SU UN METODO PER DEDURRE UNA SCALA DI GRANDEZZE FOTOGRAFICHE DALLE MISURE DEI DIAMETRI D_i E D_i' OTTENUTI CON DUE TEMPI DI POSA DIFFERENTI

Nota di E. DE CARO

RIASSUNTO. – Esaminata la possibilità di utilizzare le immagini fotografiche (diametri) ottenuti sulla medesima lastra con due tempi di posa differenti, mostro con un esempio di calcolo che, se l' intervallo fra le grandezze estreme delle stelle da ridurre non é molto grande, può esser lecita l' applicazione pratica di alcune formule studiate in altra nota.

1. – Uno studio analitico sulle curve rappresentatrici dei diametri D in funzione delle grandezze fotografiche ha costituito l' argomento di una mia precedente nota [1], nella quale ho esaminato questi tre tipi di curve:

$$[1] \qquad m = -\frac{K}{b} \log (a + b\,D) + C$$

$$[2] \qquad m = -\frac{K}{a'} \log \frac{2\,c\,D + b - a'}{2\,c\,D + b + a'} + C \qquad [a' = \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}]$$

$$[3] \qquad m = -\frac{2\,K}{a'} \operatorname{arc\,tang} \frac{2\,c\,D + b}{a'} + C \qquad [a' = \sqrt{4\,a\,c - b^2}]$$

essendo K un coefficiente di proporzionalità e C una costante addittiva.

Come è stato già visto per la [1] e come vedremo per la [3], queste formole si prestano abbastanza bene nella pratica delle riduzioni fotografiche e se, da una parte, appaiono un po' più complicate delle usuali formole di riduzione, dall' altra hanno il vantaggio che i vari coefficienti $a\,b\,c$... sono deducibili in base a dati esclusivamente sperimentali. Ogni altra formola empirica mira sovratutto all' accordo di una serie di misure D_i con una scala fotometrica o un sistema di riferimento prefissato, ma

(1) Mem. della S. A. I. vol. XI, pag. 11.

lascia sempre molto incerta e talvolta illusoria l'estrapolazione verso valori estremi di m, o comunque lontani dalle stelle di confronto.

Il calcolo dei coefficienti a, b, c... come ho già mostrato in altro lavoro precedente, è reso possibile dal fatto che le differenze ΔD dovute all'interposizione di uno schermo riduttore o di un reticolo di HERTZSPRUNG corrispondono a una differenza di grandezza costante $\Delta m = K$. Occorre però notare che, nelle osservazioni focali specialmente, le immagini diffratte del reticolo sono spesso affette da piccole deformazioni, tanto più risentite quanto più si va verso i bordi della lastra; non si può affermare che tali deformazioni non influiscano qualche volta sulle misure o sulla stima dei diametri delle immagini fotografiche, specialmente quando si tratta di stelle molto deboli.

Supponiamo ora che le differenze $(\Delta D)_i = D_i - D_i'$, anzichè corrispondere a una riduzione dell'intensità fotografica I secondo un certo rapporto costante, siano invece ottenute mercè riduzione del tempo di posa da t a t', supposto costante per tutte le stelle il rapporto t/t'; può esser lecito in tal caso ritenere le differenze (ΔD) *come equivalenti all'effetto di una variazione di grandezza* Δm *costante?*

Indichiamo al solito con I, t, D rispettivamente l'intensità fotografica, il tempo di esposizione e l'effetto attinico (diametro, o densità fotografica) e poniamo:

$$D = F(U) \quad , \quad U = \varphi(I, t) \tag{4}$$

da cui, differenziando:

$$dD = \frac{dF}{dU}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial I} dI + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt\right), \qquad \text{o pure:}$$

$$dD = \frac{dF}{dU}\left[I\frac{\partial \varphi}{\partial I} d(\log I) + t\frac{\partial \varphi}{\partial t} d(\log t)\right] \tag{5}$$

