

## MISURE FOTOGRAFICHE DI STELLE DOPPIE

Nota di ALDO KRANJC (\*)

[*Osservatorio Astronomico di Merate* (1)]

RIASSUNTO — Si danno i risultati delle osservazioni fotografiche di un centinaio di stelle doppie, eseguite all'Osservatorio Astronomico di Merate. Dalla discussione delle osservazioni risulta che la precisione media nella misura delle coordinate relative delle due componenti è di qualche centesimo di secondo d'arco.

ABSTRACT — Results are given of the photographic observations made at the Merate Observatory of about one hundred double stars. From the discussion of the data precision of the measurements is found to be of about three hundredths of a second.

Il rifrattore di Merate, usato per queste misure, si trova descritto da Schiaparelli (2), e non ne ripeteremo qui la descrizione al completo, ma diremo solo delle variazioni apportate. Esso, che originariamente era situato nella cupola maggiore dell'Osservatorio Astronomico di Brera in Milano, nel 1936 venne trasportato a Merate ove fu collocato in un padiglione apposito, dotato di cupola girevole elettricamente e pavimento sollevabile, costruiti dalla Ditta Bombelli.

L'obbiettivo di 487 mm di apertura libera e di 698 cm di focale, è corretto per osservazioni visuali nel giallo a circa 6000 Å; per il violetto, a 4000 Å, la differenza di focale ammonta a 26 mm. Siccome l'apertura relativa è di 1/14,33 il cromatismo residuo non permette d'adoperare lastre fotografiche senza filtro perchè il diametro dell'immagine sarebbe molto maggiore di quello dovuto al seeing. Per scegliere il filtro più adatto a rigore bisognerebbe risolvere un problema di minimo. Data la variazione della focale con  $\lambda$ , la sensibilità  $\sigma(\lambda)$  della lastra fotografica, la distribuzione d'energia nello spettro di una stella, e il coefficiente d'assorbimento dell'obbiettivo, se il filtro è assolutamente trasparente a radiazione avente lunghezza d'onda compresa fra  $\lambda$  e  $\lambda + f(\lambda)$ , ove  $f(\lambda)$  è scelta in modo che il diametro dell'immagine sia costante ed uguale al diametro apparente della stella, per ottenere un dato annerimento

(\*) Pervenuta il 15 ottobre 1950.

(1) Lavoro eseguito durante un soggiorno tra il maggio 1949 e l'aprile 1950 del dott. A. Kranjc, aiuto dell'Osservatorio di Capodimonte-Napoli.

(2) « Opere » - Tomo VI, pag. 265 e seg.

totale dell'immagine sulla lastra fotografica bisognerebbe impiegare un tempo  $t$  funzione di  $\lambda$ . Il filtro più conveniente sarà quello che, a parità delle altre condizioni, necessiterà del minimo tempo di esposizione; da ciò tanto  $\lambda$  che la larghezza della banda vengono esattamente determinate. E' necessario che  $f(\lambda)$ , larghezza della banda, non superi certi limiti per evitare distorsioni nell'immagine provocate dalla rifrazione nell'atmosfera. In pratica si è adoperato un unico tipo di filtro, il Wratten K 2 giallo, che è trasparente da 5250 Å in su, mentre è opaco da 4700 Å in giù; fra 4700 e 5250 il diagramma della percentuale della energia entrante assorbita è approssimativamente una retta che dalla percentuale 0 % sale a 78 %.

Le lastre adottate furono la Ferrania Cappelli viola - Superorto Antialo 18/10, 29 Scheiner. Dalla curva di sensibilità e dallo spettro secondario si è visto che detto filtro risponde abbastanza bene alle condizioni richieste. Infatti, ad esempio, un filtro viola avrebbe lasciato passare più luce attiva sull'emulsione, ma l'aberrazione cromatica avrebbe imposto di scegliere una banda molto più stretta in modo che, a parità di annerimento sulla lastra, sarebbe stata necessaria una posa più lunga. A maggiore ragione per il rosso, sia perchè l'emulsione diminuiva di sensibilità, sia perchè la banda doveva ugualmente essere ristretta.

Il portalastra del rifrattore è dotato di un incastro in cui scorre lo chassis contenente la lastra  $9 \times 12$ ; una vite a cremagliera permette spostamenti della lastra secondo il lato maggiore per una decina di centimetri; in tal modo si possono eseguire molte pose sulla stessa lastra senza avere bisogno di spostare il tubo. Un otturatore, un canocchietto di guida posto lateralmente alla lastra completano la camera, dentro alla quale viene collocato il filtro.

Per sviluppo si adoperò sistematicamente lo sviluppo Ferrania R 5. In tali condizioni si è determinata una tabella standard pei tempi di posa, suscettibile di variazioni sera per sera, a seconda della trasparenza atmosferica e della definizione dell'immagine. A causa del particolare filtro adoperato le grandezze fotografiche sono all'incirca pari a quelle visuali.

Si è visto in pratica che per pose fino ad un minuto non era necessario guidare il rifrattore, grazie al congegno ad orologeria, sufficiente allo scopo; siccome si sono osservate stelle fino alla grandezza 8,5 la guida non è stata necessaria, eccetto alcuni casi in cui artificialmente è stata aumentata la grandezza per mezzo del reticolo obbiettivo.

