a 550 km.

La tabella II, ripresa dal supplemento alle Astronomiceskji Ejegodnik URSS per il 1958, dà in funzione di φ_i ($i = 1, 2$) e di $\Delta\varphi = \varphi' - \varphi_i$, il valore del termine $0^m.075 \cos^2\varphi' \Delta\varphi^2$.

TABELLA II[^]

| | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° |
|----|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------|
| 1° | 0 ^m .1 | 0 ^m .0 | 0 ^m .0 | 0 ^m .0 | 0 ^m .00 |
| 2° | 0 .2 | 0 .2 | 0 .1 | 0 .1 | 0 .0 |
| 3° | 0 .5 | 0 .4 | 0 .3 | 0 .2 | 0 .1 |
| 4° | 0 .9 | 0 .7 | 0 .5 | 0 .3 | 0 .1 |
| 5° | 1 .4 | 1 .1 | 0 .8 | 0 .5 | 0 .2 |
| 6° | 2 .0 | 1 .6 | 1 .1 | 0 .7 | 0 .3 |
| 7° | 3 | 2 .2 | 1 .5 | 0 .9 | 0 .4 |
| 8° | 4 | 3 | 2 .0 | 1 .2 | 0 .6 |

7. Il calcolo diretto di tutte le grandezze richieste (cioè T e l'angolo al polo X) benchè discretamente laborioso, risulta utile e vantaggioso, sia perchè permette di conoscere con una precisione maggiore (ordine del decimo di minuto) l'istante T dell'occultazione, ciò che è di grande importanza soprattutto nelle osservazioni con metodi fotoelettrici, sia perchè fornisce gli elementi dell'occultazione per stazioni che non soddisfano la condizione precedente e permette inoltre di ricavare per altre stelle deboli non riportate tra gli elenchi delle stelle occultate, gli stessi elementi, e ciò in occasione di particolari eventi, quali eclissi lunari e passaggi della Luna in zone particolarmente dense di stelle. Per maggiore chiarezza divideremo il problema della previsione delle occultazioni in due parti :

- a) ricerca delle stelle occultate dalla Luna in un certo periodo;
- b) calcolo di previsione dell'istante approssimato dell'occultazione e dell'angolo al polo per un certo luogo.

Prima di risolvere praticamente le due questioni precedenti è bene però accennare brevemente alla teoria delle occultazioni di Bessel.

TEORIA DELLE OCCULTAZIONI

8. Consideriamo un asse che chiamiamo z , con l'origine nel centro della Terra e diretto verso l'astro in procinto di essere occultato, ed un piano, detto piano fondamentale passante anch'esso per il centro della Terra e perpendicolare all'asse z , caratterizzato da due assi ortogonali x e y aventi la stessa origine di z , dei quali y giace nel piano del cerchio massimo passante per z e per il polo della Terra P_n , ed ha come direzione positiva quella che forma con P_n un angolo inferiore a 90° . In tal modo x risulta essere l'intersezione del piano fondamentale con il piano equatoriale terrestre.

In questo sistema ortogonale geocentrico di assi determiniamo ora le coordinate x ed y del centro della Luna. Data la natura del problema queste coordinate rappresentano le coordinate del centro dell'immagine della Luna proiettata dalla stella, cioè, usando un termine preso a prestito dalla teoria delle eclissi di Sole, le coordinate del centro dell'ombra lunare che si può considerare circolare con raggio eguale a quello della Luna data la grande distanza della stella. Dalla fig. 2 si ha, chiamando α , δ e α' , δ' le coordinate equatoriali rispettivamente della Luna e della stella e Δ la distanza Terra-Luna

$$\begin{aligned} x &= \Delta \sin B \sin a, \\ y &= \Delta \cos B \sin a. \end{aligned}$$

Ma poichè dal triangolo sferico zLP_n si ottiene

$$\begin{aligned} \sin B \sin a &= \cos \delta \sin (\alpha - \alpha'), \\ \cos B \sin a &= \sin \delta \cos \delta' - \cos \delta \sin \delta' \cos (\alpha - \alpha'), \end{aligned}$$

le precedenti diventano :

$$\begin{aligned} x &= \Delta \cos \delta \sin (\alpha - \alpha'), \\ y &= \Delta [\sin \delta \cos \delta' - \cos \delta \sin \delta' \cos (\alpha - \alpha')]. \end{aligned} \quad (2)$$

Ricaviamo ora sempre nello stesso sistema di riferimento le coordinate ξ , η , sul piano fondamentale, del luogo di osservazione Z.

Per mezzo del triangolo sferico zZP_n si otterranno formule identiche alle precedenti nelle quali si dovrà sostituire a δ la latitudine geocentrica φ' del luogo, e ad $\alpha - \alpha'$ l'angolo orario h delle stelle all'istante considerato t . Si avrà perciò

$$\begin{aligned} \xi &= \varrho \cos \varphi' \sin h, \\ \eta &= \varrho [\sin \varphi' \cos \delta' - \sin \delta' \cos \varphi' \cos h], \end{aligned} \quad (2')$$

in cui si può porre $h = t - \alpha'$.

La quantità

$$\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2},$$

rappresenta perciò la distanza, sul piano fondamentale, tra la proiezione del centro della Luna e della stella all'istante considerato.

