ACCADEMIA NAZIONALE DELLE SCIENZE DETTA DEI XL
HRVATSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI
INAF - OSSERVATORIO ASTRONOMICO DI BRERA
PONTIFICIA UNIVERSITÀ GREGORIANA

EDIZIONE NAZIONALE
DELLE OPERE E DELLA CORRISPONDENZA
DI RUGGIERO GIUSEPPE BOSCOVICH

Volume IV/tomo I-II
Opere scientifiche
Astronomia e Ottica

OPERE VARIE DI OTTICA

a cura di Edoardo Proverbio

Commissione Scientifica Nazionale
Istituita con D.M. 27 Aprile 2006 e successive integrazioni

2014

EDIZIONE NAZIONALE
DELLE OPERE E DELLA CORRISPONDENZA
DI RUGGIERO GIUSEPPE BOSCOVICH

Commissione scientifica

Presidente: Giovanni Fabrizio Bignami
(Presidente dell'Istituto Nazionale di Astrofisica)
Vicepresidente: Tommaso Maccacaro
(INAF – Osservatorio Astronomico di Brera)
Segretario: Edoardo Proverbio
(INAF – Osservatorio Astronomico di Brera;
S.I.A. – Società Italiana di Archeoastronomia)
Tesoriere: Elio Antonello
(INAF – Osservatorio Astronomico di Brera;
S.I.A. – Società Italiana di Archeoastronomia)

Ugo Baldini (Università degli Studi di Padova)
Fabio Bevilacqua (Università degli Studi di Pavia)
Vincenzo Cappelletti (Istituto di Studi Germanici)
Mario Carpino (INAF – Osservatorio Astronomico di Brera)
Paolo Casini (Università di Roma «La Sapienza»)
Emilia Chiancone (Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL)
Guido Cimino (Università di Roma «La Sapienza»)
Žarko Dadić (Institute of the History and Philosophy of Science, Zagabria)
François Xavier Dumortier (Pontificia Università Gregoriana)
Alessandra Fiocca (Università degli Studi di Ferrara)
Paolo Freguglia (Università degli Studi dell'Aquila)
Paolo Galluzzi (Istituto e Museo di Storia della Scienza, Firenze)
Livia Giacardi (Università degli Studi di Torino)
Giovanni Micheli (Università degli Studi di Milano)
Giovanni Paoloni (Università degli Studi della Tuscia, Viterbo)
Giovanni Pareschi (INAF – Osservatorio Astronomico di Brera)
Luigi Pepe (Università degli Studi di Ferrara)
Clara Silvia Roero (Università degli Studi di Torino)
Giancarlo Setti (Università degli Studi di Bologna)
Rita Tolomeo (Università di Roma «La Sapienza»)
Maurizio Torrini (Università degli Studi di Napoli «Federico II»)
Pasquale Tucci (Università degli Studi di Milano)

EDIZIONE NAZIONALE
DELLE OPERE E DELLA CORRISPONDENZA
DI RUGGIERO GIUSEPPE BOSCOVICH

Volume IV/tomo I-II
Opere scientifiche
Astronomia e Ottica

Opere varie di Ottica

a cura di Edoardo Proverbio

Enti patrocinatori dell'Edizione Nazionale delle Opere e della Corrispondenza di Ruggiero Giuseppe Boscovich:

- Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
- Accademia Croata di Scienze e Arti
- INAF – Osservatorio Astronomico di Brera
- Pontificia Università Gregoriana
- S.I.A. – Società Italiana di Archeoastronomia

Copyright © 2014 Edizione Nazionale delle Opere e della Corrispondenza di Ruggiero Giuseppe Boscovich

Pubblicato nel 2014

Realizzazione: ALEXMA – Cinisello Balsamo (MI)
per conto della Commissione Scientifica per l'Edizione Nazionale delle Opere e della Corrispondenza di Ruggiero Giuseppe Boscovich

Sede Legale e Operativa: INAF - Osservatorio Astronomico di Brera
via Brera 28, 20121 Milano

ISBN 978-88-96700-22-8

Tutti i diritti sono riservati a norma di legge
e a norma delle convenzioni internazionali

Indice generale

Nota: nell'intestazione delle opere, il numero indica il codice con cui l'opera del presente volume è contrassegnata nel "Catalogo delle Opere a stampa di Ruggiero Giuseppe Boscovich (1711-1787)", *Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL, Documenti Boscovichiani VIII,* a cura di Edoardo Proverbio, Roma, 2007.

Introduzione p. 1

1.**59**
De Lentibus et Telescopiis Dioptricis Dissertatio, […], Romae, 1755 p. 19

1.**62**
Lectiones elementares Opticae, clarissimi viri N.L. de la Caille, […]. Quibus Auctorii loco accessit brevis Theoria Micrometri objectivi a R.P. Rogerio Josepho Boscovich, […]. Vindobonae, 1757 p. 83

1.**75**
Extrait d'une lettre du P. Boscovich a M. Clairaut. Il y propose une solution d'un problème concernant le perfectionnement des lunettes dioptriques, "Journal de Scavans", Paris, aout 1763, pp. 50-58 p. 257

1.**76**
*De recentibus compertis pertinentibus ad perficiendam dioptricam [1764], "*De Bononiensi Scientiarum et Artium Instituto atque Academia Commentarii", Tomus V, Pars I, Bononiae, 1767, pp. 169-235 (il testo di questa dissertazione è riportato nella versione ristampata a Vienna all'interno delle *Dissertationes quinque,* vedi opera 1.**82** seguente)

1.**77**
De unione colorum aliorum post alios per binas substantias, ac unione multo maiore per tres [1764], "De Bononiensis Scientiarum et Artium Intrituto atque Academia Commentarii", Tomus V, Pars II, Bononiae, 1767, pp. 265-333 (il testo di questa dissertazione è riportato nella versione ristampata a Vienna all'interno delle *Dissertationes quinque,* vedi opera 1.**82** seguente)

1.**82**
Dissertationes quinque ad Dioptricam pertinenses, P. Rugerii Josephi Boscovich S.J., […], Vindobonae, 1767 p. 269

1.**86**
Memorie sulli cannocchiali diottrici del P. Ruggiero Giuseppe Boscovich della Compagnia di Gesù, Milano, 1771 p. 573

1.**94**
An account of a new Micrometer and Megameter, "Philosophical Transactions", Vol. LXVII, London, 1777, pp. 248 seg. p. 691

Indice dei nomi e delle opere citate nei testi p. 703

INTRODUZIONE

1. Notizie bibliografiche delle Opere contenute nel presente volume IV /I-II della ENB, e considerazioni sullo stato delle ricerche sull'ottica nella seconda metà del settecento

Le Opere a stampa di Ruggero Boscovich presentate nel presente volume doppio IV/I-II dell'*ENB* sono quelle contenute nel "Catalogo" sopraccitato, alla voce *Ottica* della Sezione "Catalogo delle Opere a stampa di R.G. Boscovich suddivise per materia", esclusi i cinque volumi dell'*Opera pertinentia ad Opticam et Astronomiam [1785],* pubblicati nei volumi V/1-V/5 di questa stessa *ENB*, e inclusi invece i contributi 1.**62**, contenente la descrizione del "micrometro obiettivo" di Boscovich, pubblicato nel 1757 nelle *Lectiones elementares Opticae* del La Caille, e l'opera 1. **94**, che dà la descrizione del suo nuovo "Micrometro e megametro".

Nella produzione scientifica di Ruggiero Boscovich un posto a parte meritano i suoi significativi contributi di ottica e di astronomia, sia di carattere teorico, sia di indirizzo e contenuto pratico e tecnico-strumentale, sia ancora di carattere applicato e osservativo, settore quest'ultimo in cui si sente particolarmente la carenza di ricerche puntuali, con la conseguenza di trasmettere di Boscovich una immagine schiacciata sui suoi lavori di carattere teorico. Si deve dire, in generale, che di questa importante attività di Ruggiero Boscovich in campo ottico ed astronomico, solo una parte relativamente modesta è stata valorizzata, in passato ed anche in tempi a noi vicini, e solo di recente sono state condotte ricerche per mettere in evidenza il suo contributo, spesso del tutto originale, nel campo dell'ottica dei sistemi acromatici, e dei problemi connessi, riguardanti i fondamenti della moderna rifrattometria e sferometria, di cui fu praticamente il fondatore, ed i problemi pratici relativi alla produzione di vetro ottico, comune ed al piombo, indispensabile per la realizzazione di questi stessi sistemi. Anche per quanto riguarda le sue ricerche di interesse astronomico, si deve dire che l'interesse degli storici si è prevalentemente orientato su alcuni suoi lavori teorici, trascurando la sua imponente attività nel campo dell'astronomia strumentale ed osservativa. È da augurarsi che la pubblicazione nella presente *ENB,* di tutte le opere a stampa di Ruggiero Boscovich e

della sua corrispondenza, che oltre che con i fratelli ed i suoi collaboratori, egli intrattenne con i maggiori uomini di scienza del Settecento, possa contribuire ad indirizzare ed aprire nuovi filoni di ricerca riguardanti la complessa personalità scientifica di Ruggiero Boscovich, ed il suo contributo di primo piano all'avanzamento delle conoscenze, in particolare, in ottica ed in astronomia.

Per quanto concerne l'ottica, di cui, nel presente volume, salvo due contributi di ottica strumentale applicata, peraltro di notevole interesse, sono presentate le opere teoriche di Boscovich, le prime ricerche dello scrivente sugli interessi per l'ottica di Boscovich risalgono al 1989[1]. Da allora numerose ricerche chi scrive ha condotto sull'attività pratica ed osservativa di Ruggiero Boscovich nel campo dell'ottica[2], in particolare in corrispondenza della pubblicazione del carteggio di Boscovich con il suo

[1] Cfr., Edoardo Proverbio, "R. G. Boscovich and the Measurement of the Refractive Quality of Lenses", *Memorie della Societa Astronomica Italiana,* Vol. 60, **4**, 1989, pp. 837-888. In questo lavoro si ricostruisce la storia, e si dà la teoria, basata sui lavori ottici di Boscovich, dei numerosi strumenti da lui progettati e realizzati per la misura dell'indice di rifrazione dei vetri ottici, ad iniziare dall'uso del prisma rettilineo, già utilizzato da Clairaut, del doppio prisma (prima metà del 1763), del primo vitrometro ad acqua (inizio 1763), del prisma mobile, o ad angolo variabile (luglio 1764), del nuovo vitrometro ad acqua (autunno 1764), e del vitrometro, concepito da Boscovich nel 1772, e realizzato da Lorenzo Selva nella primavera-estate 1773, e infine del nuovo vitrometro orizzontale, realizzato in prototipo nel corso del suo soggiorno in Francia (1773-1782).

[2] Per le ricerche riguardanti l'imponente attività pratica-osservativa di Boscovich finalizzata, da una parte alla realizzazione di obiettivi, oculari, e cannocchiali acromatici, dall'altra alla produzione di vetro al piombo, ed alla progettazione e messa in opera di nuovi strumenti per le misure refrattometriche e sferometriche, ed infine alla sua collaborazione con i maggiori ottici pratici e costruttori di strumenti ottici del settecento, si rinvia a: Edoardo Proverbio, "La collaborazione di Giovan Stefano Conti e Ruggiero Boscovich per la produzione di vetro flint", *Atti del X Congresso di Storia della Fisica,* a cura di Fabio Bevilacqua, Cagliari, 1989, pp. 311-348; Edoardo Proverbio, "Giovan Stefano Conti e Ruggiero Giuseppe Boscovich: le esperienze per la realizzazione di obiettivi acromatici", *Atti della Fondazione Giorgio Ronchi,* Anno L, **2**, 1995, pp. 271-299; Edoardo Proverbio, "La collaborazione di Ruggiero G. Boscovich con Lorenzo Selva per la realizzazione di vetro al piombo e di telescopi acromatici", *Atti della Fondazione Giorgio Ronchi,* Anno VII, **6**, 1997, pp. 795-834; Edoardo Proverbio, "Metodi e strumenti di misura progettati da Ruggiero G. Boscovich per la realizzazione di obiettivi acromatici", *Atti della Fondazione Giorgio Ronchi,* Anno VIV, **2**, 1999, pp. 221-249; Edoardo Proverbio, "Ottici pratici e cultori di ottica lombardi e veneti nella seconda metà del settecnto e loro rapporti con Ruggiero Giuseppe Boscovich, *Atti della Fondazione Giorgio Ronchi*, Anno LV, **4-5**, 2000, 459-514; Edoardo Proverbio, "Il difficile reperimento di vetro ottico in Italia nella seconda metà del settecento dai carteggi di Ruggiero Boscovich", *Quaderno di Storia della Fisica,* N. 6, 2000, pp. 63-85; Edoardo Proverbio, "The researches of Ruggiero Giuseppe Boscovich into realising almost achromatic and aplanatic object-glasses of one only substance", *Procedings of the International Conference for the tercentenary of the birth of Ruggiero Giuseppe Boscovich (Ragusa 1711-Milano 1787)*, Fabio Bebilacqua, Patrizia Contardini eds., Pavia, 2013, in print; Edoardo Proverbio, "La produzione di vetro ottico in Francia e le esperienze di Ruggiero Boscovich per la produzione di vetro al piombo a Vienna, Milano, Lucca e Venezia", Parte prima, e Parte seconda, *Physis,* 2013-2014, in print.

principale collaboratore, il nobile e scienziato lucchese Giovan Stefano Conti, e poi dei primi due volumi dell'*Opera pertinentia* nella *ENB*, riguardanti le opere di ottica scritte da Boscovich in Francia dal 1774 al 1782[3]. Questi filoni di ricerca riguardano in generale le ricerche, le esperienze, e le osservazioni condotte da Boscovich nel campo

[3] Si segnalano i seguenti contributi riguardanti Boscovich e la sua attività nel campo dell'ottica, contenuti nelle "Introduzioni" alla pubblicazione del carteggio di Boscovich con Giovan Stefano Conti, ed ai primi due volume dell'*Opera pertinentia* nell'ambito della presente *Edizione Nazionale delle Opere e della Corrispondenza di Ruggiero Giuseppe Boscovich* (nel seguito *ENB*)*:* "Giovan Stefano Conti / lettere a Ruggiero Giuseppe Boscovich", a cura di Edoardo Proverbio, Volume I (1760-1771), *Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL,* Documenti Boscovichiani / IV, Roma, 1996. Nella "Introduzione", si ricostruiscono i primi incontro di Boscovich con Conti nella primavera del 1757, nell'estate del 1763, e ancora nel 1765 e 1766, e si traccia una succinta biografia del patrizio e scienziato lucchese nei suoi rapporti con lo stesso Boscovich; "Giovan Stefano Conti / lettere a Ruggiero Giuseppe Boscovich", a cura di Edoardo Proverbio, Volume II (1771-1784), *Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL,* Documenti Boscovichiani / V, Roma, 1998. Nella "Introduzione" si approfondiscono le circostanze e le motivazioni dei numerosi soggiorni di Boscovich a Lucca dal 1756 al 1773, e si da notizia dei suoi rapporti con numerosi personaggi di primo piano della Repubblica Lucchese, con particolare riferimento alla figura di Attilio Arnolfini. Si prendono poi in esame gli eventi relativi al primo ed al secondo incarico avuto da Boscovich, prima a Lucca e poi a Vienna, per la difesa degli interessi della Repubblica sul problema delle acque, che la contrapponeva al Granducato di Toscana, e alle vicende riguardanti i suoi rapporti con la stessa Repubblica, dal 1758 al 1783; "Carteggio con Giovan Stefano Conti (1756-1768)", *ENB,* Corrispondenza / Volume V / I, a cura di Edoardo Proverbio, 2009. Nella "Introduzione", pp. 3-15, si accenna agli argomenti trattati nelle "Introduzioni" dei volumi a stampa del carteggio Boscovich-Conti del 1996 e 1998, e si delineano gli interessi ottici di Boscovich dopo la scoperta di John Dollond del 1758; "Opera pertinentia ad Opticam et Astronomiam", *ENB,* Opere scientifiche / Astronomia e Ottica*,* Volume V / I, a cura di Edoardo Proverbio, 2010. Nella "Introduzione", pp. 7-37, si approfondisce la ricerca sulla nascita in Boscovich dei primi interessi per l'ottica geometrica e fisica. Si ricostruisce il contesto che precedette e seguì la scoperta di Dollond del 1758, con gli interventi di Eulero e Klingenstierna, e poi di Clairaut, ed i primi contributi di Boscovich all'ottica dei sistemi acromatici, a partire dalla lettera al fratello Bartolomeo del 28 novembre 1760, in cui dà una teoria semi-quantitativa dei sistemi acromatici a due lenti, e fino alla pubblicazione nel 1771 delle *Memorie sulli cannocchiali Diottrici.* Si tratta infine della sua attività in Francia come ottico della Marina, e del progetto ed esecuzione dell'*Opera pertinentia ad Opticam et Astronomiam.* Conclude l'"Introduzione" la descrizione del contenuto del Primo Volume dell'*Opera pertinentia*, che ha per oggetto i cannocchiali acromatici e le varie versioni del suo "vitrometro"; "Opera pertinentia ad Opticam et Astronomiam", *ENB*, Opere scientifiche / Astronomia e Ottica, Volume V / II, a cura di Edoardo Proverbio, 2010. Nella "Introduzione", pp. 7-31, si approfondiscono, nel primo Opuscolo, le ricerche effettuate da Boscovich sulle oculari astronomiche, ed in particolare sugli effetti degli errori di cromatismo nei sistemi oculari, di cui Boscovich accenna per la prima volta nella lettera a Stefano Conti del 10 dicembre 1763 e su quelli della figura sferica (di minore importanza), sistemi costituiti da due e più lenti. Nei rimanenti otto Opuscoli, Boscovich tratta: delle lenti ustorie, della misura dell'aberrazione della luce col cannocchiale doppio, ad aria ed ad acqua, del micrometro e megametro obiettivo, dell'inutilità del cannocchiale a due immagini proposto a Parigi, del fenomeno osservato da Messier e interpretato da Boscovich come un fenomeno atmosferico, della rifrazione astronomica, e dei metodi per la sua determinazione (gli ultimi due Opuscoli).

dell'ottica pratica-strumentale ed osservativa, un campo in cui sono relativamente scarsi i contributi scientifici prodotti nel corso dell'ultimo secolo[4]. Anche sul versante relativo alle ricerche riguardanti la produzione teorica di Boscovich in ottica, non si è ancora a mio avviso approfondito a tutt'oggi con sufficiente attenzione lo studio del suo contributo, e delle sue ricerche sulla teoria dei sistemi ottici acromatici degli obiettivi ed in particolare degli oculati a due e più lenti[5], e manca ancora una analisi accurata e puntuale dei reciproci debiti, delle reciproche influenze, e delle idee originali, che sulla teoria ottica di tali sistemi vennero elaborate dai maggiori ottici teorici del tempo: Eulero, Klingenstierna, Clairaut, Boscovich, e d'Alembert[6].

---

[4] Sull'attività di Boscovich nel campo dell'ottica pratica si segnalano i seguenti lavori: V. Dvořak, "Boščovićev rad na polju fisike", *Život i ocjena djela R.J. Boškovića,* Zagreb, 1887-88, pag. 470-542; Stanko Hondl, "Boškovićev kružni mikrometar", *Almanh Bošković*, 1955, pag. 98-123; Branimir Marković, "Boščovićev staklomjer-vitrometrum", *Almanah Bošković,* 1961, pag. 193-202; August Ziggelaar, "R. Bošković Experimental Approach to Optical Questions", *The Philosophy on Science of R. Bošković,* Zagreb, 1987, pag. 139-162; August Ziggelaar, "Placing Some of Boscovich's Contributions to Optics in the History os Physics", *R.J. Boscovich / Vita e attività scientifica / His Live and Scientific Work,* a cura di Piers Bursill-Hall, Roma, 1993, pag. 363-384; Hans Ullmaier, "Boscovichs Vitrometer. Ein Hisporisches optisches Instrument", *Cardanus,* Band 5, 2005, pag. 15-38.

[5] Sull'evoluzione delle conoscenze teoriche e pratiche di Boscovich nel campo dell'ottica, si veda: Edoardo Proverbio, "L'attività di Ruggiero Boscovich nel campo dell'ottica teorica e pratica", *Atti della fondazione Giorgio Ronchi,* Anno XLVII, **1**, 1992, pag. 147-163.

[6] Cfr., "Sur la perfection des verres obiectifs des lunettes, par M. Euler, *Memoires de l'Academie de Berlin (1747),* 1749, Berlin, pag. 274-296; "Précis d'une théorie general de la dioptrique", Par M. Euler, *Mémoires de l'Academie Royale des Sciences,* Paris, 1768.

S. Klingenstierna, "Om ljusstralars aberratione efter deras brytning genom Spheriske Superficier och lentes", *Kungliga vetenskapsakademiens handlingar,* 1760, **21,** pag. 79-125; questa Memoria venne tradotta in latino e inviata da Klingenstierna in Inghilterra nell'estate del 1760, letta alla Royal Society il 2 aprile 1761, e pubblicata col titolo "De aberrazione Luminis, in Superficiebus et Lentibus Spaericis refractorum", nelle *Philosophical Transactions*, Vol. LXI, parte II, 1761, pag. 944-977. Sempre in latino, col titolo: *Tentamen de deficiendis et corrigendis aberrationibus radio rum luminis in lenti bus sphaericis refracti, et de perficiendo telescopio dioptrico,* la Memoria venne ristampata tra le Dissertazioni della "Imperiali Academia Scientiarum Petropolitana", Petropoli, 1762. La stessa Memoria venne poi tradotta in francese da Clairaut e pubblicata col titolo "Sur l'aberration des rayons de lumière lorsqu'ils sont réfractés par des surfaces et des lentilles sphériques", nel *Journal des Sçavans,* Oct.-Nov. 1762, pag. 664-678. Dall'edizione latina inglese pubblicata nel 1761, Espit Pezenas, fece una traduzione in francese, "avec quelques éclaircissements", pubblicata nel *Cours complet d'Optique / traduit de l'Anglois de Robert Smith / Par le P. Pezenas,* Tome Second, Avignon, 1767, pag. 451-482.

"Mémoire sur les moyens de perfectionner les lunettes d'approche, par l'usage d'Objectifs composés de plusieurs matières différemment réfringentes", par M. Clairaut, *Mémoires de l'Academie Royale des Sciences, Année MDCCLVI,* Paris, 1762, pag. 380-437; "Second Mémoire sur les moyens […]", *Mémoires […**],** Année MDCCLVII,* Paris, 1762. pag. 524-550; "Troisième Mémoire sur les moyens […]", *Mémoires […], Année MDCCLXII,* Paris, 1764, pag. 578-631.

Opuscules Mathématiques […], par M. D'Alembert, Tome Troisème, Paris, 1764; "Nouvelles Recherches sur les verres optiques, pour servir de suite à la Théorie qui en a été donnée dans le Volume III des Opuscules Mathématiques", par M. D'Alembert, Premier Mémoire, *Mémoires*

2. Considerazioni e contenuto delle opere teoriche e pratiche di Boscovich presentate nel presente Volume IV/I-II dell'ENB

2.1 Le opere ottiche scritte prima del contributo di Dollond del 1758

Le opere a stampa di Boscovich contenute nel presente volume dell'*ENB*, come si è detto, presentano tutti i suoi lavori di ottica teorica, in particolare dei sistemi diottrici, da lui scritti e pubblicati nel corso della sua permanenza in Italia, ad eccezione del suo opuscolo sul nuovo Micrometro e Megametro, che riguarda l'ottica applicata, pubblicato nel 1777, nel corso della sua permanenza in Francia. Il primo di questi contributi: *De lentibus et telescopiis Dioptricis,* è del 1755. È da pensare che quando Boscovich scrisse questo suo trattato di ottica, egli non fosse a conoscenza, o non aveva colto l'importanza, né della memoria di Eulero, apparsa nel 1749 (citata nella nota 6), in cui si mostrava la possibilità di correggere le aberrazioni cromatiche delle lenti, né del carteggio intercorso tra John Dollond, Short ed Eulero nel 1752, pubblicato nelle Transazioni inglesi del 1754[7], e nemmeno, in questo caso ovviamente, della lettera di Klingenstierna a Dollond del 1755 sullo stesso problema, allora inedita[8]. Egli invece conosceva assai bene l'Ottica di Newton, nelle tre edizioni Latina, Gallica e Patavina[9] e le sue *Lectiones Opticae*[10].

---

de l'Academie Royal des Sciences, Année MDCCLXIV, Paris, 1767, pag. 75-145; "Nouvelles Recherches sur les verres optiques […], Seconde Mémoire, *Mémoires […], Année MDCCLXV,* Paris, 1768, pag. 53-105*;* "Suite des Recherches sur les verres d'optiques", […], Troisième Mémoire, *Mémoires […], Année MDCCLXVII,* Paris, 1770, pag. 43-108.

[7] Si veda la lettera di James Short a Peter Daval, in cui si davano notizie del lavoro di Eulero del 1747, e delle lettere di Dollond a Short del 11 marzo 1752, e di Eulero a Short ed a Dollond, rispettivamente del 19 giugno e del 15 giugno 1752, pubblicate in: *Philosophical Transactions,* Vol. XLVIII, Part I. for the year 1753, London 1754, pag. 287-288, 289-291, 292, 293-296.

[8] La lettera di Klingenstierna a Dollond del 1755, in cui si mostra che i risultati delle esperienze di Newton sono validi solo per prismi di piccola apertura, è pubblicata in: J. Kelly, *The life of John Dollond […],* 1808, pag. 68-70. Copia di questa lettera venne riprodotta da Clairaut, che l'aveva ricevuta da M. Ferner, nella prima *Memoire sur les moyens […]*, del 1762 (pag. 405-407), con il titolo: "Consideratio circa legem refrattionis Newtonianam radiorum luminis diversis generis in mediis diversis." Lo stesso Clairaut pubblicava nella seconda *Memoire sul le moyens […],* del 1764 (pagg. 524-525, e 626) la traduzione in francese di M. Ferner, di due lettere di Dollond a Klingenstierna, dell'ottobre 1759, e della fine di agosto 1761.