Come è noto, una diversità di grandezza nelle due stelle porta con sé degli errori sistematici nella misura; per diminuirli si è fatto uso di due reticoli obbiettivi uno dei quali è costituito da cilindri metallici di 4 mm di diametro, intervallati a distanza di 8 mm fra gli assi, l'altro invece di fili metallici del diametro di 1,1 mm intervallati a distanza di 6 mm. Risulta perciò che col I reticolo l'immagine centrale, non diffratta, si comporta come se fosse aumentata di 1,505 grandezze; intorno ad essa vi sono due immagini diffratte di grandezze aumentate di 0,980 rispetto alla centrale. Analogamente per il reticolo II si hanno aumenti di 0,439 e 3,371 rispettivamente per l'immagine centrale e per le due laterali del primo ordine. Per decidere caso per caso se adoperare o meno un reticolo, e quale dei due, si è adoperata la tabella n. 2.

Stelle che presentavano una differenza di grandezza maggiore di 4,56 sono state scartate. In corrispondenza a questa scelta del reticolo si ha in ogni caso la minima differenza di grandezza compatibile con i

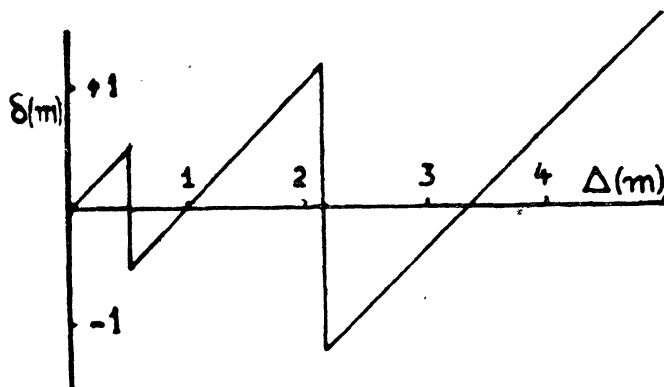
TAB. n° 1

Grandezze visuali	Tempi di posa
	sec
4	0,2
5	0,5
6	1,2
7	4,0
8	14,0
9	50,0

TAB. n° 2

$\Delta m$	Reticolo	Tempo di posa determinato da
0,000 ÷ 0,490	—	$m_2$
0,490 ÷ 0,980	I	$m_1 + 2,485$
0,980 ÷ 2,176	I	$m_2 + 1,505$
2,176 ÷ 3,371	II	$m_1 + 3,810$
3,371 ÷ 4,567	II	$m_2 + 0,439$

mezzi a disposizione. Il diagramma della figura indica la differenza  $\delta(m)$  di grandezza fra l'immagine centrale di una stella e le due laterali del compagno, in funzione della differenza di grandezza visuale  $\Delta m$ . Le tre rette oblique corrispondono rispettivamente all'obbiettivo libero, al I ed al II reticolo. Il segno positivo per  $\delta(m)$  significa che dopo la compensazione la componente secondaria misurata sulla lastra è ancora di grandezza maggiore, mentre il segno meno sta ad indicare che il compagno è più luminoso delle due immagini di diffrazione della stella principale. Dal diagramma si vede che la massima differenza di grandezza che può influire sulle misure è di 1,2.



Per utilizzare il meglio possibile il tempo disponibile per le osservazioni si sono scelte quelle stelle che avrebbero dovuto passare al meridiano durante le ore notturne dell'estate-autunno 1949; ciò ha fissato l'ascensione retta fra le ore 17 e le ore 21; inoltre per evitare correzioni il cui ammontare avrebbe dovuto essere oggetto di ricerche troppo lunghe rispetto al tempo disponibile, ci si è limitati a stelle la cui separazione fosse da ritenere maggiore di 4". Fissato a circa un centinaio il numero

delle doppie da osservare, dal catalogo di stelle doppie di Aitken è risultato che bastava limitarsi a stelle boreali il cui compagno avesse grandezza minore di 8,5.

Le osservazioni furono eseguite nel modo che segue. Anzitutto si determinò la posizione del fuoco osservando con forte ingrandimento la grana di una lastra fotografica fotomeccanica sviluppata ma non esposta, e spostando la camera fotografica fino a vedere ben nitida l'immagine o di Giove o della Luna. Risultò essere in media 3,0 rispetto all'indice annesso alla vite della messa a fuoco. Schiaparelli trovò (1) che l'allungamento della distanza focale dell'obbiettivo rispetto al tubo era di un millimetro ogni 5 gradi d'aumento di temperatura. E' probabile che questo allungamento provenga da variazioni della pressione del barilotto sulle lenti col variare della sua dilatazione termica.

Lo chassis poteva scorrere in direzione fissata, incastrato com'era fra le guide, ma la camera fotografica nel suo insieme poteva ruotare intorno all'asse del tubo; la si è fissata in modo che lo chassis scorresse lungo il meridiano, formando con esso un angolo di circa  $5^{\circ}$ , per facilitare in seguito le misure al micromicrometro.

Per la fotografia delle doppie si spostava il tubo fino a portare la doppia pressapoco nel centro del campo d'un oculare a piccolo ingrandimento montato su una piastra che subito dopo veniva sostituita dallo chassis. Si prendevano quindi da trenta a sessanta pose spostando la lastra per mezzo della vite a cremagliera ed attendendo una diecina di secondi tra una posa e l'altra per evitare che vibrazioni o movimenti potessero nuocere alla qualità dell'immagine. Particolare cura si aveva di girare la vite che comandava la cremagliera sempre nello stesso senso, anche quando, riportata la lastra in centro, si determinava la giacitura del parallelo mediante due coppie di fotografie ad E ed W ottenute spostando leggermente il tubo in A. R. e fermandolo poi per qualche diecina di secondi, in modo da ottenere una traccia lunga non meno di due centimetri. Su una stessa lastra, senza pericoli di confusione, si fotografavano tre doppie; non sembrò conveniente aumentarne il numero per evitare che un qualsiasi errore di manipolazione rendesse inutilizzabile un gran numero di pose.