Supposti I e t variare in modo che il 1° membro D della [4] non subisca alcuna variazione, cioè che dD sia nullo, la [5], eguagliata a zero, porge l'identità:

$$I\frac{\partial \varphi}{\partial I} d(\log I) = - t\frac{\partial \varphi}{\partial t} d(\log t) \tag{6}$$

a) Posto, ad es., $\varphi(I, t) = It$ (principio di reciprocità), si ha:

$$t\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi$$

$$I\frac{\partial \varphi}{\partial I} = \varphi$$

b) Posto $\varphi(I, t) = I t^p$, essendo p un parametro costante, si ha:

$$t \frac{\partial \varphi}{\partial t} = p \varphi$$

$$I \frac{\partial \varphi}{\partial I} = \varphi$$

c) Assunto con KRON (1):

$$\varphi(t, I) = t I \, 10^{-a \sqrt{\log\left(\frac{I}{I_0}\right)^2 + 1}}$$

in cui I_0 e a sono parametri dipendenti dalla lastra, risulta:

$$t \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi$$

$$I \frac{\partial \varphi}{\partial I} = \varphi \left\{ 1 - \frac{a}{\text{mod.}} \log \frac{I}{I_0} \left[\left(\log \frac{I}{I_0}\right) + 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\}$$

d) Poniamo, in generale:

$$D = m_0 + m_1 (\log I) + m_2 (\log I)^2 + m_3 (\log I)^3 + \cdots \tag{7}$$

dove, supposte invariabili tutte le altre condizioni di osservazione, i coefficienti m_0, m_1, $m_2 \cdots$ sono, o *costanti*, per t (tempo di posa) costante, o *funzioni di* t, per t variabile.

Supposto t costante e I variabile, si ha differenziando:

$$d D = [m_1 + 2 m_2 (\log I) + 3 m_3 (\log I)^2 + \cdots] \, d (\log I), \tag{8}$$

mentre, supposto I costante e t variabile:

$$d D = [m_0' + m_1' (\log I) + m_2' (\log I)^2 + m_3' (\log I)^3 + \cdots] \, t \, d (\log t) \tag{9}$$

in cui:

$$m_0' = d \, m_0 \, d t, \qquad m_1' = d \, m_1 / d t, \cdots \text{ecc.}$$

Eguagliando i due effetti, val quanto dire i secondi membri della [8] e della [9] si ha:

$$d (\log I) = \frac{m_0' + m_1' (\log I) + \cdots}{m_1 + 2 m_2 (\log I) + \cdots} \, t \, d (\log t) \tag{10}$$

(1) " Über das Schwarzungs photographischen Platten " (Eders Jahrb. 1914, pag. 6).

In conclusione, si hanno 4 differenti ipotesi :

[a] $d(\log I) = d(\log t)$

[b] $d(\log I) = p\, d(\log t)$

[c] $d(\log I) = f(I)\, d(\log t)$

[d] $d(\log I) = f(I, t)\, d(\log t)$

per cui, in ultima analisi, conviene attenersi a quanto suggerisce l'esperienza in considerazione del grado di precisione che si vuol raggiungere.

Prove numerose eseguite su lastre di tipo rapido m'inducono ad affermare che se $\Delta(\log t)$ non supera l'unità e se l'intervallo di luminosità non supera le 5 grandezze stellari, il ΔD relativo alla riduzione del tempo di posa secondo un certo rapporto costante può ritenersi equivalente all'effetto di una variazione costante di grandezza $\Delta m = K$. Se così non fosse, le grandezze fotografiche m_c calcolate a mezzo di una delle formole [1], [2], o [3], nell'ipotesi di K costante, darebbero luogo a scarti sistematici variabili progressivamente con la grandezza m, il che, come si vedrà nel confronto con le grandezze fotografiche del Drap. Catal., non avviene. In conclusione, l'ipotesi [b] potrà essere tranquillamente adottata entro i limiti indicati.

2. - A titolo di esempio riporto i risultati della riduzione di una lastra contrassegnata col n. 107 (Cappelli-blu, emulsione ordinaria), eseguita la sera del 10 luglio 1936 all'equatoriale SALMOIRAGHI di Catania. Su detta lastra, con tempi di posa rispettivamente di $3^m,0$ e $1^m,5$, furono eseguite due fotografie di una zona presso la « Nova Lacertæ 1936 ». Le misure dei diametri D_i e D_i' per ciascuna stella sono riportate nella 5ª e 6ª colonna del prospetto II.

