PUBBLICAZIONI
DEL REALE OSSERVATORIO DI BRERA IN MILANO.
N. XXVIII.

DI UNA NOTEVOLE SEMPLIFICAZIONE

NEL

CALCOLO DELLE PERTURBAZIONI DEI PICCOLI PIANETI

DI

A. VENTURI

PROFESSORE NEL R. LICEO DI COMO

MILANO
ULRICO HOEPLI,
EDITORE-LIBRAJO
1886.

PUBBLICAZIONI
DEL REALE OSSERVATORIO DI BRERA IN MILANO.
N. XXVIII.

DI UNA NOTEVOLE SEMPLIFICAZIONE
NEL
CALCOLO DELLE PERTURBAZIONI DEI PICCOLI PIANETI

DI

A. VENTURI

PROFESSORE NEL R. LICEO DI COMO.

MILANO
ULRICO HOEPLI,
EDITORE-LIBRAJO

1886.

Milano 1886. — Tip. Bernardoni di C. Rebeschini e C.

DI UNA NOTEVOLE SEMPLIFICAZIONE

NEL CALCOLO DELLE PERTURBAZIONI DEI PICCOLI PIANETI

DI

A. VENTURI

PROFESSORE NEL R. LICEO DI COMO

È noto che per determinare le perturbazioni assolute dei piccoli pianeti, occorrono sviluppi di gran lunga più laboriosi che non pei pianeti maggiori. La cagione di questo fatto sarà da molti attribuita, oltre che alla vicinanza di Giove, a due speciali circostanze che si presentano negli asteroidi: cioè alla grande eccentricità dell'orbita ed alla sensibile inclinazione che il piano di questa ha verso l'ecclittica. Pure, entrando bene addentro all'argomento, son venuto nella convinzione che la maggior mole di lavoro che è necessario per venire a capo delle perturbazioni dei nominati pianeti, sia occasionata anzichè da due, da una sola circostanza e cioè dalla grandezza della eccentricità. È questa sola che ci obbliga a prender per argomento l'anomalia eccentrica dell'Asteroide, costringendoci poi ad un improbo lavoro per esprimere in funzione di tale variabile le coordinate del pianeta perturbatore.

Ma se l'Asteroide ha piccola eccentricità, pure avendo sensibile inclinazione, allora mostrerò in questo scritto come cessi il bisogno di sviluppare per l'anomalia eccentrica e come sia possibile, ad onta della forte inclinazione, di riprendere per argomento degli sviluppi l'anomalia media, con notevole semplificazione di calcolo, senza perciò ritornare agli antichi metodi i quali esigono che anche l'inclinazione abbia piccolo valore.

1. In un mio lavoro: *Sulle perturbazioni degli asteroidi* (*) ho dimostrato che per equazioni differenziali del moto di un pianeta, si possono assumere le sei seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{dt} &= 2h_0\left\{\frac{\cos(v+\varpi_0)}{r}+\frac{h^2}{\chi}\left[e_0+\cos(v+\varpi_0)\right]\right\}\frac{d\Omega}{dv}+\frac{2h_0}{r}\operatorname{sen}(v+\varpi_0)\,r\,\frac{d\Omega}{dr}\\
\frac{d\psi}{dt} &= 2h_0\left\{\frac{1}{r}+\frac{h^2}{\chi}\right\}\operatorname{sen}(v+\varpi_0)\frac{d\Omega}{dv}-\frac{2h_0}{r}\cos(v+\varpi_0)\,r\,\frac{d\Omega}{dr}\\
\frac{d\xi}{dt} &= -h_0\left\{1+2\frac{h^2}{h_0^2}\right\}\frac{d\Omega}{dv}\\
\frac{dz}{dt} &= \xi+\varphi\bar{r}\cos(v+\varpi_0)+\psi\bar{r}\operatorname{sen}(v+\varpi_0)=w\\
\frac{d\Xi}{dt} &= hr\operatorname{sen}(v+\varpi_0)\cos i\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)_0\\
\frac{d\Lambda}{dt} &= hr\cos(v+\varpi_0)\cos i\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)_0
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

(*) Pubblicazioni del R. Osservatorio di Brera in Milano, n.° 22. — Milano Hoepli, 1882.

sicchè le sei variabili indipendenti del moto sarebbero le quantità φ, ψ, ξ, z, Ξ, Λ. Quanto al significato dei simboli r, v, ϖ_0, i, ecc., rimando alla citata Memoria.

Le variabili precedenti del moto sono poi legate agli elementi osculatori a, e, i, c, ϖ, σ dalle seguenti relazioni

$$\left.\begin{array}{l}
n_0 z + c_0 = \bar{\varepsilon} - e_0 \operatorname{sen} \bar{\varepsilon}; \qquad \operatorname{tg}(v + \varpi_0) = \dfrac{\cos\lambda_0 \operatorname{sen}\bar{\varepsilon}}{\cos\bar{\varepsilon} - \operatorname{sen}\lambda_0} \\[2ex]
\operatorname{tg}\varepsilon = \dfrac{\cos\lambda \operatorname{sen}(v+\varpi)}{\operatorname{sen}\lambda + \cos(v+\varpi)}; \qquad nt + c = \varepsilon - e \operatorname{sen}\varepsilon \\[2ex]
\varphi = \dfrac{2h_0 h}{\chi}[e\cos(\varpi - \varpi_0) - e_0]; \qquad \psi = -\dfrac{2h_0 h}{\chi} e \operatorname{sen}(\varpi - \varpi_0); \qquad \xi = -\dfrac{h_0}{h} + 2\dfrac{h}{h_0} \\[2ex]
\Xi = \operatorname{sen} i \operatorname{sen}(\sigma + \varpi_0) - \operatorname{sen} i_0 \operatorname{sen}(\sigma_0 + \varpi_0) \qquad \Lambda = \operatorname{sen} i \cos(\sigma + \varpi_0) - \operatorname{sen} i_0 \cos(\sigma_0 + \varpi_0)
\end{array}\right\} \tag{2}$$

le quali formole si ritrovano ordinatamente a pag.^{e} 101, 35 e 28 della Memoria citata. In tutto ciò che precede è inoltre:

$$h = \frac{an}{\cos\lambda}, \qquad \operatorname{sen}\lambda = e, \qquad \chi = a^3 n^2. \tag{3}$$

Volendo arrestarci alla prima approssimazione, basta togliere gli indici o che distinguono gli elementi al tempo t dagli stessi elementi all'epoca, e considerare quindi tutti gli elementi come riferiti all'epoca. La quantità $v + \varpi$ diverrà allora l'anomalia vera f; $\bar{r}$ diverrà r, h_0 diverrà h, e adoperando le (3), le (1) si muteranno in