Le misure furono eseguite al macromicrometro Mioni della Specola di Merate. Posta la lastra col film in alto, la si orientava in modo che il centro del reticolo, spostato con la vite orizzontale, scorresse lungo la traccia del parallelo della doppia entro qualche primo d'arco; lo scostamento dal parallelo veniva misurato a mezzo del micrometro annesso all'oculare il cui passo era di 0,107 mm. Misurando la distanza lungo il parallelo fra le due puntate E ed W del reticolo, ognuna delle quali veniva eseguita due volte, si poteva ottenere poi la correzione d'orientamento. Per diminuire il più possibile gli errori provenienti dalla curvatura del parallelo, la cui influenza cresce con la declinazione, si è sempre cercato di eseguire le puntate il più possibile equidistanti dalla fila verticale delle pose della doppia.

---

(1) Loc. cit. - pag. 275.

Si passava poi alla misura della  $\Delta x$ . Una prima prova per alcune stelle fu eseguita leggendo il tamburo della vite micrometrica fino al decimo di micron a stima, e correggendo la lettura dagli errori periodici, progressivi e per l'equazione decimale. Rifacendo poi il calcolo delle medie partendo dagli stessi risultati arrotondati al micron e senza tener conto nè degli errori periodici nè dell'equazione decimale, ma solo del valore medio del passo della vite, si trovò una differenza dal valore precedente della media dell'ordine di qualche centesimo di micron, su una media di 26 puntate. Siccome l'accordo interno delle misure ammontava ad un errore medio di 0,6 micron, in seguito si fecero le misure con lettura fino al micron, e non si tenne conto degli errori periodici; siccome un intervallo del tamburo corrisponde ad un micron, l'equazione decimale era evidentemente nulla.

Per ogni posa veniva eseguita una sola puntata, perchè si trovò che l'errore di bisezione era molto minore dell'errore medio della  $\Delta x$  e della  $\Delta y$  d'una singola posa. Fra le immagini venivano scelte costantemente le 15 migliori e misurate portandole sempre al centro del reticolo. Siccome la lastra durante le fotografie formava col suo lato lungo un angolo di circa  $5^\circ$  col meridiano le misure in  $x$  scartavano fra la prima e l'ultima di uno o due mm; ciò permetteva di risparmiare tempo nello scrivere le misure e contemporaneamente si poteva rintracciare in seguito una posa se per una ragione qualsiasi si voleva controllare una misura in  $\Delta x$  già fatta.

La misura di  $\Delta y$  non si potè fare con la vite verticale perchè difettosa; perciò si ruotava di  $90^\circ$  verso destra la lastra servendosi del cerchio graduato su cui poggiava, e di cui preventivamente erano stati studiati gli errori d'eccentricità. La misura veniva quindi fatta con la stessa vite orizzontale e con gli stessi criteri.

Indi si rifaceva la misura in  $\Delta x$  e  $\Delta y$  come sopra, ma con la gelatina verso il basso anzichè verso l'alto. L'orientamento veniva eseguito una seconda volta e la misura di  $\Delta y$  si effettuava ruotando la lastra a sinistra di  $90^\circ$ , anzichè a destra. Nella serie gelatina in alto si girava la vite orizzontale sempre in senso destrorso per effettuare le puntate; nella serie gelatina in basso in senso sinistrorso. Nei casi in cui si era adoperato il reticolo si eseguivano le puntate in  $x$  ed  $y$  come se si trattasse di una stella tripla, e precisamente una puntata all'immagine centrale del compagno e due puntate alle laterali della principale, che, per mezzo di una opportuna disposizione del reticolo, risultavano sempre in direzione approssimativamente perpendicolare alla congiungente delle immagini centrali, allo scopo di ridurre degli eventuali errori personali.

Contemporaneamente all'esecuzione delle misure delle  $x$  ed  $y$  si calcolavano i valori  $\Delta x$  e  $\Delta y$  allo scopo di avere un controllo immediato d'una misura qualsiasi che scartasse notevolmente dalle altre e poter così eliminare gli errori grossolani. Eseguite le differenze  $\Delta x$  e  $\Delta y$  sistematicamente furono soppresse quelle misure che scartavano dalla media più di 10 micron, perchè si trovò che erano sempre dovute ad errori grossolani di varia natura (momentanea disattenzione, sfocamento del reticolo, parallasse dei fili, ecc.) e furono rifatte per ritornare al numero delle misure prefissato.

La riduzione consisteva nelle seguenti operazioni.

1) Eliminazione della misura più alta e più bassa; ciò allo scopo di diminuire al più possibile eventuali errori che, per quanto non si potessero dire nè grossolani nè sistematici, potevano provenire da variazioni brusche tanto nell'osservatore, quanto nella forma dell'immagine. Il criterio di reiezione di PEIRCE non fu usato sia per la sua complicazione sia perchè, pur ammettendo la sua coerenza logica coi presupposti

TAB. n° 3

$m \backslash M$	150	140	130	120	110	100	90	80	70	60	50	40
30	+ 00	- 08	- 25	- 32	+ 11	+ 97	+ 213	+ 276	+ 282	+ 383	+ 480	+ 440
40	- 40	- 53	- 77	- 91	- 50	+ 40	+ 168	+ 235	+ 230	+ 355	+ 520	
50	- 96	- 117	- 151	- 179	- 145	- 56	+ 80	+ 140	+ 85	+ 190		
60	- 128	- 155	- 200	- 240	- 212	- 117	+ 43	+ 115	- 20			
70	- 141	- 174	- 230	- 284	- 260	- 150	+ 75	+ 250				
80	- 197	- 245	- 326	- 417	- 430	- 350	- 100					
90	- 213	- 274	- 382	- 523	- 595	- 600						
100	- 136	- 192	- 310	- 485	- 590							
110	- 22	- 60	- 170	- 380								
120	+ 97	+ 100	+ 40									
130	+ 125	+ 160										
140	+ 90											

della teoria dei minimi quadrati, non poteva essere in ogni modo applicato nel caso presente perchè non sembrava che si trattasse di errori che obbedissero al principio della media.