Le differenze di $D_i - D_i'$ possono essere rappresentate mediante una relazione del tipo : (1)

$$D_i - D_i' = \frac{1}{\alpha} + D_i D_i' \frac{\beta}{\alpha} + (D_i + D_i') \frac{\gamma}{\alpha} \qquad [11]$$

essendo $\frac{1}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}$ tre costanti.

Per attenuare l'effetto degli errori di misura sul calcolo delle costanti, costruisco un grafico nel quale riporto come ascisse i diametri D_i' (con $1^m,5$ di posa). e come ordinate i diametri D_i (2) (con $3^m,0$ di posa). Da un conguaglio grafico dei valori $D = f(D')$ ricavo i seguenti punti normali :

(1) Mem. della S. A. I. Vol. XI, 1938, pag. 19.

(2) Le misure dei diametri D e D' furono effettuate a mezzo di un macromicrometro GAUTIER.

TABELLA I.

D'	D	$D+D'$	DD'	$D-D'$
0	3	3	0	3
30	35	65	1050	5
60	68	128	4080	8
90	109	199	9808	19
120	149	269	17881	29
160	201	361	32159	41

Introdotti questi valori nella [11], ottengo dalla risoluzione del sistema [11]:

$$\frac{1}{\alpha} = +3.224\,, \qquad \frac{\gamma}{\alpha} = +0.04367\,, \qquad \frac{\beta}{\alpha} = +0.0006906\,,$$

Risultando $\beta - \gamma^2 = +0.0000305 > 0$, si deve applicare la [3]. In tal caso, dopo facili calcoli (1), si ottiene:

$$b = +0.08728\,, \qquad c = +0.00069008$$

$$a' = \sqrt{4\,a\,c - b^2} = 0.03554$$

L'ulteriore calcolo di $2\,K$ e C è stato eseguito in base alle grandezze fotografiche m_f date dal Draper Catal. e alle medie $\overline{D} = \frac{1}{2}\,(D + D')$ introdotte nella [3] rispettivamente al posto di m e di D.

Si ha pertanto:

$$2\,K = 1.8198 \quad , \quad C = 79.07$$

Le grandezze m_c calcolate a mezzo della [3], in cui l'arco si intende espresso in parti del raggio $= 1$, sono riportate nella penultima colonna del prospetto seguente.

Dall'esame di questi risultati, non sembra che le differenze $m_f - m_c$ manifestino andamento sistematico col variare della grandezza, per cui l'ipotesi [b] appare in questo esempio di riduzione pienamente giustificata. Altre prove, non riportate in questo lavoro, confermano del pari l'ipotesi, almeno nell'ambito di cinque grandezze stellari.

---

(1) Mem. della S. A. I. Vol. XI, 1938, pag. 16 e segg.

TABELLA II.

Lastra 107 - 1936 Luglio 10 $m_c = 79.07 - 51.205 \text{ arc } tang\,(0.03883\,D + 2.456)$

tempi di posa: $3^m,0 - 1^m,5$

N. Draper Cat.	m_v	m_f	Sp.	D	D'	m_c	$m_f - m_c$
211643	M 7.16	M 7.22	A_2	89	84	M 7.4	M − 0.2
211226	8.6	8.6	A_0	62	61	9.1	− 0.5
210494	8.6	8.6	A_0	68	60	8.9	− 0.3
211352	9.2	9.3	A_2	60	58	9.3	± 0.0
210071	6.22	6.20	B_9	128	106	5.9	+ 0.3
210628	6.87	6.75	B_5	115	88	6.7	± 0.0
211430	7.46	7.44	B_9	97	76	7.4	± 0.0
211057	8.0	8.0	B_9	84	71	7.9	+ 0.1
210072	8.0	8.0	B_8	81	67	8.2	− 0.2
210922	7.44	8.51	K_2	74	64	8.5	± 0 0
211070	8.1	9.1	K_0	65	56	9.1	± 0.0
Nova Lacertae 1936	—	—	—	132	103	5.9	—
211659	9.9	10.0	A_3	57	48	9.9	+ 0.1
210855	5.42	5.92	F_8	156	123	5.1	[+ 0.8]
211336	4.23	4.51	F_0	175	159	4.4	+ 0.1
211554	6.05	7.05	K_0	103	91	6 8	+ 0.2
210322	8.4	8.7	F_0	72	67	8.5	+ 0.2
209991	7.54	7.96	F_5	80	76	7.8	+ 0.1
210414	8.6	9.2	G_0	63	57	9.2	± 0.0