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{2an}{\cos\lambda}\left\{\dfrac{\cos f}{r} + \dfrac{1}{a\cos^2\lambda}(e + \cos f)\right\}\dfrac{d\Omega}{dv} + \dfrac{2an}{\cos\lambda}\cdot\dfrac{\operatorname{sen} f}{r}\left(r\dfrac{d\Omega}{dr}\right) \\[2ex]
\dfrac{d\psi}{dt} = \dfrac{2an}{\cos\lambda}\left\{\dfrac{\operatorname{sen} f}{r} + \dfrac{\operatorname{sen} f}{a\cos^2\lambda}\right\}\dfrac{d\Omega}{dv} - \dfrac{2an}{\cos\lambda}\cdot\dfrac{\cos f}{r}\left(r\dfrac{d\Omega}{dr}\right) \\[2ex]
\dfrac{d\xi}{dt} = -3\dfrac{an}{\cos\lambda}\dfrac{d\Omega}{dv} \\[2ex]
\dfrac{dz}{dt} = \xi + \varphi r \cos f + \psi r \operatorname{sen} f = w \\[2ex]
\dfrac{d\Xi}{dt} = \dfrac{an}{\cos\lambda} r \operatorname{sen} f \cos i \left(\dfrac{d\Omega}{dZ}\right)_0 \\[2ex]
\dfrac{d\Lambda}{dt} = \dfrac{an}{\cos\lambda} r \cos f \cos i \left(\dfrac{d\Omega}{dZ}\right)_0,
\end{array}\right\} \tag{4}$$

2. Eliminiamo prima di tutto dalle precedenti la $\dfrac{d\Omega}{dv}$. Si ha:

$$\frac{d\Omega}{dg} = \frac{d\Omega}{dv}\frac{dv}{dg} + \frac{d\Omega}{dr}\frac{dr}{dg}.$$

Ma dalle formule del moto ellittico si ha pure:

$$\frac{dv}{dg} = \frac{a^2\cos\lambda}{r^2}; \qquad \frac{dr}{dg} = \frac{ae\operatorname{sen} f}{\cos\lambda}.$$

Quindi:

$$\frac{d\Omega}{dg} = \frac{d\Omega}{dv}\frac{a^2\cos\lambda}{r^2} + \frac{d\Omega}{dr}\frac{ae\operatorname{sen} f}{\cos\lambda}$$

da cui:

$$\frac{d\Omega}{dv} = \frac{d\Omega}{dg}\cdot\frac{r^2}{a^2\cos\lambda} - \left(r\frac{d\Omega}{dr}\right)\frac{re\operatorname{sen} f}{a\cos^2\lambda}. \tag{5}$$

Sostituiamo questo valore nelle tre prime (4); la 1ª diverrà:

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{2n}{\cos^2\lambda}\left\{\frac{r}{a}\cos f+\frac{r^2(e+\cos f)}{a^2\cos^2\lambda}\right\}\frac{d\Omega}{dg}+$$

$$+\frac{2n}{\cos\lambda}\left\{\frac{a}{r}\operatorname{sen} f-\frac{e\operatorname{sen} f\cos f}{\cos^2\lambda}-\frac{(e+\cos f)\,er\operatorname{sen} f}{a\cos^4\lambda}\right\}\left(r\frac{d\Omega}{dr}\right).$$

Moltiplicando i termini $\frac{r}{a}\cos f$ ed $\frac{a}{r}\operatorname{sen} f$ per la quantità

$$\frac{r}{a\cos^2\lambda}+\frac{er\cos f}{a\cos^2\lambda} \qquad (6)$$

che è uguale all'unità, in forza della (6) pag. 44 Memoria citata, avremo

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt}&=\frac{2n}{\cos^2\lambda}\left\{\frac{2r^2\cos f+er^2+er^2\cos^2 f}{a^2\cos^2\lambda}\right\}\frac{d\Omega}{dg}+\\ &+\frac{2n}{\cos^3\lambda}\left\{\operatorname{sen} f-\frac{e^2r\operatorname{sen} f}{a\cos^2\lambda}-\frac{er\operatorname{sen} f\cos f}{a\cos^2\lambda}\right\}\left(r\frac{d\Omega}{dr}\right).\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Ora, moltiplicando $\operatorname{sen} f$ per la solita quantità $=1$ si trova

$$\operatorname{sen} f-\frac{e^2r\operatorname{sen} f}{a\cos^2\lambda}-\frac{er\operatorname{sen} f\cos f}{a\cos^2\lambda}=\frac{r\operatorname{sen} f}{a\cos^2\lambda}(1-e^2)=\frac{r\operatorname{sen} f\cos^2\lambda}{a\cos^2\lambda}=\frac{r}{a}\operatorname{sen} f.$$

Inoltre:

$$2r^2\cos f+er^2+er^2\cos^2 f=\frac{r^2}{e}\{2e\cos f+e^2+e^2\cos^2 f\}=$$

$$=\frac{r^2}{e}\{(1+2e\cos f+e^2\cos^2 f)-(1-e^2)\}=\frac{r^2}{e}\left\{\frac{a^2(1-e^2)^2}{r^2}-(1-e^2)\right\}=\cos^2\lambda\left\{\frac{a^2(1-e^2)}{e}-\frac{r^2}{e}\right\}$$

giacchè dalla quantità precedente che è $=1$ si deduce, quadrando

$$1+2e\cos f+e^2\cos^2 f=\frac{a^2(1-e^2)^2}{r^2}.$$

Introducendo nella (7) i due sviluppi precedenti, essa diviene:

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{2n}{\cos^2\lambda}\left\{\frac{a^2(1-e^2)-r^2}{a^2e}\right\}\frac{d\Omega}{dg}+\frac{2n}{\cos^3\lambda}\frac{r\operatorname{sen} f}{a}\left(r\frac{d\Omega}{dr}\right).$$

3. Eliminiamo ora $\frac{d\Omega}{dv}$ dalla 2ª delle (4). Si ha dapprima:

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{2n}{\cos^2\lambda}\left[\frac{r}{a}\operatorname{sen} f+\frac{r^2}{a^2}\frac{\operatorname{sen} f}{\cos^2\lambda}\right]\frac{d\Omega}{dg}-\frac{2n}{\cos\lambda}\left[\frac{e\operatorname{sen}^2 f}{\cos^2\lambda}+\frac{r}{a}\frac{e\operatorname{sen}^2 f}{\cos^4\lambda}+\frac{a}{r}\cos f\right]\left(r\frac{d\Omega}{dr}\right).$$

Moltiplicando la $\frac{a}{r}\cos f$ pel solito valore (6) di 1, abbiamo:

$$e\frac{\operatorname{sen}^2 f}{\cos^2\lambda}+\frac{r}{a}\frac{e\operatorname{sen}^2 f}{\cos^4\lambda}+\frac{a}{r}\cos f=\frac{e}{\cos^2\lambda}+\frac{r}{a}\frac{e}{\cos^4\lambda}+\frac{r}{a}\frac{\cos f}{\cos^4\lambda}=$$

$$=\frac{2e}{\cos^2\lambda}+\frac{r}{a}\frac{e}{\cos^4\lambda}+\frac{r}{a}\frac{\cos f}{\cos^4\lambda}-\frac{e}{\cos^2\lambda}.$$