[9] È lo stesso Boscovich ad informarci che, quando scriveva nel *De Lentibus et Telescopiis* (pag. 53)*:* "Newtoni Optica […], tam in editione latina Londinensi, quam in Gallica, quam iterum in latina recentisima Patavina, habet […].", egli evidentemente conosceva, non sappiamo in quale edizione, le edizioni latine dell'*Opticks,* che videro la luce, a cura e con l'introduzione di Samuel Clarcke, a Londra nel 1706 e poi nel 1711, a cui seguirono quella ginevrina del 1740, e quella patavina del 1748, forse quella che egli aveva allora sotto mano (cfr., *Isaaci Newtoni / Optices Libri tres / accedunt ejusdem / Lectiones Opticae / et Opuscola omnia ad Lucem et Colores pertinentia*, Patavii, 1749) che conteneva anche le *Lectiones Opticae,* la cui prima edizione vide la luce a Londra nel 1729.

[10] Si veda la nota precedente.

Si deve dire che i primi approcci di Boscovich ai fenomeni ottici sono quelli legati all'insegnamento dei suoi maestri Carlo Noceti e Orazio Borgondio[11], e ricordare che del primo egli sollecitò la ristampa, nel 1747, delle operette *De Iride et Aurora Boreale,* corredandola da una serie di sue note ove espone l'Ottica di Newton[12], e che di quest'ultimo egli sviluppa, in una dissertazione pubblicata ancora nel 1747, la teoria delle riflessioni multiple della luce all'interno di una sfera trasparente[13]. Già nella prima Parte del *De Lumine* del 1748, Boscovich aveva anticipato la trattazione delle proprietà della luce, e cioè la sua propagazione in linea retta, ed i fenomeni di riflessione, di rifrazione e di diffrazione, nonché le sue proprietà nel cristallo d'Islanda[14], mentre nella seconda Parte aveva affrontato le caratteristiche del fenomeno luminoso nell'ambito della sua teoria delle forze, stampata nel 1745[15], e affrontato il problema, di cui già Newton si era occupato[16], di determinare, sulla base della legge della diversa rifrangibilità dei raggi luminosi, il diametro, e la distribuzione dei raggi luminosi di una sorgente puntiforme, nel "circellum" della sua immagine rifratta da una lente[17]. Si può poi ragionevolmente credere che egli si sia avvicinato, e avviato allo studio dei problemi ottici ancora nel 1748, quando, sulla falsariga delle ricerche di Cartesio, ed in particolare di Newton, riguardanti la rifrazione di un raggio luminoso che attraversa una generica superficie curva[18], Boscovich affrontava e dava

---

[11] Già nel 1715 Orazio Borgondio (1674-1741) aveva dato alla luce un suo contributo allo studio del fenomeno luminoso dell'arcobaleno (cfr., *Iridis explicatio Phisico.mathematica,* Romae, 1715) e, in epoca imprecisata, due egloghe italiane sulla luce e sull'aurora boreale, forse rimaste inedite (cfr., C. Sommervogel, *Bibliothèque de la Compagnie de Jesus,* Bruxelles-Paris, I, 1804-07, pag. 1807). Carlo Noceti (1697-1759) pubblicava nel 1729 il poema in versi latini *De Iride carmen phiolosophicum*. Venetiis, 1729, e nel 1747 videro la luce i due poemetti in versi latini: *De Iride et Aurora Boreali carmina, […], cum notis Josephi Rogerii Boscovich […],* Romae, 1747.

[12] Sul contributo di Boscovich al poemetto di Noceti *De Iride et Aurora boreali,* si veda la nota precedente. È da ricordare che già nel 1738 Boscovich aveva pubblicato, sulla falsariga dei lavori di Mairan la dissertazione *De aurora boreali Dissertatio […],* Romae, 1738. Sulle vicende legate ai lavori di Noceti e di Boscovich sull'Arcobaleno e sull'Aurora boreale, si rinvia a Edoardo Proverbio, "Ruggiero Giuseppe Boscovich, Scienziato e letterato", *Atti della Fondazione Giorgio Ronchi,* Anno LXVIII, **3**, 2013, 337-342, note 120-137.

[13] Cfr., "Dimostrazione di un passo spettante all'angolo massimo e minimo dell'Iride […], *Giornale de' Letterati,* Roma, 1747, pag. 165-193. La teoria di un fascio di raggi paralleli attraverso una sfera trasparente, è data da Newton nelle "Lectiones Opticae", Pars Prima, Sectio Quarta, Propositio XXXI-XXXVII, pag. 51-60, (cfr., *Isaaci Newtoni,* cit. nella nota 16).

[14] Cfr., *Dissertationis de Lumine, pars Prima, […],* Romae, 1748.

[15] Cfr., *De viribus vivis dissertatio, auctore Padre Rogerio Josepho Boscovich, […],* Romae, 1745.

[16] Cfr., *Isaaci Newtoni / Optices Libri Tres / accedunt ejusdem Lectiones Opticae […],* Patavii, MDCCXLIX, "Propositio VII, Theorema VI / Experimentum XVI", pagg. 29-40.

[17] Cfr., *Dissertationis de Lumine, pars Secunda, […],* Romae, 1748. Boscovich affronta il problema della dispersione dei raggi luminosi in questa seconda Parte della Dissertazione, a partire dal § 108.

[18] Le fonti, da lui stesso citate [scrive Boscovich nel *De lentibus et telescopiis* (pag. 4), con

soluzione al problema generale sulle modalità di descrivere una tale curva, che abbia la proprietà di riunire in un punto i raggi rifratti da un altro generico punto, di cui dà la teoria in due lettere scritte il 16 marzo, ed il 27 aprile 1748, al matematico bresciano Giambattista Suardi, da quest'ultimo pubblicate nel 1752[19]. E non è certo un caso che con la posizione di quest'ultimo problema Boscovich inizi la sua dissertazione sulle Lenti e sui Telescopi diottrici del 1755[20], in cui, avendo come riferimento l'Ottica di Newton egli dà la teoria di un fascio di raggi luminosi, omogenei e non omogenei, attraverso una o due superfici, che è poi il caso delle lenti convesse e concave. Egli affronta inoltre il problema[21], già trattato nella seconda parte del *De Lumine* (si veda la nota 14), e che riprenderà nella Terza Dissertazione dell'Opera *Dissertationes quinque ad Dioptricam pertinentes*, di cui si dirà in seguito (si veda la nota 54), di calcolare i diametri e la densità dei circoletti determinati dalle aberrazioni sferiche e cromatiche nel fuoco di una lente[22]. Ed è poi trattando dell'errore di rifrangibilità e rifacendosi alle esperienze di Newton[23], che Boscovich afferma che tale errore non può essere corretto[24], confermando che ancora nel 1755 egli era del tutto all'oscuro della problematica suscitata da Eulero nel suo articolo, pubblicato nel 1749 (si veda

---

riferimento al problema da lui affrontato nel primo capitolo: "quod ad primum caput pertinet, inveniri potest superficies, quae in unico puncto colligat radios omnes homogeneos ex unico puncto profectis, quam aliter invenit Cartesius, aliter Newtonus"], per affrontare il problema della rifrazione di un fascio di raggi luminosi omogenei attraverso ad una o due superfici, sono le opere di Cartesio e di Newton: cfr., *La Geometrie de M. Descartes divisée en trois livres,* Paris, 1705 [nel secondo libro, relativo a: "De la nature des lignes courbes", Cartesio tratta*:* "Les proprietes de ces ovales touchant les reflections, et les refractions", pag. 86-102]; *Philosophiae naturalis Principia matematica, Auctore FS Neuton […],* Londini, 1787, in cui nelle Prop. XCVII e XCVIII, Newton tratta il problema della rifrazione di raggi incidenti su una generica superficie, pag. 232.

[19] A questa sua teoria Boscovich fa riferimento quando scriveva nel *De lentibus et telescopiis* (pag. 4): "nostram satis simplicem illam quidem, et elegantem ejus problematis solutionem exhibebimus quam septem ab hinc annis communicavimus cum doctissimo viro Jo. Baptista Soardio, in epistola, quam is deinde inseruit geometrico operi, de Curvarum descriptione per organa, edito tribus ab hinc annis." Si tratta della *Lettera 16, Marzo 1748, scrittami dal chiarissimo P. Ruggiero Boscovich della Compagnia di Gesù, in proposito delle 'Ovali Cartesiane'* in cui da la teoria generale della costruzione delle cosiddette ovali cartesiane, e in particolare della successiva *Altra lettera 27, Aprile 1748, scrittami dal medesimo sullo stesso soggetto,* con l'applicazione di dette curve al problema della rifrazione ottica, pubblicate in: *Nuovi istrumenti per la descrizione di diverse curve antiche e moderne […], del Conte Giambattista Suardi / Bresciano,* Brescia, 1752, pagg., 62-79.

[20] Cfr., *De lentibus et telescopiis,* § 4-10.

[21] Cfr., Neutoni, *Optices,* cit. nella nota 13, Lib. I, Pars I, Propositio VII, Experimentum XVI.

[22] Cfr., *De lentibus et telescopiis,* § 62-66.

[23] Cfr., Neutoni, *Optices, ibid.,* Lib. I, Pars II, Propositio III, Experimentum VIII.

[24] Scrive Boscovich nel *De lentibus et telescopiis* (§ 59, pag. 28)*,* con riferimento alla legge sulla diversa refrangibilità dei raggi luminosi: "Atque id quidem Newton exploravit in pruribus mediis diversis, et constantissimè ita se habere comperit, ut de hac constanti differentiarum ratione dubitare non libeat."

la nota 6), e della successiva corrispondenza tra Dollond, Short ed Eulero, sul problema del cromatismo delle lenti, apparsa nelle Transazioni inglesi del 1754 (si veda la nota 7), che egli evidentemente aveva difficoltà a consultare, come si desume dalle sue parole, scritte nel *De lentibus* per presentare il micrometro oggettivo a due lenti divise, proposto da John Dollond nelle *Philosophical Transactions* del 1754, notizia che egli ebbe non dalle Transazioni inglesi che "non aveva visto", ma indirettamente dal Padre Espit Pezenas, che stava tentando di applicare detto micrometro ai telescopi newtoniani e gregoriani, da cui ebbe "ultimamente la notizia"[25]. Boscovich dà, nel *De lentibus,* una descrizione del micrometro di Dollond, che presumibilmente gli era stata trasmessa da Pezenas, ed elaborerà poi, presumibilmente nel 1755-56, l'intera teoria del micrometro obiettivo a due lenti divise applicato a telescopi newtoniani e gregoriani, che pubblicherà nel 1757, in appendice alla prima edizione latina[26] delle *Leçons elementaires d'Optique* di Lacaille[27].

---

[25] Che Boscovich non consultasse regolarmente le *Philosophical Transactions* (non sappiamo, se perché queste non arrivassero con regolarità al Collegio Romano) si può desumere da quanto egli stesso scriveva nel *De lentibus* (§ 108, pag. 50), trattando del micrometro obiettivo proposto da Dollond nelle *Philosophical Transactions* (cfr., "A description of a contrivance for measuring small Angles", § XXVIII, vol. XLVIII, Part I, for the Year 1753, London, 1754, pag. 178-181), affermando: "At e contrario posset etiam Galileano telescopio adhiberi micrometrum alterius cujusdam generis, quod nuperrime invenit in Anglia Joannes Dolondus, et habetur in Transactionibus Anglicani tomo 48 pertinente ad annum 1753, pag. 178, ut ad nos prescripsit nuper vir doctissimus P. Pezenas e Soc. nostra, qui micrometrum ipsum ad Newtoniana, sive Gregoriana Catadioptrica telescopia applicatum illustra bit sub anni finem. Nos autem ipsas Transactiones nondum vidimus." È da presumere inoltre che Boscovich non conoscesse allora la lingua inglese, e che avesse anche qualche problema a leggerla. A quanto sembra Boscovich venne a conoscenza dell'articolo di Dollond pubblicato nelle Transazioni, solo nel luglio del 1760, nel corso del suo soggiorno londinese, in occasione di un incontro con James Short (si veda la nota 30), di cui scriveva al fratello Bartolomeo, in data 15 luglio 1760: "Da Short mi istruii bene sull'uso del micrometro obiettivo, sul quale vidi una memorietta nelle Transazioni Filosofiche, e dite a Benvenuti che il mio foglio di Vienna [la *Brevis theoria* cit,. nella nota seguente] ha bisogno di correzione per un equivoco, giacché la scala di quel micrometro è la stessa per gli oggetti vicino, e per i lontani." Sul micrometro obiettivo, e sul suo "equivoco", Boscovich si dilungherà poi in una successiva lettera al fratello Bartolomeo del 31 luglio 1760. (Cfr., *ENB*, Corrispondenza, Vol. II, pag. 329, 331-32).

[26] Nel 1757 venne stampata a Vienna la prima edizione latina delle *Leçons elementaires d'Optique* di de La Caille (si veda la nota seguente), tradotta da Scherffer da quella parigina del 1756 (cfr., *Clarissimi viri D. De La Caille […] / Lectiones elementares Opticae / ex Editione parisina anni 1756 in latinum traductae a C. S[cherffer] e S.J. / quibus Auctarii loco accessit / Brevis Theoria Micrometri Objectivi / R.P. Rogerio Josephi Boscovich […]* Viennae, [1757]), contenente la *Brevis theoria Micrometri Objectivi*, di Ruggiero Boscovich.

[27] La prima edizione delle *Leçons elementaires d'Optique* di de La Caille, venne stampata a Parigi nel 1750, a cui fece seguito una "Nuovelle Edition, revue, corrigée et augmentée", Paris, 1756.

2.2 Le opere ottiche scritte dopo il contributo di Dollond del 1758

Non vi sono evidenze che Boscovich venisse a conoscenza dei risultati delle esperienze che Clairaut stava conducendo sui sistemi acromatici sin dal 1765-66, nel corso della sua permanenza a Parigi dal novembre 1759 al maggio del 1760[28], e non sappiamo se egli venne a conoscenza del lavoro di John Dollond sui cannocchiali acromatici[29], che non conteneva alcun elemento della teoria di tali sistemi, già all'epoca del suo soggiorno in Francia, che egli mostra invece di conoscere nella lettera scritta al fratello il 12 giugno 1760, un paio di settimane dopo il suo arrivo a Londra, dopo l'incontro con James Short[30]. Sta di fatto, si presume a seguito delle confidenze di Short, che Boscovich poté avere conferma nel corso del soggiorno londinese delle informazioni già avute nella Memoria del Dollond sulle modalità di correggere l'errore di cromatismo negli obiettivi astronomici[31], e benché convinto della giustezza dei procedimenti a cui

[28] Le uniche notizie di prima mano che abbiamo del soggiorno di Boscovich in Francia sono quelle contenute nel carteggio che egli intrattenne col fratello Bartolomeo (cfr., *ENB,* Corrispondenza, Vol. II, "Carteggio con Bartolomeo Boscovich", a cura di Edoardo Proverbio e Mario Rigutti, 2009), e con il suo collaboratore Giovan Stefano Conti (cfr., *ENB,* Corrispondenza, Vol. V/I, "Carteggio con Giovan Stefano Conti (1756-1768)", a cura di Edoardo Proverbio, 2009). Dalle lettere al fratello risulta che egli incontrò numerose volte Clairaut (già il 17 dicembre 1759, un mese dopo il suo arrivo in Francia, scriveva al fratello: "Per questa mattina mi aveva mandato ad invitare a pranzo il Baly Solaro Amb:re di Sardegna, ma ero già invitato da M. Clairaut, che ha fatto un invito apposta per me […]"). Sono una quindicina i riferimenti che Boscovich fa nelle lettere al fratello degli incontri con Clairaut, quasi sempre conviviali, ma in essi non vi è alcun riferimento ai problemi ottici di cui Clairaut si stava occupando. L'ultimo riferimento è alla lettera di presentazione di Boscovich che l'ottico parigino scrisse al presidente della Società Reale inglese, di cui informava il fratello, da Calais, in viaggio per l'Inghilterra, in data 22 maggio 1760.

[29] Cfr., "An Account if some Experiments concerning the different Refrangibility of Light", *Philosophical Transactions,* **50,** 1758, pag. 733-743.

[30] Tra le numerosissime conoscenze che Boscovich fece dopo il suo arrivo a Londra, a quanto pare avvenuto martedì 27 maggio 1760, vi fu quella di James Short (1710-1768), celebre costruttore di telescopi, che egli incontrò per la prima volta il 1 giugno successivo. Nella lettera al fratello Bartolomeo del 12 giugno 1760 egli ricordava questo incontro con le parole: "Sono stato da Sciort e ho veduta quantità di cose bellissime in materia di cannocchiali e di telescopi." E si deve credere che fu in occasione di questo incontro, che Boscovich venne a conoscenza del lavoro di Dollond del 1758, cit. nella nota precedente, poiché nella stessa lettera egli scriveva subito dopo: "Ma più di ogni altro mi ha sorpreso un ritrovato, che da un anno è pubblicato nelle Transazioni Filosofiche: si è trovata la maniera di formare un obiettivo di due sorti di cristallo un bianco, un verdastro, uno convesso, e un concavo, in modo che con una grandissima apertura i diversi colori non si separano: l'inventore è quel Dollond, che ha inventato il micrometro oggettivo". A quanto risulta, Boscovich incontrerà per la prima volta personalmente John Dollond solo martedì 14 luglio 1760, in occasione di un incontro presso il laboratorio di Short. (Cfr., *ENB*, Corrispondenza, Vol. II, pag. 298-99, 331).

[31] Nella lettera al fratello Bartolomeo del 15 luglio 1760, Boscovich lo informava dei suoi tentativi di approfondire la conoscenza dei metodi empirici utilizzati da Dollond e da Short per realizzare obiettivi acromatici, con le parole: "Mi informai pure sulle nuove scoperte di

era ricorso Newton sulla base dei prismi di vetro da quest'ultimo utilizzati, discutendo le esperienze sui prismi effettuate da John Ludlam, rinomato sperimentatore e strumentalista del Saint John College di Cambridge, a cui fece visita[32], già nella lettera al fratello del 28 novembre 1760, era in grado di delineare una teoria semi-quantitativa dei sistemi acromatici costituiti da due lenti, una biconvessa, una biconcava[33]. All'oscuro

---

Dollon, de' cannocchiali, che adoprando due sorti di vetri, uniscono tutti i raggi in un punto, e ora so tutta la teoria. Si trova, contro quello che Newton aveva creduto, che la differenza della refrazione de' diversi colori non è la stessa in tutte le sostanze, ma in una sorte di vetri è la terza parte di più che in un'altra, onde sono come 3 a 2. Facendo l'oggettivo meno concavo con una, e più convesso coll'altro, si fanno andar i raggi tutti insieme. Ho la proporzione de' prismetti e degli oggettivi." E nella successiva lettera in data 21 luglio, precisava ancora: "Mi fu detto [presumibilmente da Short], che bastava trovare in che proporzioni stanno le ampiezze degli spettri fatti co' prismi di due vetri differenti, ma uguali tra loro, e presentati nello stesso angolo, e fare un oggettivo cavo, e l'altro convesso di fochi che stiano nella stessa proporzione, ma non ho ancora ben esaminato la cosa, che per altro è facile con un poco di geometria elementare, io però ho scarsezza somma di tempo, […]". Cfr., ibid., pag. 329, 332-33).

[32] Nel novembre del 1760, Boscovich, forse in compagnia del decano degli ottici inglesi Robert Smith, e autore del celebre trattato di ottica: *A complet System of Orticks* (Cambridge, 1738), fece visita a John Ludman, matematico e fisico, sperimentatore delle esperienze ottiche di Newton e di Dollond, che gli mostrò gli strumenti usati in queste sue esperienze, che sembravano contraddire i risultati delle osservazioni di Newton. Di questo incontro, e dei suoi colloqui con Ludman, egli scriveva il 20 novembre 1760 al fratello Bartolomeo: "[M. Ludman] mi mostrò tra le altre [macchine] una specie di 3 prismi due di acqua, ed un di vetro in mezzo, co' quali egli fa gli esperimenti, che fa il Dollond con 3 prismi di vetro, de quali quel di mezzo è verdastro. Ivi benché i raggi non escano paralleli dal terzo prisma, alla direzione, con cui sono entrati nel primo, pure non si fa la divisione de' colori. Si parlò assai di un passo dell'ottica del Newton, che pare falsificato da queste nuove esperienze: io lo difesi, e mostrai di intendere benissimo l'esperienza, che voleva fare, e tutto il fondo di queste scoperte, mostrai, che queste non offendono punto il sostanziale della dottrina del Newton sulla luce: mostrai in che senso verissimo si possa pigliare una proposizione generale da lui affermata, e che in ordine a tutto il resto, era vero quello, che il Newton diceva, cioè che dove egli aveva sperimentato, aveva trovato, che quando i raggi escono non paralleli alla direzione, con cui sono entrati, vi è separazione di colori; ma che egli non avendo sperimentato tutte le sostanze, non si era imbattuto in quella, che disperde i diversi colori molto meno delle altre in parità di altre cose, come è il vetro, che qui chiamano Krun glas (almeno così si pronunzia), e il quale ha data l'occasione della nuova scoperta, e ad una perfezione di cannocchiali non preveduta dal Newton."

[33] Facendo seguito alle lettere del 15 e 21 luglio (si veda la nota 31), Boscovich tratteggiava al fratello la teoria del funzionamento di un obiettivo acromatico costituito da due lenti in quella inviatagli in data 28 novembre 1760, scrivendo: "Sugli altri [cannocchiali] di Dollond non vi ho mai potuta mandar la teorietta per la estrema scarsezza di tempo opportuno per scrivere. Posso solo dirvi questo, se pure non ve l'ho già scritto: che vi è una specie di vetro, che si chiama crun glaz, comunque si scriva, il quale disperde i raggi diversamente rifrangibili meno, che il vetro comune in ragione di 2 a 3 [in verità il vetro *crown* disperde i raggi non meno del vetro comune, ma del vetro al piombo, cioè del vetro *flint,* a cui qui evidentemente Boscovich deve aver fatto riferimento]. Quando si vuole un oggettivo di un dato numero di palmi come 12: convien fare un cavo del vetro comune [vetro *flint*] col fuoco virtuale della metà come di 6, e il convesso di crun glaz [vetro *crown*] col fuoco reale della terza parte, come di 4, e si ha un oggettivo di 12, che raduna tutti i raggi in un punto tanto più accuratamente, quanto era più accurata la propor-

dei lavori di Clairaut, pubblicati nel 1762, di cui verrà presumibilmente a conoscenza a Vienna solo nel gennaio-marzo 1763[34], al ritorno del viaggio a Costantinopoli, e della memoria di Klingestierna del 1761, di cui prenderà visione a quanto sembra solo nell'estate del 1763[35], nel corso del suo soggiorno a Lucca, ospite di Giovan Stefano Conti, si può dire che questa sua teoria semi-quantitativa fosse allora, in Inghilterra, il primo tentativo geometrico di spiegare correttamente la possibilità di correggere l'errore di cromatismo nei sistemi ottici.

Sfortunatamente Boscovich venne tagliato fuori, a causa del suo lungo e infruttuoso viaggio a Costantinopoli, dal circolo degli avvenimenti che nel corso del 1761 e 1762, soprattutto per merito delle esperienze di Clairaut, gettarono le fondamenta della teoria e della pratica dei sistemi acromatici. La geniale e frenetica attività da lui svolta a partire dagli inizi del 1763, gli permisero tuttavia

---

zione della dispersione deì raggi ne' due versi. Nella fig: 1 [che qui si omette] vi è la lente cava [di vetro *flint*], in cui entra il raggio DF parallelo all'asse AC, e invece di continuare diritto per FE esce dopo due refrazioni diviso, andando i fili più refrangibili come i violetti verso G, e i meno come i rossi verso H, e il fuoco virtuale de' primi è in B, de' secondi in A. Sicché la lente convessa [di vetro *crown*] della fig. 2 in ogni suo punto I riceve i fili violetti come se fossero partiti da B e i rossi da A. Ora essa li torce in modo, che vadano tutti in un medesimo foco reale. L'angolo AIB, che corrisponde all'AFB di fig: 1, è una delle 27 parti della totale inflessione IBK, e l'angolo GIH, cioè lo stesso AIB è una delle 41 ½ della totale inflessione CIC. Questo secondo vetro, che deve correggere la divergenza del cavo e fare una nuova convergenza di più, fa una refrazione maggiore del cavo talmente che la sua 1/41 ½ è uguale ad 1/27 della deviazione, che ha fatta il cavo, e come i piccoli angoli son come i sevi, si trova che appunto debbano perciò andar in C e i violacei e i rossi.

La dimostrazione si ricava dalla formula, e [f] che esprime generalmente la distanza del foco nelle lenti: ma per li raggi che si scostano più dall'asse, vi è qualche differenza, e come l'apertura deve essere più grande, l'errore della figura sferica cresce, e fa in modo che non possono ricevere questi cannocchiali tutta l'ultima perfezione, benché ne ricevano tanta, che è una meraviglia." (Cfr., *ENB,* ibid-. pag- 404).

[34] Dopo essere giunto il 30 dicembre 1762 a Vienna, dal lungo viaggio a Costantinopoli, e poi in Polonia, Boscovich scriveva a Giovan Stefano Conti il 3 aprile 1763, in vista della visita che egli farà poi a Lucca al suo corrispondente, dalla fine di giugno alle metà di luglio circa: "Porterò anche meco una dissertazione, che attualmente lavoro sulli telescopi Dollondiani, nella quale tutte le cose essenziali sono di Clairaut, messe ne' tomi dell'Accademia nel 1756, e 1757, benché lette assai dopo." (Cfr., *ENB,* Corrispondenza, Vol. V/I, "Carteggio con Giovan Stefano Conti (1756-1768), a cura di Edoardo Proverbio, pag. 98). Da queste parole si arguisce che Boscovich dovette aver già preso visione delle due Memorie di Clairaut, pubblicate nel 1762 (si veda la nota 6), subito dopo il suo arrivo a Vienna.