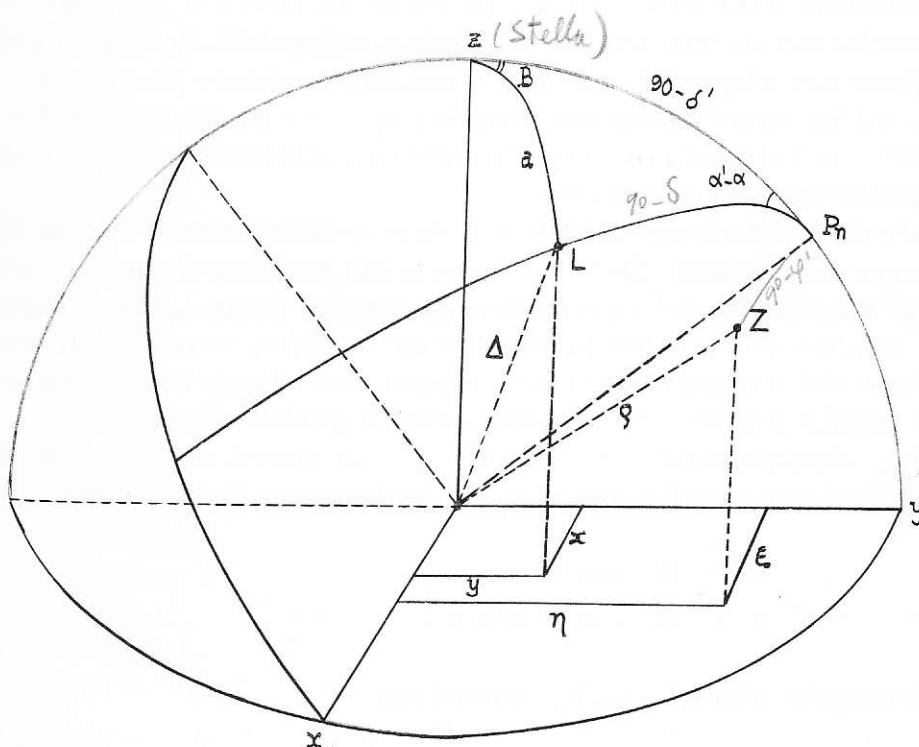


Fig. 2

All'istante T dell'occultazione dovrà perciò essere

$$\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} = k \quad (3)$$

Ora k rappresenta la lunghezza del raggio apparente lunare misurata in unità del raggio terrestre che assume per il calcolo di previsione il valore approssimato 0,2725.

La precedente rappresenta l'equazione fondamentale delle occultazioni e da essa si potrebbe ricavare l'istante T dell'occultazione conoscendo però le coordinate α', δ' e α, δ delle stelle e della Luna allo stesso istante. Poichè ciò non è evidentemente possibile il problema della soluzione della (3) si deve ridurre ad approssimazioni successive ed il valore del tempo T ottenuto risulta perciò più o meno approssimato.

Si parte quindi da un primo istante T che si prende per convenzioni coincidente con quello della congiunzione geocentrica in ascensione retta, si calcolano in questo istante i valori di x, y , e ξ, η nonchè le loro variazioni orarie x', y' e ξ', η' e si ricava dall'equazione fondamentale

$$\left[(x - \xi) + (x' - \xi') \tau \right]^2 + \left[(y - \eta) + (y' - \eta') \tau \right]^2 = k^2 \quad (4)$$

la correzione τ da apportare al tempo T .

Come vedremo in seguito per evitare di eseguire due o più approssimazioni in questo modo si ottiene per altra via sempre partendo dall'istante della congiunzione T , un primo valore corretto $T + t$. Con questo valore corretto si esegue poi una seconda approssimazione per mezzo della (4).

Come si vede dalla (4) stessa oltre a ξ, η e ξ', η' è necessario conoscere per la sua risoluzione l'istante T della congiunzione, l'angolo orario h corrispondente e le coordinate x, y e x', y' in questo istante. Poichè queste ultime sei grandezze sono indipendenti dal luogo dell'osservazione esse vengono fornite direttamente per tutte le stelle occultate e pubblicate dalle grandi effemeridi e prendono il nome di elementi besselliani dell'occultazione.

PREVISIONE DELLE OCCULTAZIONI

9. Ricerca delle stelle occultate dalla Luna di magnitudini inferiori a 7,55.

Per la risoluzione dell'equazione (4) ci si riferisce evidentemente a stelle occultate dalla Luna in un certo luogo di osservazione.

La ricerca delle stelle occultate, per esempio in un anno, costituisce perciò il primo lavoro indispensabile. Le grandi effemeridi riportano l'elenco delle stelle occultate fino alle magnitudini 7,55 ([^]), ed è da questo elenco che si scelgono le

([^]) - La pubblicazione originale dell'elenco delle stelle del NZC occultate, fino alla grandezza 7,55, e degli elementi besselliani per la predizione dell'occultazione è dovuta agli Uffici dell'American Ephemeris.

stelle occultate in un certo luogo e si calcola successivamente per esse l'istante dell'occultazione.

Ricordiamo che il metodo classico per stabilire se una stella viene occultata oppure no è quello grafico approssimato di Comrie, il quale fornisce inoltre il tempo della occultazione (immersione ed emersione) nella prima approssimazione. Il metodo si basa sulla rappresentazione grafica del percorso della stella in un sistema che ha per centro il centro lunare e per assi i due assi $u = x - \xi$ e $v = y - \eta$. E' necessario in tal caso calcolare tre coppie di coordinate u e v in tre differenti istanti, congiungere questi tre punti con una linea e vedere se detta linea incontra il profilo lunare disegnato in scala (il raggio della Luna si disegnerà eguale a k). Dal disegno si potranno inoltre dedurre come abbiamo innanzi detto, un valore approssimato dell'istante della occultazione e l'angolo al polo.

Il Comrie dà inoltre un criterio per scegliere convenientemente i due istanti predetti e fornisce successivamente delle tabelle che permettono di ottenere ξ ed η .

Questo metodo che risale al 1929, presuppone però, per essere utilmente impiegato, come in gran parte altri metodi grafici o semigrafici ⁽⁸⁾, che la successiva approssimazione dell'istante dell'occultazione venga eseguita con dei sistemi di calcolo che utilizzino almeno in parte le tabelle già preparate per ottenere le coordinate della stella eventualmente occultata.

Oggi però data la grande celerità delle calcolatrici automatiche molte operazioni si possono anche eseguire direttamente, ricorrendo alle tabelle solo quando queste risultino effettivamente efficaci al fine della rapidità del calcolo. Per questo motivo pensiamo che il voler ricorrere ad uno dei metodi sopracitati sia utile qualora si disponga già delle numerose tabelle necessarie al calcolo della previsione. Nell'altro caso riteniamo più comodo seguire le raccomandazioni che l'American Ephemeris and N. A. dà per la ricerca delle stelle occultate di magnitudine fino a 7,55 in un luogo di latitudine e longitudine date.

In tal caso le operazioni da compiere si possono così elencare :

- 1) accertarsi che il luogo di osservazione sia compreso nella fascia di visibilità dell'occultazione, e ciò è facilitato dal fatto che l'A. E. riporta per ogni stella le latitudini limite entro cui è possibile osservare il fenomeno;
- 2) verificare, consultando un annuario del luogo di osservazione che al tempo civile locale $T - \lambda$ la luminosità del cielo sia tale da permettere la visione della stella.

Naturalmente la possibilità di osservare dipende dalla luminosità delle stelle e dalle dimensioni dello strumento. Diamo qui di seguito una tabella (Tabella III[^]) che è utile tener presente e che si riferisce all'istante dell'occultazione nel luogo di osservazione.