Moltiplicando pel solito valore di 1 la $-\frac{e}{\cos^2\lambda}$:

$$\frac{e\operatorname{sen}^2 f}{\cos^2\lambda}+\frac{r}{a}\frac{e\operatorname{sen}^2 f}{\cos^4\lambda}+\frac{a}{r}\cos f=\frac{2e}{\cos^2\lambda}+\frac{r}{a}\frac{\cos f}{\cos^4\lambda}(1-e^2)=\frac{2e}{\cos^2\lambda}+\frac{r}{a}\frac{\cos f}{\cos^2\lambda}.$$

Si ha quindi:

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{2n}{\cos^2\lambda}\cdot\frac{r}{a}\operatorname{sen}f\left[1+\frac{r}{a}\cdot\frac{1}{\cos^2\lambda}\right]\frac{d\Omega}{dg}-\frac{2n}{\cos^3\lambda}\left[2e+\frac{r}{a}\cos f\right]\left(r\frac{d\Omega}{dr}\right). \tag{9}$$

Eliminando infine $\frac{d\Omega}{dv}$ dalla 3ª delle (4), abbiamo:

$$\frac{d\xi}{dt}=-\frac{3an}{\cos^4\lambda}\cdot\frac{r^2}{a^2}\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)+\frac{3an}{\cos^3\lambda}e\frac{r}{a}\operatorname{sen}f\left(r\frac{d\Omega}{dr}\right). \tag{10}$$

Le due ultime (4) poi si possono scrivere:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\Xi}{dt}&=\frac{n}{\cos\lambda}\cdot\frac{r}{a}\operatorname{sen}f\cos i\left(a^2\frac{d\Omega}{dZ}\right)_0\\ \frac{d\Lambda}{dt}&=\frac{n}{\cos\lambda}\cdot\frac{r}{a}\cos f\cos i\left(a^2\frac{d\Omega}{dZ}\right)_0.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Riunendo le (8)-(11) si posson porre sotto la seguente forma:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt}&=A_1\frac{d\Omega}{dg}+B_1\left(r\frac{d\Omega}{dr}\right)\\ \frac{d\psi}{dt}&=A_2\frac{d\Omega}{dg}+B_2\left(r\frac{d\Omega}{dr}\right)\\ \frac{d\xi}{dt}&=A_3\frac{d\Omega}{dg}+B_3\left(r\frac{d\Omega}{dr}\right)\\ \frac{d\Xi}{dt}&=A_4\cos i\left(a^2\frac{d\Omega}{dZ}\right)_0\\ \frac{d\Lambda}{dt}&=A_5\cos i\left(a^2\frac{d\Omega}{dZ}\right)_0.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Ove abbiamo:

$$\left.\begin{aligned}A_1&=\frac{2n}{\cos^2\lambda}\left[\frac{a^2(1-e^2)-r^2}{a^2e}\right] & B_1&=\frac{2n}{\cos^3\lambda}\frac{r}{a}\operatorname{sen}f\\ A_2&=\frac{2n}{\cos^2\lambda}\cdot\frac{r}{a}\operatorname{sen}f\left[1+\frac{r}{a}\cdot\frac{1}{\cos^2\lambda}\right] & B_2&=-\frac{2n}{\cos^3\lambda}\left[2e+\frac{r}{a}\cos f\right]\\ A_3&=-\frac{3an}{\cos^2\lambda}\cdot\frac{r^2}{a^2} & B_3&=\frac{3an}{\cos^3\lambda}e\frac{r}{a}\operatorname{sen}f\\ A_4&=\frac{n}{\cos\lambda}\frac{r}{a}\operatorname{sen}f & A_5&=\frac{n}{\cos\lambda}\frac{r}{a}\cos f.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

4. Esprimiamo ora le A e le B per l'anomalia media g del perturbato. Dalla teoria del moto ellittico, essendo f l'anomalia vera, abbiamo:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sen}f&=\left(1-\frac{7}{8}e^2\right)\operatorname{sen}g+\left(e-\frac{7}{6}e^3\right)\operatorname{sen}2g+\frac{9}{8}e^2\operatorname{sen}3g+\frac{4}{3}e^3\operatorname{sen}4g\\ \cos f&=-e+\left(1-\frac{9}{8}e^2\right)\cos g+\left(e-\frac{4}{3}e^3\right)\cos 2g+\frac{9}{8}e^2\cos 3g+\frac{4}{3}e^3\cos 4g\\ \frac{r}{a}&=\left(1+\frac{1}{2}e^2\right)-\left(e-\frac{3}{8}e^3\right)\cos g-\frac{1}{2}e^2\cos 2g-\frac{3}{8}e^3\cos 3g.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Per mezzo della moltiplicazione, trascurando e^4, e^5, ecc., si ottiene

$$\left.\begin{aligned}
\frac{r}{a}\cos f &= -\frac{3}{2}e + \left(1 - \frac{3}{8}e^2\right)\cos g + \left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{3}e^3\right)\cos 2g + \frac{3}{8}e^2\cos 3g + \frac{1}{3}e^3\cos 4g \\
\frac{r}{a}\operatorname{sen} f &= \left(1 - \frac{5}{8}e^2\right)\operatorname{sen} g + \left(\frac{1}{2}e - \frac{5}{12}e^3\right)\operatorname{sen} 2g + \frac{3}{8}e^2\operatorname{sen} 3g + \frac{1}{3}e^3\operatorname{sen} 4g \\
\frac{r^2}{a^2} &= \left(1 + \frac{3}{2}e^2\right) - \left(2e - \frac{1}{4}e^3\right)\cos g - \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{6}e^4\right)\cos 2g - \frac{1}{4}e^3\cos 3g - \frac{1}{6}e^4\cos 4g.
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Inoltre, essendo

$$\cos^2\lambda = 1 - e^2$$

sviluppando colla serie binomiale sino alla precedente approssimazione abbiamo:

$$\frac{1}{\cos\lambda} = 1 + \frac{e^2}{2}, \qquad \frac{1}{\cos^2\lambda} = 1 + e^2, \qquad \frac{1}{\cos^3\lambda} = 1 + \frac{3}{2}e^2. \qquad (14)$$

Sostituendo nelle (13) gli sviluppi (14), (15) e (16), otterremo le A, B sviluppate per l'anomalia media ed ordinate per le potenze dell'eccentricità, sino alla terza, la quale, poi, nella pratica, può trascurarsi tranne in pochi termini più sensibili degli altri; poichè non dimentichiamo che l'ipotesi fondamentale di questo scritto è la piccolezza dell'eccentricità.