[35] È da credere che Boscovich venisse a conoscenza della Memoria di Klingenstierna pubblicata in latino nel 1761, ed in francese nel 1762 (si veda la nota 6), nel corso del suo soggiorno a Lucca nella prima metà di luglio 1763. Infatti a Stefano Conti il 10 dicembre 1763 egli scriveva: "Credo, che Klingenstierna in una di quelle dissertazioni, che vidi costì [a Lucca] alla sfuggita, introduca anche l'oculare […]." (Cfr., *ENB,* ibid., pag. 126). Che la Memoria di Klingenstierna apparsa nel *Journal des Savans*, fosse in possesso del Conti, è confermato da una lettera inviata al Conti stesso da Leonardo Ximenes in data 16 giugno 1763, forse proprio in vista dell'arrivo di Boscovich a Lucca, in cui egli gli annuncia l'invio di detta Memoria.

di recuperare questo svantaggio iniziale. Il suo contributo scientifico, in termini di elaborazione teorica, ma soprattutto in termini di elaborazione di metodi per la soluzione di importanti problemi di ordine pratico e tecnico, legati alla misure dell'indice di rifrazione del vetro, alla misura della curvatura delle lenti degli obiettivi acromatici, ed alla stessa produzione dei vetri di diverso indice di rifrazione, di cui gli obiettivi e gli oculari acromatici erano costituiti, fu certamente all'altezza, e su alcuni problemi superiore, a quello dei più accreditati ottici teorici e pratici del tempo.

Appena giunto a Vienna, e presa visione delle Memorie di Clairaut, egli si accinse a scrivere una prima memoria sugli obiettivi acromatici, in cui propone una soluzione più semplice di quella prospettata dallo stesso Clairaut nel suo primo lavoro del 1762. Già nell'aprile del 1763 Boscovich deve aver inviato a Clairaut questo suo contributo, che l'ottico parigino farà stampare nel *Journal des Sçavans*, nell'agosto dello stesso anno[36]. Si tratta dell'opera pubblicata in questa Edizione Nazionale col codice 1.75[37], che costituisce il primo importante contributo teorico di Boscovich alla nuova ottica dei sistemi acromatici. A questo primo lavoro fece seguito una Dissertazione, a cui egli dovette lavorare già nel corso della permanenza a Vienna, e che il 3 aprile 1763, in vista del soggiorno lucchese egli annunciava a Stefano Conti, scrivendogli: "Porterò anche meco una dissertazione, che attualmente lavoro sulli telescopi Dollondiani"[38], che egli terminò nel novembre del 1763[39], e che inviò per la pubblicazione nei "Commentari" dell'Istituto bolognese sulla fine dello stesso anno[40], ma che vide la luce solo nel 1767[41], anche se vi sono evidenze

[36] Da Parigi, in data 8 maggio 1763, Clairaut scriveva, indirizzandola a Venezia, una lettera a Ruggiero Boscovich, che doveva essere appena partito da Vienna, in cui scriveva: "J'ai eté charmé de voir que vous avés eté content de mes recherches sur les nouvelles Lunettes, Et les reflexions qu'elles vous ont occasioné m'ont fait beaucoup de plaisir. Comme je suis bien aise de donner aux amateurs tous les subjects d'émulation possible sur cette matiere j'ai fait faire un traduction de votre morceau, et e vais l'imprimer dans le Journal de Savans, imaginant bien que vous ne seréz point faché de l'y voir paraitre. Lorsque vous aurés des dissertations pareilles que vous destinerés au meme usages, je vous prierai d'employer le moins des figures qu'il sera possible, parceque c'est un sujet de mecontentement pour l'imprimeur que je me trouve comme oblige d'appaiser en entrant dans les fraix". (Cfr., V. Varićak, *Drugi Ulomak Boškovićeve korespondencije*, Zagreb, 1912, pag. Cccxx).

[37] Cfr., "Extrait d'une lettre du P. Boscovich à M. Clairaut", *Journal des Savans,* Aout, 1763, pag. 550-558.

[38] La citazione è riferita nella precedente nota 34.

[39] Nella lettera a Stefano Conti in data 19 novembre 1763, Boscovich scriveva: "e finii jeri sera la dissertazione apparecchiata per Bologna." (Cfr., *ENB,* Corrispondenza, Vol. V/I, cit. nella nota 34, pag. 119).

[40] Nella sua seconda Dissertazione, cit. nella nota 47, Boscovich iniziava, scrivendo: "Sub finem anni 1763 transmisi ad Academiam Dissertationem, quae impressa est in prima parte huiusce Tomi." (Cfr., ibid., pag. 265).

[41] Cfr., Rogerii Josephi Boscovich, "De recentibus compertis pertinentibus ad perficiendam Dioptricam", *De Bononiensi Scientiarum et Artium Instituto alque Academia / Commentarii,*

che Boscovich inviasse a Clairaut parte, se non tutto il contenuto di questa sua prima Dissertazione[42]. In questa dissertazione egli dà una teoria completa degli errori di aberrazione sferica e dovuti allo spessore delle lenti[43], e degli errori che derivano dalla diversa rifrangibilità dei raggi[44], in un sistema ottico costituito da due lenti. Egli tratta inoltre dei metodi per la misura della curvatura delle lenti, e dell'indice di rifrazione dei vetri di cui le lenti sono composti[45].

Si è detto della permanenza a Vienna di Ruggiero Boscovich, e del suo successivo soggiorno a Lucca, ospite di Stefano Conti, ove inizia quelle sue osservazioni e misure, con gli strumenti da lui progettati, a cui darà seguito a Pavia, dopo la sua chiamata ad insegnare matematica in questa Università, ed a Milano. I risultati di queste osservazioni ed esperienze effettuati con i vari prismi semplici e composti, e con i vari suoi vitrometri, sono descritti in una seconda Dissertazione, redatta presumibilmente fra la seconda metà del 1764 ed i primi del 1765, che a quanto risulta ricevette gli elogi di Clairaut, al quale Boscovich, come aveva fatto per la prima, dovette averne inviato stralci[46], ma pubblicata, come la precedente, nei "Commentari" bolognesi nel 1767[47]. In questa Dissertazione Boscovich presenta e discute i risultati delle determinazioni delle qualità rifrattive e dispersive di cristalli e prismi da lui effettuate con il vitrometro ad acqua, e con altri strumenti e metodi da lui progettati, basati sul prisma rettilineo, mistilineo o curvilineo, e variabile[48]. È importante sottolineare che l'applicazione del prisma variabile di Abat (inizi 1764), porterà Boscovich ad elaborare una nuova teoria per la determinazione della dispersione delle lenti, che lo spingerà a progettare e co-

---

Tomo Quinti, Pars Prima, Bononiae, 1767, pag. 169-235. Una traduzione tedesca di questa Dissertazione venne stampata a Vienna nel 1765, a cura dell'amico gesuita Karl Scherffer (cfr., *Abhandlung von den verbesserten dioptrischen Fernrohren, […],* Wien, 1765.

[42] Si vedano i contenuti delle lettere di Clairaut a Boscovich in data 15 gennaio 1765, e 24 febbraio 1764. (Cfr., Varićak, cit. nella nota 36, pag. Cccxxi-cccxxii, e Cccxxv-cccxxvi).

[43] Cfr., "De recentibus compertis", cit. nella nota 41, § II, pag. 177-186.

[44] Cfr., "De recentibus compertis", cit. nella nota 41, §§ III, e IV, pag. 186-202.

[45] Cfr., "De recentibus compertis", cit. nella nota 41, §§ V-VII, pag. 202-235.

[46] A questa dissertazione si riferiva Boscovich, quando scriveva a Stefano Conti in data 1 febbraio 1765: "Mando attualmente la seconda dissertazione a Bologna, ma non ho tempo da ordinarla a modo mio, onde sarà più asiatica dell'altra, e non avrò tempo da far tutti i calcoli, che vi vorrebbero: […]." (Cfr., *ENB,* cit. nella nota 39, pag. 248). A questa stessa Dissertazione si riferiva poi presumibilmente Clairaut, nella lettera a Boscovich del 19 luglio 1764, quando scriveva: "Quant a votre Mémoire destiné au Volume de l'Institut de Bologna, il me semble bien plus propre à avancer l'optique que le 3.me Vol. des Opuscoles de M. D'alembert qui abonde en recherché analitiques, en formules bien longues, en considerations savants, mais qui ne decelent point du tout le genie propre à la physique".

[47] Cfr., Rogerii Josephi Boscovich, "De unione colorum aliorum post alios per binas substantias, ac unione multo majore per tres". *De Bononiensi Scientiarum et Artium Instituto atque Academia / Commentarii,* Tomi Quinti, Pars Altera, Bononiae, 1767, pag. 265-333.

[48] Per una analisi più approfondita delle misure ed esperienze condotte da Boscovich con questi strumenti da lui progettati, si rinvia a: Edoardo Proverbio, "R.J. Boscovich and the Measurement of the Refractive Quality of Lenses", *Memorie della Società Astronomica Italiana,* Vol. 60, **4**, 1989, pag. 837-888.

struire, a quanto pare contro l'opinione di d'Alembert, obiettivi ed oculari acromatici costituiti da tre lenti[49]. Nello stesso tempo egli si era convinto che le aberrazioni cromatiche degli oculari non fossero affatto trascurabili[50], e in tal senso iniziò le sue ricerche e sperimentazioni per la realizzazione di oculari acromatici che Clairaut aveva tentato senza successo[51]. E se prima aveva pensato di correggere tale errore con una compensazione tra oculare e obiettivo[52], si dedicherà poi alla teoria e pratica di oculari acromatici a due e tre lenti[53].

---

[49] Cfr., "De unione colorum", cit. nella nota 47, § 9, pag. 322-329. Anche Clairaut aveva intuito che due sole sostanze non avrebbero eliminato i colori dello spettro, ma senza elaborare poi una teoria dei sistemi diottrici a tre lenti (cfr., Le prime due "Memoires", cit. nella nota 6). Boscovich si convinse della necessità di utilizzare obiettivi acromatici a tre lenti agli inizi del 1764, e in tal senso scriveva a Stefano Conti in data 14 febbraio 1764: "quando saremo pronti a farne di due vetri, si potrà provare a farne di tre qualità differenti. Mi par di veder chiaro, che con 3 si possono unire gli estremi, e un de' medi. Allora quello che vi resta è una cosa insensibile. Subito, che avrò la libertà di applicarmici a Pavia ne farò le prove, e le prescriverò i prismi di flint, strass, e comune, che servono per questo. Farò i calcoli sul fine della settimana, che avrò più libertà, […]." (Cfr., *ENB,* cit. nella nota 34, pag. 156). Sull'opinione di d'Alembert in merito alla opportunità di fare uso di tre sostanze differenti negli obiettivi acromatici, scriveva Lalande a Boscovich in data 27 aprile 1767: "Si M. d'Alembert désaprouve les trois substances, il ferà voir combien il est peu instruit dans l'experience des couleurs, car non seulement vous l'avés bien démontré, mais M. Clairaut meme avoit annoncé que deux matières ne corrigeoient pas les couleurs (Memoire de l'acad. 1757, pag. 528) et il ajoute: cela vient sans doute de ce que les parties du spectre que change matiere refringente donne ne sont pas exactement proportionelles aux longeurs totales de ces spectres [ciò che Boscovich aveva dimostrato con le sue esperienze]. D'Alembert qui n'a jamais manié des prisme ne sait rien de tout cela. Au reste il n'a pas dit que les trios substances étoient inutiles, du moins dans le memoire qu'il a lù a l'academie, mais comme il prepare un volume d'opuscules qui auront principalement l'0ptique pour subject, c'est probablement dans ce volume qu'il mettra ce don't le P. Frisi vous a parlé." (Cfr., Varićak, cit. nella nota 36, pag. Cccxli).

[50] Nella lettera a Stefano Conti in data 24 dicembre 1763, scriveva Boscovich, parlando degli obiettivi a due e tre lenti: "Questo correggerà gli errori dell'oggettivo; ma vi rimarranno quelli dell'oculare, nella quale l'errore della figura sferica non è molto sensibile, ma lo è moltissimo quello della diversa rifrangibilità. Vorrei che provasse anche un oculare di due vetri, […]." (Cfr., *ENB,* cit. nella nota 34, pag. 131).

[51] Rispondendo ad una precedente lettera di Boscovich a noi non pervenuta, in cui quest'ultimo doveva averlo informato delle sue esperienze per la correzione del cromatismo negli oculari, gli scriveva: "Quant aux oculare composés de deux matieres, l'ai tenté dem'en sevir, mais le ne pas reussi". (Cfr., Varićak, cit. nella nota 36, pag. Cccxxiii).

[52] Prima di proporre a Stefano Conti di realizzare oculari costituiti da due lenti, per correggere, come negli obiettivi, l'errore di cromatismo, Boscovich tentò, come Clairaut, di eliminare l'effetto cromatico degli oculari, con una compensazione delle correzioni dell'obiettivo, ed in tal senso scriveva a Stefano Conti il 10 dicembre 1763: "Nella mia dissertazione [presumibilmente il "De recentibus compertis"], trovo il modo di far il calcolo in maniera: che l'oggettivo corregga l'errore più del dovere, e invece di farlo zero, lo faccia negativo; onde i rossi si radunino più vicino, e i violacei più lontano, e ciò appunto quanto richiede l'oculare." (Cfr., *ENB,* cit. nella nota 34, pag. 126).

[53] Boscovich svilupperà la sua prima teoria sugli effetti cromatici degli oculari nel "De re-

L'importanza delle due Dissertazioni, che come si è visto suscitarono il giudizio largamente favorevole di Clairaut, è confermato dal fatto che esse vennero ristampate a Vienna con minime variazioni e con la presenza di numerose note, a cura di Karl Scherffer, nello stesso anno 1767, accompagnate da altre tre Dissertazioni di indubbio interesse per l'ottica fisica[54]. Dalle sia pur minime variazioni apportate alle prime due Dissertazioni, si deve credere che esse dovettero essere riviste, corredate di note, licenziate dall'autore e stampate nelle *Dissertationes quinque,* dopo la stampa delle stesse Dissertazioni nei Commentari bolognesi. Le Dissertazioni contenute nelle *Dissertationes quinque* vengono quindi a costituire l'edizione di riferimento[55].

L'ultimo contributo di Boscovich alla conoscenza della nuova ottica dei sistemi acromatici è dato dalle sue *Memorie sulli cannocchiali diottrici*, del 1771, scritto su invito di Carlo Giuseppe Campi, cultore di scienze fisiche[56], che lo dedicava a Giovanni

---

centibus compertis", cit. nella nota 41, § IV ("De correctione errorum"), pag- 197-199, e darà poi una teoria completa dei sistemi oculari a due e tre lenti nell'*Opera pertinentia ad Opticam et Astronomiam*, del 1785, cit. nella nota 3, Tomo secondo, Opuscolo primo, pag. 1-194.

[54] Cfr., *Dissertationes quinque ad Dioptricam pertinenses / P. Rogerii Josephi Boscovich / […],* Vindobinae, 1767. Quest'opera di Boscovich, contenuta nel presente Volume IV/I-II, dell'*ENB* col codice 1.82, riproduce, con minime variazioni, le due Dissertazioni, 1.76 e 1.77, pubblicate nei Commentari bolognesi, e le seguenti altre tre operette: Dissertatio III / "De distribuzione Luminis refracti a lentibus per circellum exprimentem errorem figurae sphaericae", che egli aveva già trattato nel *De lentibus et telescopiis* del 1755 (si veda la nota 22); Dissertatio IV / "De focis trium superficierum cum consideratione errorum, et applicazione ad specula vitrea", che tratta tutto ciò che appartiene agli specchi concavi di vetro; Dissertatio V / "De focis superficierum qotcumque cum applicazione ad focos unius lentis, vel binarum, potissimum ex reflexione duplici in binis*"*, che calcola il fuoco di una qualunque superficie e dà le applicazioni a casi particolari di una o due lenti.

[55] Iniziando il § 17 della Dissertatio I delle *Dissertationes quinque* (pag. 10), Boscovich scriveva, modificando l'incipit dello stesso paragrafo della Dissertatione 1.76 ("De recentibus compertis"): "Haec pertinent (*d*) ad correctionem erroris orti a diversa refrangibilitate". E nella nota (*d*) a piè di pagina specificva: "In editione Bonomiensi rem alter narraveram, cum nondum vidissem eum Transactionum tomum". Se, come è lecito pensare, il Tomo delle Transazioni inglesi a cui Boscovich fa qui riferimento è quello del 1758, pubblicato nel 1759, contenente il lavoro di Dollond sui cannocchiali acromatici (si veda la nota 29), egli non deve aver presa diretta visione di questo lavoro, che dopo la consegna del "Recentibus compertis" ai Commentari bolognesi, e cioè dopo la fine del 1753, a conferma del fatto che i precedenti suoi riferimenti al lavoro di Dollond (si vedano le note 25 e 30), indicano che egli venne sì a conoscenza di quest'ultimo lavoro, ma indirettamente tramite Short, o forse solo di sfuggita, data la sua difficoltà a leggere l'inglese. È peraltro sorprendente che nello stesso § 17 della prima Dissertazione, in cui rimanda alla nota (d) sopraccitata, egli affermi poi che il lavoro di Dollond venisse pubblicato nelle Transazioni Anglicane del 1760, stampate nel 1761.

[56] Cfr., *Memorie sulli cannocchiali diottrici del P. Ruggiero Giuseppe Boscovich della Compagnia di Gesù*, Milano, 1771. Carlo Giuseppe Campi (1738-1799), chierico regolare somasco, studioso di scienze fisiche, antico maestro e poi collaboratore di Alessandro Volta, appartenne a quel gruppo di personaggi, che, a Milano, ebbero alterni rapporti con Boscovich, e che costituirono la nuova intelligenza scientifica della capitale lombarda, che comprendeva, oltre al Fromond ed al Campi, e prima del Volta, Marsiglio Landriani, Carlo Amoretti e Francesco Soave, che

Francesco Fromond, con cui Boscovich intrattenne una interessante collaborazione, attorno agli anni '70 per la produzione di vetro flint[57]. Le *Memorie*, che a quanto pare erano state sollecitate dallo stesso Fromond[58], vennero scritte da Boscovich "per dare una giusta idea della natura, e qualità principale de' Cannocchiali a persone che avessero solo una tenuissima tintura della geometria", e all'inizio conteneva solo una prima parte[59], che poi Boscovich ritenne opportuno completare con una seconda parte costituita da tre Memoriette[60], "in cui", scriveva a Giuseppe Antonio Slop, astronomo della Specola Accademica pisana, "vi sono delle cosette elementari anche quelle, ma più interessanti, massime una, che dimostra provenire dalle oculari, e non dagli oggettivi, que' colori, che si vedono nelli cannocchiali, i quali [colori] con tutto l'oggettivo Dollondiano vi sono grandissimi, ove il campo, e l'ingrandimento sieno considerabili, se non si applica il rimedio alle oculari medesime, e insieme dò il rimedio, che vi vuole."[61] Con quest'ultimo significativo lavoro si chiude la serie dei contributi dati

furono tra i promotori della pubblicazione della prima serie della *Scelta di Opuscoli interessanti sulla scienza e sulle arti* (1775-1778)*,* che costituì un importante strumento di rinnovamento della cultura e dell'attività scientifica nella Lombardia austriaca.

[57] Giovanni Francesco Fromond ebbe frequenti e significativi rapporti con Ruggiero Boscovich, soprattutto a partire dal periodo in cui quest'ultimo fu trasferito da Pavia alle Scuole Palatine milanesi (1770-1773). Sui rapporti di Boscovich con Fromond ed il gruppo dei giovani fisici e ottici milanesi, si rinvia a: Edoardo Proverbio, "Ottici pratici e cultori di ottica lombardi e veneti nella seconda metà del settecento e loro rapporti con Ruggiero Giuseppe Boscovich", *Atti della Fondazione Giorgio Ronchi,* Anno LV, **4-5**, 2000, pag. 459-514.

[58] Nella Dedica al "Signor Gio. Francesco Fromond cremonese", che allora si trovava proprio a Londra, scriveva Giuseppe Campi: "Ecco il trattato de' Cannocchiali breve, affatto elementare, ma compito insieme, e sugoso, che voi cotanto desideravate."

[59] Nell'"Avviso dell'Autore" alle *Memorie*, da cui è tratto il primo virgolettato del testo, Boscovich scriveva poi: "Nella prima parte si dà un'idea netta delle quattro qualità principali, che devono considerarsi in ogni cannocchiale e sono la distinzione, l'ingrandimento, la chiarezza, e il campo; e per ottener questo fine si è scelta la forma più comune de' Cannocchiali Diottrici: ma si è avuto principalmente in mira un oggetto interessantissimo, come lo è la vera sorgente de' colori, che appariscono all'occhio in ogni sorte de' cannocchiali, quando essi hanno campo, e ingrandimento considerabile. Si fa vedere, che essi non nascono dagli oggettivi, à quali principalmente si sono attaccati i Geometri, e si è applicato il rimedio dell'unione delle due sostanze dal Dollond in que' cannocchiali, che in oggi si chiamano acromatici. Si fa vedere che questo nome non può convenire, se non si rimedia al male cagionato dalle oculari: si determina questo male, e se ne propone il rimedio, ma senza la dimostrazione del principale fondamento di esso rimedio".

[60] Nella seconda delle tre "Memoriette" che compongono la seconda parte delle *Memorie*, Boscovich, dà la dimostrazione del rimedio per correggere l'aberrazione cromatica delle oculari. Nella prima "Memorietta" egli fornisce invece una "giusta idea di quello, che accade a' raggi partiti da un punto d'oggetto situato fuori dall'asse". Nella terza "Memorietta" infine egli sviluppa "il fondamento di varie verità supposte nella parte prima, e nelle prime due Memoriette della seconda."

[61] Cfr., Lettera di Boscovich a Slop in data 23 dicembre 1771, in: Gino Arrighi, "Ruggiero Giuseppe Boscovich e Giuseppe Antonio Slop", *Studi trentini di scienze storiche*, Annata XLIII,1964, **3**, pag. 209-242.

da Boscovich allo sviluppo della teoria e della pratica dei cannocchiali acromatici, prima della sua partenza per Parigi, ove, in qualità di ottico della Marina, scriverà una serie di nuove importanti memorie riguardanti la teoria e le soluzioni pratiche relative alla realizzazione di obiettivi ed oculari acromatici, che egli pubblicherà nell'"Opera pertinentia ad Opticam et Astronomiam", nel 1785[62].

A questo fecondo periodo parigino appartiene peraltro l'ultima operetta presentata in questo volume della *ENB*. Si tratta del *Account of a new micrometer and megameter,* pubblicato nelle Transazioni londinesi nel 1777[63], che fu la causa di una lunga controversia con l'Abate Rochon[64], a seguito della rivendicazione fatta da Boscovich della priorità dell'ingegnosa idea di fare ricorso, per la misura di piccoli, ma anche di grandi angoli, non solo alla doppia rifrazione del cristallo di rocca, ma anche di semplici prismi di vetro comune.

[62] Cfr., *ENB,* Opera pertinentia ad Opticam et Astronomiam / Volume primo, "Opere scientifiche / Astronomia e Ottica", Vol. V/I, a cura di Edoardo Proverbio, 2010; *ENB*, Opera pertinentia ad Opticam et Aatronomiam / Volume secondo, "Opere scientifiche / Astronomia e Ottica", Vol. V/II, a cura di Edoardo Proverbio, 2010.

[63] Cfr., "Accout of a new Micrometer & Megameter. By the Abbé Boscovich, etc.", *Philosophical Transactions of the Royal Society / of London,* Vol. LXVII. For the Year 1777, Part II, London, 1778, pag. 789-798.

[64] Della controversia che oppose Boscovich all'Abate Rochon su questioni di priorità, egli diede ampia testimonianza nelle Memorie che scrisse nell'Opuscolo IV, e nell'Extrait di questo stesso Opuscolo, nel Volume secondo dell'*Opera pertinentia,* cit. nella nota 3.

1.**59**

De Lentibus et Telescopiis Dioptricis Dissertatio, […], Romae, 1755

DE

LENTIBUS ET TELESCOPIIS DIOPTRICIS

DISSERTATIO

QUAM AUSPICE

S. ALOYSIO GONZAGA

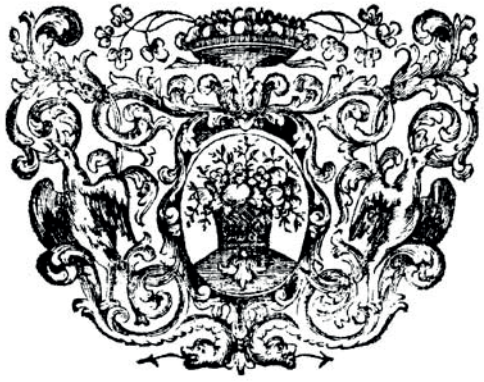
PATRONO SUO BENEFICENTISSIMO

PUBLICE HABUIT IN SEMINARIO ROMANO

MARCHIO ALOYSIUS LEONORI

SEMINARII ROMANI CONVICTOR

ATQUE ACADEMICUS REDIVIVUS.



ROMÆ MDCCLV.

Ex Typographia Antonii de Rubeis in via Seminarii Romani.

SUPERIORUM PERMISSU.

Effigies omnium su millima S. Aloysij Gō
Zuge, qualis aseruatur in eius olim cubiculo
nunc sacello supieri Collegij Romani

ARgumentum hujus noſtræ exercitationis ſeligimus tritum illud quidem, & ab omnibus Opticis ubique pertractatum, quod tamen non idcirco ineptum eſſe credidimus ad rem noſtram, cum ea nimirum, ad edendum publice ſtudiorum noſtrorum ſpecimen aliquod aptiora ſint, quæ vulgo notiora ſunt itidem. Præterquamquod ſi in re maxime trita ordinis, ac deductionis peculiarem aliquam rationem habeamus, ſi quid non ita pervulgatum, & nobis ſaltem novum adjiciamus; ſi, quæ inde in Opticam, & Aſtronomiam derivantur commoda, quæ occurrant incommoda, ac errorum a ſummis etiam aliquando viris admiſſorum pericula, percenſeamus; arbitramur utique nec inutilem operam noſtram fore, nec injucundam.