2) Calcolo del valore medio.

3) Correzione per l'orientamento.

4) Correzione per gli errori progressivi. Ciò si otteneva moltiplicando il risultato dopo l'operazione 3) per  $1 + 10^{-6} p$ , ove  $p$  è funzione

TAB. n° 4.

$\delta$	$\Delta \mu/\mu$
4 ÷ 7	0.000 50
7 ÷ 12	45
12 ÷ 18	40
18 ÷ 26	35
26 ÷ 64	30
64 ÷ 73	35
73 ÷ 79	40
79 ÷ 84	45

del valore massimo  $M$  e minimo  $m$  della  $x$  (od  $y$ ) nella serie delle 15 misure, ed è dato dalla tabella n. 3.

5) Correzione per la rifrazione differenziale, data dalla tabella n. 4, che porta la variazione per ogni micron in  $|\Delta y|$ . Essa è sempre positiva.

6) Media dei due valori trovati nelle due serie con gelatina in alto e gelatina in basso.

7) Moltiplicazione pel valore della scala, tenendo conto della temperatura e del fuoco. Per la determinazione del valore della scala si prese una serie di fotografie delle Pleiadi col reticolo I. Si scelsero le stelle n. 5, 6, 20, 22 del catalogo di HAYN, da cui si hanno le coordinate riportate nella tabella n. 5.

TAB. n° 5

Hayn	B. D.	$\alpha$ (1900,0)	$\delta$ (1900,0)
5	+ 23° 505	54° 42' 51",32	+ 23° 58' 29",71
6	+ 23 507	54° 44' 02",01	+ 23° 47' 56",21
20	+ 23 516	54° 58' 07",03	+ 24° 03' 18",94
22	+ 24 553	54° 59' 13",59	+ 24° 14' 31",97

Dall'Eigenbewegungs-Lexikon di Schorr (pubblicazioni di Amburgo) si ricavarono i moti propri secolari dati dalla tabella n. 6.

TAB. n. 6

H	$\mu_\alpha$	$\mu_\delta$
5	+ 2",10	- 5",5
6	+ 2",10	- 5",0
20	+ 3",15	- 4",5
22	+ 1",80	- 4",1

Da questi dati si calcolarono le distanze angolari vere mediante sviluppo in serie di potenze in  $\Delta\alpha$  e  $\Delta\delta$ , arrestandosi al secondo termine. Le differenze di declinazione furono prima corrette per la rifrazione differenziale, con esclusione della rifrazione differenziale paralattica perchè le pose furono eseguite presso il meridiano.

La misura della distanza sulla lastra fotografica fu eseguita nel modo seguente. Orientata la lastra in modo che due immagini da misurare cadessero sul filo orizzontale del reticolo, misurato col micrometro oculare lo spostamento verticale, si puntò prima alla stella di sinistra e poi a quella di destra girando la vite in senso destrorso; poi, senza toccare la lastra, la stella di destra e quindi la stella di sinistra muovendo

la vite in senso sinistrorso. Indi si rifaceva daccapo la misura allo stesso modo ruotando la lastra di  $180^\circ$ , tenendo sempre la gelatina in alto. Durante questa serie di misure si tenne conto anche degli errori periodici e decimali. La correzione degli errori progressivi venne effettuata direttamente dalla tabella dei valori esatti, anzichè quella, da noi riportata, dei valori medi. Il quadrilatero completo formato dalle 4 stelle sulla lastra fotografica fu sottoposto a compensazione perchè vi era una misura sovrabbondante. Per calcolare il passo si divise la distanza angolare calcolata fra le stelle per la distanza compensata tra le immagini, tenendo conto dei termini dovuti alla deformazione del campo e dell'inclinazione della lastra rispetto all'asse ottico. Il valore in secondi d'arco d'un millimetro, che corrispondeva a due rotazioni della vite, fu trovato essere di  $29''{,}5800$  per osservazioni eseguite ad una temperatura di  $20^\circ$  e fuoco 3,0, con temperatura al macromicrometro di  $8^\circ$ , che rimase pressochè costante durante le misure, entro un paio di gradi. La variazione era di  $-0''{,}00012$  per ogni grado superiore ai  $20^\circ$  al rifrattore; in tal modo si veniva a tener conto della dilatazione relativa della lastra e dell'acciaio del tubo.

Si tenne conto anche di variazioni nella posizione del fuoco rispetto alla posizione media 3,0.

La tabella n. 7 dà il risultato delle misure. Le colonne contengono:

- 1) Il numero della doppia nel catalogo di Aitken.
- 2) L'ascensione retta 1950.
- 3) La declinazione 1950.
- 4) Le grandezze visuali  $m_1$  ed  $m_2$ .
- 5) La data di osservazione in frazione dell'anno 1949.
- 6)  $\Delta x = \Delta \alpha \cos \delta$  (in secondi d'arco).
- 7) Errore medio in  $x$  (in millesimi di secondo d'arco).
- 8)  $\Delta y = \Delta \delta$  (in secondi d'arco).
- 9) Errore medio in  $y$  (in millesimi di secondo d'arco).
- 10) Distanza angolare  $\rho$  (espressa in secondi).
- 11) Errore medio (espresso in millesimi di secondo).
- 12) Angolo di posizione  $\theta$  riferito alla data di osservazione.
- 13) Errore medio in  $\theta$ .