Avremo quindi:

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= n\left\{-5e(1+e^2) + \left(4 + \frac{7}{2}e^2\right)\cos g + \left(e + \frac{2}{3}e^3\right)\cos 2g + \frac{1}{2}e^2\cos 3g + \frac{1}{3}e^3\cos 4g\right\} \\
B_1 &= n\left\{\left(2 + \frac{7}{4}e^2\right)\operatorname{sen} g + \left(e + \frac{2}{3}e^3\right)\operatorname{sen} 2g + \frac{3}{4}e^2\operatorname{sen} 3g + \frac{2}{3}e^3\operatorname{sen} 4g\right\} \\
A_2 &= n\left\{\left(4 + \frac{9}{2}e^2\right)\operatorname{sen} g + \left(e + \frac{5}{6}e^3\right)\operatorname{sen} 2g + \frac{1}{2}e^2\operatorname{sen} 3g + \frac{1}{3}e^3\operatorname{sen} 4g\right\} \\
B_2 &= n\left\{-e\left(1 + \frac{3}{2}e^2\right) - \left(2 + \frac{9}{4}e^2\right)\cos g - \left(e + \frac{5}{6}e^3\right)\cos 2g - \frac{3}{4}e^2\cos 2g - \frac{2}{3}e^3\cos 4g\right\} \\
A_3 &= an\left\{-\left(3 + \frac{15}{2}e^2\right) + \left(6e + \frac{21}{4}e^3\right)\cos g + \frac{3}{2}e^2\cos 2g + \frac{3}{4}e^3\cos 3g\right\} \\
B_3 &= an\left\{\left(3e + \frac{21}{8}e^3\right)\operatorname{sen} g + \frac{3}{2}e^2\operatorname{sen} 2g + \frac{9}{8}e^3\operatorname{sen} 3g\right\} \\
A_4 &= n\left\{\left(1 - \frac{1}{8}e^2\right)\operatorname{sen} g + \left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{6}e^3\right)\operatorname{sen} 2g + \frac{3}{8}e^2\operatorname{sen} 3g + \frac{1}{3}e^3\operatorname{sen} 4g\right\} \\
A_5 &= n\left\{-e\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{4}e^2\right) + \left(1 + \frac{1}{8}e^2\right)\cos g + \left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{12}e^3\right)\cos 2g + \frac{3}{8}e^2\cos 3g + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{3}e^3\cos 4g\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

5. Occorre ora svolgere le derivate della funzione perturbatrice rispetto alle due anomalie medie per avere gli sviluppi completi per serie delle (12). Dalla pag. 47 e segg. della predetta mia Memoria si deduce agevolmente che

$$\left.\begin{aligned}
\Omega &= \mu\left\{\frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r'^2}\cos(r, r')\right\} \\
r\frac{d\Omega}{dr} &= \frac{1}{2}\mu\left[\frac{r'^2 - r^2}{\Delta^3} - \frac{1}{\Delta}\right] - \mu\frac{r}{r'^2}\cos(r, r') \\
\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)_0 &= \mu\left\{\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right\} r'\operatorname{sen}(f' + \Pi')\operatorname{sen} J
\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

ove J è l'angolo dei piani delle due orbite, Π' l'angolo in direzione del moto fra il perielio del perturbatore e il nodo reciproco delle due orbite; Δ la distanza dei due pianeti, per la quale si ha:

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(r, r').$$

Inoltre (pag. 48, l. c.) si ha

$$\cos(r, r') = \cos(f + \Pi)\cos(f + \Pi') + \operatorname{sen}(f + \Pi)\operatorname{sen}(f + \Pi')\cos J \tag{19}$$

essendo anche Π l'angolo fra il perielio del perturbato e il nodo reciproco delle due orbite.

Per determinare le quantità Π, Π', J consideriamo il triangolo dei tre nodi, cioè il nodo reciproco delle due orbite e i nodi di queste sul piano fondamentale. I tre angoli di detto triangolo sono J, i' e $180° - i$: il lato opposto ad J è evidentemente $\theta - \theta'$ (essendo θ, θ' le longitudini dei due nodi): i lati opposti ad i' ed a $180° - i$ saranno chiamati rispettivamente Ψ e Ψ' e li conteremo nella direzione del movimento. Allora si determinano dapprima le tre quantità Ψ, Ψ', J col mezzo delle analogie di Napier:

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}J\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\Psi' + \Psi) = \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\theta - \theta')\operatorname{sen}\frac{1}{2}(i + i')$$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}J\cos\frac{1}{2}(\Psi' + \Psi) = \cos\frac{1}{2}(\theta - \theta')\operatorname{sen}\frac{1}{2}(i - i')$$

$$\cos\frac{1}{2}J\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\Psi' - \Psi) = \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\theta - \theta')\cos\frac{1}{2}(i + i')$$

$$\cos\frac{1}{2}J\cos\frac{1}{2}(\Psi' - \Psi) = \cos\frac{1}{2}(\theta - \theta')\cos\frac{1}{2}(i - i').$$

Tutto essendo contato nella direzione del movimento, avremo:

$$\Pi = \varpi - \theta - \Psi \qquad \Pi' = \varpi' - \theta' - \Psi' \tag{20}$$

ove ϖ, ϖ' son le longitudini dei perielî; e, si noti che nessuna contraddizione esiste fra questi valori di Π, Π' e quelli della pag. 48 della Memoria citata, giacchè gli archi là indicati con Ψ, Ψ' qui son rappresentati da $(\theta + \Psi)$, $(\theta' + \Psi')$: e inoltre in detta Memoria Ψ, ϖ, Ψ', ϖ' son contati in senso contrario al movimento.

6. Il modo più naturale di svolgere Ω conformemente al nostro scopo è di svilupparlo pei raggi vettori e per le anomalie vere, indi esprimere queste variabili per le anomalie medie dei due pianeti; cosa questa fattibile trattandosi, come è il nostro caso, di piccole eccentricità. Il modo di sviluppare Ω nel modo indicato esiste già, e la miglior sua forma è quella data da Hansen nella sua Memoria: *Ueber die Entwickelung der negativen und ungraden Potenzen*, ecc., il cui metodo oltrechè semplice abbastanza, è anche facilitato da tavole numeriche che contengono le costanti che vi s'incontrano.

Se s'indica con E la base dei logaritmi neperiani e con f, f' le anomalie vere dei due pianeti e si pone

$$x = E^{f\sqrt{-1}} \qquad x' = E^{f'\sqrt{-1}}$$

è facile dedurre dalla suddetta Memoria che la forma dello sviluppo di Ω è la seguente:

$$\left.\begin{aligned} 2a\Omega = {} & \sum_{2}^{\infty}{}_n \sum_{0}^{+n}{}_p \sum_{0}^{+n}{}_q A[n - 2p, -(n - 2q)]\left(\frac{r}{a}\right)^n x^{n-2p}\left(\frac{r'}{a'}\right)^{-(n+1)} x'^{-(n-2q)} \\ & + i\sum_{2}^{\infty}{}_n \sum_{0}^{n}{}_p \sum_{0}^{n}{}_q B[n - 2p, -(n - 2q)]\left(\frac{r}{a}\right)^n x^{n-2p}\left(\frac{r'}{a'}\right)^{-(n+1)} x'^{-(n-2q)} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

nella quale però si è lasciato indietro il termine $2\mu\frac{a}{r'}$ giacchè non dovendo adoperare di Ω che le derivate rispetto ad elementi del perturbato, resta inutile il detto termine che appartiene esclusivamente al perturbatore.