2. Ut autem ab ipſis primis principiis rem ordiamur nemo ſane ignorat, eam eſſe luminis proprietatem, ut dum ex uno medio migrat in aliud diverſi generis, & diverſam vim exercentis in lumen ipſum, nonnihil inflectatur, quæ inflexio dicitur refractio. Fit autem ea lege itidem notiſſima, ut in quavis diverſa inclinatione radii ad ſuperficiem ſinus anguli incidentiæ ad ſinum anguli refracti, quos nimirum radius directus, & refractus continent cum recta perpendiculari ad ſuperficiem ipſam, ſit in ratione data, quæ ratio in ingreſſu ex aere in vitrum eſt proxime ut 31 ad 20, vel ut 3 ad 2, contra in ingreſſu e vitro in aerem ut 20 ad 31, vel ut 2 ad 3.

3. Hæc proprietas luminis efficit, ut dum per emiſſionem luminis factam a corpore lucido, vel per eam, quam reflexionem dicimus factam a corpore lumine proprio carente, & cogente lumen acceptum a corpore lucido retro regredi, radii ad oculum noſtrum deveniunt, iidem intra oculum intorti coadu-

nentur in oculi fundo, & ibi objecti imaginem depingant. Id nimirum fit potiſſimum ope lentis chryſtallinæ, quam habemus in oculo, lentium enim utrinque convexarum eſt lumen colligere per refractionem. Qua id ratione fiat, quæ in ea collectione habeantur vitia, quæ vitiorum remedia, & remediorum limites, quo pacto per vitra vel ſolitaria, vel conjuncta adjuvetur oculus, & elevetur ad diſtinguenda ea, quæ per ſeſe non poſſet, quæ in eo ipſo vitia adhuc neceſſario remaneant nunquam amovenda, niſi ipſa mutetur natura luminis, hujus erit diſſertationis perſequi per gradus.

4. Et primo quidem fieri poſſet, ut radii omnes ab unico digreſſi objecti puncto in unico itidem puncto colligerentur, tum vero lentium theoriam haberemus abſolutam, & tam viſio noſtra per ſeſe, quam eadem ſpecillis, & teleſcopiis adjuta, lentibus nimirum ſolitariis, vel combinatis, in immenſum potentiæ ſuæ fines protraheret. At id natura vetat ex pluribus capitibus. Primo quidem, quia figura ſphærica radios omnes utut homogeneos ab unico puncto digreſſos in unico itidem puncto non colligit, ſi e materia conſtet homogenea; quæ tamen figura requiritur e pluribus capitibus; deinde vero quia radii ipſi heterogenei ſunt, & diverſam refrangibilitatem habent, ut Newtonus demonſtravit; unde fit, ut alii citius colligantur, alii ſerius. Verum quoniam, quod ad primum caput pertinet, inveniri poteſt ſuperficies, quæ in unico puncto colligat radios omnes homogeneos ex unico puncto profectos, quam aliter invenit Carteſius, aliter Newtonus, noſtram ſatis ſimplicem illam quidem, & elegantem ejus problematis ſolutionem exhibebimus, quam ſeptem ab hinc annis communicavimus cum doctiſſimo viro Jo. Baptiſta Soardio, in epiſtola, quam is deinde inſeruit geometrico operi, de Curvarum deſcriptione per organa, edito tribus ab hinc annis. Eſt autem hujuſmodi.

F. 1. 5. Sit in Fig. 1. P punctum radians, F punctum, in quo radii coire debeant, quod dicitur focus, & quæratur curvatura A I G ſuperficiei ejuſmodi, ut omnes radii P I D refracti dirigantur per I F ad F. Concipiantur bini ejuſmodi radii infinite proximi P I D, P i d, & centris P, F intervallis P I, F I ducantur arcus circulares, qui occurrant rectis P i, F i in V, u. Quoniam angulus D I i eſt inclinatio radii directi P I D ad ſuperficiem I i, angulus V I i, qui eſt ejus complementum

ad

ad eum rectum, quem arcus V I continet cum ſemidiametro P I producta, erit æqualis angulo, quem idem radius continet cum perpendiculari ad ſuperficiem, qui itidem eſt complementum inclinationis. Erit igitur V I i angulus incidentiæ, & eodem argumento angulus u I i erit angulus refractus. Porro eorum angulorum ſinus ad radium I i ſunt lineolæ V i, u i ob angulos rectos ad V, & u. Quare eæ lineolæ erunt in ea data ratione ſinuum. Eſt autem V i incrementum rectæ P I abeuntis in P i, & u i decrementum rectæ F I abeuntis in F i. Igitur habebimus hoc theorema. *Ut habeatur quæſita curva, ſatis eſt ita determinare puncta I, i ut incrementum continuum rectæ P I ad decrementum rectæ F I ſit ubique in data ratione.*

6. Id Newtonus perficit hoc pacto. Seligatur punctum A ad arbitrium inter P, & F, ubi ſinus incidentiæ ſit major ſinu anguli refracti, tum capiatur A H verſus F itidem ad arbitrium, deinde vero A L ad A H, ut eſt ſinus anguli incidentiæ ad ſinum anguli refracti, & ſi centris P, & F, intervallis P L, F H inveniatur punctum I, quod ſemper eo caſu poterit inveniri, ipſum erit ad curvam quæſitam. Cum enim A L ad A H ſit conſtanter, ut ſinus incidentiæ ad ſinum anguli refracti, erit etiam incrementum illius, quod eſt idem, ac incrementum P L, ſive P I ad incrementum hujus, quod eſt idem ac decrementum F H, ſive F I in illa ratione data ſinus anguli incidentiæ ad ſinum anguli refracti, ut oportebat. Hinc autem facile deducitur, quid facto opus ſit etiam, ubi ſinus incidentiæ ſit major, & cui uſui ſint partes omnes curvæ ita definitæ, conſtructio enim eſt generalis, tam pro caſu, in quo radii debeant convergere ad punctum datum, quod tum dicitur focus realis, quam pro caſu, quo debeant divergere à puncto dato, quod tum dicitur focus virtualis.

7. At ejuſdem curvæ hæc itidem conſtructio, quæ quandam geometricam elegantiam præſefert, facile eruitur. Aſſumpta curvæ origine A, capiatur A B ad A F in ea ratione data ſinus incidentiæ, ad ſinum anguli refracti, ac centro P intervallo P B deſcribatur circulus B D E, tum ducto quovis radio P D, inveniatur in eo punctum I ita, ut ſit I D ad F I in ea ratione data, quod quidem facile præſtatur ducta F D, & facto angulo D F I, cujus ſinus ad ſinum dati anguli F D P ſit in illa eadem ratione, & punctum I erit ad curvam quæſitam. Nam cum ſit I D ad I F in ea ratione conſtanti, erit & decremen-

mentum I D, quod eſt incrementum P I ob P D conſtantem, ad decrementum I F in illa ratione eadem, ut oportebat. Hoc autem pacto conſiderata ejuſmodi curva ſummam habet affinitatem cum conicis ſectionibus. Si enim concipiatur, punctum P abire in infinitum, radiis nimirum, dum incidunt, non divergentibus a puncto dato, ſed parallelis, circulus B D E abit in rectam lineam, cui evadit perpendicularis I D, & ratio conſtans F I ad I D eſt illa ipſa, quam nos in noſtris Conicarum Sectionum elementis aſſumpſimus pro definitione ſectionis Conicæ. Sed ut in ea ipſa epiſtola innui ſub finem, non ſemper habebitur caſus refractionis cum ea lege, ſed aliquando etiam caſus reflexionis cum lege ſimili conſtantis rationis ſinuum anguli incidentiæ, & anguli refracti, cujuſmodi reflexio in natura non exiſtit.

8. Porro eadem curva ſic etiam facile conſtruitur motu continuo, ope filorum, dummodo ratio ea conſtans ſinuum ſit
Fig. 2. data. Nimirum advolvatur filum ſtylis fixis in P, & F, & cuidam mobili I ita, ut in I F ſit toties multiplex, quot unitates exprimit ſinus anguli incidentiæ, & in I P toties, quot exprimit ſinus anguli refracti, ~~quod~~ quidem facile perficitur caput fili alligando ſtylo mobili I, vel alteri e fixis P, F, prout inter illum, & hunc haberi debet filorum numerus par, vel impar. Movendo nimirum ſtylum I ita, ut interea filum totum maneat tenſum, habebitur intentum. Quoniam enim totum filum ſemper manet idem, tanto augebuntur omnia ſimul fila P I, quanto decreſcent omnia I F. Quare numerus incrementorum omnium filorum P I æquabitur numero decrementorum omnium F I. Porro tanto magis augentur, vel minuuntur ſingula, quanto pauciora ſunt; adeoque incrementum unius P I ad decrementum unius F I erit, ut numerus ipſorum F I ad numerum ipſorum P I, nimirum in ratione illa data; ut oportebat. Sic ſi aſſumamus rationem eam in tranſitu ex aere in vitrum ut 3 ad 2, ſatis erit alligare filum ſtylo I, tum illud advolvere ſtylo P, deinde ſtylo I advolvere, tum ſtylo F, tum iterum I, tum alligare F, & erit incrementum P I ad decrementum F I, ut 3 ad 2, in illa nimirum ratione data.

9. Et hoc quidem ſoluto ſemel problemate pro unica ſuperficie, ſolvitur pro ſuperficiebus quotcumque. Primum enim fieri poteſt, ut per refractionem in prima ſuperficie radii reſpi-

ſpiciant punctum quodvis diverſum ab eo, quod debet eſſe focus, tum hujus ope inveniendæ eſt ſuperficies alia quæ ad datum punctum colligat. Sed hæc omnia ad geometricam exercitationem magis faciunt, quam ad uſum. Nam & admodum difficile eſt vitro ejuſmodi figuram accuratè præbere, ſi id ipſum fieri omnino poſsit, & ſi etiam detur fieri poſſe, colligentur in unico puncto a data ſuperficie tantummodo radii, qui e data diſtantia in axe poſita profluunt; reliqui autem omnes, qui diſcedant e quovis alio ipſius etiam axis puncto, vel e quovis puncto extra axem ubicumque aſſumpto non colligentur in unico puncto, ſed in exiguo quodam ſpatiolo. Quamobrem de hiſce contemplationibus minus proficuis ad viſum perficiendum, jam ſatis; ac a Carteſii & Newtoni ovalibus colligentibus radios in unico puncto, ad circulum, qui in ſpecillis, & teleſcopiis adhibetur, faciamus gradum.

10. Porro proponemus problema generale, ex cujus ſolutione pendent omnia prorſus, quæ pertinent ad focos, & cauſticas pro curvis omnibus, adeoque, & ad lentes tum ſimplices, tum compoſitas, & cujus veluti conſectaria ſunt. Dicitur autem focus; ut monuimus, id punctum, in quo coeunt bini radii infinitè proximi inter ſe, divergentes a dato puncto, paralleli, vel convergentes ad datum punctum, ſive reflexi, ſive refracti, poſt reflexionem, vel refractionem in data ſuperficie factam, quod nomen habent, quia ferè ſemper omnes intermedii coeunt in puncto itidem infinitè proximo, ibique in majore copia lumen ita colligitur, ut etiam ignem aliquando ibidem accendat, quod radii ſolares in ſpeculis, vel lentibus præſtare ſolent. Cauſtica autem appellatur ea curva continua linea, quam perpetuo tangit continua radiorum ſeries ſive a dato puncto divergens, ſive ad id convergens, ſive parallela, ſive certa quacumque lege adveniens, ut ſi adveniat ſecundum tangentes datæ cujuſvis curvæ. Porro quoniam generaliter in quavis curva extra caſus quoſdam anomalos binæ tangentes infinitè proximæ inter ſe coeunt in puncto infinitè proximo binis illis contactibus, & quidem inter eos ſito, idcirco ad inveniendum etiam cauſticæ punctum quodvis, ſatis eſt invenire concurſum binorum radiorum infinite proximorum, ſive invenire focum; & continua focorum ſeries eſt ipſa curvæ cauſticæ perimeter. Tam focus autem, quam cauſtica realis dicitur, ſi concurſus ſive con-

tactus eo jaceat, quo radii tendunt; virtualis, ſi jaceat ad partes oppoſitas ita, ut ipſi radii fugiant inde, non eo tendant.

11. Innumerabilis ſane eſt varietas focorum, & cauſticarum pro diverſa curvarum natura, ac ad omnes evolvendos caſus vix integra, & admodum ampla volumina ſatis eſſent, geometria latiſſimos ubique offerente campos, per quos excurras, ſi velis. Sed nos generalem exhibebimus problematis ſolutionem pro ſolo refractionum caſu, ex quo omnia pendent, & innuemus, quæ in eo genere pertinent ad refractiones, tum ea tantummodo derivabimus, quæ ad rem noſtram erunt uſui, nimirum pro lentibus, & teleſcopiis. Problema autem eſt hujuſmodi.

F. 3. *Binorum radiorum, qui ad datum dati circuli arcum deferantur directionibus, quarum datur concurſus, invenire concurſum poſt refractionem.* Idem vero eſt, ac ſi dicatur radiorum infinitè proximorum invenire focum, & ſolvetur pro caſu in quo radii deveniant divergentes a dato puncto, incurrant in partem circuli convexam, ſit ſinus incidentiæ major ſinu anguli refracti, & radii poſt refractionem convergant. Ei caſui nimirum aptabimus & ſchema, & calculum. Sed inde, quæ ad reliquos caſus pertinent eruentur omnia: Nam ſi radii adveniant paralleli, ſatis eſt diſtantiam puncti, a quo divergant, a circuli peripheria concipere infinitam; ſi convergunt, ea jacente ad partes oppoſitas, oportebit ipſam ſumere negativam. Si arcus circuli fuerit potius concavus, ſatis erit ejus radium ad partes oppoſitas jacentem habere pro negativo. Si pro arcu curvo fuerit recta, ſatis erit aſſumere radium circuli infinitum. Si habeatur curva alia quæcumque, ſatis erit ſubſtituere ipſi arcum circuli oſculatoris, qui in re præſenti ipſi æquivalet. Sinuum expreſsio generalis erit, & ſi valor diſtantiæ foci quæſiti ab arcu obvenerit poſitivus, is focus erit realis, & radii convergent; ſi infinitus, radii emergent paralleli; ſi negativus, focus erit virtualis, & radii divergent. Re autem definitâ pro unica ſuperficie, poterit definiri pro ſuperficiebus quotcumque, pro alia nimirum poſt aliam, efficiendo, ut focus priore ſuperficie definitus locum habeat pro ſecunda ſuperficie puncti radiantis. Series focorum continua exhibebit cauſticas; quo quidem pacto unicum hoc problema rite caſibus omnibus applicatum rem omnem perficiet.

F. 3. 12. Ad ejus ſolutionem ſit in fig. 3. punctum radians P, centrum circuli C, recta AC ſecante circulum in A. Bini radii in-

infinitè proximi occurrant arcui convexo in I, & i, eidem producti concurrant in E, & e, ipſi vero refracti per chordas I D, i d concurrant in F, qui erit focus quæſitus, ratio autem ſinus incidentiæ ad ſinum anguli refracti ſit I ad R.

13. Primo quidem cujuſvis radii directi P I faciſe admodum invenietur refractus I D. Ducta nimirum I H diametro per centrum C, tum chorda H E, aptetur in circulo chorda H D, quæ ad ipſum ſit, ut eſt ſinus anguli refracti ad ſinum incidentiæ, & ducta I D erit factum. Cum enim H I ſit perpendicularis ad ſuperficiem, angulus H I E erit ad verticem oppoſitus ei, quem contineret recta ipſa H I producta cum radio incidente P I, adeoque erit angulus incidentiæ. Angulus autem H I D erit angulus refractus. Quoniam vero anguli H E I, H D I ſunt recti in ſemicirculo, aſſumpto H I pro radio, erunt H E, H D ſinus angulorum H I E, H I D, nimirum incidentiæ, & anguli refracti, qui per conſtructionem erunt in ratione data I ad R, ut oportebat. Quare cujuſvis radii directi dabitur refractus in circulo, & in quavis curva ope circuli oſculatoris, vel facilius ope circuli cujuſcumque, qui deſcribatur aſſumpto ſegmento quovis I H ad arbitrium abſciſſo ex normali ad eam curvam, quæ datâ curvâ ipsâ, datur, & facta conſtructione eâdem. Nam demonſtratio pendet unice ex eo quod I H ſit perpendicularis ad arcum A I i in I, & I E H ſemicirculus.

14. Definita directione radii refracti, definire oportebit in eadem punctum F, ſive illum focum. Id autem hoc pacto præſtabitur ope infinitefimalium quantitatum calculo geometrico eruto ex compoſitione rationum. Concipiantur in primis & hic arcus I V, I u centris P, & F, ut in fig. 1., ducanturque C B, C b, C O, C o perpendicula in chordas I E, I e, I D, i d, quas & bifariam ſecabunt, ac C B, C O occurrant chordis i e, i d in R, r.

15. Patet in primis, fore ſimilia triangula rectangula C I O, V I i, cum ob angulos C I i, B I V rectos, dempto B I i communi, remaneant C I B, V I i æquales, & anguli ad B, ac V ſint recti. Eodem autem pacto ſimilia erunt & triangula C i O, u I i, unde illud facile colligitur, fore I u ad I V, ut eſt I O, ad I B, cum nimirum ſit I u ad I i, ut I O ad I C, & I i ad I V, ut I C ad I B. Præterea ob I V, R b perpendiculares eidem P B, erunt ſimilia triangula P I V, P R b,

& pariter ſimilia erunt triangula F I u, F r o. Demum cum recta B R perpendicularis ad C B aſſumi poſſit pro arcu circuli infiniteſimo deſcripti centro C radio C B, erit R b differentia rectarum C b, C B, & pariter r o differentia rectarum C O, C o, quarum illæ erunt ſinus angulorum incidentiæ C I B, C i b, & hæ ſinus angulorum refractorum C I O, C i o ad radios æquales C I, C i o ac proinde in ea ratione I ad R, in qua ſunt ſinus C B, C b ad ſinus C O, C o erit & illarum differentia R b ad horum differentiam r o.

16. Jam vero ratio F I ad F r, ſive contempta infiniteſima O r, ad F O, ſive ratio I u ad r o componitur ex rationibus I u ad I V, I V ad R b, & R b ad r o. Prima ratio eſt ex demonſtratis eadem, ac I O ad I B: ſecunda eadem, ac P I ad P R, vel contemptâ infiniteſimâ R B, ad P B: tertia ratio eſt eadem, ac ſinus incidentiæ I ad ſinum anguli refracti R ex demonſtratis. Igitur collectis ejuſmodi rationibus, erit F I ad F O, ut I x P I x I O ad R x P B x I B. Ea ratio datur, cum dentur & I B, I O dimidiæ chordæ I E, I D, & P B, P I ob data puncta P I B, & ſinus R, ac I. Quare cum dentur etiam puncta I, & O, poterit inveniri in recta ipſa I O producta punctum F, ut ſit I F ad F O in illa ratione data. Satis enim erit efficere, ut eſt differentia eorum terminorum datæ ejuſmodi rationis ad terminum priorem, ita I O ad quartum I F, jacente O F ad partes O, vel abeunte in infinitum vel jacente verſus I, prout primus illius compoſitæ rationis terminus erit in caſu, quem figura exhibet, major, æqualis, vel minor reſpectu ſecundi, & generaliter prout valor O F evaſerit poſitivus, infinitus, vel nullus.

17. Hæc quidem eſt generaliſſima ſolutio, quæ ut patet, omnes involvit caſus latiſſime. In quibuſdam caſibus particularibus evadit multo facilior. Duos ejuſmodi caſus indicabimus, qui ex generali hac formula eruuntur ſpeciminis ergo.

18. Adveniant radii paralleli, puncto P abeunte in infinitum. Ratio P I ad P B erit ratio æqualitatis, quam finita differentia I B non turbabit. Igitur in eo caſu erit I F ad O F, ut I x I O ad R x I B, quæ ratio eſt multo ſimplicior, cum dentur in numeris I, & R.

19. Abeat punctum I in A, ut radius P I deveniat per ipſum axem P A perpendiculariter, & P i ſit ipſi infinite proxi-

ximus. Abibit B, & O in C, ac evadent C B, C O æquales, & P I, P B evadent P A, P C, ſoco F abeunte in aliquod punctum f. Eritque A f ad C f, ut I x P A. R x P C. Quare ſi fiat, ut ſinus incidentiæ I ad ſinum anguli refracti R, ita P C ad P K; erit A f ad f C ut eſt P A ad P K, ac proinde A C ad A f ut eſt P K ad P A, quæ conſtructio elegantiſſima eſt, & eſt illa, quæ in lentibus uſum habet, in quibus radius per mediam lentem traductus eſt perpendicularis ſuperficiei, in quam incurrit.

20. Porro ut generalis ſolutionis fructus aliquis innoteſcat, patet, punctum f debere jacere ad partes C, vel abire in infinitum, vel cadere ad partes A, prout P K fuerit minor, æqualis, vel major quam P A, ſive prout e contrario P A ad P C habuerit rationem majorem, æqualem, vel minorem, quam ſit ratio ſinus R ad ſinum I. Ac pro caſu arcus concavi res æquè facile definitur. Quod ſi pro arcu circuli A I habeatur recta: tum vero res itidem in eo caſu facile admodum abſolvitur. Cum enim ſit A f. C f : : I x P A. R x P C, erit R x A f. C f : : I x P A. P C, & alternando R x A f. I x P A : : C f. P C nimirum circulo abeunte in rectam in ratione æqualitatis, cum abeunte C in infinitum, & manente f evadat C f infinita, ac P C infinita: itidem, quæ cum differre debeant per ſolam P f finitam, debent eſſe in ratione æqualitatis. Erit igitur R x A f = I x P A, ſive P A. A f : : R. I. Solum cum abeunte C infra f mutetur directio C f in proportione illa R x A f. I x P A : : C f. P C, & ipſa negativa proinde fiat, non mutetur autem directio nec P A, nec P C, mutari debebit directio A f juxta ea, quæ demonſtravimus in Diſſertatione de transformationibus locorum geometricorum ad calcem elementorum noſtrarum Sectionum Conicarum cum canonibus, qui in hujuſmodi transformationibus uſum habent incredibilem.

21. Eruitur autem hoc theorema, *ubi radii a puncto radiante digreſſi incurrunt in ſuperficiem refringentem planam ad perpendiculum, focus eſt virtualis, & ejus diſtantia a ſuperficie ad diſtantiam puncti radiantis ab eadem eſt ut ſinus incidentiæ ad ſinum anguli refracti*, quod quidem theorema etiam immediate admodum facile demonſtratur. Porro eodem pacto alia etiam quamplurima theoremata deduci poſſent pro circulorum arcubus quibuſcumque, pro rectis lineis, pro curvis quibuſvis,

nec ſemel generali problemate ſoluto, aliud requiritur, niſi ſolum cognitio naturae curvarum illarum, ac circulorum oſculatorum, & generales illi canones pro transformatione locorum geometricorum, Geometria ipſa itineris duce, & magiſtra.

22. Porro ex ejuſdem problematis ſolutione rite applicata, facile poſſet etiam per algebraicas æquationes finitas, vel infinitesimales pro curvis algebraicis, cauſticæ natura definiri pro quavis curva refringente, data utcumque curva dirigente radios, ſi ii omnes ab unico puncto non divergunt, vel ad unicum non convergunt, nec paralleli ſunt; ſed ea res altiorem requirit indaginem, & multo fuſiorem tractationem, præterquamquod vix ullius eſſe poteſt uſus præter ipſam geometricam contemplationem. Circularis cauſtica uſum habet majorem, ut infra innuam, & multo minus difficulter determinatur. Ejus determinationis ideam quandam generalem tantummodo exhibebimus.

F. 4. 23. Sint in fig. 4. puncta P A C G I B E O F D eadem ac in fig. 3., ducanturque I M, F N perpendiculares ad diametrum A G; & F Q ipſi parallela occurrens M I in Q. Ponaturque A P diſtantia puncti radiantis a circulo = d, A C radius circuli = r, ſinus anguli incidentiæ, & anguli refracti pro I, & R dicantur m, & n, C N abſciſſa cauſticæ relatæ ad circuli centrum ponatur = x, N F ordinata = y, ſumaturque præterea I M = z. Habebitur per circuli naturam $CM = \sqrt{(rr - zz)}$, inde habetur P M = P C - C M, adeoque & P I ob angulum rectum M; cumque ſit P I. I M :: P C. C B, habetur C B, & ob datam C I habetur I B, adeoque P B. Eſt autem m. n :: C B. C O. Datur igitur C O, & proinde O I ob datam C I. Datur autem & C M, ac datur C N = x, adeoque datur M N, ſive F Q. Datur & I Q = I M - M Q = I M - F N. Datur igitur & F I ob angulum rectum Q. Porro datur, & $CF = \sqrt{(x\,x + y\,y)}$. Cum igitur in triangulo F I C acutangulo ſit $CF^2 + 2\,F\,I \times I\,O = FI^2 + CI^2$ ex Euclidis 12. l. 2., habebitur una æquatio. Proportio autem illa F I. F O :: I × I P × I O. R × P B × I B (num. 16.) exhibet alteram æquationem ob datos jam analyticè valores omnes I P, I O, P B, I B, F I, & vero etiam F O = F I - I O. Ope earum binarum æquationum eliminato valore z, remanebit æquatio per x, & y ad curvam quæſitam.