Essa dà le altezze limite del Sole sotto l'orizzonte a Est ed a Ovest in funzione della luminosità della stella per poter osservare chiaramente il fenomeno ⁽⁹⁾.

TABELLA III

| Grandezze | A Ovest | A Est |
|------------------|---------|-------|
| 4.5 ^m | 0 | 6 |
| 4.6 - 5.5 | 3 | 9 |
| 5.6 - 7.5 | 6 | 12 |

Per quanto riguarda le fasi di Luna Nuova e Luna Piena la Tabella IV riporta gli intervalli di tempo entro i quali solitamente viene tralasciata la previsione delle occultazioni, a causa della difficoltà di osservazione.

La prima riga di questa tabella dà gli intervalli di tempo, rispetto all'epoca della Luna Nuova e della Luna Piena, durante i quali si devono tralasciare le osservazioni di occultazione o sono possibili solo osservazioni di stelle la cui grandezza massima è riportata nella seconda riga. Le colonne che contengono i valori delle magnitudini stellari $m = 7,55$, sono quelle che rappresentano gli intervalli tra una lunazione e l'altra durante i quali sono possibili le osservazioni di tutte le stelle riportate nel New Zodiacal Catalog, la cui magnitudine massima è appunto 7,55.

TABELLA IV

| Luna Nuova | | | | | Luna Piena | | | | | | |
|------------------|------------------|------------------|------------------|-----|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|-----|------|
| -48 ^h | -24 ^h | +24 ^h | +48 ^h | | -72 ^h | -48 ^h | -24 ^h | +24 ^h | +48 ^h | | |
| 7.55 | 1.9 | - | - | 1.9 | 7.55 | 6.6 | 5.5 | 3.0 | 3.0 | 5.5 | 7.55 |

Si può naturalmente nei casi limiti includere una stella incerta nell'elenco delle stelle occultate perchè lo stabilire con maggiore precisione se una stella viene occultata o meno si deduce dal calcolo di previsione vero e proprio.

3. Infine accertarsi che l'angolo orario h della stella, in valore assoluto, risulti all'istante T della congiunzione geocentrica in A. R. inferiore di almeno 1^h del semiarco diurno della stella.

In caso contrario la stella si troverebbe durante l'occultazione appena sopra l'orizzonte o addirittura invisibile. Questa condizione si può verificare facilmente poichè l'A. E. riporta l'angolo orario H riferito a Greenwich all'istante della congiunzione, da cui si ottiene subito $h = H - \lambda$. Indicando con h' il semiarco diurno dell'astro deve perciò essere in unità di tempo

$$|h| \leq h' - 1^h,$$

ricavandosi h' dalla relazione nota

$$\cos h' = -\operatorname{tag} \varphi \operatorname{tag} \delta'. \quad (5)$$

Praticamente perciò occorrerà fare l'elenco delle stelle che soddisfano alle condizioni 1) e 2) riportando la loro declinazione in gradi e primi ed il valore di h , che si può scrivere direttamente in ore e minuti, quindi confrontare per tutte le stelle dell'elenco questo valore con quello di h' diminuito di un'ora che pure può essere subito calcolato.

10. Ricerca delle stelle occultate dalla Luna e previsione delle occultazioni per stelle di magnitudine superiore a 7.55.

La ricerca di stelle occultate di magnitudine superiore alle 7.55, che non sono riportate nelle effemeridi, potrebbe effettuarsi sulla falsariga di quella seguita dalle grandi effemeridi: e cioè ricercare i limiti, in declinazione, della striscia di cielo occultata dalla Luna nel suo movimento. Il raggio di tale striscia, sulla sfera celeste, indicando con δ il raggio apparente geometrico della Luna e con π la sua parallasse orizzontale, risulta evidentemente eguale a $\delta + \pi$, e poichè in prima approssimazione si può scrivere

$$\delta = k \pi = 0.2725 \pi,$$

essendo 0,2725 il valore approssimato attribuito a k , si ha in definitiva per tale raggio il valore: $1,2725 \pi$. La distanza in declinazione tra le due strisce limiti e la traiettoria del centro lunare risulta quindi

$$\Delta \delta = 1,2725 \pi \operatorname{cosec} \varphi,$$

dove φ rappresenta l'angolo della direzione del moto lunare (fig. 3).

Tutte le stelle comprese in detta striscia risulteranno naturalmente occultate dalla Luna; si tratterà quindi di scegliere tra di esse quelle che risultano occultabili in un certo luogo calcolandone gli elementi Besselliani e dedurre infine l'istante approssimato dell'occultazione.

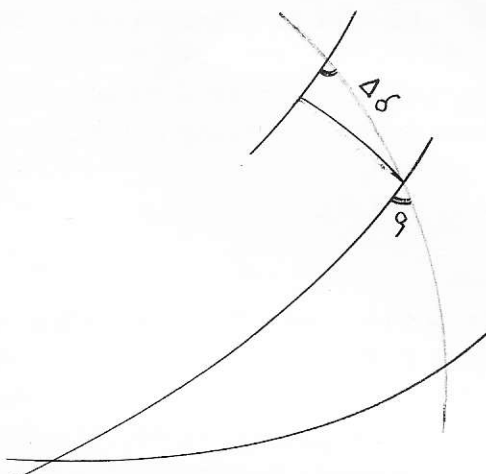


Fig. 3

Questo metodo, come si vede, è notevolmente laborioso e può essere utile solo nel caso di osservazioni sistematiche di stelle deboli durante tutto l'anno, ma poichè in generale l'occultazione di stelle deboli interessa solo certi periodi particolari di breve durata, si ricorre ad altri metodi, come quelli istituiti da Browne⁽¹⁰⁾ o da Dawson⁽¹¹⁾.

Alla base di tali metodi sta la rappresentazione grafica del cammino dell'ombra lunare sopra la sfera celeste per il periodo che interessa. Praticamente tale periodo risulta di poche ore ed usualmente le posizioni lunari vengono calcolate di ora in ora o anche ogni due ore. Tali posizioni lunari, dopo essere state ridotte all'epoca dell'atlante celeste usato, vengono riportate nell'atlante stesso e congiunte con una linea curva che rappresenta la traccia del centro lunare. Prendendo poi un compasso con apertura eguale al semidiametro lunare per detto periodo, ricavato dalle effemeridi, si puntano le varie stelle poste in vicinanza della traccia disegnata; se la stella viene occultata la seconda asta del compasso incontrerà la pista in un punto, che ci permetterà di ottenere, per interpolazione, l'istante approssimato del fenomeno (in generale immersione); inoltre la direzione del raggio formato dalle due punte del compasso ci fornirà anche, riferendolo al polo celeste, un valore orientativo dell'angolo al polo.