Si noti che la forma precedente conviene al caso in cui il perturbatore sia esterno rispetto al perturbato: se fosse invece interno, converrebbe quest'altra:

$$
\begin{aligned}
2a\Omega = & -\frac{1}{\alpha_1^3}\sum_{0}^{1}{}_p \sum_{0}^{1}{}_q A[1-2p, -(1-2q)]\left(\frac{r}{a}\right)x^{1-2p}\left(\frac{r'}{a'}\right)^{-2} x'^{\,(1-2q)} + \\
& + \sum_{0}^{\infty}{}_n \sum_{0}^{n}{}_p \sum_{0}^{n}{}_q A[(n-2p), -(n-2q)]\left(\frac{r'}{a'}\right)^{n} x'^{-(n-2q)}\left(\frac{r}{a}\right)^{-(n+1)} x^{n-2p} \\
& - \frac{i}{\alpha_1^3}\sum_{0}^{1}{}_p \sum_{0}^{1}{}_q B[1-2p, -(1-2q)]\left(\frac{r}{a}\right)x^{1-2p}\left(\frac{r'}{a'}\right)^{-2} x'^{-(1-2q)} + \\
& + i\sum_{0}^{\infty}{}_n \sum_{0}^{n}{}_p \sum_{0}^{n}{}_q B[(n-2p), -(n-2q)]\left(\frac{r'}{a'}\right)^{n} x'^{-(n-2q)}\left(\frac{r}{a}\right)^{-(n+1)} x^{n-2p}
\end{aligned}
$$

nelle quali

$$
i=\sqrt{-1} \qquad \alpha_1=\frac{a'}{a}
$$

e si ha:

$$
\left.
\begin{aligned}
& A[(n-2p), -(n-2q)] = \\
& \qquad = \Gamma[(n-2q), -(n-2p)]\cos[(n-2p)\Pi-(n-2q)\Pi'] \text{ se } p>q \\
& A[(n-2p), -(n-2q)] = \\
& \qquad = \Gamma[(n-2p), -(n-2q)]\cos[(n-2p)\Pi-(n-2q)\Pi'] \text{ se } p\leqq q
\end{aligned}
\right\} \quad (22)
$$

e così pure:

$$
\left.
\begin{aligned}
& B[(n-2p), -(n-2q)] = \\
& \qquad = \Gamma[(n-2q), -(n-2p)]\operatorname{sen}[(n-2p)\Pi-(n-2q)\Pi'] \text{ se } p>q \\
& B[(n-2p), -(n-2q)] = \\
& \qquad = \Gamma[(n-2p), -(n-2q)]\operatorname{sen}[(n-2p)\Pi-(n-2q)\Pi'] \text{ se } p\leqq q.
\end{aligned}
\right\} \quad (23)
$$

Le quantità Γ son poi date dalla formula:

$$
\Gamma[(n-2g), -(n-2f-2g)] = \gamma_n \operatorname{tg}^{2g}\frac{1}{2}J
\left(
\begin{aligned}
& a(g,0)+a(g,1)\operatorname{tg}^4\frac{1}{2}J+a(g,2)\operatorname{tg}^8\frac{1}{2}J+ \\
& \qquad +\cdots+a(g,f)\operatorname{tg}^{4f}\frac{1}{2}J \\
& -b(g,1)\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}J-b(g,2)\operatorname{tg}^4\frac{1}{2}J+ \\
& \qquad +\cdots+b(g,f-1)\operatorname{tg}^{4f-2}\frac{1}{2}J
\end{aligned}
\right) \quad (24)
$$

nella quale $g=p$, $f+g=q$ e i coefficienti $a(g, 0)$ ecc., $b(g, 0)$ ecc., son costanti già calcolate e riunite in tavole annesse alla suddetta Memoria di Hansen. Rispetto infine alla quantità γ_n osserviamo, che se il perturbatore è esterno, essa è data da:

$$
\gamma_n = 2\frac{m'}{\operatorname{sen} 1''}\left(\frac{a}{a'}\right)^{n+1}\cos^{2n}\frac{1}{2}J
$$

e se è interno, è invece espressa da:

$$
\gamma_n = 2\frac{m'}{\operatorname{sen} 1''}\left(\frac{a'}{a}\right)^{n}\cos^{2n}\frac{1}{2}J. \quad (25)
$$

Da quanto precede emerge:

1.° Che i coefficienti dello sviluppo di Ω risultano espressi in secondi.

2.° Che un'inclinazione anche sensibile come le massime degli asteroidi non influisce gran cosa sulla lunghezza dei calcoli, come risulta dalle espressioni delle Γ, che contengono le potenze di $\operatorname{tg} \frac{1}{2} J$.

3.° Che si ha, per $n = 0$:

$$A[(0-2p), -(0-2q)] = 2\frac{m'}{\operatorname{sen} 1''}; \qquad B[(0, -2p), -(0-2q)] = 0$$

giacchè bisogna porre, per eccezione e per convenzione:

$$\Gamma(0, 0) = 1.$$

Si ha poi (Hans., l. c):

$$\Gamma(m, m') = \Gamma(m', m) \qquad \Gamma(-m, -m') = \Gamma(m, m') \tag{26}$$

il che semplifica di molto il calcolo delle Γ e quindi delle A, B; giacchè si vede subito, che delle $\Gamma[(n-2p), -(n-2q)$ basta calcolare solo quelle in cui $n-2p$ è positivo ed è $q \geqq p$ sino a $q = n$, essendo le altre uguali alle già calcolate in forza delle due formule precedenti. Risulta quindi che la quantità indicata con f nella (24) è sempre positiva, tale essendo poi per natura la g.