Essendo nel nostro esempio $\Delta\,(\log t) = -0.30103$ e $\Delta\,m = K = 0.9099$, si ha:

$$p = \frac{0.9099}{2.5 \times 0.30103} = 1.209$$

Risultando inoltre:

$$-w = -\frac{b}{2\,c} = -63.24 \angle 0$$

la curva dei diametri $D = f(m)$ non presenta alcuna inflessione.

3. - Per intervalli estesi a dieci e più classi di grandezze converrà meglio suddividere il materiale di osservazione in due (o più) gruppi, secondo la grandezza e calcolare separatamente per ogni gruppo le costanti $a, b, c...$ nonchè K (ove sia possibile disporre di stelle di confronto di grandezza fotografica nota). Il raccordo fra due differenti rami della curva interpolatrice avverrebbe secondo un contatto di prim' ordine, potendosi sempre supporre un valore intermedio D_* del diametro per il quale risulti:

$$\frac{K_0}{a_0 + b_0 D_* + c_0 D_*^2} = \frac{K_1}{a_1 + b_1 D_* + c_1 D_*^2} = \left(\frac{dm}{dD}\right)_*$$

supposti K_0, K_1 dell' ordine delle quantità differenziali. In altre parole, le due curve raccordate ammetterebbero per D_* una tangente comune.

I procedimenti ora esposti potrebbero essere utilmente sperimentati nelle riduzioni fotometriche del Catalogo Astrofotografico, utilizzando le *seconde immagini* almeno per quelle zone e per quelle lastre che le posseggono.

Come è noto, per distinguere le immagini stellari da eventuali difetti di emulsione o di sviluppo, fu stabilito di eseguire per ogni lastra una seconda posa di $2^m,5$ a distanza di $20''$ circa dalla posa principale, normalmente di $5^m,0$; cosicchè, per una stella che si trova al limite di visibilità, la seconda posa di solito è impercettibile.

Prescindendo dalla questione, anche importantissima, dell' unificazione dei sistemi di riferimento, il problema delle riduzioni fotometriche su larga scala (Catalogo Astrografico) s' impernia, secondo me, sopra due criteri fondamentali:

a) Unificazione dei vari metodi di riduzione fotografica, per render più agevole il confronto fra le diverse zone del catalogo, i cui dati fotometrici risulterebbero, entro certi limiti, omogeneizzati;

b) Studio dei metodi di riduzione sulla base dei principii fondamentali della fotometria fotografica (1) al fine di affrontare il lato più importante del problema, cioè l' estrapolazione verso i valori delle grandezze incognite delle stelle più deboli, estrapolazione che i metodi usuali non consentono se non in misura limitata e con molta incertezza.

In tale ordine d' idee, attenendomi ai risultati delle mie ricerche, i coefficienti che entrano nelle formole di riduzione sarebbero di due specie: *a*) coefficienti come $a, b, c...$ eslusivamente dipendenti dai dati sperimen-

(1) Cfr. SPENCER JONES e HALM. Report on the investigation of Photographic Magnitudes... (Trans. of the Intern. Astr. Un. - Vol. II, 1925, pag. 88).

tali (misure) e variabili col tipo di lastra, con gli sviluppi, con le condizioni strumentali e atmosferiche, ecc.; questi coefficienti determinano l'andamento e la forma della curva rappresentatrice delle grandezze fotografiche nel *sistema locale* definito dal complesso di tutte le condizioni sopra accennate; *b*) coefficienti come K e C, il cui calcolo in rapporto con la scelta del punto zero della scala fotografica, può farsi dipendere da poche stelle di grandezza fotografica e di tipo spettrale noto.

R. Specola di Collurania - Settembre 1938 - XVI.