Vediamo ora che cosa si può dire circa la reale precisione delle misure. Risulta dalla tabella precedente che l'errore quadratico medio è dell'ordine di  $0''{,}02$ . Questo valore si riferisce in realtà all'accordo interno della serie di misure in  $\Delta x$  e  $\Delta y$ , ma si tratta ora di vedere quanta parte possano avere degli errori sistematici.

a) *Errori dovuti a differenza di grandezza.* — Come si vede dalla figura la massima differenza di grandezza può salire a 1,2 per mezzo della correzione del reticolo; nei casi in cui la differenza di grandezza era superiore a 0,5 si aveva cura di fare l'osservazione soltanto in sere in cui l'atmosfera era eccezionalmente tranquilla. E' da ritenere perciò che un eventuale errore sistematico di grandezza sia sempre dell'ordine di grandezza corrispondente alla differenza di 0,5, e quindi sembra ragionevole trascurarlo.



b) *Errori di lastra.* — Risulta da lavori di Reuijl che separazioni sulla lastra superiori a 150 micron non comportano errori sistematici sensibili dovuti agli effetti Eberhardt, Kostinski, di turbolenza o di gelatina. Siccome il limite minimo di separazione è stato di conseguenza prefissato a 4",5, non sembra che tali effetti possano avere influenza, perchè nelle doppie strette si è fatta particolare attenzione nel determinare i tempi di posa in modo che i dischetti neri fossero nettamente separati; inoltre per assicurare l'uniforme azione dello sviluppo si agitava leggermente la bacinella. Alcune lastre presero un po' di luce dall'impianto d'illuminamento del reticolo; l'esposizione non avrebbe evidentemente alcun effetto nel caso che l'annerimento fosse uniforme, mentre invece, nel caso contrario, l'immagine di una stella sembrerebbe avere il centro spostato verso la zona di maggiore annerimento. Perciò si sono scartate quelle immagini che presentavano scarso contrasto col fondo o che giacevano su un fondo in cui l'annerimento era poco omogeneo.

c) *Errori d'arrotondamento.* — Come si è detto, la lettura è stata arrotondata al micron e non si è tenuto conto degli errori periodici. Ciò equivale a dire che ogni lettura è soggetta ad un certo errore sistematico. Risulta che il suo importo sulla media è trascurabile; infatti se nella misura di  $\Delta x$  la misura  $x$  della componente principale è sempre fatta per eccesso e la misura  $x$  della secondaria è sempre fatta per eccesso in tutte le 13 misure, la probabilità di compiere un errore sistematico di un micron nella media è di  $1/10^{26}$ : la probabilità di compiere un errore sistematico minore di un micron aumenta col diminuire dell'errore, ma è evidente che ancora per un errore di 0,6 micron, quale in media è la precisione nelle misure, la probabilità è molto piccola.

d) *Errori dovuti al misuratore di lastre.* — Tanto la non perpendicolarità delle viti, quanto la flessione e la curvatura delle viti sono eliminate col metodo di osservazione seguito (osservazione doppia, con la gelatina in alto ed in basso); il passo perduto è eliminato sia da un contrappeso, sia dall'aver collimato girando la vite senza oltrepassare il centro. La simmetria delle immagini rispetto al filo verticale riduce anche gli errori personali. La deviazione del parallelismo dei fili rispetto alle viti è eliminata mediante la collimazione sistematica allo stesso punto del filo verticale. Analogamente a quanto si è detto per gli errori d'arrotondamento, ed a maggior ragione, gli errori periodici non hanno praticamente influenza; questi, possono al massimo apportare una variazione di 0,2 micron in una misura in  $x$ , e la probabilità che ciò avvenga è di 0,36; quindi su 13 misure la probabilità di un errore di 0,2 micron in valore assoluto è minore di  $0,36^{13}$ . Analogamente per  $\Delta x$  si trova che un errore di 0,1 micron ha una probabilità di verificarsi trascurabile.

Bisogna fare attenzione ad una particolare sorgente di errore che può introdursi nella misura della lastra nella serie gelatina in basso. Infatti se la lastra non ha le facce parallele ma queste formano un angolo  $i$ , supposto che i raggi escano perpendicolarmente alla superficie del vetro per entrare nell'obbiettivo del microscopio, bisognerà moltiplicare la lettura fatta per  $1 + \frac{1}{2} i^2$ . Ora perchè la correzione possa

arrivare all'ordine di grandezza di 0,1 micron su 1.000 bisogna che  $i = 50'$ . Dallo stesso ragionamento si trova che un errore apprezzabile si può avere solo per un'inclinazione maggiore di  $50'$  sia della lastra fotografica rispetto all'asse ottico del rifrattore, sia rispetto all'asse del microscopio del misuratore. In nessun caso si è trovato un errore d'inclinazione così elevato. D'altra parte si può facilmente vedere che sia asperità delle superfici, sia variazioni nell'indice di rifrazione del vetro dovrebbero essere d'un ordine di grandezza inammissibile per produrre variazioni sensibili nella posizione apparente delle immagini.

e) *Errori di scala.* — A temperatura di  $20^\circ$  si ha  $1 \text{ mm} = 29'',5800$  e si è trovato che l'incertezza dovuta all'errore medio del valore della scala è trascurabile.

f) *Errori d'orientamento.* — Esaminiamo separatamente il loro effetto sulle coordinate relative  $\Delta x$  e  $\Delta y$ . Se  $\Delta x_0$  e  $\Delta y_0$  sono le coordinate relative non corrette per l'orientamento  $\omega$ , si ha, a meno dei termini in  $\omega^2$  che sono trascurabili

$$\Delta x = \Delta x_0 + \omega \Delta y_0$$

da cui

$$\mu^2_{\Delta x} = \mu^2_{\Delta x_0} + \Delta y_0^2 \mu^2_{\omega}$$

Ora  $\omega$  è noto con un errore medio minore di  $6 \times 10^{-4}$  e pertanto, essendo  $\mu_{\Delta x_0}$  dell'ordine di 0,6 micron, il termine  $\mu_{\omega} \Delta y_0$  comincia a divenire sensibile per  $\Delta y_0 > 1000$  micron, cioè per stelle di separazione superiori ai  $30''$ .