Gli atlanti celesti usualmente adoperati sono il Bonner Durchmusterung e la più moderna carta fotografica del cielo contenente stelle fino alla dodicesima grandezza, completati ambedue dal Catalogo B D di Argelander e dal Catalogo Fotografico Internazionale. Non tutte le stelle ricavate dai due cataloghi sopracitati possono però essere ritenute adatte all'osservazione, bisogna infatti assicurarsi che di detti astri si conosca con sicurezza la posizione, perciò è necessario tralasciare nell'elenco delle stelle osservabili quelle

che non sono contenute nei cataloghi di grande precisione, quali :

Index der Sternörter 1900 - 1925 di Scharr e Kruse - (1928),
Zweiter Astronomische Gesellschaft Katalog (AGK2) - (1950),
General Catalog di Boss - (1950),
Dritter Fundamental Katalog (FK 3).

11. Per quel che riguarda la riduzione delle coordinate lunari all'epoca dell'Atlante adoperato (1875 per il B. D. e 1900 per la Carta Fotografica) è necessario in primo luogo calcolare la parallasse diurna riferita alle due coordinate equatoriali per ottenere le posizioni corrette. Il calcolo della parallasse diurna è molto faticoso e sarebbe quindi necessario preparare una serie di tabelle per facilitare i calcoli, nel caso però, come abbiamo sempre presupposto, che la ricerca di stelle deboli occultate non sia un'attività sistematica, ma interessi solo determinati periodi può convenire calcolare un valore approssimato della parallasse direttamente.

Come è noto le formule esatte per il calcolo della parallasse in ascensione retta e declinazione sono

$$\begin{aligned} \operatorname{tang}(\alpha' - \alpha) &= \frac{-\varrho \cos \varphi' \sin \pi \sec \delta \sin H}{1 - \varrho \cos \varphi' \sin \pi \sec \delta \cos H} , \\ \operatorname{tang} \delta' &= \frac{\operatorname{tang} \delta - \varrho \sin \varphi' \sin \pi \sec \delta}{1 - \varrho \cos \varphi' \sin \pi \sec \delta \cos H} , \end{aligned}$$

dove con α' e δ' si sono indicate qui le coordinate corrette ed H rappresenta l'angolo orario della Luna negli istanti considerati ($H = t - \alpha$). Alle precedenti si possono però sostituire formule più semplici e con un'approssimazione sufficiente; la prima infatti si può scrivere

$$\alpha' - \alpha = -\pi \varrho \cos \varphi' \sec \delta \sin H ; \quad (6)$$

mentre la seconda può essere trasformata sviluppando il denominatore nella seguente

$$\operatorname{tang} \delta' = \operatorname{tang} \delta \left(1 - \frac{\varrho \sin \varphi' \sin \pi}{\sin \delta} \right) \left(1 + \frac{\varrho \cos \varphi' \sin \pi}{\cos \delta} \cos H \right).$$

Sottraendo dai due membri di questa $\operatorname{tang} \delta$, riducendo allo stesso denomi-

natore, ed eseguendo infine la sostituzione

$$\operatorname{tang} \delta' - \operatorname{tang} \delta = \frac{\sin (\delta' - \delta)}{\cos^2 \delta},$$

si ottiene poi, a meno delle seconde potenze di π e di ϱ

$$\delta' - \delta = \pi(\varrho \cos \varphi' \sin \delta \cos H - \varrho \sin \varphi' \cos \delta). \quad (6')$$

La (6) e la (6') ci permettono di ricavare valori sufficientemente approssimati della parallasse diurna.

Ridotte successivamente alla posizione media dell'anno, le due coordinate lunari vanno poi riportate all'epoca dell'Atlante mediante tavole per la precessione, ad esempio quelle di Schorr o quelle recenti di Baillaud, costruite appositamente per le stelle del Catalogo Fotografico del Cielo.

Secondo Dawson tale metodo permette di calcolare l'istante dell'occultazione con l'incertezza massima di ± 2 minuti, questo errore può però raggiungere i ± 5 minuti nel caso di occultazioni radenti. Come si vede la precisione non è grande, ma trattandosi generalmente di immersioni (le emersioni data la debole luminosità delle stelle sono generalmente da scartare) ciò non ha eccessiva importanza per le osservazioni visuali, mentre è causa di grandi difficoltà per osservazioni fotoelettriche.

12. Previsione delle occultazioni per stelle di magnitudine inferiore a 7,55.

Come si è visto il metodo precedente ci permette di conoscere non solo le stelle occultate dalla Luna in un certo luogo ma altresì di ricavare direttamente i valori approssimati dell'istante dell'occultazione e dell'angolo al polo. Esso però è utilizzabile praticamente, come si è più volte detto, solo per stelle di magnitudine superiore a 7,5. Per le altre di magnitudine inferiore il cui elenco si trova nelle effemeridi, una volta scelte quelle occultabili in un certo luogo, è necessario procedere al calcolo dell'istante dell'occultazione per mezzo dell'equazione fondamentale (4), nella quale le coordinate x , y , ξ ed η della Luna e del luogo di osservazione, riferite al piano fondamentale e le loro variazioni orarie x' , y' , ξ' e η' ottenute differenziando le precedenti, si possono scrivere con sufficiente approssimazione per il calcolo di previsione

$$\begin{aligned} x &= \frac{15 \cos \delta (\alpha - \alpha')}{\pi}, & x' &= \frac{15 \cos \delta \Delta \alpha}{\pi}, \\ y &= \frac{\delta - \delta'}{\pi}, & y' &= \frac{\Delta \delta}{\pi}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \xi &= \varrho \cos \varphi' \sin h & , & & \xi' &= 0,2625 \varrho \cos \varphi' \cos h & , \\ \eta &= \varrho \sin \varphi' \cos \delta - \varrho \cos \varphi' \sin \delta \cos h & , & & \eta' &= 0,2625 \varrho \cos \varphi' \sin \delta \sin h \\ & & & & &= 0,2625 \xi \sin \delta & , \end{aligned}$$

dove con $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ si sono indicate le variazioni orarie dell'ascensione retta e della declinazione della Luna, mentre il valore 0,2625 rappresenta la variazione, in un'ora siderale, dell'angolo orario della stella espressa in radianti, e nelle quali si è posto in prima approssimazione

$$\Delta = 1/\kappa .$$

Come si è già detto la (4) si risolve per approssimazioni successive, ed un primo valore dell'istante di occultazione può essere dato dall'epoca T della congiunzione. Questo valore, assieme ai valori di x, y, x', y' in questo istante (che indicheremo con X, Y, X', Y'), sono riportati dalle grandi effemeridi.