24. Hæc quidem eſt prima ratio, quæ ſe ſponte offert æquationem eruendi, quæ tamen perpoliri plurimum poteſt, ſed eam in-

innuiſſe ſit ſatis, ut innoteſcant vires generalis illius ſolutionis. Illud tantummodo adjiciemus poſſe eliminari potius x, vel y, & haberi æquationem, quæ exhibeat relationem IM ad CN, vel NF, nempe (cum IM ſit diſtantia radii PI a recta PAC conſiderata pro axe) relationem diſtantiæ radii incidentis ab axe, quæ in lentibus eſt ſemidiameter aperturæ vitri, ad diſtantiam puncti cauſticæ ab ipſo axe, vel ad diſtantiam centri a puncto axis, cui reſpondet cauſticæ punctum. Quare e tribus valoribus CN, vel etiam MN, NF, MI, dato uno quovis, poteſt inveniri quivis alius.

25. Quod ſi radii adveniant paralleli, multo facilius omnia determinabuntur, quæ ad cauſticam pertinent, nam & proportio illa fundamentalis evadit ſimplicior, nimirum IF. OF:: IxIO. RxIB (num. 18.), & IB evadit = CM, ac CB = MI, facta IB parallela AC. Verum res multo adhuc evadit minus compoſita, ubi punctum I ſit admodum proximum puncto A, quo caſu principium cauſticæ proximum axi, multo facilius determinari poteſt, in qua inveſtigatione Geometria exhibet multa præclariſsima compendia, ſi adhibeantur in quantitatibus admodum exiguis canones quidam, qui pertinent ad quantitates infiniteſimas, de quibus agemus in quarto noſtrorum elementorum tomo, & eorum ope alibi hanc ipſam inveſtigationem exhibebimus.

26. Interea, quod attinet ad inveſtigationem foci in ipſo axe pro radiis ad ipſum accedentibus in infinitum, quod quidem ſatis eſt pro focis lentium, etiam ſine illius generalis problematis ſolutione res hoc pacto facile definietur. Sit radius PI infinitè proximus axi PA, qui refractus per ID cum eo concurrat in R, & quæratur punctum R. Erit CIB angulus incidentiæ, CIO angulus refractus. Jam vero eſt IR ad CR, ut ſinus anguli ICR ad ſinum anguli CIR, ſive aſſumpto angulo CIB intermedio, conjunctim ut ſinus anguli ICR ad ſinum anguli CIB, & ſinus hujus ad ſinum CIR. Prima ratio eſt eadem, ac ſinuum PCI, PIC, cum ii anguli ſint complementa ad binos rectos angulorum ICR, CIB, & idcirco habeant eoſdem ſinus, adeoque eſt eadem, ac lateris PI ad PC. Secunda autem ratio eſt, ſinus incidentiæ ad ſinum anguli refracti. Igitur componendo eas rationes, erit IR ad CR, ut IxPI ad RxPC. Abeat jam punctum I in A, &

R abibit in quoddam punctum axis f, recta P I in P A, & I R in A R. Erit igitur A f ad C f, ut I × P A ad R × P C prorſus, ut e formula generali deduximus pro hoc caſu.

27. Quod ſi radii fuerint etiam paralleli abeunte P in infinitum, fit ratio P I ad P C, vel P A ad P C ratio æqualitatis, adeoque remanet I R ad C R, vel ultimo A f ad C f, ut eſt ſinus incidentiæ I ad ſinum anguli refracti R, & radius A C ad diſtantiam A f foci f a ſuperficie refringente A I, ut eſt ſinuum differentia ad ſinum incidentiæ. In ingreſſu ex aere in vitrum, cum ſit I ad R, ut 31 ad 20, erit A C ad A f, ut
F. 5. 11 ad 31. Quod ſi in fig. 5, deveniant perpendiculariter ad ſuperficiem vitri B b, per quam tranſire debent irrefracti, tum delabantur ad ſuperficiem concavam B A b, erit e contrario ſinus incidentiæ 20, ſinus anguli refracti 31, ac A C ad A f, ut differentia 11 ad primum 20. Si vero aſſumatur ratio proxima 3 ad 2, invenitur A f in fig. 4 tripla, & in fig. 5 dupla tantummodo radii circuli, unde hujuſmodi habetur theorema. *Radii proximi axi delati directione parallela ipſi axi ex aere ad vitri ſuperficiem ſphericam convexam, poſt refractionem convergunt ad diſtantiam, quæ æquatur proximè triplo radio ſphæræ: ubi e vitro ingrediuntur in aerem delati directione parallela axi ad ſuperficiem concavam ſibi, convexam aeri, convergunt proxime ad punctum diſtans per intervallum æquale duplo radio, ſive uni diametro ipſius ſphæræ.*

28. Facile, & illud deducitur punctum R in fig. 4 jacere citra f. Nam I R eſt minor, quam A R, adeoque ratio I R
F. 4. ad C R, eſt minor, quam A R ad R C. Debet autem eſſe
5. I R ad R C, ut I ad R, ut A f ad f C. Quare ratio A f ad f C erit minor, quam A R ad R C, & dividendo, ratio A C ad C f minor, quam A C ad C R, nimirum C f major, quam C R, quæ inæqualitas eo erit major, quo I longius receſſerit ab A, & R I magis diſtiterit ab R A. Et quidem facile demonſtratur, ubi I non multum diſtet ab A habere R f ad A M rationem datam, quæ facile definiri poſſet. Quod ſi in fig. 5 radius p B proximus axi, & ipſi parallelus debeat occurrere axi in F, focus autem in axe ſit f, facile itidem demonſtratur fore C F minorem, quam C f. Erit enim B F ad F C, ut eſt A f ad f C. Porro ob B F majorem, quam B A, erit ratio B F ad F C, ſive A f ad f C major, quam A F ad F C, adeoque di-

dividendo A f ad A C ratio major, quam A F ad A C, & proinde A f major, quam A F; ac etiam hìc habet A F ad ſinum verſum A M rationem datam. Ex eo vero, quod in fig. 4. C R, hìc C F ſit minor, quam C f, facile deducitur cauſticam, quæ cuſpidem habet in f, utrobique aſſurgere verſus centrum, & qui ipſam conſtruere vellet per puncta, pro quavis amplitudine A I figuræ 4, vel A B figuræ 5, invenire poſſet ibi in radio I R, hìc in radio I F focum ſuum, & proinde contactum ipſius cauſticæ. Id quidem præſtabit admodum facile computando ſingula loca ex illa ſolutione generali rite applicata. Sed hæc innuiſſe ſit ſatis, fuſiorem enim tractationem requirerent, ut ſingula pro dignitate pertractari poſſent. Interea hìc e conſtructione numeri 26 derivabimus formulas quaſdam generales analyticas ſummo futuras uſui pro lentibus, & teleſcopiis.

29. Dicatur in fig. 4 diſtantia P A puncti radiantis a ſuperficie refringente $= d$, diſtantia foci ab eadem $= f$, radius circuli r, ratio ſinuum m, n, differentia $m - n = p$. Cum ſit $A f . f C :: m \times P A . n \times P C$, erit $f . f - r :: m d . n d + n r$. Inde ductis extremis, & mediis, $n f d + n f r = m f d - m r d$, adeoque $m f d - n f d - n f r = m r d$, ſive $p f d - n f r = m r d$, & $f = \frac{m r d}{p d - n r}$. Hæc formula continet generaliter locum foci, datis utcunque valoribus n, r, d, p, in qua focus erit realis, vel virtualis, prout is valor obvenerit poſitivus, vel negativus. Erit autem valor d poſitivus, infinitus, vel negativus, prout radii advenerint divergentes, paralleli, vel convergentes, valor r erit poſitivus, infinitus, vel negativus prout arcus circuli ad partes radii advenientis fuerit convexus, rectus, vel planus, valor p erit poſitivus, nullus, vel negativus, prout ſinus incidentiæ m fuerit major, æqualis, vel minor ſinu anguli refracti, quo pacto unica ea formula omnes omnino caſus amplectitur, eum etiam refractionis nullius.

30. Pro caſu, in quo aliquis valor fiat infinitus, facile is eliminabitur, contemnendo eum terminum, in quo is non adeſt, & dividendo omnes, in quibus is relinquitur, per ipſum. Si evadat circuli radius infinitus, abeunte arcu in rectam contempto p d reſpectu n r, habebitur $\frac{m r d}{-n r}$, ſive $\frac{m d}{-n}$, vel $- n . m :: d . f$, & hujuſmodi theorema, quod congruit cum

num. 19.

num. 19. *Eſt ut ſinus anguli refracti ad ſinum incidentiæ, ita diſtantia puncti radiantis a ſuperficie plana ad diſtantiam foci, qui erit virtualis, ſi radii divergunt, realis, ſi convergunt valore d in primo caſu poſitivo, & in ſecundo negativo, adeoque & contrario valore formulæ ibi negativo hic poſitivo.*

31. Si radii adveniant paralleli, evadit valor d infinitus. Quare contempto n r reſpectu p d, fiet $f = \frac{m\,r\,d}{p\,d} = \frac{m\,r}{p}$ ſive. p. m :: r . f, nimirum *radius circuli ad diſtantiam foci a ſuperficie refringente, ut eſt differentia ſinuum ad ſinum anguli incedentiæ, eritque focus realis, vel virtualis, prout medium novum fuerit magis, vel minus refringens*, quod congruit cum num. 18, ſi ibi radii paralleli fiant proximi axi.

32. Si valor p fuerit = o, ſinubus m, & n æqualibus. Evaneſcente p d, fiet $f = \frac{m\,r\,d}{-n\,r}$, ſive ob m = n, fiet f = - d, nimirum *focus ibi virtualis, vel realis, ubi punctum divergentiæ, vel convergentiæ, nulla refractione facta.*

33. Si focus debeat abire in infinitum, radiis emergentibus parallelis, debebit eſſe denominator p d - n r = o, ſive p d = n r, & d. r :: n . p, nimirum diſtantia puncti, quod radii reſpiciunt, ad circuli radium, ut eſt ſinus anguli refracti ad differentiam ſinuum.

34. Ex eadem formula facile deduci poſſet, & illud, punctum radians, & focum alternari ita, ut ſi e foco retro radii revertantur debeant abire in illud punctum, ex quo receſſerant. Sed id ſponte fluit ex natura refractionum. Radius enim retro viam relegens eandem ibidem in egreſſu patitur refractionem ad partes oppoſitas, quam habuit in ingreſſu.

35. Perſpectis iis, quæ pertinent ad unicam ſuperficiem, ut gradum faciamus ad globos, & lentes ſatis erit punctum, quod reſpectu primæ ſuperficiei extitit focus, conſiderare ut punctum, ad quod radii convergunt, vel a quo divergunt, prout jacuerit citra ſecundam ſuperficiem, vel ultra. Sed ut generaliſſimè rem prætractemus, ſint in fig. 6 bini arcus M A m, M a m circulares, qui ſibi invicem obvertant cavitatem, ac per
F. 6. eorum centra tranſeat recta P f, quæ dicitur axis. Diſcedant radii P B, P b ex P., & ſit focus primæ ſuperficiei f, ad quem convergant per B f, b f, ac cum ea directione deveniant

ad

ad arcum M a m, ubi refracti per D F, d F abeant in focum F.

36. Radius primæ ſuperficiei dicatur r, ſecundæ R, diſtantia, ſive craſſitudo A a dicatur c, diſtantia P A dicatur d, ſinus incidentiæ in primam ſuperficiem m, ſinus anguli refracti n, m-n = p: & erit (per num. 29.) $Af = \frac{mrd}{pd-nr}$. Iam pro ſecunda ſuperficie diſtantia illa, quæ in formula generali dicebatur d, erit $aF = \frac{mrd}{pd-nr} - c$, ſed aſſumpta cum ſigno contrario, cum radii convergant; quod ibi erat r, erit hìc - R, cum cavitas obvertatur radiis incurrentibus; quod ibi erat m jam hìc erit n, quod ibi n, hìc m; & proinde, quod ibi p, hìc - p. Subſtituantur igitur in formula $\frac{mrd}{pd-nr}$ hi valores, nimirum valor $\frac{-mrd}{pd-nr} + c$ pro d, - R pro r, m pro n, n pro m, - p pro p. Numerator m r d fiet $-nR\left(\frac{-mdr}{pd-nr}+c\right) = \frac{mndRr-npcdR+nncRr}{pd-nr}$, & ponendum erit $\frac{mprd}{pd-nr} + pc = \frac{mprd-ppcd+npcr}{pd-nr}$ pro pd, ac pro - n r debebit poni m R, ſive (quod eodem redit) reducendo ad eundem denominatorem $\frac{mpdR-mnRr}{pd-nr}$. Habebitur hujuſmodi valor $\frac{mndRr-npcdR+nncRr}{mprd-ppcd+npcr+mpdR-mnRr}$, qui erit valor novæ diſtantiæ F a foci utriuſque ſuperficiei.

37. Si quæratur formula pro globo, in eo erit R = r, c = 2 r. Quare ipſa formula reducetur ad terminos ſimpliciores, nimirum $\frac{mndr-2npdr+2nnr}{mpd-2ppd+2np+mpd-mnr}$, ſive (ſubſtituto pro p valore m - n) $= \frac{-mdr+2nr(d+r)}{2p(d+r)-mr}$, vel $= \frac{2nr(d+r)-mdr}{2p(d+r)-mr}$. Ea autem formula in vitro, ſi ponatur m = 3, n = 2, p = 1, evadit multo ſimplicior, nimirum

$\frac{4dr+4rr-3dr}{2d+2r-3r} = \frac{dr+4rr}{2d-r}$, ac ſi in eadem formula præterea radii adveniant paralleli, facto d infinito, evadit valor $\frac{2ndr-mdr}{2pd} = \frac{2nr-mr}{2p}$, vel factis in vitro $m = 3, n = 2, p = 1$ habetur $\frac{4r-3r}{2} = \frac{1}{2}r$. Nimirum *ſi radii ad globum deveniant paralleli, erit, ut dupla differentia ſinuum ad exceſſum ex duplo ſinu anguli refracti ſupra ſimplum ſinum incidentiæ, ita radius ſphæræ ad diſtantiam foci a ſphæræ ipſius ſuperficie poſteriore, & ſi vitrea ſit ſphæra, erit radiorum parallelorum focus proximè in diſtantia dimidiæ ſemidiametri.*

38. Quod ſi eam formulam numeri 36. libeat applicare ad lentes, in quibus craſſitudo c contemnatur; tum vero omiſſis omnibus terminis, in quibus habetur valor c, habebimus $\frac{mndRr}{mprd+mpdR-mnRr} = \frac{ndRr}{pd(R+r)-nRr}$, quæ erit pro omnibus lentibus generaliſſima formula, in qua r, R radii binarum ſuperficierum, quarum utraque ſit convexa, d diſtantia puncti, a quo radii divergunt, m, n ſinus incidentiæ, & anguli refracti in ingreſſu in lentem, $p = m-n$. Quare ſi altera ſuperficies, vel utraque ſit concava ponendus erit alter e valoribus r, R, vel uterque negativus; ſi altera, vel utraque plana ſit, ponendus erit alter, vel uterque infinitus, ſi radii paralleli ſint, vel convergant, ponendus erit valor d infinitus, vel negativus.

39. Mirum, quam multa liceret inde eruere, ſi formulæ ductum liberet ſequi, & ad omnes caſus applicare. In primis generaliter eruitur illud, *ex utralibet parte obvertatur radiis venientibus lens quæcumque, ſemper focus erit in eadem diſtantia ab ipſa*. Nam ſi primo fiat $r = a, R = b$, habebitur $\frac{ndab}{pd(a+b)-nab}$. Si deinde fiat $r = b, R = a$, habebitur itidem $\frac{ndab}{pd(a+b)-nab}$, qui valor eſt prorſus idem, ac præcedens, cujuſcumque valoris ſint a, & b, ſive ambo poſitivi, ſive ambo negativi, ſive alter poſitivus, alter negativus.

40. Deinde ſi ponamus binas ſuperficies eſſe ſphæricitatis

ejuſ-

ejuſdem, evadet formula multo ſimplicior $\frac{ndr}{2pd-nr}$, quæ, ſi pro m, & n aſſumatur in vitro 3, & 2, quæ ratio veræ proxima parum fallit in minoribus lentibus, evadit $\frac{2dr}{2d-2r} = \frac{dr}{d-r}$ unde eruitur ſequens theorema, *ut diſtantia puncti illius, quod radiorum directionem determinat, a centro ſphæricitatis jacente citra lentem, ſi ſit convexa, ultra ſi ſit concava, ad diſtantiam ipſius a lente, ita radius ſphæricitatis ad diſtantiam foci a lente*. Nam ſi C, & c ſint centra binarum ſphæricitatum, erit PA = d, & erit CA = r in primo caſu, CA = - r in ſecundo, ac PC in utroque, & utravis ex parte jaceat P, erit d - r, adeoque debebit eſſe, ut d - r ad r, ita d ad diſtantiam foci quæſitam; unde patet, eſſe verum illud ipſum theorema propoſitum.

41. Deinde aliud elegantiſſimum theorema, & utiliſſimum deducitur ex hujus problematis ſolutione. Sit lens, quæ habeat binos ſuperficiei radios a, & b utcumque inæquales, & oporteat invenire radium r, quem ſi lens habeat ex utraque parte, radios ex eodem puncto digreſſos eodem in loco colliget. Erit diſtantia foci prioris lentis $\frac{ndab}{pd(a+b)-nab}$ (num. 39.), & poſterioris $\frac{ndr}{2pd-nr}$ (num. 40.). Fiant æquales inter ſe, & multiplicatione utrinque inſtituta erit $npd^2ar+npd^2br-n^2dabr = 2npd^2ab-n^2dabr$. Eliſis poſtremis terminis binorum membrorum, & diviſione inſtituta fit $r = \frac{2npd^2ab}{npd^2a+npd^2b} = \frac{2ab}{a+b}$; unde eruitur a + b. 2a :: b. ad quartum quæſitum. Habetur igitur hujuſmodi theorema, *ſi fiat ut ſumma binorum radiorum in lente utrinque convexa, vel utrinque concava, ad duplum alterius utriuslibet, ita alter ad quartum: ſive duplum productum ex binis radiis dividatur per ſummam, ubi conſpirant, differentiam, ubi opponuntur curvaturæ, & prodibit radius quæſitus curvaturæ utrinque æqualis, pro lente eundem præſtante effectum*.

42. Mirum ſane, quanti uſus ſit hoc theorema in praxi dio-

ptrica. Habes binas patinas pro lentibus convexis, vel concavis, quarum altera eſt unciarum 40, altera 10. Quæris, ſi earum ope lentem difformem conficias hinc, & inde, cui lenti utrinque ſimili ea æquivalebit? Multiplica 40 per 10, habes 400: duplica, habebis 800: divide per ſummam 50, & habebis 16. Æquivalebit igitur lenti unciarum 16. Patet hinc, quam in ſatis inæqualibus ſuperficiebus errent, qui medium arithmeticum ſumunt, quod hìc eſſet 25 pro 16. Quod ſi altera ſit convexa, altera concava, idem illud duplum productum 800 divide per differentiam, nimirum 30, & habebis 26. $\frac{2}{3}$. Idem nimirum obveniet, ac ſi patina utereris unciarum 26. $\frac{2}{3}$ ejuſdem ſpeciei, cujus erat illa, quæ prævalebat, quæ erat unciarum 40.

43. Atque hoc pacto ſi habes patinam pro lente convexa, cujuſcumque magnitudinis a, & quæras aliam, vel convexam, vel concavam b, quæ cum ea id præſtet, quod lens utrinque tornata ad patinam r: habebis $\frac{2ab}{a+b} = r$. Quare $2ab = ar + br$, & $2ab - br = ar$, $b = \frac{ar}{2a-r}$. *Nimirum productum ejus, quam habes, cum ea, quam quæris, divide per ſummam, vel differentiam duplæ ejus, quam habes, & ſimplæ illius, quam quæris, prout contrariæ ſunt, vel conſpirantes, ac habebis intentum.* Hinc pro longiſſimis teleſcopiis meniſcos concavo-convexos facile efficies per patinas multo minores, ſed ſatis proximas inter ſe. Habeas patinam palmorum 10, & ejus ope quæris lentem palmorum 180: duc 10 in 180, habes 1800. Cape ſummam ex dupla prima 20, & ſimpla ſecunda 180, nimirum 200: per hunc numerum divide 1800, & habes 9. Patina convexa palmorum 9. pro vitro cavo conjuncta cum patina cava palmorum 10 pro vitro convexo dabit meniſcum æquivalentem lenti utrinque convexæ palmorum 180. Et quidem cum ducendo 9 in 10, habeatur 90, duplicando habeatur 180, dividendo per differentiam = 1, remaneat 180. Patet ſane, rite inventum eſſe, quod quærebatur. Ut hæc regula applicari poſſit etiam lentibus plano-convexis, concipiatur altera ſuperficies plana, & fiet alter radius, ut b, infinitus. Quare formula $\frac{2ab}{a+b}$ evadet $\frac{2ab}{b} = 2a$. Nimirum ſi altera ſuperficies ſit plana, altera tornata ad lentem, quæ exhiberet foci diſtantiam quandam utrinque æque curva,

æqui-

æquivalebit lenti utrinque æque tornatæ, ſed quæ ad duplam prioris diſtantiam focum haberet.

44. Hæc ingens ſane eſt utilitas in praxi dioptrica. Sed nobis multo majori uſui erit illud, quod in poſterum fas erit loqui de lentibus utrinque æquè concavis, vel æquè convexis. Nam ſi ſint inæquales utcumque, ſtatim invenietur lens, æque utrinque tornata iis æquivalens, & quod de hac in ordine ad focum axi infinite proximorum fuerit demonſtratum, habebit locum in illis. Intereà hic obiter notandum, ſi fuerint plano-convexæ, vel plano-concavæ, eas æquivalere convexis, vel concavis; ſi convexo-convexæ, convexis; ſi concavo-concavæ, concavis; ſi convexo concavæ, æquivalere convexis, vel concavis, prout radius convexitatis, vel concavitatis fuerit minor, quæ omnia ſponte fluunt, a formula illa $r = \frac{2ab}{a+b}$, & hoc poſtremum facile demonſtratur; nam a b erit valoris negativi, & $a + b$ valoris contrarii ei radio, qui eſt minor; unde fit ut $\frac{2ab}{a+b}$ remaneat ejus ſigni, cujus erit is e valoribus a, & b, qui eſt minor.

45. His ita conſtitutis conſideremus jam aliquanto diligentius illam lentem, cujus radius utrinque eſt r, & cujus focus pro diſtantia d habetur (num. 39) ex formula $\frac{ndr}{2pd-nr}$. In primis ſi concipiamus radios advenire parallelos, facto valore d infinito, habebimus $\frac{ndr}{2pd} = \frac{nr}{2p}$. *Quare erit ut dupla differentia ſinuum ad ſinum anguli refracti, ita radius ſphæræ ad diſtantiam foci radiorum parallelorum.* Hanc diſtantiam impoſterum appellabimus diſtantiam foci lentis intelligentes, niſi quid in contrarium expreſsè caveamus, focum radiorum parallelorum, pro foco lentis. Porro in vitreis lentibus minoribus poterit tuto aſſumi m pro 3, n pro 2, adeoque p pro 1, & $\frac{nr}{2p}$ evadit r. Nimirum radius ſphæricitatis eſt in vitreis lentibus diſtantia foci a lente ipſa, quod in exiguis lentibus accidit quamproximè.

46. In hac formula $\frac{nr}{p}$ patet, ubi lens conſtitgrit e ma-

teria magis refringente, quam ſit medium circumjacens, ut eſt vitrum in aere, fore valorem poſitivum, vel negativum, prout r fuerit valor poſitivus, vel negativus; nam n erit ſemper valor poſitivus, & ſic m major, quam n, adeoque p valor poſitivus. Quare hinc, & ex num. 41 deducitur hoc theorema, *Radios parallelos colligunt ad certum focum lentes omnes utrinque convexæ, omnes plano-convexæ, & eæ concavo-convexæ, in quibus radius convexitatis radio concavitatis eſt minor. Diſpergunt a certo foco lentes omnes concavo-concavæ, omnes plano-concavæ, & eæ convexo-concavæ, in quibus radius concavitatis eſt minor radio convexitatis.* Focus ille prior, ut ſupra innuimus, dicitur realis, hìc poſterior virtualis, *& ille debet jacere ultra lentem, hìc citra reſpectu radiorum advenientium.*

47. Quæramus jam, quæ ſit e contrario diſtantia illa puncti radios dirigentis, qua fit, ut radii emergant e lente paralleli. In formula generali $\frac{n\,d\,r}{2\,p\,d-n\,r}$ ut valor evadat infinitus, oportet ſit diviſor $2\,p\,d-n\,r = o$. Quare erit $2\,p\,d = n\,r$, & $d = \frac{n\,r}{2\,p}$. Sed $\frac{n\,r}{2\,p}$ eſt valor foci radiorum parallelorum, ad quem ii convergunt in lentibus convexis, & a quo divergunt in concavis. Igitur deducitur hoc theorema. *Si radii incidentes in lentem convexam divergant ab ejus foco radiorum parallelorum, vel incidentes in lentem concavam convergant ad ejus focum radiorum parallelorum, prodibunt inde paralleli.* Hoc theorema utiliſſimum erit infra, ubi de teleſcopiis, pertinet autem ad generalius aliud, quod nimirum focus quivis cum puncto radios dirigente convertatur mutuo ita, ut *is, qui erat focus, vel realis, vel virtualis, jam fiat radios dirigens antea incurſum, quo nimirum e contrario divergant, ſi eſt realis, ad quod convergant, ſi eſt virtualis; id punctum, quod antea radios dirigebat, jam fiet focus, realis ſi inde divergebant, virtualis, ſi eo convergebant.* Poſſet ex eadem formula derivari inveniendo valorem d per r, qui ex ipſo eodem modo invenitur, quo d ex r. Sed eſt per ſe manifeſtum, ex illa luminis proprietate generali, quod radius retro viam relegens eodem regreditur, unde advenerat.