Analogamente per  $\Delta y$ ; qui però bisogna tener conto del fatto che all'errore in  $\omega$  si deve aggiungere l'errore che si commette ruotando il cerchio portalastra di  $90^\circ$ . Tutto avviene come se la correzione d'orientamento per  $\Delta y_0$  dipendesse da due termini,  $\omega$  e  $\varphi$ , ove  $\varphi$  è il complemento a  $90^\circ$  dell'angolo di cui il cerchio si è fatto ruotare. Il valore di  $\varphi$  deve essere uguale a 0; in pratica si hanno degli scarti dovuti ad errori di lettura al nonio del cerchio ed agli errori di graduazione. Si può vedere che gli errori d'eccentricità non hanno effetto sulla media delle letture delle due serie.

L'incertezza massima di  $\varphi$  è di  $30''$ , e pertanto per avere un errore di 0,1 micron in  $\Delta y$  bisognerebbe che  $\Delta x$  fosse al minimo 660 micron, cioè  $20''$ . In altre parole si può avere un'incertezza nell'angolo di posizione di  $0^\circ,008$ , che è sensibile solo per coppie molto larghe, per le quali l'errore medio di  $\theta$  diviene di quest'ordine di grandezza.

Una particolare sorgente d'errore può sorgere dal modo con cui la lastra fotografica viene spostata fra una posa e l'altra; infatti essa scorre fra due guide ad incastro, spinta da una cremagliera. Se le due guide non sono esattamente rettilinee, ma ad esempio archi d'un cerchio di grande raggio, è evidente che  $\Delta x$  cambierà sistematicamente perchè per ogni posa la posizione del parallelo sarà sempre diversa. Analogamente, il necessario gioco fra portalastra e guida fa sì che siano possibili piccole rotazioni della lastra fotografica rispetto all'asse ottico, e ciò avviene se ad es. la vite della cremagliera è girata prima in un senso e poi

nell'altro; quest'inconveniente è stato eliminato ruotando la vite di spostamento sempre nello stesso senso. La curvatura delle guide fu trovata essere d'un ordine di grandezza certamente inferiore alla tolleranza massima che poteva dar luogo ad errori dell'ordine del decimo di micron. Errori d'orientamento dovuti alla curvatura del parallelo furono eliminati nel modo già detto.

Perciò, per quanto le presenti misure rivelino soltanto l'accordo interno, non sembra possibile che l'errore medio reale sia notevolmente superiore a quello calcolato, nè che errori sistematici abbiano un'influenza dello stesso ordine di grandezza. Nei casi in cui ciò poteva sembrare possibile per cattiva qualità delle immagini, non si è calcolato l'errore medio; pertanto ove questo dato manca nella tabella n. 7, i risultati si devono ritenere incerti. La precisione delle misure avrebbe potuto essere aumentata se si fossero misurati direttamente  $\rho$  e  $\theta$ , anzichè  $\Delta x$  e  $\Delta y$  (1), ma si è constatato che tale metodo di misura al particolare macromicrometro usato non era praticamente consigliabile.

---

(1) V. HOFF - A. J., 39-122, (1929).

TAB. n° 7

A	$\alpha$ (1950)	$\delta$ (1950)	$m_1$	$m_2$	$T$ 1949	$\Delta\alpha$	$\mu_{\Delta\alpha}$	$\Delta\gamma$	$\mu_{\Delta\gamma}$	$\rho$	$\mu_\rho$	$\theta$	$\mu_\theta$
10386	17 09,1	54° 33'	80	83	602	+ 15,72	17	- 15,78	16	22,27	0,04	135,11	0,04
394	10,0	21 17	71	84	602	- 0,58	16	- 7,71	16	7,73	0,12	184,30	0,12
413	12,0	28 52	75	80	632	+ 1,69	23	+ 5,30	26	5,56	0,25	17,74	0,25
526	22,0	37 11	40	51	526	- 2,71	-	+ 2,82	-	3,91	-	316,19	-
553	24,3	29 30	70	85	641	+ 7,56	17	+ 4,75	16	8,93	0,11	57,87	0,11
562	25,5	11 26	56	74	641	- 26,61	22	+ 5,84	23	27,24	0,05	282,37	0,05
628	31,2	55 13	46	46	589	- 46,28	-	+ 41,11	-	61,90	-	311,62	-
635	32,2	9 37	56	73	641	- 7,52	30	- 40,52	22	41,21	0,04	190,51	0,04
638	32,4	6 03	70	77	641	- 57,52	-	- 56,70	-	80,77	-	225,41	-
750	42,0	2 36	62	65	526	+ 20,62	21	- 1,23	25	20,66	0,07	93,41	0,07
759	42,8	72 11	40	52	641	+ 8,07	16	+ 29,26	15	30,35	0,03	15,42	0,03
765	43,0	31 09	75	80	654	- 2,34	18	+ 3,93	19	4,58	0,24	329,19	0,24
774	43,8	21 54	73	83	654	+ 16,09	22	- 19,12	16	24,99	0,05	139,92	0,05
784	44,4	14 48	74	78	654	- 6,69	32	+ 1,67	29	6,89	0,26	284,01	0,26
955	57,2	30 03	70	80	676	- 19,35	19	+ 2,57	20	19,52	0,06	277,58	0,06
985	59,0	64 09	68	73	676	- 20,58	19	+ 5,04	19	21,19	0,05	283,77	0,05
993	59,4	21 36	49	49	676	- 6,18	17	- 1,23	16	6,30	0,14	258,71	0,14
11013	18 01,2	25 22	84	85	676	- 9,86	13	- 19,72	13	22,05	0,04	206,56	0,04
028	01,8	48 28	63	82	526	+ 22,37	20	- 15,12	17	27,00	0,04	124,05	0,04
035	02,0	56 25											
B-A			68	73	676	+ 16,41	16	+ 33,10	13	36,94	0,03	26,37	0,03
C-B			73	78	676	+ 3,41	17	- 5,06	13	6,10	0,15	146,03	0,15
046	02,9	2 32	41	61	682	+ 5,91	18	- 1,62	12	6,13	0,13	105,30	0,13
056	03,4	12 00	60	70	682	- 6,74	18	- 1,50	17	6,90	0,14	257,45	0,14
061	03,8	80 00	54	61	682	- 15,35	15	- 11,85	16	19,39	0,05	232,32	0,05
089	05,8	26 05	59	59	676	- 0,68	12	- 14,17	14	14,19	0,05	182,75	0,05
178	11,6	69 14	85	85	679	- 1,77	16	- 3,89	14	4,27	0,21	204,45	0,21
208	13,2	19 45	75	83	712	- 2,72	16	+ 4,54	12	5,29	0,17	329,09	0,17
372	25,6	19 16	72	72	526	- 0,98	13	- 5,29	16	5,88	0,14	190,51	0,14
424	29,2	32 13	75	81	594	- 2,82	17	+ 5,78	14	6,43	0,13	384,01	0,13