Una prima grossolana correzione del tempo T non si ricava però solitamente dalla (4) ma ricorrendo a metodi molto approssimati, come quello proposto dall'A. E., che determina, ad esempio, la correzione t da

$$t = \frac{\xi_0}{x' - \xi'_0} ,$$

dove

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \varrho \cos \varphi' \sin h_0 & , \\ \xi'_0 &= 0,2625 \varrho \cos \varphi' \cos \frac{4}{3} h_0 & , \end{aligned}$$

nella quale h_0 rappresenta l'angolo orario della stella all'istante T riferito al luogo di osservazione; esso risulta perciò, se con H indichiamo l'angolo orario riferito a Greenwich allo stesso istante

$$h_0 = H - \lambda .$$

Un altro metodo, che qui nominiamo solo, per il calcolo di una prima approssimazione, che si rifà al metodo classico del Comrie è quello dovuto a Banachiewicz (12) adatto all'uso di macchine calcolatrici.

Esso presenta però lo svantaggio di richiedere per il calcolo la costruzione di due tabelle relativamente lunghe, a meno che, data la relativa precisione che permette di ottenere non ci si appaghi del risultato raggiunto senza procedere

ad una ulteriore correzione del valore trovato, il che però non è sempre sufficiente soprattutto nel caso di emersioni.

Ottenuto in un qualsiasi modo l'istante approssimato $T + t$, si risolve infine la (4), nella quale si potrà fare

$$\begin{aligned}x &= x' t \\y &= Y + y' t ,\end{aligned}$$

dove con $Y, X = 0$ abbiamo indicato le coordinate lunari all'epoca della congiunzione riportata dalle effemeridi. Ricordiamo inoltre che l'angolo orario h che compare nella (7) è ora riferito all'istante $T + t$ e risulta quindi

$$h = H - \lambda + t_0$$

dove t_0 è l'equivalente siderale di t .

Per risolvere la (4) poniamo

$$\begin{aligned}x - \xi &= u & , & & x' - \xi' &= u' & , \\y - \eta &= v & , & & y' - \eta' &= v' & ,\end{aligned} \quad (8)$$

In tal caso essa diventa

$$(u + u' \tau)^2 + (v + v' \tau)^2 = k^2 \quad (4')$$

Ponendo poi

$$\begin{aligned}u &= m \sin M & , & & v &= m \cos M & , \\u' &= n \sin N & , & & v' &= n \cos N & ,\end{aligned} \quad (8')$$

e sostituendo nella (4') otteniamo infine

$$(m \sin M + n \sin N \tau)^2 + (m \cos M + n \cos N \tau)^2 = k^2 ,$$

da cui si ricava l'equazione normale

$$\tau^2 n^2 + 2 \tau n m \cos (M - N) + m^2 - k^2 = 0 . \quad (4'')$$

La precedente può essere risolta in vari modi. In primo luogo trascurando il termine quadratico in τ , essa ci dà la relazione immediata

$$\tau = \frac{k^2 - m^2}{2 n m \cos (M - N)}$$

che, con la posizione $\frac{m}{k} \cos (M - N) = \cos \psi$, diventa

$$\tau = \frac{k^2 - m^2}{2 n k \cos \psi} \quad (9)$$

E' questa la correzione (in frazioni di ora) proposta dal Nautical Almanac Office : essa va sottratta a $T + t$ per l'immersione, va aggiunta per l'emersione. Il prodotto $n k \cos \psi$ che compare in questa formula presenta la singolarità di caratterizzare col suo segno il fenomeno dell'occultazione, infatti, si riconosce con facili calcoli che esso non è altro che il differenziale della (3) all'istante dell'occultazione T_0 perciò se questo differenziale è negativo, se cioè al tempo $T_0 + d T_0$ è

$$(x - \xi)^2 + (y \pm \eta)^2 < k^2$$

si avrà all'epoca T_0 il fenomeno dell'immersione, se viceversa $n k \cos \psi$ risulta maggiore di zero si avrà l'emersione della stella. Naturalmente per $n k \cos \psi = 0$ non si ha occultazione.

Il calcolo di $n k \cos \psi$ è utile anche perchè ci dà un'idea dell'approssimazione raggiungibile nel calcolo dell'istante dell'occultazione, si ha, infatti, che per $n k \cos \psi > \pm 0.06$ l'errore nelle predizioni non supera in genere $0^m.3$, mentre per $n k \cos \psi < \pm 0.03$ l'errore può divenire apprezzabile (siamo in tal caso in presenza di un'occultazione radente) e conviene quindi in certi casi tralasciare l'osservazione.

Risolvendo invece l'equazione di secondo grado (4'') si ottengono le radici

$$\tau = - k m \cos (M - N) \pm n k \sqrt{1 - \frac{m^2}{k^2} \sin^2 (M - N)}$$

che, eseguendo indifferentemente le sostituzioni

$$\frac{m}{k} \sin (M - N) = \begin{array}{l} \cos \psi , \\ \sin \psi , \end{array}$$

assumono la forma

$$\tau = - \frac{m}{n} \cos (M - N) \pm \frac{k}{n} \begin{array}{l} \sin \psi . \\ \cos \psi . \end{array} \quad (9')$$

Nel primo caso abbiamo la correzione suggerita dalla *Connaissance des Temps*, nel secondo caso quella consigliata dall'*American Ephemeris*.

La (9) e (9') si calcolano più agevolmente per mezzo dei logaritmi, in modo speciale la (9) è risolta per mezzo di numerose tabelle preparate appositamente dal *Nautical Almanac*.

Tenendo presente le considerazioni fatte in precedenza ci orienteremo, per il calcolo di τ verso una delle (9') e, più precisamente, verso la seconda. Essa deve essere però trasformata in modo da essere facilmente calcolabile con una macchina calcolatrice. A tale scopo eseguendo le precedenti sostituzioni (8) si perviene alla relazione

$$\tau = - \frac{u u' + v v'}{n^2} \pm \frac{k}{n} \cos \psi ,$$

che dà τ in frazione di ora e nella quale il segno negativo va preso per l'immersione, quello positivo per l'emersione.