48. Conſideremus jam omnes poſitiones diſtantiæ d, reſpectu lentis conſtitutæ in medio minus refrigente prius con-

ve-

vexæ, tum concavæ, & ſtatus valoris formulæ $\frac{ndr}{2pd-nr}$ qui ipſis reſpondent. Si valor d fuerit negativus magnitudinis cujuſcumque, formula erit poſitiva. Nam n, & p ſunt in hoc caſu ſemper valores poſitivi, & r in lente convexa eſt itidem valoris poſitivi. Igitur $-nr$ erit valoris negativi; ac poſito p valore negativo erit ndr, & $2pdr$ valor negativus, adeoque totus formulæ valor poſitivus ob ſigna conformia. Præterea $2pd-nr$ erit diviſor major, quam nr, qui ſolus relinqueret d; adeoque totus $2pd--nr$, in quo tum ſigna conſpirant, relinquet minus, quam d. En igitur theorema. *Quotieſcumque incurrent in lentem convexam radii convergentes, convergent itidem ad focum realem, & propiorem lenti, quam fuerit punctum dirigens ante incurſum.*

49. Si valor d fuerit poſitivus, formula erit poſitiva, infinita, vel negativa, prout fuerit $2pd$ majus, æquale, vel minus reſpectu nr, ſive d reſpectu $\frac{nr}{2p}$. Vidimus autem ſuperius eſſe $\frac{nr}{2p}$ diſtantiam foci radiorum parallelorum. Igitur habetur hoc theorema. *Lens convexa radios, quos divergentes excipit, reddit convergentes ad focum realem, vel parallelos, vel divergentes a foco virtuali, prout diſtantia puncti divergentiæ magis diſſiterit a lente, quam focus radiorum parallelorum, vel æquè, vel minus.*

50. Quod ſi quæratur relatio diſtantiæ puncti dirigentis radios ante concurſum a foco radiorum parallelorum, ſatis eſt ponere $d-\frac{nr}{2p}=z$, quæ nimirum eſt ejuſmodi diſtantia; & erit $2pd-nr=2pz$. Quare formula fiet $\frac{ndr}{2pz}$. Nimirum $z.\frac{nd}{2p}::r.\frac{ndr}{2pz}$. Cum igitur ſit z illa diſtantia puncti dirigentis a foco radiorum parallelorum, $\frac{nd}{2p}$ ſit diſtantia foci parallelorum, r radius, $\frac{ndr}{2pz}$ diſtantia foci radiorum, quos dirigit d, habebitur hoc theorema. *Ut diſtantia puncti radios dirigentis ante*

concur-

concurſum a foco radiorum parallelorum jacente ex ea parte, ex qua radii adveniunt ad ipſam diſtantiam foci parallelorum a lente, ita radius ſphæricitatis ejus lentis ad diſtantiam foci radiorum quos dirigit punctum illud. Nimirum, ſive radii divergant a P, puncto P jacente ubicunque citra lentem, ſive convergant ad punctum poſitum ultra lentem, & ipſum concipiatur alicubi ultra a, aſſumatur autem A C æqualis diſtantiæ foci parallelorum, erit P C ad C A 4, ut ſpheræ radius ad A f, ſive ſi in vitro libeat uti ratione 3 ad 2, ut focus radiorum parallelorum ſit in ipſo centro, erit ipſa C A media continuè proportionalis inter P C, A f. Erit autem ſemper etiam, ubi C non ſit centrum, A f negativa contra id, quod figura exhibet, vel infinita, vel poſitiva, prout P jacuerit inter limites C & A, in C, vel extra eos limites ubicumque ſive ad partes C, ſive ad partes A.

51. Eodem prorſus pacto, quo conſideravimus caſus omnes lentis convexæ, determinantur caſus omnes lentis concavæ. Solum ſigna poſitiva mutantur in negativa, & viceverſa. In ea in formula noſtra generali $\frac{n\,d\,r}{2\,p\,d - n\,r}$ valor r evadit negativus & - n r poſitivus, Hinc ſi d ſit poſitivus, numerator ſit negativus, & denominator totus poſitivus, quare valor formulæ negativus. Si autem ſit valor d negativus, numerator quidem evadit poſitivus, denominator vero negativus, infinitus, vel poſitivus, prout 2 p d fuerit reſpectu n r, & d reſpectu $\frac{n\,r}{2p}$ major, æqualis vel minor. Quare pro iis ſimilia theoremata inferuntur. Lens concava, quæ radios utcumque divergentes excipit, reddit divergentes magis, ſi autem excipiat convergentes reddit divergentes, vel parallelos, vel convergentes, prout diſtantia puncti convergentiæ magis diſtiterit a lente, quam focus radiorum parallelorum, vel æque, vel minus. Et erit etiam hìc diſtantia puncti convergentiæ a foco virtuali ultra lentem ſito ad diſtantiam foci ipſius virtualis, ut radius ad diſtantiam novi foci a lente, prorſus, ut ſupra.

52. Et hoc quidem pacto per omnia lentium genera pervagati, quæ maxime notatu digna erant, certo ordine unius formulæ ductu perluſtravimus; ſupereſt, ut aliquod exhibeamus

ſpeci-

ſpecimen plurium lentium conjunctarum, id fere eodem pacto præſtari poteſt, quo ſuperius ex formula unius ſuperficiei invenimus formulam pro binis ſuperficiebus ſimul conjunctis in lentem. Sit igitur alterius lentis radius a, alterius b, & focus utriuſque conjunctæ ſimul dicatur u, diſtantia puncti radiantis a prima lente = d, reliqui valores iidem, ac prius, & poſita earum diſtantia = c, formula erueretur prorſus, ut ibi pro quacumque earum combinatione. Sed contempta diſtantia c inveniamus, quid conſequi debeat a duabus lentibus ſe contigentibus. Primæ formula ex illa noſtra $\frac{ndr}{2pd-nr}$, poſito a pro r, erit $\frac{nda}{2pd-na}$. Jam ſecunda excipiet radios convergentes ad hanc diſtantiam inventam. Erit igitur ibi $\frac{-nda}{2pd-na}$ pro d, erit autem b pro r, & valor p retinendus erit; nam ibi iterum e medio rariore in denſius tranſitur. Igitur habebitur novus formulæ numerator $\frac{-ndab}{2pd-na}$, & denominator $\frac{-2pnda}{2pd-na} - nb = \frac{-2pnda-2pdnb+nnab}{2pd-na}$. Quare formula erit $\frac{ndab}{2pnda+2pdnb-nnab} = \frac{ndab}{2pd(a+b)-nab}$, quæ ipſa, ſi radiis advenientibus parallelis abeat d in infinitum, evadit ſimplicior $\frac{nab}{2p(a+b)}$, ac ſi ſit m = 3, n = 2, evadit $\frac{ab}{a+b}$.

53. Habetur igitur etiam hìc hoc theorema pro caſu rationis 3 ad 2 paullo diverſum ab illo binarum ſuperficierum, nimirum, *ut ſumma focorum, ſi lentes ſint ejuſdem ſpeciei, differentia, ſi diverſæ ad focum alterius, ita alterius focus ad focum novum*. In binis ſuperficiebus non erat ad ſimplum; ſed ad duplum alterius focum. Eodem autem pacto hìc etiam invenietur generaliter idem theorema, comparando formulam noſtram generalem $\frac{ndr}{2pd-nr}$ cum hac nova $\frac{ndab}{2pd(a+b)-nab}$. Si eas poſuerimus æquales erit $\frac{r}{2pd-nr} = \frac{ab}{2pd(a+b)-nab}$

adeoque $2pdar+2pdbr-nabr=2pdab-nrab$. Hic etiam poſtremi termini ſe deſtruunt. Quare evadit $2pdar+2pdbr=2pdab$, ſive $r=\frac{2pdab}{2pda+2pdb}=\frac{ab}{a+b}$, ut prius. Conſtat igitur, generale eſſe illud theorema. Ex eo autem conjunctis utcumque quibuſcumque binis lentibus inveniri lentem, quæ idem præſtet, & patet quocunque ordine diſponantur, idem provenire, cum valor $\frac{ab}{a+b}$ ſit idem, utervis è binis valoribus dicatur a, vel b. Patet autem & illud, ſi binæ lentes æquales fuerint, focum dimidiari: patet progredi licere ad tertiam conjungendam cum æquipollenti prioribus binis, & ita porro, neque novit Geometria limites, a cujus tamen curſu præcipiti jam opus eſt revocare pedem, ut alias etiam regiones quaſdam perluſtremus, tum ad binarum, & plurium lentium combinationem, hìc intermiſſam regrediamur, ex qua pendent teleſcopia.

54. In primis huc uſque locuti ſumus de radiis homogeneis, & de ultimo concurſu cum axe radiorum homogeneorum accedentium ad ipſum axem in infinitum. Hinc focum habuimus pro unico puncto. At ex binis capitibus fit, ut radii, qui aliquam ſuperficiei ſphæricæ amplitudinem, ſubeunt, non in unicum punctum colligantur, ſed in circellum quendam. In primis, ut a figura ſphærica ordiamur, ea non eſt ejuſmodi, ut radios omnes ab unico puncto digreſſos in unicum itidem cogat, ut ovales illæ, de quibus initio diximus, ſed eas curvas perpetuo contingunt, quas cauſticas appellari ſupra diximus. Ut caſum ſimpliciſſimum unius ejuſmodi cauſticæ conſideremus ortæ per unicam ſuperficiem ſphæricam radiis ad eam delatis directione parallela, ſit in fig. 5. lens BAb plano convexa, quæ radiis advenientibus planam ſuperficiem Bb obvertat ad perpendiculum, ut ad ſuperficiem ſphericam BAb deveniant irrefracti: focus in axe CA ſit f, qui (num. 27.) diſtabit a ſuperficie intervallo proximè diametri circuli ipſius, ſive proxime 2CA. Inde autem habebitur cuſpis Dfd duplici arcu fED, fed, quam radii pB, pb æque diſtantes ab axe refracti per BH, bh, & axi occurrentes in F tangent alicubi in E, & e. Per totum ſpatium cuſpidis Efe habebuntur contactus reliquorum radiorum incidentium in arcus AB, Ab. Illi radii extremi BE,

F. 5.

b e aperturæ totius B A b, poſt contactus in E, & e cum ſuis arcubus, & concurſum in F incurrent in alternos arcus fed, F E D in I, & i.

55. Jam vero radii omnes per cuſpidem E ſe traducti nuſquam in unico puncto coibunt; ſed ſi excipiantur plano perpendiculari ad axem in H', vel f, vel ubicumque alibi, colligentur in quodam circello habente pro diametro rectas E H' e, h f M, vel alio ejuſmodi. Omnium iſtorum circulorum minimus erit is, qui habebit diametrum I i, ut patet; nam ad partes A ſe dilatabit cuſpis cauſticæ continens interiorum radiorum contactus; ad partes f ſe dilatabunt radii illi extremi B H, b h. Ibi igitur habebitur maxima contractio radiorum, qui paralleli advenerint; & eodem pacto idem accidit, ſi deveniant divergentes a dato puncto, vel convergentes ad datum punctum.

56. Porro Newtonus Opticæ ſuæ parte 1. lib. 1. prop. 7. affirmat in hoc caſu poſita diametro ſphæricitatis C A = D, ſemidiametro aperturæ M B = S, ſinu incidentiæ ex vitro in aerem I, ſinu anguli refracti R, fore diametrum circelli ibi, ubi imago eſt diſtinctiſſima, nimirum utique illam $Ii = \frac{R}{I} \times \frac{S^3}{D^2}$, quod affirmat, ſe ope ſeriei convergentis inveniſſe omiſſis inferioribus terminis. Erat hìc animus in hunc locum inquirere, determinata natura ipſius ejus cauſticæ in ipſo exortu f E D prope axem, & elementa habebamus omnia ejus inveſtigationis præſtandæ per geometricam analyſim, ope quorundam theorematum, quæ pertinent ad infiniteſimalium methodum, & applicantur quantitatibus exiguis etiam, ac ad quantitates hìc quidem itur ordinis tertii. Sed eam inveſtigationem in alium locum, & aliud tempus diſtulimus, diſſertatione plus æquo nunc exſcreſcente. Utemur autem hìc Newtoniana hac determinatione. Ipſe vero & numeros addidit. Invenit enim in lente, cujus diameter curvaturæ E pedum 100, ſive unciarum 1200, ſemidiameter aperturæ, nimirum MB unciarum 2, ſinus incidentiæ ad ſinum anguli refracti, ut eſt 20 ad 31, fore diametrum circelli colligentis radios, nimirum $Ii = \frac{31}{3600000}$ partium unciæ.

57. Patet autem ex ipſa formula ob R, & I quantitates con-

ſtantes, eſſe hanc diametrum circelli ut $\frac{I^3}{D^2}$, ſive in ratione compoſita ex directa triplicata ſemidiametri, vel diametri aperturæ, & reciproca duplicata ſphæricitatis.

58. Altera cauſa diſperſionis radiorum eſt diverſa refrangibilitas diverſorum coloratorum radiorum. Suppoſuimus in noſtris formulis eſſe ſinum incidentiæ, vel ſinum anguli refracti, ſive I ad R, vel m ad n in ratione conſtanti. Id quidem verum eſt pro omnibus radiis homogeneis. Sed quivis radius luminis dividitur in innumera radiorum diſſimilium genera, quorum alia majorem, alia minorem refrangibilitatem habent, lege tamen, & nexu quodam conſtanti. Hoſce radios ad ſeptem claſſes reducimus, quibus ſeptem primigeniorum colorum nomina præbemus, non quod ſeptem tantummodo ſint, & per ſaltum quendam mutentur, ſed quod ea, quæ minus inter ſe differunt, eodem nomine denotantur, & in eandem ſpeciem computantur. Sunt autem, incipiendo a minimè refrangibilibus, Rubeus, Aureus, Flavus, Viridis, Cæruleus, Indicus, Violaceus.

59. Porro hujuſmodi eſt lex diverſæ refrangibilitatis, ut ſi ſinus incidentiæ communis ſit m, & ſinus anguli refracti rubeorum minimè refrangibilium ſit n, ſinus autem maximè refrangibilium ſit p; differentia ſinuum $m-n$ ad differentiam $m-p$ ſit, ut 27 ad 28. Atque id quidem Newtonus exploravit in pluribus mediis diverſis, & conſtantiſſimè ita ſe habere comperit, ut de hac conſtanti differentiarum ratione dubitare non liceat. Hinc autem, ubi anguli ſunt exigui (qui nimirum ſunt quamproximè proportionales ſuis ſinubus, adeoque eorum differentiæ differentiis ſinuum ibidem proportionales), angulus, quo viam deflectit violaceus color maxime refrangibilis, angulum, quo viam mutat rubeus minimè refrangibilis, excedit parte ſua vigeſima octava, & parte illius vigeſima ſeptima.

F. 7 60. Concipiantur jam in fig. 7. radii P B, p b, qui per refractionem dividuntur in radios diverſorum colorum. Extremi violacei magis inflexi abibunt per B H, b h interius, & axem citius ſecabunt in F, extremi vero rubei abibunt exterius per B I, B i, qui ſecabunt ſerius axem in f, & priores radios b h, B H alicubi in I, i. Angulus I B i, vel I b i, erit pars vigeſima

octava

octava ejus anguli, quem B H contineret cum P B producto, quæ nimirum eſt tota inflexio per refractionem in radio violaceo, ſi P B fuerit accuratè, vel, ob immanem diſtantiam puncti P, uti ſolet eſſe in teleſcopiis, fuerit ad ſenſum parallela P A F. Nam angulus ille inflexionis erit B F A, cujus alternus eſt is, quem P B productus continet cum P F. Quare erit F p f $\frac{1}{28}$ ipſius B F A, adeoque, & ejus ſinus $\frac{1}{28}$ ſinus hujus, ſive ſinus B F f, qui eſt ejus complementum ad duos rectos. Hinc & F f erit $\frac{1}{28}$ B f, ſive a f, & $\frac{1}{27}$ a F. Quare ſi excipiantur ii radii in f, occupabunt circellum, cujus diameter H f h eſſet $\frac{1}{27}$ aperturæ B b, cum ſit B b ad H h, ut A F ad F f, contempta craſſitudine lentis. In F eſſet $\frac{1}{27}$ ipſius B b; adeoque ſi excipiatur in medio in I i, ubi patet minimum fore circellum, & I i mediam inter diametrum H h, & diametrum, quæ reſponderet puncto F, fere æquales, debebit eſſe proximè $\frac{1}{55}$ ipſius aperturæ B b.

61. Quare hinc eruitur hujuſmodi theorema. Radii ex omnibus coloribus compoſiti, ſi adveniant paralleli ad lentem quamcumque, uniuntur in continua ſerie focorum ita, ut diſtantia foci rubeorum extremorum a diſtantia foci violaceorum ab ipſa lente ſit, ut 27 ad 28. Ubi autem maxime coeunt, occupant circellum, cujus diameter eſt quinquageſima quinta pars diametri aperturæ ipſius lentis.

62. Newtonus quidem profert ibidem theorema, quo determinat in eo circello rationem denſitatis luminis, quæ in acceſſu ad centrum augetur in infinitum; licet deinde, cum & circelli, quorum ſemidiametri decreſcunt in infinitum, decreſcant infinities in infinitum, quantitas luminis contenta circello decreſcente in infinitum, etiam ipſa in infinitum decreſcat. Totam hanc rationem decrementorum ejuſmodi, & incrementorum accuratè demonſtravimus in noſtra diſſertatione de Lumine anni 1748. parte 2. Conſiderat præterea quanto minus

nus, vividi ſint violaceus, indicus, cæruleus, & vero etiam extremus rubeus reſpectu flavi, & aurei, ac partis viridis, & rubei ipſis conterminæ, unde in eadem propoſitione circellum, qui lumen contineat ex hoc capite diſperſum, ubi minimum ſpatii occupat, reducit ad $\frac{1}{250}$ aperturæ lentis.

63. Inde duo conſequuntur, quorum nobis erit uſus inferius. Primo quidem diametrum circelli recipientis expanſionem luminis ortam a diverſa refrangibilitate eſſe in ratione ſimplici ſolius diametri, vel ſemidiametri aperturæ, ad quam habet rationem certam, dum diameter erroris orti a figura ſphærica eſt in ratione compoſita ex directa triplicata ejuſdem ſemidiametri, & reciproca duplicata diametri ſphæricitatis. Deinde conferendo in illa lente pedum 100 errorem primum cum ſecundo, ſi aſſumatur tota coloratorum radiorum expanſio, fore hunc ad illum, ut $\frac{31}{3600000}$ ad $\frac{4}{55}$, cum nimirum 4 unciarum fuerit diameter aperturæ, & ejus $\frac{1}{55}$ aſſumi debeat, adeoque ut 1 ad 8151. Si autem reſtringatur primus error ad $\frac{1}{250}$ partem aperturæ fore hunc errorem ad illum, ut $\frac{31}{3600000}$ ad $\frac{4}{250}$, ſive ut 1 ad 1826, exceſſu enormi ſane.

64. Affirmat itidem Newtonus ibidem, malo provenienti a figura ſphærica poſſe adhiberi remedium aliqua ex parte in- F. 8 cludendo, ut in fig. 8. intra binos meniſcos vitreos concavo-convexos, & conjunctos Bb, lentem aqueam D d errore, quem figura ſphærica parit imminuto eo pacto, quod quidem accurate demonſtrari poteſt. Immo etiam inveniri poteſt continua ſeries denſitatis a centro globi ad circumferentiam, quæ efficiat ut globus radios homogeneos omnes a certo puncto digreſſos in unico puncto colligat. Eodem pacto includendo aquam binis meniſcis, cenſuit Eulerus poſſe occurri & alteri malo orto ex diverſa refrangibilitate diverſorum filorum coloratorum, quem in finem cenſuit naturam in oculo 4 refractiones voluiſſe in ingreſſu in corneam, in ingreſſu in humorem aqueum, tum in chryſtallinum, ac demum in vitreum. Præſcripſit autem,

& ſu-

& ſuperficierum curvaturas, ſed res & Londini, & Pariſiis, & alibi tentata vanam eluſit ſpem.

65. Anguſtiæ quidem diſſertationis cogunt omnes haſce diſquiſitiones hìc omittere cum iis, quæ pertinent ad cauſticas, & in alium reſervare locum. Interea tamen illud notabimus, ſi quidam radius rubeus adveniat axi parallelus verſus extremam partem lentis compoſitæ per p G, tum inflectatur introrſum per G O, tum extrorſum per O o, & iterum extrorſum per o g ac demum introrſum per g f, fore utique alium etiam radium violaceum aliquem ex allapſis eadem illa directione, qui prodibit ex g. Is parum admodum diverſum iter habere poteſt intra lentem, adeoque debet appuliſſe ad punctum ſatis proximum ipſi G, adeoque habuiſſe fere eandem inclinationem in ingreſſu, & proinde ſemper inflexiſſe iter ſuum ita, ut $\frac{1}{28}$ totius flexus ſui parte inflexerit magis, quam rubeus. Quare ſumma flexionum radii rubei, computatis oppoſitis more negativorum in ſummam, quæ quidem erit angulus g f a, erit $\frac{1}{27}$ ſui parte major, quam ſumma omnium flexionum radii violacei g F, nimirum quam angulus g F a, adeoque eorum differentia F g f erit itidem $\frac{1}{28}$ majoris, & F f $\frac{1}{28}$ a f, & $\frac{1}{27}$ A F. Quare in lentibus ea methodo omnino haberi non poteſt ſperata erroris correctio procedentis a diverſa refrangibilitate colorum.

66. In lentibus huc uſque conſideravimus radios ita delatos, ut punctum eos dirigens ſit in axe, qui utrique ſuperfice, perpendicularis eſt. Axis enim lentis cujuſpiam dicitur recta linea, quæ per utriuſque centrum tranſit, ut in fig. 6 recta P f, quæ tranſit per C, & c. Ibi definitur focus radiorum primæ ſuperficiei, qui pariter in ipſo remanet axe, tum eodem pacto focus ſecundæ ſuperficiei in axe eodem itidem. Videndum nunc, quid accidat ubi radii deveniunt directione ad axem inclinata, vel puncto dirigente extra axem ſito. Eo caſu oporteret concipere rectam illam, quæ a puncto radiante (ut hunc caſum adhibeamus radiorum divergentium, a quo ad cæteros parallelorum, vel convergentium facilis eſt tranſitus) ducitur ad centrum primæ ſuperficiei, & ope ſolutionis generalis initio expo- Fig. 6

ſitæ

ſitæ habita ratione diſtantiæ puncti, in quod incidit radius in ſphæricam ſuperficiem, ab hac recta, quam concepimus, definire focum primæ ſuperficiei pro illo radio, tum ab hoc foco concipere rectam, quæ tendat ad centrum ſecundæ ſuperficiei, quæ jam alia eſſet ab illa priore, & hujus ope eadem methodo ipſius ſuperficiei focum, ſive focum lentis totius determinare. Sed ea inveſtigatio multo eſt operoſior.

67. Eſt autem alia multo brevior, & pronior via ſaltem pro directionibus non ita multum ab axis directione diverſis, & punctis non ita multum diſtantibus ab axe. Nam primo quidem facile percipitur, in circulo focum radiorum incidentium in
F. 3. fig. 3. in arcum I i non ita remotum a puncto A ad eandem fere diſtantiam haberi debere a ſuperficie ipſius, ad quam habetur focus radiorum incurrentium circa A. Inde autem facile eruitur focum radiorum, qui deveniunt a puncto parum diſtante ab axe lentis, debere a lente tam in prima, quam in ſecunda ſuperficie haberi fere ad eandem diſtantiam, ad quam habetur focus radiorum advenientium ex puncto axis. Quare e ſuperiore illa theoria ſuperioris numeri jam habemus, radios etiam ejuſmodi incurrentes in lentem, coire debere in foco aliquo, poſt tranſitum per utramque ſuperficiem, & ipſum pro puncto non ita multum diſtante ab axe debere ad eandem ad ſenſum diſtantiam haberi a lente. Hinc ſi unius cujuſpiam ex ejuſmodi radii, cujuſcunque viam poſt egreſſum e lente invenerimus, & habuerimus jam diſtantiam foci pro radiis advenientibus ab axe, innoteſcet etiam is locus, ad quem reliqui tendunt, & in quo colliguntur.

68. Porro admodum facile eſt unum ex ejuſmodi radiis definire. Licet enim in eo caſu nullus habeatur radius, qui a refractione aliqua penitus immunis ſit, qui enim in prima forte non habeat incidens in lentis latus ad perpendiculum, habebit in ſecunda; adhuc tamen eſt ſemper aliquis, qui binas habeat refractiones contrarias, & æquales, ac poſt egreſſum e ſecunda ſuperficie habeat directionem eandem, quam habebat prius, nimirum via priori viæ parallela incedat. Concipiatur
F. 9. enim in fig. 9., axis lentis C c tractus per centra binarum ſuperficierum, quibus occurrat in A, & a, & ſi curvaturæ æquales ſunt, ſecta A a bifariam in I, ducatur per I quævis recta H I h, quæ occurrat ſuperficiebus ipſis in P, & p; ducanturque

ex centris C, c rectæ C P E, C p e, & fiat angulus E P M ad partes P H, cujus ſinus ad ſinum anguli E P H ſit, ut ſinus incidentiæ ad ſinum anguli refracti, ac recta M P producatur uſque ad A a in O, tum capta I o, æquali I O, ducatur ad partes oppoſitas o p m, & demum c p e.

69. Patet primo radium, qui deferatur per M P in angulo incidentiæ E P M, debere poſt refractionem in prima ſuperficie factam progredi per P I, ut angulus C P I refractus æqualis ad verticem ſit angulo E P H. Patet itidem figuram omnem infra B I b prorſus ſimilem, & æqualem eſſe figuræ ſupra, adeoque eodem argumento patet, radium, qui deferretur per h p, debere refringi per p I, adeoque radium P I progreſſum per I p debere progredi per a h; ac demum ob triangula I O P, I o p æqualia rectas O P M, o p m parallelas eſſe; ac proinde radius M P ingreſſus per P p, egreſſuſque per p m, poſt binas refractiones abibit per rectam parallelam ei rectæ, per quam devenerat. Et quidem ſi declinatio D O M radii advenientis ab axe fuerit exigua, facile definitur poſitio punctorum O, o, quorum alterum reſpicit radius adveniens, alterum radius diſcedens, quæ quidem eadem erit ad ſenſum pro omnibus radiis non ita multum inclinatis ad axem. Si enim concipiantur radii digreſſi ex I, & refracti a ſuperficie B a b per p m, erit focus ipſorum virtualis o, ac in illa formula $f = \frac{m r d}{p d - n r}$, erit o a = f, I a = d, a c = r, ſed ob craſſitudinem lentis exiguam reſpectu radii, erit d valor per quam exiguus reſpectu r, adeoque contempto p d reſpectu n r, habebitur $\frac{m r d}{- n r}$, ſive $\frac{- m d}{n}$. Nimirum erit ut n ad m, in vitro proxime ut 2 ad 3, ita I a = d, ad a o = f. Continebit igitur I o trientem I a, & O o trientem totius craſſitudinis A a, cujus reliqui trientes erunt a o, A O.