7. Occorre ora trasformare le funzioni $\left(\frac{r}{a}\right)^n x^{n-2p}$, $\left(\frac{r'}{a'}\right)^{n'} x'^{-(n-2q)}$ o le analoghe della seconda forma di Ω in funzione della anomalia media dei due pianeti. Ciò è facile, sapendosi dalla teoria del moto ellittico svolgere in serie procedenti per l'anomalia media i prodotti del raggio per l'anomalia vera. Ponendo

$$z = E^{g\sqrt{-1}}$$

si ha, in generale

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n x = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_i X_i^{n,m} z_i. \tag{27}$$

I coefficienti X son dati dalle serie:

$$\left.\begin{aligned}
X_i^{n,m} &= (-1)^{i-m} \cos^{2(n+1)} \frac{1}{2}\lambda \{ P_{i-m}^{(n-m} \beta^{i-m} + P_{i-m+1}^{(n-m)} Q_1^{(n+m)} \beta^{i-m+2} + P_{i-m+}^{(n-m)} Q_2^{(n+m)} \beta^{i-m+4} + \cdots \} \\
&\text{se } i - m \geqq 0, \text{ e} \\
X_i^{n,m} &= (-1)^{m-i} \cos^{2(n+1)} \frac{1}{2}\lambda \{ Q_{-}^{(n+m)} \beta^{m-i} + Q_{m-i+1}^{(n+m)} P_1^{(n-m)} \beta^{m-i+2} + Q_{m-i+2}^{(n+m)} P_2^{(n-m)} \beta^{m-i+4} + \cdots \}
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

se $m - i \geqq 0$. Si ha poi in queste:

$$\left.\begin{aligned}
P_p^{(k)} &= \frac{(k+1)k(k-1)\cdots(k-p+2)}{p!} - \frac{(k+1)k(k-1)\cdots(k-p+3)}{(p-1)!}\nu + \\
&\quad + \frac{(k+1)k(k-1)\cdots(k-p+4)}{(p-2)!} \cdot \frac{\nu^2}{2!} - \cdots \pm \frac{k+1}{1} \cdot \frac{\nu^{p-1}}{(p-1)!} \mp \frac{\nu^p}{p!} \\
Q_p^{(k)} &= \frac{(k+1)k(k-1)\cdots(k-p+2)}{p!} + \frac{(k+1)k(k-1)\cdots(k-p+3)}{(p-1)!}\nu + \\
&\quad + \frac{(k+1)k(k-1)\cdots(k-p+4)}{(p-2)!} \cdot \frac{\nu^2}{2!} + \cdots + \frac{k+1}{1} \cdot \frac{\nu^{p-1}}{(p-1)!} + \frac{\nu^p}{p!}
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

ed inoltre

$$\beta = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\lambda \qquad \nu = i\cos^2\frac{1}{2}\lambda \tag{30}$$

essendo λ l'angolo introdotto nelle (3).

Per calcolare rapidamente le P, Q si stabilirà fra di esse una semplicissima ricorrenza. Intanto, dalla teoria, abbiamo in ogni caso:

$$P_0^{(k)} = 1, \qquad Q_0^{(k)} = 1.$$

Inoltre, si ha, per $k = 1$ dalle (29):

$$P_p^{(-1)} = (-1)^p \frac{\nu^p}{p!} \qquad Q_p^{(-1)} = \frac{\nu^p}{p!}\cdot \tag{31}$$

Sempre dalle (29) si deduce senza difficoltà, che

$$P_p^{(-k)} = P_p^{-(k-1)} - P_{p-1}^{(-k)}$$

quando sia:

$$k = 2,\ 3,\ 4,\dots$$

$$p = 1,\ 2,\ 3,\dots$$

e

$$P_p^{(k)} = P_p^{(k-1)} + P_{p-1}^{(k-1)}$$

ove si abbia

$$k = 0,\ 1,\ 2,\dots$$

$$p = 1,\ 2,\ 3,\dots$$

Per le Q si hanno perfettamente le stesse equazioni e colle considerazioni medesime. Calcolate quindi le (31) si ottengono le $P_p^{(-k)}$ con semplici sottrazioni, e le $P^{(k)}$ con semplici addizioni di quantità via via determinate.

Colle quantità P, Q si determineranno le X; e siccome le funzioni $\left(\frac{r}{a}\right)^n \operatorname{sen} mf$, $\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos mf$ debbono essere reali, si dovrà sempre avere:

$$X_{-i}^{n,\,m} = X_i^{n,\,-m} \tag{32}$$

giacchè infatti, avendosi per la (27):

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n x^m = \cdots + X_{-2}^{n,\,+m} z^{-2} + X_{-1}^{n,\,+m} z^{-1} + X_0^{n,\,+m} + X_1^{n,\,+m} z + X_2^{n,\,+m} z^2 + \cdots$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n x^{-m} = \cdots + X_{-2}^{n,\,-m} z^{-2} + X_{-1}^{n,\,-m} z^{-1} + X_0^{n,\,-m} + X_1^{n,\,-m} z + X_2^{n,\,-m} z^2 + \cdots$$

sommando o sottraendo per avere i coseni od i seni, è necessario che abbia luogo la (32).

Determinate così le X relative al pianeta perturbato si adoprerà lo stesso metodo per sviluppare le funzioni

$$\left(\frac{r'}{a'}\right)^{n'} x'^{m'} = \sum_{-\infty}^{\infty} X'^{n,\,m'} z'^i \tag{33}$$

relative al pianeta perturbatore. L'unica differenza starà nel mutare λ in λ'. Questa identità di calcolo è di grandissimo vantaggio pratico, com'è facile intendere.

8. Svolgiamo ora Ω secondo l'argomento $ng - n'g'$, sotto la qual forma dovrà in seguito adoperarsi.

Osserviamo dapprima che, più succintamente, la (21) può scriversi sotto quest'altra forma:

$$\left.\begin{aligned} 2\,a\,\Omega = & \sum_{2}^{\infty}{}_{n} \sum_{-n}^{+n}{}_{m} \sum_{-n}^{+n}{}_{m'} A\,[m,\, m'] \left(\frac{r}{a}\right)^{n} x^{m} \left(\frac{r'}{a'}\right)^{-n-1} x'^{m'} \\ & + i \sum_{2}^{\infty}{}_{n} \sum_{-n}^{n}{}_{m} \sum_{-n}^{n}{}_{m'} B\,[m,\, m'] \left(\frac{r}{a}\right)^{n} x^{m} \left(\frac{r'}{a'}\right)^{-n-1} x'^{m'}. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Inoltre dalle (22), (23), (26) si deduce subito:

$$A\,[-m,\, -m'] = A\,[m,\, m'] \qquad B\,[-m,\, -m'] = -B\,[m,\, m']. \tag{35}$$

Per determinare la legge dello sviluppo definitivo, prendiamo in (34) un valore fisso qualunque per n, uno per m un altro per m' e consideriamo i termini relativi nella 1ª somma di (34): essi sono

$$A\,[m,\, m'] \left(\frac{r}{a}\right)^{n} x^{m} \cdot \left(\frac{r'}{a'}\right)^{-n-1} x'^{m'} + A\,[-m,\, -m'] \left(\frac{r}{a}\right)^{n} x^{-m} \left(\frac{r'}{a'}\right)^{-n-1} x'^{-m'}. \tag{36}$$