A	$\alpha$ (1950) <small>h m</small>	$\delta$ (1950)	$m_1$	$m_2$	T 1949	$\Delta x$	$\mu \Delta x$	$\Delta y$	$\mu \Delta y$	$\rho$	$\mu \rho$	$\theta$	$\mu \theta$
500	18 34,6	41° 14'	74	74	679	—	1,73	+	4,80	5,10	21	340,16	0,22
534	36,7	36 01	71	84	712	—	0,30	—	4,24	4,25	15	184,07	0,19
592	40,2	27 36	85	85	679	+	7,97	+	5,48	9,67	26	55,50	0,15
593	40,3	34 42	67	82	712	+	24,90	+	3,09	25,09	19	82,93	0,05
616	41,4	44 52	67	82	717	+	4,01	+	25,47	25,78	18	8,94	0,05
624	41,8	30 21	77	84	717	+	20,00	+	10,07	22,39	19	63,28	0,05
745	48,2	33 18	30	67	712	+	23,77	—	39,10	45,76	14	148,70	0,02
750	48,4	10 55	58	70	717	—	0,15	—	3,50	3,50	—	182,52	—
779	50,4	59 19	46	76	736	—	18,94	+	28,42	34,15	14	326,33	0,03
853	53,7	4 08	40	42	679	+	21,60	—	5,30	22,24	22	103,80	0,07
870	55,2	75 43	67	75	736	—	3,48	—	4,43	5,63	14	218,15	0,14
916	57,7	12 49	68	82	736	—	16,46	—	2,74	16,69	19	260,56	0,05
12010	19 02,5	23 15	63	80	526	—	12,31	—	1,59	12,41	26	262,63	0,08
029	03,4	6 28	63	83	778	+	4,43	—	8,56	9,64	21	152,62	0,15
037	04,0	7 05	71	78	712	—	7,54	+	2,82	8,05	18	290,51	0,10
050	04,8	22 06	72	83	553	+	3,96	+	3,94	5,59	27	45,15	0,29
093	06,9	34 41	67	82	778	—	13,59	—	0,12	13,59	19	269,49	0,05
101	07,2	34 31	67	80	778	—	16,26	—	2,50	16,45	16	261,26	0,06
162	10,4	30 16	72	83	695	—	6,54	+	7,31	9,88	18	317,77	0,11
169	10,8	49 45	60	65	679	—	4,64	—	7,09	8,47	16	213,24	0,12
197	12,0	39 03	40	81	712	+	27,99	+	4,03	28,28	14	81,82	0,03
259	14,7	9 15	75	82	778	+	4,73	+	18,98	19,56	24	13,99	0,07
322	17,7	3 57	72	78	679	+	10,98	+	4,99	12,06	21	65,56	0,09
336	18,8	19 03	64	81	778	—	8,60	+	2,18	8,87	17	284,20	0,13
379	20,9	9 25	85	85	526	—	0,19	—	8,81	8,81	16	181,25	0,09
448	24,5	25 24	83	85	594	+	6,11	—	0,23	6,11	17	92,16	0,18
451	24,6	21 03	73	74	674	+	3,30	—	5,46	6,38	18	148,84	0,16
470	25,5	50 02	67	77	712	—	61,41	+	38,22	72,33	—	301,90	—
478	25,9	36 26	78	80	679	+	6,16	+	3,01	6,86	17	63,91	0,16
540	28,7	27 51	30	53	778	+	27,98	+	19,93	34,35	16	54,55	0,03