70. Jam vero utcumque punctum P ſit proximum, vel remotum a puncto A ſemper habetur paralleliſmus M P, p m. Quare *in lente utrinque æque convexa e radiis cum quavis directione advenientibus ad primam ſuperficiem, eſt ſemper aliquis, qui egreſſus e ſecunda habet eandem directionem, quam habebat ante allapſum ad primam, & ſi inclinatio ad axem ſit exigua, radius ejuſmodi eſt is, qui dirigitur ad finem primi trientis*

craſſitudinis lentis ipſius, qui quidem dum egreditur, reſpicit finem ſecundi trientis, tanquam ſi ex ipſo egreſſus eſſet. Porro hoc theorema facile applicatur lentibus utrinque æque concavis, & lentibus quibuſcumque utcunque diverſas habentibus ſuperficies applicari itidem poteſt, ſed & demonſtratio, & punctorum O, o determinatio eſt operoſior, ac fere omnino in re quidem præſenti inutilis. Cum enim craſſitudo lentis ponatur non ita magna, & multo magis cum inclinatio radiorum ad axem ponatur exigua; & diſtantia obliqua binarum parallelarum O o erit exigua, & in immenſum minor erit diſtantia earundem perpendicularis. Quare poterunt ſine ullo errore ſenſibili illæ duæ rectæ haberi pro unica, quæ per dimidiam lentis craſſitudinem tranſeat. Ac proinde utemur in poſterum hoc theoremate proximè vero. *Radius oblique adveniens ad lentem cum directione tendente ad mediam ejus craſſitudinem, haberi poteſt pro irrefracto, & in eo habetur focus radiorum egreſſorum ab eodem aliquo communi puncto cum ipſo, vel ipſi parallelorum, vel tendentium ad communem focum, qui eſt in diſtantia æquali diſtantiæ foci radiorum, quos dirigit aliquod axis punctum.*

71. Hinc autem jam facile patet, quid accidat in lentibus vel utrinque concavis, ſive focus virtualis ſit, ſive realis. Exhibet fig. 10 lentem utrinque concavam, ad quam ſagitta D E radios tranſmittit ita, ut punctum medium P axi reſpondeat. Ejus focus virtualis erit in p ipſi lenti propior, quem determinabit formula ſuperius pro lentibus propoſita, nimirum $\frac{2\,d\,r}{2\,p\,d - n\,r}$. Si autem ab extremis punctis per mediam craſſitudinem I lentis ipſius ducantur rectæ lineæ D I, E I, in iis in d, & e ad eandem ad ſenſum diſtantiam I p habebuntur foci omnes virtuales eorundem extremorum punctorum, in intermediis intermediorum, & radii e lente ejuſmodi prodibunt, tanquam ſi ſagitta D E eſſet in d e, nec ulla haberetur lens intermedia.

Fig. 11. 72. Quod ſi lens ſit convexa, ut in figura 11, ac diſtantia ſagittæ D E fuerit ejuſmodi, ut realis habeatur focus puncti P in p, ductis itidem rectis E I e, D I d per mediam lentem ultra ipſam ad diſtantiam ipſi I p ad ſenſum æqualem, habebitur ſeries focorum d p e ſitu inverſo poſita, in quo inverſa exhibebitur ſagittæ imago. Ea quidem in medio circa axem erit maxime diſtincta, tum eo minus, quo magis diſceditur a me-

dio,

dio, nam errores, qui a figura potiſſimum pendent, quo magis a medio receditur, eo creſcunt magis; licet ii, qui a diverſa pendent refrangibilitate; non ita multum augeantur, aucta etiam non ita parum inclinatione, quorum omnium accuratas determinationes ſectari infinitum eſſet; licet ex illa prima noſtri problematis ſolutione id ipſum in poteſtate omnino ſit.

73. Porro quod diximus de foco virtuali lentis concavæ, facile transfertur ad focum virtualem lentis convexæ, ubi ea ipſum habet, ob nimis exiguam diſtantiam puncti radiantis, & viceverſa. Dicamus objectum reale id, unde radii revera diſcedunt a ſingulis ejus punctis, objectum virtuale id, ad cujus ſingula puncta ſinguli radiorum tendunt manipuli, contra vero imaginem realem ſeriem focorum realium, ad quos poſt lentem tendant iidem illi manipuli radiorum, imaginem virtualem ſeriem focorum virtualium, quos retro reſpiciunt manipuli ipſi; & data lente, ac loco objecti, invenietur imaginis diſtantia, & ſitus, ac ſpecies eodem modo, quo dato puncto dirigente radios ante concurſum, nimirum puncto divergentiæ, vel convergentiæ invenitur focus per ſuperiores formulas. Magnitudo autem imaginis vel virtualis, vel realis invenitur, ducendo a punctis objecti extremis rectas per mediam lentem, quæ in imaginis mediæ diſtantia totam ipſius imaginis magnitudinem exhibebunt.

74. Inde autem facile definietur motus omnis imaginis ex motu objecti, ut in fig. 11, ſi objectum D E ſit nimis proximum lenti convexæ B b, nimirum diſtet minus ejus foco radiorum parallelorum, imago erit virtualis; ſi ſit in ea diſtantia, abibit in infinitum; ſi diſtet magis, evadet imago realis, quæ eo magis accedet, quo magis objectum diſtabit; pro qua lente, ſi objectum concipiatur infinitè diſtans, imago erit realis in diſtantia foci radiorum parallelorum; ſi ipſum objectum ſit virtuale, erit imago realis adhuc lenti propior. At in lente concava, ſi objectum fuerit virtuale, & propius lenti, quam ab ea diſtat focus ejus virtualis radiorum parallelorum, imago erit realis, poſita ultra eum focum, quæ eo magis recedet, quo objectum virtuale accedet magis ad focum illum; abibit in infinitum, ubi objectum virtuale ad illum focum devenerit; fiet imago virtualis, ubi objectum virtuale diſtiterit adhuc magis, & eo magis accedet ad lentem, quo magis objectum virtuale ab ea recedet;

quod ſi concipiatur in infinita diſtantia, imago virtualis erit in foco virtuali ceteriore radiorum parallelorum ; ſi autem ipſum objectum fuerit reale, imago erit virtualis lenti adhuc propior, ad quam eo magis accedet, quo magis accedet illud.

75. Hæ quidem ſunt omnes mutationes loci imaginis ortæ ex mutatione loci objecti. Quod ſi concipiamus mutari curvaturam lentis ipſius, manente objecti loco, facile ex eadem generali formula deducitur mutari locum imaginis, & quidem ita is mutatur, ut creſcente curvatura lentis convexæ, decreſcat diſtantia a lente imaginis, ſi ea realis ſit; & creſcat, ſi virtualis: contra creſcente curvatura lentis concavæ, decreſcat diſtantia imaginis virtualis, creſcat diſtantia imaginis realis. In quavis autem poſitione imaginis, & objecti patet illud, diametrum veram objecti, ad diametrum imaginis fore, uti eſt diſtantia ima- F. 10. ginis a lente ad diſtantiam objecti a lente, nam in fig. 10, & 11. 11 poteſt in exigua ab axe diſtantia focorum ſeries d p e haberi pro rectilinea, & triangula D I E, d I e pro ſimilibus, adeoque eſt d e ad D E, ut I p ad I P. Ea ipſa ratio facile eruitur e formula; erit enim, ut $\frac{ndr}{2pd-nr}$ ad d, ſive ut n r ad 2 p d - n r, vel in vitreis lentibus in quibus proxime n = 2, p = 1, erit proxime, ut r ad d - r, quæ expreſſio eſt admodum ſimplex.

76. Hiſce expoſitis, jam facile fit gradus, ad conſiderandum ipſum oculi organum, quod nobis a natura eſt datum ad F. 12. viſionem habendam. Ejus formam exhibet fig. 12. Refert quendam veluti globum cavum, in quo poſteriorem partem G p g conveſtit ſchlerotica ſolidior alba, cui ex interiori parte adjacet chorois nigricans, & retina ſatis diaphana. In anteriori parte prominet nonnihil uvea G O o g nigricans, & cum choroide continuata, ac in ejus medio habetur rotundum foramen, quod dicimus pupillam. Conveſtit autem uveam, & prætexit pupillam cornea tunica ſchleroticæ adnexa, ſolida quidem, ſed pellucida. Pendet e regione pupillæ ſuſpenſa per proceſſus ciliares G B, g b chryſtallina lens B b, inter quam, & uveam eſt humor aqueus, humor autem vitreus ab ipſa ad fundum oculi.

77. Sit extra oculum objectum D P E. Radii, per foramen pupillæ immiſſi, a lente chriſtallina B b detorquentur ita, ut imaginem in quadam diſtantia exhibeant, quæ quidem diſtantia eſt

ali-

aliquanto minor ob curvaturam corneæ, in cujus utraque ſuperficie radii intorquentur nonnihil introrſum; unde fit, ut ad lentem chryſtalinam deveniant jam aliquantulum convergentes. Ita autem oculi ſani comparati ſunt, ut objectorum in mediocri diſtantia poſitorum imago pingatur in ea diſtantia, in qua eſt fundum oculi, R p, & in retina, & in choroide, nam per retinam radii tranſeunt, & tam exigua eſt ejus craſſitudo, ut diſtinctio imaginis in ingreſſu in eam, & in egreſſu ſit fere eadem.

78. Plurima autem hic occurrunt notatu digniſſima. Primo quidem pro varia objecti diſtantia imago, ad maximam diſtinctionem redacta, ad variam diſtantiam pingitur ab eadem lente, nimirum objectorum remotiorum imago propius, proximorum remotius. Quamobrem ii, qui optimo viſu pollent, & objecta proxima, ac remota æquè diſtincte vident, vel habere debent facultatem admovendi lentem chryſtallinam B b fundo oculi, vel etiam immutandi figuram ipſam ejuſdem chryſtallinæ lentis efficiendo, ut ubi objecta ſunt proxima, turgeat magis, ubi remota minus, quæ mutatio figuræ videtur omnino neceſſaria, cum fieri non poſſit, ut tantum accedat, ac recedat lens ipſa ab oculi fundo, quantum oporteret in oculis quorundam, qui optime diſcernunt, & proxima admodum, & remota objecta.

79. Ii, qui tantam mobilitatem non habent, ita diſpoſitam habent lentem chryſtallinam, ut in certis diſtantiis objecta videant diſtincta, in aliis autem confuſa. Unde confuſio naſcatur, facile eſt agnoſcere. Si nimirum radii digreſſi ab uno puncto objecti circellum non ita exiguum occupent; patet, circellos ad diverſa objecti puncta pertinentes debere ſibi invicem ſuperponi. Eæ partes objecti, quarum radii ſuperponuntur, confundantur in imagine, neceſſe eſt, & quo majores ſunt partes, quarum extrema confunduntur, eo minor eſt objecti diſtinctio. Quoniam vero, quo majores communium objectorum partes confunduntur, eo plura ſunt colorum genera pertinentia ad diverſas ipſarum partium particulas, idcirco in imagine ejuſmodi habetur continua quædam colorum permixtio, quæ nebulam, & caliginem parit. Porro ſive radii excipiantur ante ſitum minimi, vel poſt, nimirum in fig. 5, vel ante I i, Fig. 5. in E e, aut citra, vel poſt H h, aut ultra; circellus, per quem ra-

radii ab unico objecti puncto delati dividuntur creſcit, & habetur ea, confuſio, de qua diximus.

80. Porro ſi lens chryſtallina plus turgeat, quam par eſt, objectuum ſatis remotorum imago diſtincta pingitur ante, quam deveniant radii ad fundum, & objectorum propiorum imago remotior pingitur in ipſo fundo; ſi vero minus turgeat, quam par eſt, objectorum propinquorum imago requirit majorem diſtantiam, quam habeat oculi fundum; unde fit, ut prius incurrant radii in ipſum, quam uniantur. Hinc illi quidem admovent oculis librum, ut legant, hi vero removent, quantum poſſunt. Priore vitio qui laborant, myopes dicuntur, qui poſteriore vitio, dicuntur præsbytæ. Utrumque autem vitii genus facile nunc quidem habet remedium, toti olim antiquitati incognitum. Specilla adhibentur pro primo vitio concava, pro ſecundo convexa. Illa radios divergentes reddunt, hæc convergentes, ante quam in oculum incurrant, & nimium lentis chryſtallinæ tumorem corrigunt, vel nimis exiguum ſupplent. Unita cum ipſis lentibus chryſtallinis ſpecilla, id præſtant, quod ſupra de binarum lentium conjunctione diximus.

81. Poteſt & aliud eſſe vitium lentis chryſtallinæ, ut figuram habeant minus accuratam, & minus politæ ſint, quo caſu confuſio inde oritur, ut etiam ſi e pluribus ſuperficiebus ad ſe invicem inclinatis conſtaret, eodem unico oculo multiplicatum appareret objectum; nec ei malo ullum Optica remedium afferre poteſt, niſi forte Medicina ita ſuccos corrigat ad nutritionem neceſſarios, ut debita lenti ipſi forma, quam expoſcit natura, reſtituatur.

82. Præterea notandum diligenter eſt, qua directione objectum appareat, quæ ſit magnitudo imaginis, diſpoſitio, claritas. Punctum objecti, quod reſpondet axi oculi, ut P in hac
F.12. ipſa fig. 12, focum habet in ipſo puncto p, in quo axis ad fundum devenit. At puncta lateralia objecti E, & D, ut innoteſcat, ubi debeant pingi in fundo oculi, ducere oportet per punctum illud R circa mediam lentem aſſumptum juxta num. 70 rectas D R d, E R e, quæ, ubi incurrunt in oculi fundum, ibi definiunt loca imaginum eorum punctorum. Interea ſi ipſa ſatis diſtent a medio, ut figura exhibet, incurrent in uveam in A a, nec per pupillam tranſibunt. In eo caſu nullum e radiis ab ejuſmodi objecti puncto delatis ad lentem chryſtallinam, ex

ip-

ipſa prodibit cum directione, cum qua delatus eſt, ſed incurrent in lentem radii tantummodo clauſi rectis E O B, E o H, qui deinde inflectentur ad punctum illud e, ad quod radius fere irrefractus deveniret. Directionem itaque, ſecundum quam jacet objecti punctum, determinat non directio radiorum, qui verè appellunt ad oculi fundum, non directio percuſſionis, qua oculi fundum feriunt, ſed directio earum imaginariarum rectarum, a quibus pendet magnitudo imaginis, & punctum ejuſdem objecti puncto reſpondens. Id maxime notandum, ubi quæritur, cur, quæ in oculo pinguntur inverſa, videamus directa. Nam imaginem quidem d p e, patet, ſitu inverſam eſſe reſpectu objecti D P E, ut quæ in objecto ſuperiora ſunt, in oculo inferiorem teneant locum. Carteſius cenſuit, cum aliis multis, rem explicari poſſe per id, quod anima referat objecta ad illa puncta, quæ reſpiciuntur a radiis, qui in humore chryſtallino decuſſantur, exemplo cæci, qui baculis decuſſatis ſiniſtra manu urgent dexterum objectum, & norunt non ſiniſtrum eſſe, ſed dexterum. At ii videant, quid ad hanc difficultatem reſpondere poſſint, cum radii B e, H e in longe alia directione adveniant, quam in ea E R e, in qua objectum jacet. Et quidem in ipſis radiis, qui ex puncto axis P prodeunt, cum alii aliis directionibus adveniant in p, per P p, M p, m p, confuſio maxima naſceretur, ſi ex percuſſionis directione de objecti ſitu judicandum eſſet.

83. Cenſemus itaque, ſolum conſtantem ordinem, quo obiectorum partes in diverſis fundi oculi punctis pinguntur, rem omnem efficere, quod potiſſimum dicendum eſt, ſi anima non ibi, ſed in cerebri parte aliqua perceptiones habeat obiectorum. Nimirum nos imaginem ipſam, quæ in oculo noſtro fit, non videmus reflexè, ſed per eam videre dicimur obiecta externa. Fit impreſſio a lumine in fundi fibrillas. Eæ continuationem habent per opticum nervum uſque ad cerebrum, ubi eodem ordine debent diſponi, quo in oculo ſteterant, licet poſitio mutari utcumque poſſit, dummodo non perturbetur ordo ſeriei. Per haſce continuationes tremor ad cerebrum propagatur, vel per ipſam fibrillarum ſubſtantiam (quas quidem elaſticas eſſe ſane conſtat, cum in ipſis noſtris craſſioribus nervis elaſticitatem experiamur, quos, ſi per vim de ſede ſua digitis removeamus, digitos ipſos urgent, & ſibi relicti ſe ſtatim reſtituunt), vel per incluſum vaporem. In cerebro percipit anima motum. Ea obiecta,

cta, ex quibus motus in certa cerebri parte eſt factus, reſpectu aliorum, ex quibus eſt factus in alia, vocavimus dextera, ac illa alia ſiniſtra, in quibus ipſis cerebri partibus fit motus per oculum, ubi tuemur eam manum, quam dexteram diximus, vel ſiniſtram; ac idem dicendum de ſurſum, & deorſum. Nihil ibi facit directio, cum qua radii advenerunt in oculum, quam directionem vix Optici norunt, & quæ tam varia eſt. Omnia præſtat locus imaginis definitus a recta imaginaria, quæ ab obiecti puncto per mediam chryſtallinam lentem ducitur ad fundum oculi, & conſtans ordo, quo ejuſmodi imagines primum in oculo diſponuntur, tum ad cerebrum tranſmittunt motum.

84. Atque hìc illud etiam notandum maxime; ut binis oculis unicam obiecti imaginem percipiamus, ſolam id efficere diſpoſitionem fundi oculi, & fibrillarum per binos nervos opticos tendentium ad cerebrum, una cum recta collocatione chryſtallini reſpectu ipſius fundi. Si enim utraque chryſtallina lens directe appenſa ſit ante medium fundum oculi, & fibræ ab externo latere dextero oculi dexteri uniantur vel ante adventum ad cerebrum, vel in ipſo appulſu ad cerebrum, cum fibris provenientibus ab interno dextero latere oculi ſiniſtri, & ita porro, ſit autem utrumque fundum oculi prorſus æquale & ſimile, ac nos utriuſque oculi axem convertamus in idem obiecti punctum, vel in idem punctum ſatis proximum obiecto, pingentur quidem in binis oculis binæ imagines, ſed pingentur in partibus fundi, quæ ſibi reſpondent, nimirum vel utrobique in axe, vel utrobique ad eandem ab axe diſtantiam, & plagam, & motus ob illam fibrarum conjunctionem ad eandem cerebri partem deferetur, ac unica habebitur perceptio, quam ejus phænomeni cauſam aſſignavit Newtonus. Ubi illud ſane mirum, debuiſſe fundum oculi, & opticos nervos Naturam effingere longe aliter, ac omne reliquum corpus. In manibus, in pedibus, in vultu, in ipſa oculorum conformatione, unius parti extimæ ſiniſtræ reſpondet alterius pars itidem extima, & idcirco dextera. At hic debuit omnino extimæ unius, intima alterius reſpondere.

85. Quod ſi vel vi digitis illata, vel vino, vel morbo aliquo fiat, ut lens aliam habeat poſitionem reſpectu fundi oculi, illico binæ imagines percipiuntur, & motum lentis intra oculum conſequitur motus apparens in obiecto, quia pingitur ejus

ima-

imago in fundo in alia parte in alio oculo non homologa. Pariter ſi nos moveamur cum omnibus circumjacentibus corporibus, ut in navi, motum non percipimus, quia imago pergit pingi in eadem parte fundi oculi, & in eadem cerebri parte motus excitari.

86. Hæc quidem de directione, & poſitu, jam de magnitudine imaginis. Magnitudo e d pendet ab angulo e R d, & diſtantia R p. Quoniam autem diſtantiam ipſam R p, quæ a forma oculi pendet, habemus pro conſtanti, hinc magnitudinem apparentem metimur ab angulo e R d, cui reſpondet angulus P R E, quem efficiunt binæ rectæ ductæ a binis extremis punctis obiecti ad medium circiter chryſtallinæ noſtræ lentis in oculo. Is igitur angulus magnitudinem apparentem metitur. Hinc & Planetarum eas, quas apparentes diametros dicimus, eodem metimur angulo. Sit in fig. 24 Planetæ centrum C, Obſervator *F.24* in A. Ductis tangentibus A B, A D, tum ſemidiametro C B, & diametro D C H, diameter quidem Planetæ, vera eſt D C H, diameter apparens dicitur angulus B A D, qui etiam, productis rectis A B, A C, A D in cælum in E, I, F, determinat magnitudinem arcus cæleſtis I E, I F intercepti a ſemidiametris Planetæ C D, C B. Cum autem ſit, ut A C ad C B ita ſinus totus ad ſinum ſemidiametri apparentis C A B, remanet ſinus ipſe, ut ſemidiameter vera directè, & diſtantia A C reciproce; cumque ii anguli exigui ſinubus ſuis ſint proportionales, generaliter effertur in Aſtronomia, eſſe ſemidiametrum, vel diametrum apparentem, ut eſt diameter vera directè, & diſtantia reciproce, ac ſi ex hiſce tribus dentur duo; tertium facile invenitur.

87. At hæc, quæ de vera imaginis intra oculum, & apparenti obiecti magnitudine diximus, correctione indigent, exigua quidem, & quæ, ubi magnitudines apparentes majores ſunt, rem parum perturbat; ſed, ubi ſunt exiguæ, turbationem inducit maximam, & homines etiam doctiſſimos aliquando ad paralogiſmos deduxit. Nam aberratio ex pluribus capitibus orta imaginem in oculi fundo nonnihil auget.

88. Primo quidem concipiamus filum unicum luminis lineare indiviſibile (nullum quidem eſt ejuſmodi, ſed licet id mente confingere), deferri ad unicum punctum fundi oculi. Si id in unicum illud unius fibrillæ punctum ageret, illam concuteret

totam, & validior incurſus in unicum ejus punctum poteſt in-ea inducere motum majorem, quam plures minores impulſus facti in plures ejus particulas. Quare ſi a magnitudine fibrillæ motum accipientis, & ad cerebrum tranſmittentis pendet magnitudo ejus partis in cerebro, in qua motus percipitur, & cui magnitudo imaginis obiecti adſcribitur, creſcet hoc ex capite imago illa, nec erit punctum unicum imago.

89. Deinde luminis radii agunt in corpora in aliqua etiam diſtantia. Quare filum lineare luminis motum imprimet ſpatiolo cuidam jacenti circa punctum, ad quod dirigitur, quo iterum diſtenditur apparens puncti imago.

90. Tertio illud filum ad oculum defertur per aerem, qui vapores habet continuo motu agitatos. Hinc nonnihil de directione ſua perpetuo detorquetur. Ea deflexio efficit, ut illud ipſum lineare filum jam ad aliud deferatur in oculi fundo punctum, jam ad aliud, & pungat, ac vellicet omnia puncta ſpatioli cujuſdam, temere hac illac celerrime per ipſa excurrendo. Ea vellicatio ſenſum continuum excitabit toti illi ſpatio reſpondentem, durantibus nonnihil præcedentibus impreſſionibus, ut ubi carbo accenſus celeriter in gyrum agitur, continuus appareret lucidus circulus.

91. Quarto ab unico etiam objecti puncto non defertur ad oculum filum unicum luminis, ſed faſciculus filorum, qui per omnem pupillam O o, ingrediuntur. Jam id imaginem auget triplici ex capite. Primo quidem forma lentis chryſtallinæ nunquam a Natura efformatur ita perfectæ figuræ, & perpolita, ut par eſſet. Vitium aliquod ubique cernimus, & in rebus extra nos poſitis in frondibus, in malis, ac pyris, in ſalium concretionibus, ubique demum. In nobis ipſis, in vultu, in manuum forma, ac pedum, quantum homines a ſe invicem differunt, quantum peccat Natura, ob cauſas plurimas, quæ nutritioni ſe immiſcent, quæ impreſſiones multiplices faciunt? Erit aliquid in quavis etiam lente chryſtallina erroris itidem in ejus forma, in ejus ſuſpenſione, in diſtantia a fundo oculi. Porro jam inde-error aliquis habebitur ſemper, & quidem ſæpe non ita exiguus. Secundo loco licet forma accuratiſſima eſſet, tamen nulla figura radios homogeneos colligit in unico puncto, ſed aberrationem illam parit, quam vidimus in fig. 5. Tertio demum multo majorem errorem ſecum trahit diverſa refrangibilitas radio-

rum,

rum, qua fit, ut in fig. 6 expoſuimus, ut radii ab eodem obiecti puncto digreſſi uniantur in circello quodam, non in unico puncto.