Introduciamo in questa gli sviluppi (27), (33) ciascuno per un valor fisso degli indici i, j: la precedente diverrà:

$$\begin{aligned} & A\,[m,\, m'] [X_{-i}^{n,m} z^{-i} X'^{-(n+1),m'}_{-j} z'^{-j} + X_{-i}^{n,m} z^{-i} X'^{-(n+1),m'}_{j} z'^{j} + \\ & \qquad + X_{i}^{n,m} z^{i} X'^{-(n+1),m'}_{-j} z'^{-j} + X_{i}^{n,m} z^{i} X'^{-(n+1),m'}_{j} z'^{j}] \\ & + A\,[-m,\, -m'] [X_{i}^{n,-m} z^{i} X'^{-(n+1),-m'}_{j} z'^{j} + X_{i}^{n,-m} z^{i} X'^{-(n+1),-m'}_{-j} z'^{-j} + \\ & \qquad + X_{-i}^{n,-m} z^{-i} X'^{-(n+1),-m'}_{j} z'^{j} + X_{-i}^{n,-m} z^{-i} X'^{-(n+1),-m'}_{-j} z'^{-j}] \end{aligned}$$

e ricordando le (32), (35):

$$\begin{aligned} & 2\,A\,[m,\, m'] [X_{-i}^{n,m} X'^{-(n+1),m'}_{-j} + X_{i}^{n,m} X'^{-(n+1),m'}_{j}] \cos[-ig - jg'] \\ & + 2\,A\,[m,\, m'] [X_{-i}^{n,m} X'^{-(n+1),m'}_{j} + X_{i}^{n,m} X'^{-(n+1),m'}_{-j}] \cos[-ig + jg'] \end{aligned}$$

e facendo la somma per tutti i valori *assoluti* di i, j lo sviluppo della (36) sarà

$$2\,A\,[m,\, m'] \sum_{0}^{\infty}{}_{i} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{j} [X_{-i}^{n,m} X'^{-(n+1),m'}_{-j} + X_{i}^{n,m} X'^{-(n+1),m'}_{j}] \cos[-ig - jg'].$$

Lo sviluppo analogo dei termini della 2ª somma della (34) per i valori fissi già scelti di n, m, m', darebbe:

$$2\,B\,[m,\, m'] \sum_{0}^{\infty}{}_{i} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{j} [X_{-i}^{n,m} X'^{-(n+1),m'}_{-j} - X_{i}^{n,m} X'^{-(n+1),m'}_{j}] \operatorname{sen}[-ig - jg'].$$

Si otterrà allora lo sviluppo finale di $2\,a\,\Omega$ (34), facendo variare in queste due ultime formule le m, m', n in tutti i modi prescritti dalla medesima (34): sicchè avremo definitivamente:

$$\left.\begin{aligned} 2\,a\,\Omega = & \sum_{0}^{\infty}{}_{i} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{j} \cos(-ig - jg') \sum_{2}^{\infty}{}_{n} \sum_{-n}^{n}{}_{m} \sum_{-n}^{n}{}_{m'} 2\,A\,[m,\, m'] [X_{-i}^{n,m} X'^{-(n+1),m'}_{-j} + X_{i}^{n,m} X'^{-(n+1),m'}_{j}] \\ & + \sum_{0}^{\infty}{}_{i} \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{j} \operatorname{sen}(-ig - jg') \sum_{2}^{\infty}{}_{n} \sum_{-n}^{n}{}_{m} \sum_{-n}^{n}{}_{m'} 2\,B\,[m,\, m'] [X_{-i}^{n,m} X'^{-(n+1),m'}_{-j} - X_{i}^{n,m} X'^{-(n+1),m'}_{j}] \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

che si può anche scrivere:

$$2\,a\,\Omega = \sum_{0}^{\infty}{}_{i} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{j} \cos(-ig - jg') \sum_{2}^{\infty}{}_{n} M_n(i,\, j) + \sum_{0}^{\infty}{}_{i} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{j} \operatorname{sen}(-ig - jg') \sum_{2}^{\infty}{}_{n} N_n(i,\, j), \tag{38}$$

ove si ha, evidentemente:

$$\left.\begin{aligned} M_n(i,\,j) &= 2\sum_{-n}^{n}{}_m \sum_{-n}^{n}{}_{m'} A[m,\,m']\left[X_{-i}^{n,\,m}\, X'^{-(n+1),\,m'}_{-j} + X_i^{n,\,m}\, X'^{-(n+1),\,m'}_{j}\right] \\ N_n(i,\,j) &= 2\sum_n \sum_{m'} B[m,\,m']\left[X_{-i}^{n,\,m}\, X'^{-(n+1),\,m'}_{-j} - X_i^{n,\,m}\, X'^{-(n+1),\,m'}_{j}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

9. Veniamo per ultimo allo sviluppo delle derivate di Ω. La prima, cioè quella rispetto a g si ha subito dalla forma (38), avendosi colla derivazione immediata:

$$2a\frac{d\Omega}{dg} = \sum_i \sum_j \operatorname{sen}(-ig-jg')\sum_n i M_n(i,\,j) - \sum_i \sum_j \cos(-ig-jg')\sum_n i N_n(i,\,j). \tag{40}$$

Ugualmente semplice è la determinazione della derivata di Ω rispetto ad r: poichè derivando direttamente la (34) si trova:

$$\begin{aligned} 2a\frac{d\Omega}{dr} &= \sum_n \sum_m \sum_{m'} A[m,\,m']\frac{n}{a}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} x^m \left(\frac{r'}{a'}\right)^{-n-1} x'^{m'} \\ &+ \sum_n \sum_m \sum_{m'} B[m,\,m']\frac{n}{a}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} x^m \left(\frac{r'}{a'}\right)^{-n-1} x'^{m'} \end{aligned}$$

e moltiplicando per r:

$$\left.\begin{aligned} 2a\left(r\frac{d\Omega}{dr}\right) &= \sum_n \sum_m \sum_{m'} A[m,\,m']\, n\left(\frac{r}{a}\right)^{n} x^m \left(\frac{r'}{a'}\right)^{-n-1} x'^{m'} \\ &+ \sum_n \sum_m \sum_{m'} B[m,\,m']\, n\left(\frac{r}{a}\right)^{n} x^m \left(\frac{r'}{a'}\right)^{-n-1} x'^{m'} \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

la quale non differisce dalla (34) che per avere il fattore n in ciascun termine; fattore che potremo considerare unito alle quantità A, B. In tal modo lo sviluppo della (41) si deduce immediatamente dalla (37) cambiando A, B in nA, nB. Si avrà quindi:

$$2ar\frac{d\Omega}{dr} = \sum_i \sum_j \cos(-ig-jg')\sum_n n M_n(i,\,j) + \sum_i \sum_j \operatorname{sen}(-ig-jg')\sum_n n N_n(i,\,j). \tag{42}$$

Rimane la derivata di Ω rispetto a Z che ha uno sviluppo meno semplice ad ottenersi.