Il calcolo di n e ψ si esegue poi direttamente dalle relazioni

$$\sin \psi = \frac{u v' - u' v}{n k} ,$$

$$n^2 = u'^2 + v'^2 .$$

Un'ulteriore approssimazione, di cui è utile tener conto nel caso di emersione è data infine dalla relazione (13),

$$d\tau = \frac{0.0005742}{n \cos \psi} \left[\eta_2 \cos (N \pm \psi) - \xi \sin (N \pm \psi) \right] ,$$

che si ottiene differenziando la (4), dopo aver fatto alcune sostituzioni, nella quale

$$\eta_2 = \vartheta \cos \varphi' \sin \delta \cos h ,$$

$$\text{tang } N = \frac{-u'}{v'} ,$$

e in cui per i segni vale la regola precedentemente formulata.

13. Per il calcolo dell'angolo al Polo, prendiamo in considerazione la sostituzione

$$\frac{m}{k} \sin (M - N) = \sin \psi ,$$

in questa $m = u^2 + v^2$ rappresenta la distanza, per il luogo di osservazione Z , tra il centro della Luna e la stella e quindi, poichè al momento della occultazione dovrà essere $m = k$, si ha per questi istanti la relazione

$$M - N = \psi$$

Sul piano fondamentale siano χ e $180 + \chi'$ i due angoli al Polo relativi all'immersione ed all'emersione della stella. Dalla fig. 4 si ha subito che in questi due istanti è in valore assoluto $\chi = M_I$ e $\chi' = M_E$ rispettivamente.

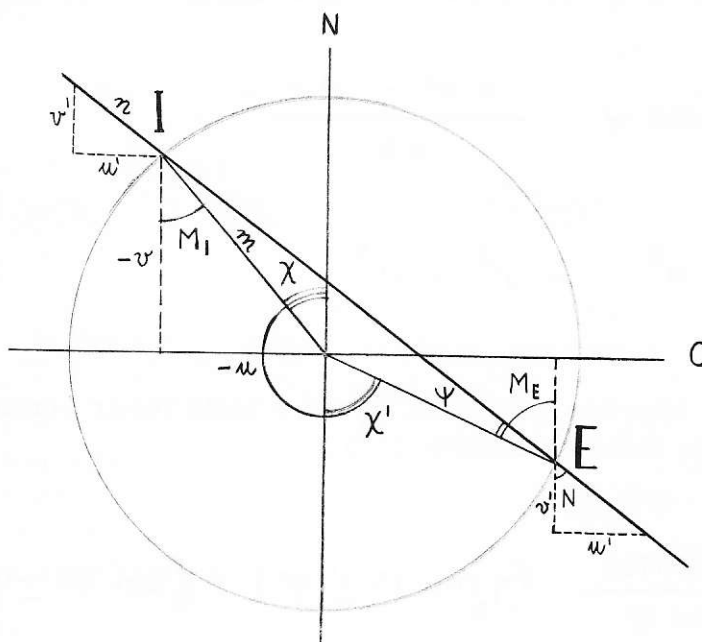


Fig. 4

Dalla stessa figura si ha poi, essendo l'angolo $\widehat{C I E} = \psi$

$$M_I = N - \psi, \quad M_E = N + \psi$$

da cui si ricava infine per i due angoli al polo

$$\begin{aligned}\chi_I &= N - \psi \\ \chi_E &= N + \psi + 180 .\end{aligned}$$

Anche qui volendo introdurre una successiva approssimazione, che può risultare utile nel caso di emersioni, si ricorre alla relazione

$$d\chi = \pm \frac{0.002013}{n \cos \psi} (n'\eta_2 + v'\xi)$$

che si ricava in modo analogo all'espressione precedentemente scritta di $d\tau$.

In conclusione dunque il tempo approssimato e l'angolo al polo dell'occultazione si possono scrivere

$$\begin{aligned}T_o &= T + t + \tau , \\ \chi &= N \pm \psi + 180 ,\end{aligned}$$

dove t , τ , N e ψ si ricavano dalle relazioni precedenti e dove nell'ultima l'angolo di 180 si deve aggiungere solo nel caso in cui ψ è positivo.

14. Schema di calcolo per la previsione di occultazioni. Vogliamo concludere la teoria delle previsioni riportando uno schema di calcolo completo (Tabella V), particolarmente comodo usando una macchina calcolatrice, che ci permette di eseguire la previsione delle occultazioni senza l'uso di tabelle. Naturalmente però l'uso di uno schema di questo tipo non impedisce la costruzione di determinate tabelle che possono risultare utili in certe circostanze e ciò nel caso, per esempio, in cui la macchina non esegua tutte le operazioni indicate.

Il procedimento di calcolo di previsione presuppone la conoscenza oltre che delle coordinate geografiche λ e φ , delle costanti locali $g \sin \varphi'$ e $g \cos \varphi'$, dove g e φ' sono il raggio e la latitudine geocentrica. Il calcolo di queste costanti viene, come è noto, facilitato utilizzando le relazioni

$$\begin{aligned}g \sin \varphi' &= (S + 0,15684 \cdot 10^{-6}) \sin \varphi , \\ g \cos \varphi' &= (C + 0,15684 \cdot 10^{-6}) \cos \varphi ,\end{aligned}$$

nelle quali i valori di S e C si ricavano in funzione della latitudine geografica da apposita tavola calcolata dal Nautical Almanac.

Anche le grandezze T, H, Y, x' , y' , il cui significato è quello del testo, si ricavano direttamente per ogni stella dall'American Ephemeris.

E' da notare poi che l'operazione 32 ci permette di stabilire subito se una occultazione è visibile o no in un certo luogo. Infatti solo le stelle per le quali risulta $\sin \psi < 0$ possono essere occultabili, mentre le altre devono essere trascurate nei calcoli successivi.

Conoscendo infine a priori se un'occultazione è in immersione o in emersione si possono evidentemente tralasciare le operazioni per il calcolo di ambedue i tempi ad iniziare dall'operazione 36.

Il calcolo completo di una previsione a partire dal valore T della congiunzione, riportato dalle effemeridi, consta quindi di 49 operazioni.