segue TAB. n° 7

A	$\alpha$ (1950) h m	$\delta$ (1950)	$m_1$	$m_2$	$T$ 1949	$\Delta x$	$\mu_{\Delta x}$	$\Delta y$	$\mu_{\Delta y}$	$\rho$	$\mu_{\rho}$	$\theta$	$\mu_{\theta}$
12561	19 29,6	36° 36'	79	83	778	+ 4,59	23	+ 3,64	19	5,86	22	51,62	0,20
D-C					778	- 48,33	-	- 20,65	-	52,56	-	246,87	-
C-A													
586	30,7	63 12	77	77	679	+ 27,95	24	+ 4,70	16	28,34	24	80,45	0,04
C-D					679	- 24,70	19	+ 7,26	19	25,75	19	286,38	0,05
C-A					695	+ 3,84	13	+ 10,59	14	11,27	14	19,92	0,07
608	31,8	78 09	73	80	780	- 4,85	20	- 17,97	20	18,61	20	195,10	0,07
697	33,2	60 10	79	84	780	+ 88,20	-	+ 13,38	-	89,21	-	81,37	-
693	35,0	16 21	57	77	682	+ 27,82	18	- 27,16	23	38,88	21	134,31	0,03
815	40,6	50 24	51	53	780	+ 12,26	16	- 8,59	16	14,97	16	125,02	0,06
893	43,8	35 38	66	74	712	+ 24,49	17	+ 8,96	16	26,08	17	69,90	0,03
913	44,5	33 37	51	81	695	- 4,53	14	+ 2,15	16	5,01	15	295,40	0,18
13046	50,0	0 31	80	84	632	+ 2,51	-	- 2,89	-	3,83	-	138,95	-
050	50,2	25 44	76	76	742	+ 13,96	18	- 12,20	20	18,54	19	228,85	0,06
190	56,3	44 15	75	84	654	- 2,38	16	+ 4,65	18	5,22	18	27,15	0,19
209	57,4	47 14	80	80	674	+ 11,91	14	- 11,09	20	16,27	17	132,95	0,06
228	57,7	11 03	85	85	695	- 0,54	17	+ 4,03	12	4,07	12	352,31	0,20
256	59,0	10 36	70	72	654	- 3,77	16	- 1,99	18	4,26	17	242,23	0,23
269	59,6	48 07	81	81	712	+ 21,77	17	- 35,59	18	41,72	18	148,55	0,02
278	20 00,0	49 58	53	85									
301	00,9	54 30											
C-A					553	+ 131,34	-	+ 99,13	-	164,55	-	52,96	-
B-A					553	- 4,71	-	+ 3,48	-	5,86	-	306,49	-
D-C					553	- 1,21	-	+ 2,77	-	3,02	-	336,44	-
330	02,2	9 06	77	79	594	- 3,98	17	- 4,14	18	5,74	18	223,87	0,18
379	04,2	7 25	68	73	654	- 6,57	-	- 64,85	-	65,18	-	185,78	-
442	07,7	20 46	60	71	523	- 57,29	-	- 61,25	-	83,87	-	223,09	-
524	10,7	77 34	40	80	739	+ 6,34	-	- 3,82	12	7,40	14	121,09	0,11
553	11,9	22 04	75	75	632	+ 0,29	11	+ 6,20	16	6,21	16	2,65	0,10

segue TAB. n° 7

A	$\alpha$ (1950)		$\delta$ (1950)	$m_1$	$m_2$	T 1949	$\Delta\alpha$	$\mu_{\Delta x}$	$\Delta y$	$\mu_{\Delta y}$	$\rho$	$\mu\rho$	0	$\mu\theta$
	$^h$	$^m$												
13626	19	14,7	37 28	80	85	736	—	18,31	+	4,22	15	18	282,97	0,05
C-A				80	85	736	+	12,76	+	10,93	16	16	49,42	0,05
B-A	20	14,9	31	65	83	742	—	45,43	+	23,47	—	—	297,32	—
630		15,0	39	80	85	654	—	3,20	+	4,31	17	18	323,40	0,19
636		15,9	45	82	85	632	—	5,61	—	5,66	17	18	224,71	0,14
655		21,1	39	70	84	695	—	41,97	—	10,32	19	16	256,19	0,03
783		21,5	53	73	80	736	—	13,96	—	37,04	20	19	200,65	0,02
795		22,5	14	83	85	632	—	15,41	+	5,00	19	17	287,99	0,07
822		25,2	56	65	83	695	+	23,49	—	12,00	18	18	117,06	0,04
870		27,4	37	80	85	602	—	2,25	—	3,39	15	15	213,60	0,22
909				80	85	602	+	86,17	—	14,91	—	—	99,81	—
B A				80	85	654	+	9,08	+	14,62	21	21	31,83	0,07
C-A	27,8		37	80	82	594	—	7,17	—	5,32	18	20	233,46	0,12
919		28,1	40	84	85	595	—	23,12	+	6,26	17	19	285,15	0,04
922		32,7	32	65	83	695	—	28,31	+	100,42	—	—	164,26	—
14027		39,6	20	73	80	695	+	8,43	+	0,43	17	19	87,09	0,12
170		40,2	12	74	76	632	+	5,06	—	8,22	19	18	148,39	0,09
184		40,9	49	84	86	739	—	26,13	—	46,81	—	—	209,17	—
194		42,6	23	82	84	742	+	0,61	+	5,53	12	12	6,28	0,20
235		43,9	15	73	80	739	—	10,13	—	0,19	19	19	268,93	0,11
270		44,4	15	40	50	523	+	9,97	—	0,78	20	14	94,46	0,11
279		45,4	42	72	83	520	—	6,73	—	4,95	20	20	126,34	0,14
295		50,2	43	78	81	594	—	14,38	—	4,01	16	18	254,44	0,06
382		56,2	16	72	82	641	—	4,67	—	0,49	15	16	264,04	0,19
490			37	82	82	520	+	17,43	—	20,30	13	14	139,35	0,03
569	21	00,4	38	56	63	523	+	5,93	—	2,77	12	13	115,06	0,11
636		02,4	52	71	71	523	—	7,32	+	1,18	15	12	279,16	0,12
878		16,8	64	46	65	523	—							
15600		22 00,9												