Siccome nello sviluppo (21) si è trascurato il termine $2\mu\frac{a}{r'}$, così, non perdendo di vista la 1ª delle (18), se si vuole che Ω indichi lo sviluppo (21), bisognerà porre:

$$a\Omega = \mu\left\{\frac{a}{\Delta} - \frac{a}{r'} - \frac{ar}{r'^2}\cos(r,\,r')\right\},$$

che si potrà scrivere

$$a\Omega = \mu\left[\frac{a}{\Delta} - \alpha\left(\frac{a'}{r'}\right) - \alpha^2\left(\frac{r}{a}\right)\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\cos(r,\,r')\right], \tag{43}$$

ove è

$$\alpha = \frac{a}{a'}.$$

Dalla 2ª (18) si ricava subito:

$$ar\frac{d\Omega}{dr} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3\left\{\left(\frac{r'}{a'}\right)\alpha^{-2} - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right\} - \frac{1}{2}\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right) - \mu\alpha^2\left(\frac{r}{a}\right)\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\cos(r,\,r'). \tag{44}$$

Da queste, sommando si ha:

$$a\Omega + 2ar\frac{d\Omega}{dr} = \mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3\left[\left(\frac{r'}{a'}\right)^2\alpha^{-2} - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right] - 3\mu\alpha^2\left(\frac{r}{a}\right)\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\cos(r,\ r') - \mu\alpha\left(\frac{a'}{r'}\right)$$

da cui si rileva:

$$\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3 = \left[a\Omega + 2ar\frac{d\Omega}{dr} + 3\left(\frac{r}{a}\right)\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\mu\alpha^2\cos(r,\ r') + \alpha\mu\left(\frac{a'}{r'}\right)\right]\cdot\left[\left(\frac{r'}{a'}\right)^2\alpha^{-2} - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^{-1}. \tag{45}$$

Ora Hansen nella citata *Entwich.*, ecc. dimostra che

$$2\mu\alpha^2\cos(r,\ r') = \sum_{-1}^{1}{}_m\sum_{-1}^{1}{}_{m'} A[m,\ m']\,x^m x'^{m'} + i\sum_{-1}^{1}{}_m\sum_{-1}^{1}{}_{m'} B[m,\ m']\,x^m x'^{m'}$$

quindi

$$2\left(\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r'}{a'}\right)^{-2}\mu\alpha^2\cos(r,\ r') = \sum_m\sum_{m'} A[m,\ m']\left(\frac{r}{a}\right)x^m\left(\frac{r'}{a'}\right)^{-2}x'^{m'} +$$
$$+ i\sum_m\sum_{m'} B[m,\ m']\left(\frac{r}{a}\right)x^m\left(\frac{r'}{a'}\right)^{-2}x'^{m'}$$

ove le A, B son le solite quantità (22), (23); quindi questo sviluppo è analogo (per quanto immensamente più breve) a quello di Ω si avrà quindi, esprimendo per le anomalie medie:

$$\left.\begin{aligned} 2\left(\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r'}{a'}\right)^{-2}\mu\alpha^2\cos(r,\ r') &= \sum_0^\infty{}_i\sum_{-\infty}^{\infty}{}_j\cos(-ig-jg')\,M_1(i,\ j) + \\ &+ \sum_i\sum_j\operatorname{sen}(-ig-jg')\,N_1(i,\ j), \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

essendo le M_1 N_1 date dalle (39) per $n=1$. Moltiplicando per $\frac{3}{2}$ si otterrà lo sviluppo del termine $3\left(\frac{r}{a}\right)\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\mu\alpha^2\cos(r,\ r')$.

La 3ª delle (18) può scriversi:

$$a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)_0 = -\mu\left\{\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3 - \alpha^3\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\right\}\frac{\operatorname{sen}J}{\alpha}\left(\frac{r'}{a'}\right)\operatorname{sen}(f'+\Pi'). \tag{47}$$

La quantità $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ è data dalla (45): quanto alla $\left(\frac{a'}{r'}\right)^3$ si ha identicamente:

$$\alpha^3\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 = \left\{\alpha\left(\frac{a'}{r'}\right) - \alpha^3\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\right\}\left\{\left(\frac{r'}{a'}\right)^2\alpha^{-2} - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}^{-1}.$$

Introducendo questo e la (45) nella (47) si ha:

$$a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)_0 = \left[a\Omega + 2ar\frac{d\Omega}{dr} + 3\left(\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r'}{a'}\right)^{-2}\mu\alpha^2\cos(r,\ r') + \mu\alpha^3\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\right]H \tag{48}$$

essendo

$$H = -\alpha\operatorname{sen}J\left(\frac{a'}{r'}\right)\operatorname{sen}(f'+\Pi')\left[1 - \alpha^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\right]^{-1}.$$

Sviluppando colla serie binomiale:

$$H = -\operatorname{sen}J\operatorname{sen}(f'+\Pi')\left[\alpha\left(\frac{a'}{r'}\right) + \alpha^3\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\left(\frac{r}{a}\right)^2 + \alpha^5\left(\frac{a'}{r'}\right)^5\left(\frac{r}{a}\right)^4 + \dots\right]$$

ossia

$$H = -\operatorname{sen} J \cos \Pi' \left[\alpha \left(\frac{a'}{r'}\right) \operatorname{sen} f' + \alpha^3 \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \operatorname{sen} f' + \cdots \right] -$$

$$- \operatorname{sen} J \operatorname{sen} \Pi' \left[\alpha \left(\frac{a'}{r'}\right) \cos f' + \alpha^3 \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos f' + \cdots \right].$$

Ora le quantità dentro le parentesi dipendono dalle X per le (27) (33), quindi possono ritenersi note: quindi sviluppata H si avrà la $a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)_0$ per mezzo della moltiplicazione meccanica.

10. Venuti in possesso delle derivate di Ω si svilupperanno le (12) e si integreranno subito per serie, rispetto al tempo, giacchè

$$g = nt + c \qquad g' = n't + c',$$

quindi

$$-ig \pm jg' = (-in \pm jn')t - ic \pm jc'.$$

Determinate così le φ, ξ, ψ, Λ, Ξ, si determineranno le costanti arbitrarie, osservando che per $t = 0$ si deve avere (Venturi, l. c.):

$$\xi = 1, \qquad \psi = \varphi = 0, \qquad \Lambda = \Xi = 0.$$

Ciò fatto, si può passare a determinare la z per mezzo delle (4):

$$\frac{dz}{dt} = \xi + \varphi r \cos f + \psi r \operatorname{sen} f$$

ove tutto è noto, giacchè le $r \cos f$, $r \operatorname{sen} f$ son date dalle (15). Integrando si avrà z a cui si dovrà aggiungere la costante arbitraria determinata dal fatto che per $t = 0$, si ha $z = 0$.

Determinate così tutte le variabili del moto si potranno conoscere gli elementi osculatori col mezzo delle (2), e in prima approssimazione meglio col mezzo delle formule del § 5 della citata mia Memoria, osservando che anche qui, la quantità $\frac{h_0}{h}$ si deduce dalla ξ al solito modo.