TABELLA V

| | | | | | |
|-------------------------|---|---------------------------------------|--|--|---|
| Longitudine geografica | λ | | | | |
| Latitudine geografica | φ | | | | |
| $\varrho \sin \varphi'$ | | | | | |
| $\varrho \cos \varphi'$ | | | | | |
| 1. | | T | | | = |
| 2. | | H | | | = |
| 3. | $h_0 = H - \lambda$ | | | | = |
| 4. | $\sin h_0$ | | | | = |
| 5. | $\cos 4/3 h_0$ | | | | = |
| 6. | $\xi_0 = \varrho \cos \varphi' \sin h$ | | | | = |
| 7. | $\xi'_0 = 0.2625 \varrho \cos \varphi' \cos 4/3 h$ | | | | = |
| 8. | $x' - \xi'_0$ | | | | = |
| 9. | $t = \xi_0 / x' - \xi_0$ | | | | = |
| 10. | t = equivalente sid. t | | | | = |
| 11. | $h = h_0 + t_0$ | | | | = |
| 12. | δ | | | | = |
| 13. | | $\sin h$ | | | = |
| 14. | | $\cos h$ | | | = |
| 15. | | $\sin \delta$ | | | = |
| 16. | | $\cos \delta$ | | | = |
| 17. | ξ | $= \varrho \cos \varphi' \sin h$ | | | = |
| 18. | η_1 | $= \varrho \sin \varphi' \cos \delta$ | | | = |
| 19. | $\eta_2 = \varrho \cos \varphi' \sin \delta \cos h$ | | | | = |
| 20. | $\eta = \eta_1 - \eta_2$ | | | | = |
| 21. | $\eta' = 0.2625 \varrho \cos \varphi' \sin \delta \sin h$ | | | | = |
| | $= 0.2625 \xi \sin \delta$ | | | | = |

$$\begin{aligned}
22. \quad \xi' &= 0.2625 \varrho \cos \varphi' \cos h & = \\
23. \quad x &= x' t & = \\
24. \quad y &= y' t + Y & = \\
25. \quad u &= x - \xi & = \\
26. \quad v &= y - \eta & = \\
27. \quad u' &= x' - \xi' & = \\
28. \quad v' &= y' - \eta' & = \\
29. \quad n^2 &= u'^2 + v'^2 & = \\
30. \quad n & & = \\
31. \quad \varepsilon &= 3.6697 / n & = \\
32. \quad \sin \psi &= \varepsilon (uv' - u'v) & = \\
33. \quad \cos \psi & & = \\
34. \quad \text{tang } N &= u' / v' & = \\
35. \quad N & & = \\
36. & & = \\
37. \quad \cos (N \pm \psi) & & = \\
38. \quad \sin (N \pm \psi) & & = \\
39. \quad a &= -60 / n^2 & = \\
40. \quad b &= 16.35 / n & = \\
41. \quad c &= 1 / n \cos \psi & = \\
42. \quad m &= a (uu' + vv') & = \\
43. \quad \tau &= m \pm b \cos \psi & = \\
44. \quad d &= 0.0005742 c \tau^2 & = \\
45. \quad d\tau &= d[\eta_2 \cos (N \pm \psi) - \varepsilon \sin (N \pm \psi)] & = \\
46. \quad T_0 &= T + t + \tau + d\tau & = \\
47. \quad e &= \pm 0.002013 \tau^2 & = \\
48. \quad d\chi &= e c (u'\eta_2 + v'\xi) & = \\
49. \quad \chi &= N \pm \psi + d\chi + 180 & =
\end{aligned}$$

RIDUZIONE DELLE OSSERVAZIONI DI OCCULTAZIONE

15. La teoria ed il calcolo di riduzione delle osservazioni di occultazione si basano sempre sulle (2), (2') e sull'equazione fondamentale (3). L'unico mutamento riguarda l'unità di misura lineare, che nel calcolo di previsione era il raggio equatoriale terrestre, mentre nel calcolo di riduzione risulta più conveniente usare il raggio lineare della Luna.

Con questa convenzione, e ricordando che in unità del raggio equatoriale terrestre si può scrivere $\sin \pi = \frac{1}{\Delta}$, le (2) e (2') diventano

$$x = \frac{\cos \delta \sin (\alpha - \alpha')}{k \sin \pi}$$

$$y = \frac{\sin \delta \cos \delta' - \cos \delta \sin \delta' \cos (\alpha - \alpha')}{k \sin \pi}$$

(2'')

$$\xi = \frac{\varrho \cos \varphi' \sin (t - \alpha')}{k}$$

$$\eta = \frac{\varrho [\sin \varphi' \cos \delta' - \cos \varphi' \sin \delta' \cos (t - \alpha')]}{k}$$

Indicando ancora con δ il raggio apparente della Luna e ricordando che si ha $\sin \delta = k \sin \pi$, può scriversi

$$\sin \delta = \frac{k \sin \pi}{\sin 1''}$$

Per la distanza angolare apparente δ' al momento dell'occultazione si avrà invece

$$\delta' = \delta \sqrt{n^2 + v^2},$$

nella quale $\sqrt{n^2 + v^2}$ si calcola utilizzando le (2'').

La differenza $\Delta \delta = \delta' - \delta$ darà quindi lo scarto angolare tra la posizione del centro della Luna teorico e quello osservato. Abbiamo già visto che questo scarto si può rappresentare in funzione delle correzioni alle coordinate eclittiche lunari $d\lambda$ e $d\beta$ contate sull'orbita, con la seguente relazione

$$\Delta \delta = d\lambda \cos (\varrho - \chi) + d\beta \sin (\varrho - \chi).$$

Il procedimento di riduzione dovrà quindi permetterci, attraverso al calcolo di δ , δ' , $\cos (\varrho - \chi) = p$ e $\sin (\varrho - \chi) = q$, di scrivere tante equazioni lineari in $d\lambda$ e $d\beta$ quante sono le stelle occultate osservate negli istanti T_i . Da cui col calcolo dei minimi quadrati ricavare i valori più probabili di $d\lambda$ e $d\beta$.

16. Prima di passare ad esporre lo schema di calcolo di riduzione che viene generalmente utilizzato usando una normale calcolatrice, facciamo notare che l'angolo di posizione χ è legato a u e v , espressi in unità di raggio lunare, dalle semplici relazioni (fig. 3)

$$\sin \chi = -u,$$

$$\cos \chi = -v,$$

per cui ponendo

$$F = -1000 \cos \varrho,$$

$$G = 1000 \sin \varrho,$$

si può scrivere, potendosi calcolare facilmente ϱ dalla (1),

$$1000 \sin (\varrho - \chi) = - (Fu + Gv).$$

Quest'ultima quantità è utile perchè permette di ottenere direttamente i valori di p e q per mezzo di tabelle già calcolate e riportate, per esempio, nel Nautical Almanac. Poichè le stesse tabelle danno anche direttamente il valore di $\Delta \delta$ in funzione di δ e di $u^2 + v^2$ il calcolo di riduzione si riduce quindi al calcolo delle seguenti quantità: δ , $u^2 + v^2$ e $Fu + Gv$.

17. Schema di calcolo per la riduzione di occultazioni. Lo schema di calcolo di tabella VI per la riduzione delle osservazioni di occultazione richiede la conoscenza, come per le previsioni, delle costanti locali $\varrho \sin \varphi'$, e $\varrho \cos \varphi'$, che possono essere calcolate con il procedimento sopraesposto. Il tempo universale dell'occultazione dedotto dalle osservazioni deve essere, in questo caso, corretto del valore empirico c , riportato durante uno o più anni nell'Astronomical Journal, e dedotto dalla discussione di un grande numero di osservazioni.

Per il calcolo dell'angolo orario della stella all'istante dell'occultazione

$$h = T_S - \alpha' - \lambda,$$

dove T_S rappresenta il tempo siderale corrispondente all'istante dell'occultazione, si possono usare vari procedimenti. Noi consigliamo di calcolare prima il valore

$$\mu = T.S. \text{ a } 0^h \text{ T.U. della data dell'occultazione} - \alpha',$$

aggiungendo poi algebricamente a questo valore l'equivalente siderale dell'istante dell'occultazione e la longitudine del luogo.

Per quanto riguarda le coordinate α' e δ' della stella, come quelle della Luna α e δ all'istante dell'occultazione e le differenze prime $\Delta\alpha$ e $\Delta\delta$, esse vengono ricavate direttamente o con interpolazione dalle effemeridi. Dalle stesse effemeridi si ricava il valore π della parallasse orizzontale della Luna per lo stesso istante. Infine, come abbiamo già detto, anche i valori di $\Delta\delta$, in funzione di δ e di $u^2 + v^2$, e di p, q, p^2, pq, q^2 in funzione di $Fu + Gv$ si ottengono da apposite tabelle già calcolate.

Per il calcolo di riduzione, a partire dal valore T_0 in T. U. dell'istante dell'occultazione, si devono quindi eseguire 49 operazioni.

E' bene precisare che tanto la tabella riguardante il calcolo di previsione, quanto quella riguardante quello di riduzione sono costituite dalle operazioni strettamente necessarie per questi calcoli, per cui il calcolatore potrà inserire operazioni utili ai fini di agevolare lo svolgimento dei calcoli stessi, come, ad esempio, quelle riguardanti il passaggio dalle unità di tempo a quelle angolari, o quelle che danno il valore di queste grandezze in unità diverse.

TABELLA VI

| | | |
|--|-----------|---|
| Longitudine geografica | λ | = |
| Latitudine geografica | ψ | = |
| $k = 0,2724953$ | | |
| $q \cos \varphi' / k$ | A | = |
| $q \sin \varphi' / k$ | B | = |
| 1. $T_0 =$ T. U. occultazione | | = |
| 2. $c =$ correzione empirica | | = |
| 3. $T_0 + c$ (h m s) | | = |
| 4. T_S a 0^h T. U. della data | | = |
| 5. α' | | = |
| 6. $\mu = T_S - \alpha'$ | | = |
| 7. $E_S =$ equiv. sid. ist. occult. corretto | | = |
| 8. $h = E_S + \mu + \lambda$ | | = |
| 9. α | | = |
| 10. δ | | = |
| 11. $\Delta\alpha$ | | = |
| 12. $\Delta\delta$ | | = |
| 13. α' | | = |
| 14. δ' | | = |
| 15. $\alpha - \alpha'$ | | = |
| 16. $\delta - \delta'$ | | = |

17. =
18. $\sin h$ =
19. $\cos h$ =
20. $\sin \delta$ =
21. $\cos \delta$ =
22. $\sin \delta'$ =
23. $\cos \delta'$ =
24. $\sin (\alpha - \alpha')$ =
25. $\cos (\alpha - \alpha')$ =
26. $\sin \pi$ =
27. $k \sin \pi$ =
28. $\epsilon = 1 / k \sin \pi$ =
29. $x = \epsilon \cos \delta \sin (\alpha - \alpha')$ =
30. $\epsilon = A \sin h$ =
31. $u = x - \epsilon$ =
32. $y_1 = \epsilon \sin \delta \cos \delta'$ =
33. $y_2 = \epsilon \cos \delta \sin \delta' \cos (\alpha - \alpha')$ =
34. $\eta_1 = B \cos \delta'$ =
35. $\eta_2 = A \cos h \sin \delta'$ =
36. $v = y_1 + \eta_2 - (y_2 + \eta_1)$ =
37. $u^2 + \frac{v^2}{2}$ =
38. $\delta = \epsilon \sin 1'' = \epsilon \cdot 4,848137 \cdot 10^{-6} =$
39. =
40. $\text{tang } \vartheta = 15 \cos \delta (\Delta\alpha)^S / (\Delta\delta)'' =$
41. ϑ =
42. $G = \sin \vartheta$ =
43. $-F = \cos \vartheta$ =
44. $Fu + Gv$ =
45. p =
46. q =
47. pq =
48. p^2 =
49. q^2 =

Bibliografia

- (1) - H. Spencer Jones, M N, 99, 541 - 58, 1939.
- (2) - N. Stoyko, C R, 205, 79, 1937.
- (3) - W. M. Markowitz, A J, 1214, 69, 1954.
- (4) - A. Danjon, Astronomie Generale, 137, 1952-53.
- D. Brouwer, B A, XV (III), 165, 1950.
- (5) - D. Brouwer, C.B. Watts, A J, 1162, 169, 1947.
- (6) - David S. Evand, A J, 60, 432 - 440, 1955.
- (7) - J. A. O' Keefe, J. P. Anderson, A J, 1200, 108, 1952.
- W. Henriksen, S.H. Genatt, M. Q. Marchant, C.D. Batchlor,
A J, 1261, 291, 1958.
- (8) - P. Vocca, R. Oss. Astr. Torino (Pino Torinese), n. 7, 1929.
- (9) - Supplement to the Nautical Almanac for 1938, 1937.
- (10) - W. M. Browne, A J, XLIII, 933, 1933.
- (11) - B. H. Dawson, A J, XLIII, 1000, 1933.
- (12) - T. Banachiewicz, A A, (VII) 1934.
- (13) - J. Robertson, A J, XLI, 50, 1931.