92. Ex omnibus hiſce capitibus objectum, quod ex unico puncto radios emitteret, haberet in oculo imaginem craſſitudinis cujuſdam. Et quidem ex poſtremo capite diverſæ radiorum refrangibilitatis magnitudo imaginis unici puncti eſt admodum ingens. Ponamus diſtantiam R p lentis chryſtallinæ a fundo oculi eſſe dimidii pollicis, qua & minor eſt, & aperturam pupillæ O o in fig. 12. eſſe unius lineæ. Circellus, per quem diverſi colorati radii diſpergentur circa p, habebit pro diametro $\frac{1}{55}$ partem unius lineæ. Invenietur angulus, quem ea diameter ſubtendit in R, ſi fiat, ut Rp lin. 6 ad ſemidiametrum ipſius circelli $\frac{1}{110}$, ita ſinus totus = 100000 ad 152, qui erit ſinus dimidii ejus anguli, & invenitur aliquanto major minutis 5. Quare is error decem ſubtendit in oculo noſtro minuta; & objecti partes, quæ per 10 minuta diſtant a ſe invicem, confundunt in fundo oculi radios. Si excluſis radiis debilioribus cum Newtono redigatur circellus aberrationis ad $\frac{1}{250}$ partem, & fiat ut 250. ad 55, ita decem minuta ad quartum, prodit error imaginis auctæ major minutis duobus. Ejuſmodi magnitudinis ſaltem in nudo oculo eſt imago unici etiam puncti, ſi ſatis habeat luminis, ad oculum percellendum; nam ſi lumen ſit debile, ſolæ intimiores circelli partes excitabunt ſenſum, ut itidem per noctem. Ea magnitudine augebuntur etiam imagines omnium objectorum in fundo oculi ex ſolo poſtremo capite a radiis excurrentibus hinc, & inde ab e, & d.

93. Hinc hallucinantur, qui dicunt objecta, quorum diameter apparens ſit tantummodo unius ſecundi, ſenſu non percipi. Si ſatis lucida ſint, & unicum etiam ſint punctum, adhuc tamen diſcerni poſſunt, & apparebunt aliqua magnitudine a tot aberrationibus orta. Si objectum ſit nigrum in fundo ſatis lucido, minuetur ejus magnitudo apparens a radiis lucidi circumjacentis aberrantibus in locum debitum ejus imagini; ſi fuerit lucidum, augebitur ab ejus radiis aberrantibus extra locum ſuæ imaginis. Hinc ad majorem diſtantiam deſinet vide-

ri diſtinctè, ſi ſit lucidum in fundo nigro, quam ſi ſit nigrum in fundo lucido. Ea autem diſtantia pendet plurimum a vi luminis, quam ipſum objectum lucidum habet, vel ſpatium circa objectum obſcurum, & vero etiam a mobilitate fibrillarum in oculo, qua fiet, ut in circello imaginis per aberrationem factæ ſentiri poſſit lumen in majore, vel minore diſtantia a centro circelli.

94. Ut demum deveniamus ad claritatem, ea pendet a quantitate luminis, quæ per pupillam O o ingreditur, a diaphaneitate humorum oculi, & corneæ, quæ aliquid luminis intercipiunt, & a motu, quo fibrillæ in fundo oculi tremunt ad eundem impulſum. Ut haſce poſteriores cauſas omittamus, quæ in eodem homine conſtantes ſunt, illud occurrit notabile, ita res ab Auctoræ Naturæ diſpoſitas eſſe, ut manente eadem pupillæ apertura, utcumque objectum ingens removeatur ab oculo, nihil mutetur claritas, niſi medium interjacens ſurripiat quid luminis, ut aer interjectus in ingenti tractu ſurripit. Nam intenſitas luminis decreſcit in ratione reciproca duplicata diſtantiarum ab objecto emittente ipſum lumen, & magnitudo imaginis eſt itidem in eadem ratione reciproca duplicata diſtantiarum, cum diameter apparens, cui reſpondet diameter imaginis, ſit in ea ratione reciproca ſimplici, & ſuperficies proinde in duplicata. Inde enim fit, ut quanto minuitur lumen, tanto minuatur ſpatium, per quod in oculi fundo diſpergitur.

95. Diximus autem ingentium objectorum partes: nam ubi objectum nimis exiguum eſt, ejus imago magnitudinem fere totam habet ab aberrationibus ortam, quæ conſtantis magnitudinis eſt, unde fit, ut lumine imminuto per diſtantiam, magnitudo ſpatii, per quod dividitur, non minuatur, vel minuatur in minori ratione. At in partibus exiguis objecti ingentis, quod luminis ab una parte aberrantis amittitur, id totum reſtituitur in eundem locum ab aberratione circumjacentium. Sola diſtinctionem minuit remotio; nam partes, quæ minorem acquirunt apparentem diametrum in receſſu, confunduntur cum iis, a quibus antea diſtabant opticè magis, quam illi errores ferant. Illud autem hìc demum non eſt omittendum, Auctorem Naturæ conſuliſſe nonnihil etiam excluſioni nimii luminis, cum effecerit mobilem pupillam O o, quæ jam dilatatur magis, jam minus pro luminis ipſius quantitate, quæ quidem ſi poſſet

expan-

expandi, & contrahi in eadem ratione, in qua lumen eſt majus, vel minus; objecta omnia æque clara intueri poſſemus interdiu, & per noctem, ac in Solem ipſum liceret impune oculos audaces defigere.

96. Hæc de oculo nudo: videamus jam, quid præſtet oculus unica armatus lente. Sit in fig. 13, 14, 15, D d lens chryſtallina oculi, H h ipſius fundum, B b lens ante ipſum poſita, E P objectum. Sit autem in fig. 13 lens B b minus remota ab objecto, quam ſit ipſius focus radiorum parallelorum, in fig. 14 æque, in fig. 15 magis. Habebitur in fig. 13 imago virtualis, ubi eſt e: in fig. 14, imago erit in infinita diſtantia, in fig. 15 haberi deberet imago realis ubi eſt e, & ubique punctum e jacebit in recta E R in primo caſu ad partes E, in ſecundo in infinita diſtantia, in tertio ad partes R. Si ducatur per G recta, quæ in fig. 13 & 15 tranſeat per e, & in fig. 14, in qua e abit in infinitum, ſit parallela rectæ E R, & occurrat fundo oculi in i, focus radiorum ex e erumpentium in fig. 13, parallelorum E R in fig. 14, convergentium ad e in fig. 15 ſummota lente B b eſſet in i. Quare interpoſita itidem lente, radius E R, cujus directio tranſit per e in fig. 13, & 15, & qui in omnibus tranſit per R æquipollenter irrefractus abibit ad i, & imaginis magnitudinem L i definiet angulus L G i, quem poſitio puncti e in fig. 13, & 15, & directio E R in fig. 14, determinant. Quod ſi præterea ducatur per G recta E G I, radius ſine lente B b relatus ad lentem Chryſtallinam D d definiret magnitudinem imaginis objecti ejuſdem viſi nudo oculo. P. 13 14 15

97. Ex ipſa inſpectione figuræ patet in caſibus hìc expreſſis imaginem augeri per lentem, & facile eſſet omnia, quæ huc pertinent definire, ac videre quo pacto incrementum imaginis mutetur mutata poſitione lentis inter oculum, & objectum. Sed notandum illud, niſi punctum e multum diſtet ab oculo, viſionem non poſſe eſſe accuratam, quia radii in fig. 13 incident nimis divergentes, in fig. 15 nimis convergentes. Poſitio figuræ 14, in qua radii profecti a foco lentis B b, ex ea egrediuntur paralleli, eſt optima oculo bene valenti: poſitio figuræ 13 eſt aptior presbitæ, poſitio figuræ 15 eſt aptior myopi, ſed ſi ſatis e accedat ad oculum, confuſio habebitur, quæ erit ſumma, ubi e incidat in ipſum oculum. Quod ſi e jaceret inter B b, & oculum, quem caſum in figura non expreſ-

expreſſimus, tum recta ex e per G ducta deberet in oculi fundum incurrere in arcum L H, quo caſu imago inverteretur, quæ in prioribus caſibus remanet directa. Atque eodem pacto æque facile definiri poſſent, quæcumque pertinent ad lentes concavas, quæ e contrario objecti imaginem minuunt.

98. Verum omiſſis hiſce omnibus ſatis erit in caſu fig. 14. notare illud, eum caſum in exiguis lenticulis prodeſſe plurimum; quia cum earum focus proximus ſit ipſis, ut in globulis diſtans per quartam diametri partem, objectum ibi collocatum adhuc videtur diſtinctum, cum radii ex illa lenticula emergant paralleli, apparebit autem cum eo angulo, quem tanta illa vicinia requirit. Atque hinc patet ratio microſcopiorum, quæ unica conſtant lente, vel globulo vitreo. In objecto autem viſo per lentem ita diſpoſitam, ut ipſum objectum ſit in ejus foco radiorum parallelorum, angulus L G i, æqualis erit in fig. 14 angulo G R d interno & oppoſito, adeoque & angulo E R P ad verticem ipſi oppoſito. Porro inde eruitur pro angulis exiguis hoc theorema. *Angulus determinans in oculo imaginem objecti viſi per lentem convexam habentem ipſum in ſuo foco radiorum parallelorum æquatur angulo, ſub quo videretur e media lente, nimirum eſt directè, ut ejus diameter vera, & reciprocè, ut diſtantia foci ipſius radiorum parallelorum ab ipſa lente.* Cum enim ſit R P ad P E, ut eſt ſinus totus ad tangentem anguli R P E, erit hæc tangens ut E P directè, & P R reciprocè. Ac admodum facile hæc ipſa theoremata transferuntur ad lentes concavas.

99. Abſolutis iis, quæ pertinent ad unicam lentem combinatam cum lente chryſtallina intra oculum, videamus, quid præſtet ea combinatio binarum lentium, ex qua fit teleſcopium dioptricum. Porro quatuor debent conſiderari in quovis teleſcopio: diſtinctio, quam etiam dicimus terminationem; augmentum imaginis objecti; claritas; campus, ſive magnitudo ſpatii, quod ſimul complectitur. Agemus ſeorſum de ſingulis.

F. 16. 17. 100. Sit in primis in fig. 16. & 17. lens convexa B b, quæ radios profectos a punctis objecti P E colligat in e p, ubi ſit ejus imago realis, velut radios E A, E R in e. Si interponatur vel inter imaginem p e & ipſam lentem B b, ut in fig. 16, lens concava, vel ultra ipſam, ut in fig. 17, lens convexa D d ita; ut illius focus virtualis, hujus realis ſit in ipſo puncto p, radii

in

in utroque caſu e lente D d emergent paralleli, ut ii duo radii A e, R e per rectas O Q, o q, (denotant autem hic utrobique puncta O o, locum egreſſus e lente D d) inter ſe, & rectæ e G ductæ per mediam lentis craſſitudinem (num. 70), & ab humore chryſtallino M m in fundo oculi H h bene diſpoſiti colligentur, ut O Q, o q in I, ubi imaginem exhibebunt in L I, quæ quidem diſtinctiſſima eſſet, ſi lentes in unico puncto colligerent radios ex unico puncto advectos. Patet id ex num. 47, cum lens concava radios convergentes ad ſuum focum virtualem, & lens convexa radios divergentes a ſuo foco reali reddat parallelos. Ejuſmodi conjunctio foci lentis alterius, quæ cum objecto ſit obverſa, & propior, dicitur objectiva, & foci lentis alterius, quæ oculo propior dicitur ocularis, diſtinctionem ſecum ferunt, cum radios ab unico puncto objecti digreſſos ocularis lens ad oculum parallelos dirigat, quod ad diſtinctam viſionem requiritur, diſtinctione tamen, quam radii aberrantes nonnihil turbant, ut paullo infra videbimus.

101. In utroque caſu utriuſque figuræ *ad habendam diſtinctionem myopes debent admovere lentem ocularem lenti objectivæ, presbitæ removere*. Nam removendo lentem D d cavam fig. 16 a ſuo foco p, vel admovendo convexam fig. 17, quod utrobique fit eam admovendo objectivæ lenti B b, radii emergent nonnihil divergentes, contrarium vero accidet removendo.

102. Utcumque lentes ejuſmodi combinentur, habebitur hæc qualiſcumque diſtinctio, ſed non quævis combinatio auget objecti imaginem. Sit utrobique C focus radiorum parallelorum lentis B b jacens ultra ipſam, per quem tranſeat radius E A. Is per a e emerget e lente B b parallelus radio C R, nempe axi teleſcopii, & ejus concurſus cum radio E R in e determinabit ipſum punctum e; erit autem N I, quæ determinat locum imaginis I, parallela radiis emergentibus O Q (num. 70). Quare angulus L N I, ſub quo videtur objectum ope binarum lentium, æqualis erit angulo p G e; angulus autem e R G ad verticem oppoſitus angulo P R E, ſub quo idem objectum nudo oculo videretur ex R. Jam vero ſinus angulorum e G R, e R G, ſive in angulis exiguis ipſi anguli, ſunt ut latera R e, e g, ſive proxime ut R p, G p. In objecto autem E P ita remoto, ut radii advenientes ad lentem objectivam B b haberi poſſint pro parallelis, & punctum p haberi poteſt pro foco radiorum paral-

le-

lelorum, & diſtantiæ R p, G p ſoci radiorum parallelorum a binis lentibus ſunt, ut ipſarum radii, vel diametri curvaturæ, quod eruitur e formula $\frac{n\,r}{2}$ numeri 45, cum ejus valor ſit, ut r delatis n, & p. Igitur habebitur hoc theorema. *Angulus, ſub quo objectum apparet in oculo, ad angulum, ſub quo appareret ſpectatum e loco lentis objectivæ, eſt in objectis admodum remotis, ut diſtantia foci radiorum parallelorum lentis objectivæ ad diſtantiam ejuſmodi foci lentis ocularis, ſive ut radius curvaturæ lentis objectivæ ad radium curvaturæ lentis ocularis.* Porro in objectis propioribus recedente p ab R augebitur ea ratio, ut augetur diſtantia R p, ac ubi myopes admovebunt lentem ocularem lenti objectivæ, creſcet itidem nonnihil, contra decreſcet, ſi presbitæ removeant, quod facile demonſtratur. Sed impoſterum loquemur de media collocatione, in qua obtinet ſuperius theorema.

103. Patet jam in caſu lentis objectivæ convexæ B b conjunctæ cum oculari concava D d, ut in fig. 16., ſemper debere haberi aliquod augmentum imaginis. Cum enim debeat focus communis p jacere ultra ipſam ocularem D d, erit ſemper R p major, quam G p. At in caſu utriuſque lentis convexæ, ut in fig. 17., in qua focus p jacet inter utramque lentem, poterit haberi augmentum, æqualitas, vel imminutio imaginis, prout curvatura lentis objectivæ habuerit radium majorem, æqualem, vel minorem, quam curvatura lentis ocularis. *Hoc autem augmentum, vel imminutio pro objectis admodum diſtantibus, habebitur, dividendo radium, vel diametrum curvaturæ lentis objectivæ per radium, vel diametrum ejuſmodi lentis ocularis, eritque directè ut radius, vel diameter curvaturæ lentis objectivæ, & reciprocè ut radius, vel diameter curvaturæ lentis ocularis.*

104. Quoniam p E ad P E habet utrobique eandem conſtantem rationem R p ad R E, utcumque aſſumatur P E major, vel minor, & pariter L I ad e p eſt, ut L N ad p G, partes objecti tam in imagine e p, quam in oculo ſervabunt eundem ordinem, adeoque objectum ipſum non erit deformatum quidquam, quod valet ſatis accurate pro exiguis ab axe diſtantiis, pro quibus omnis expoſita theoria eſt accuratior.

105. Hic autem triplex habetur diſcrimen inter ejuſmodi bi-

binos caſus. Nam primo quidem longitudo teleſcopii eandem habentis augendi potentiam minor eſt in prima combinatione, quam in ſecunda, cum ibi lentium diſtantia ſit differentia diſtantiarum earundem a communi foco, hìc ſumma. Secundo prima combinatio figuræ 16. exhibebit objectum directum, ſecunda vero figuræ 17. ipſum invertet. Nam ibi radii O P, o q deveniunt ad oculum directione in eandem plagam inclinata ad axem, in qua inclinatur radius directus R E, contra in fig. 17 in oppoſitam plagam inclinabitur. Tertio in prima combinatione nulla habetur intra teleſcopium accurata imago objecti, habetur vero in ſecunda in e p, quæ intra teleſcopium jacet.

106. Prima duo efficerent teleſcopium primi generis præſtantius, quo quidem Galileus eſt uſus. Sed in ea habetur maximum incommodum ob campum nimis exiguum, ut jam videbimus. Contra tertium diſcrimen efficit teleſcopium ſecundi generis in immenſum præſtantius teleſcopio primi generis in Aſtronomia, & Geographia. Nam ex una parte objecta cœleſtia, quæ formam rotundam habent, idem eſt ſi directo, ac ſi indirecto ſpectentur ſitu. Ex altera vero parte commodiſſimum accidit illud, quod in ſitu imaginis e p (fig. 17) apponi poſſunt bina fila fixa ſe decuſſantia, ex quorum interſectione ut p vel e, per datum punctum R collineare liceat in certum objecti punctum p vel e, ob quam proprietatem hæc teleſcopia aptari potuerunt quadrantibus, & ſectoribus ad angulos dimetiendos directo in alterum objectum teleſcopio fixo, in alterum teleſcopio mobili. Itidem poſſunt collocari bina fila parallela mobilia ope machinulæ, per cochleam, ad comparandas inter ſe objecti partes, vel apparentes plurium objectorum magnitudines acceſſu, & receſſu filorum eorundem definito per revolutiones cochleæ, & partes revolutionis. Id inſtrumentum dicitur micrometrum, & plura ſunt ejuſmodi micrometrorum genera filis tam fixis, quam mobilibus conſtituta.

107. Verum etiam pro objectis terreſtribus medentur facile inverſioni imaginis addendo, ut in fig. 18. binas alias lentes oculares ita, ut præter objectivam B b, ſint oculares tres D d, F f, Z, quarum prima habeat focum alterum in p communem cum objectiva, ſecunda in F communem cum prima, tertia in y, communem cum ſecunda. Radii digreſſi ex eodem objecti puncto E, ut E A, E R, coeunt in e, ubi pingitur imago e p, Fig. 18.

ut prius. Eos lens D d a ſuo foco divergentes reddit parallelos per O X, o x, lens T t ſuſceptos parallelos reddit convergentes in Y, ubi iterum imago pingitur in Y y, lens autem Z, eoſdem parallelos tranſmittit per Z Q, z q ad lentem chryſtallinam oculi M m, quæ ipſos colligit in I, adeoque habetur diſtinctio. Radios autem E A, P R ad diverſa puncta pertinentes colligit lens D d in ſuo foco in F, eos lens T t inde exceptos reddit parallelos per F y, X Y, quos idcirco lens Z cogit convergere per z q, y L, & ipſi z q parallela N I determinat magnitudinem imaginis prorſus eandem, quæ habita fuiſſet poſt lentem D d, ſed inverſam inverſæ, adeoque directam. Et quidem hoc pacto jam fiunt teleſcopia terreſtria, ut evitetur illa nimia anguſtia campi, de qua paullo infra.

108. At e contrario poſſet etiam Galileano teleſcopio adhiberi micrometrum alterius cujuſdam generis, quod nuperrimè invenit in Anglia Joannes Dolondus, & habetur in Tranſactionibus Anglicanis tomo 48 pertinente ad annum 1753 pag. 178, ut ad nos perſcripſit nuper vir doctiſſimus P. Pezenas e Soc. noſtra, qui micrometrum ipſum ad Newtoniana, ſive Gregoriana Catadioptrica teleſcopia applicatum illuſtrabit ſub anni finem. Nos autem ipſas Tranſactiones nondum vidimus. En aliquam ejus ideam. Concipiamus vitrum objectivum bifariam ſectum
F.19. ut in fig. 19 in duas partes A E B, a D b ita, ut poſſint diſiungi
20. altera per alteram excurrente in directum diviſis C, c. Si earum dimidios tranſverſos ductus C A, c b intueamur, referent in fig. 20. figuras C E, c b. Radios omnes ex eodem remoti obiecti puncto delatos cum P C, & p c colliget pars prima in R ſecunda in r. Itidem radios ex alio delatos cum E C, e c in B, & b. Quare duorum obiecti punctorum, ut duarum Fixarum habebuntur 4 imagines R, r, B, b, quarum priores duæ inter ſe, & poſteriores inter ſe diſtabunt, ubi obiectum ſit ſatis remotum per intervallum B b, R r, æquale C c. Quare ſi ita diducantur binæ ſemilentes, ut imago prima primi obiecti R coeat cum ſecunda ſecundi obiecti b, innoteſcet ex ipſo concurſu imaginum, quantum diſtiterit prius imago B, ab imagine R, quæ diſtantiam binorum illorum obiectorum metitur. Porro utroque teleſcopii genere tam Galileano, quam communi dioptrico id micrometri genus æquè aptari poteſt.

109. Relinquitur, ut de claritate verba faciamus. Ea pendet a quantitate luminis ingredientis in oculum. Ut enim habeatur eadem claritas fieri debet, ut quantitas luminis, quæ per re-

teleſcopium ad quantitatem ejus, quæ haberetur oculo inermi ſit ut magnitudo imaginis, quæ haberetur nudo oculo, ad magnitudinem ejus, quæ habetur per teleſcopium. Sic enim eidem fibrarum numero reſpondet eadem luminis quantitas. Debet igitur totidem vicibus diameter aperturæ vitri obiectivi continere diametrum aperturæ vitri ocularis, quot vicibus diameter imaginis per teleſcopium ante continet diametrum imaginis habendæ nudo oculo. Idem nimirum exprimet & rationem diametri aperturæ vitri obiectivi ad diametrum pupillæ, & incrementum imaginis. Hugenium quidem longa experientia docuit, ut ipſe teſtatur Dioptricæ ſuæ prop: 55, ſatis eſſe, ſi pro terreſtribus obiectis interdiu habeatur ſexta, vel ſeptima pars ejus luminis, pro cæleſtibus noctu etiam decima tertia. Et in optimo teleſcopio longo pedes Rhenollandicos 30, quod in diametro imaginem augebat per 109, invenit, ſatis eſſe aperturam vitri obiectivi unciarum 3, cum ex illa regula debuerit eſſe 11. Sic etiam nubilo cælo, licet multum luminis deſit, ſatis clare videmus obiecta. Adhuc tamen ſemper illud ſtat, ut in diverſis teleſcopiis æquè bonis debeat eſſe apertura vitri obiectivi proportionalis potentiæ amplificandi obiecti imaginem; & patet, data ejuſmodi potentia, dari jam aperturam vitri obiectivi neceſſariam, ſi fiat ut 109 ad hanc novam potentiam ita unciæ tres ad diametrum quæſitam.

110. Hinc autem potiſſimum teleſcopiorum incommodum. Nam ad habendam claritatem, oportet augere diametrum aperturæ: ipſi autem diametro aperturæ reſpondet error e radiorum diverſa refrangibilitate, juxta num. 60. cum ſit pars ejus quinquageſima quinta, vel ducenteſima quinquageſima. Porro lens ocularis dum imaginem auget, hunc etiam errorem auget. Hinc applicari non poteſt quævis ocularis lens cuivis objectivæ, ſed debet adhiberi, quæ ejuſmodi incrementum exhibeat, ut cum hoc incremento imaginis maneat in quovis teleſcopiorum genere illa erroris magnitudo, quam ſemel conſtiterit per obſervationem diſtinctioni non obſtare. Quæ autem ea ſit, facile innoteſcet ex theoremate demonſtrato num. 86, quod diameter imaginis in oculo videnti objectum per lentem ſit directè, ut vera objecti diameter, & reciprocè, ut diſtantia foci ejuſdem lentis, adeoque reciprocè, ut eſt radius, vel diameter curvaturæ ipſius lentis.

111. Hoc poſito, in fig. 17 patet, errorem ex diverſa re-

frangibilitate ortum in p e , debere occupare circellum , cujus diameter ſit proportionalis aperturæ vitri objectivi V v , ut autem retineatur diſtinctio , debere ab oculo per lentem chryſtallinam M m videri id ſpatiolum ejuſdem ſemper magnitudinis. Dicatur ſemidiameter aperturæ vitri objectivi s, diameter curvaturæ ipſius objectivi d, ocularis vero a, & erit potentia amplificandi $\frac{d}{a}$. Erroris vera diameter erit, ut apertura s, adeoque viſa per lentem ocularem erit, ut $\frac{s}{a}$, quæ cum debeat eſſe conſtans, erit s, ut a; eſt autem ſemidiameter apertetræ, ut potentia, nimirum s ut $\frac{d}{a}$, adeoque a ut $\frac{d}{s}$. Igitur erit s ut $\frac{d}{s}$, & ss, ut d. Nimirum erit quadratum aperturæ, adeoque & quadratum potentiæ amplificandi, ut eſt diameter curvaturæ lentis objectivæ, quæ quidem diameter cum ſit quamproximè, ut eſt teleſcopii longitudo (nam ea longitudo fere æquatur diſtantiæ foci lentis objectivæ ab ipſa, neglecta diſtantia foci ocularis adeo minore, & diſtantia illa foci æquatur ad ſenſum radio); erit illud quadratum, ut eſt longitudo teleſcopii, cumque fuerit s, ut a, patet ocularis lentis curvaturæ diametrum, vel radium debere eſſe, ut & ſemidiametrum aperturæ vitri objectivi, in ratione ſubduplicata longitudinis ejuſdem. Hic quidem canon eſt maximè conformis experientiæ, & norunt Opifices, eſſe æque bonorum teleſcopiorum vires in ratione ſubduplicata longitudinum.

112. Hinc autem inferimus primò, cauſam, cur teleſcopia omnino perfici non poſſint eſſe diverſam radiorum refrangibilitatem. Concurrunt quidem & aliæ cauſæ, ac ea in primis, quod figura ſphærica radios omnes in unico puncto non colligat, ſed eæ ita parum agunt reſpectu hujus cauſæ, ut præ illa pro nihilo haberi poſſint. Oſtendimus num. 63 in illo teleſcopio pedum 100 errorem a diverſa refrangibilitate ortum majorem eſſe errore orto a figura ſphærica vel octies millies, vel ad minimum bis millies. Quare hic præ illo eſt fere nullus.

113. Accedit, quod ſi vitia teleſcopiorum provenirent ab errore figuræ ſphæricæ, longe alia eſſet relatio inter diametrum

curva-

curvaturæ vitri objectivi, & potentiam amplificandi. Nam eſt ille error (num. 57.), ut $\frac{s^3}{d^2}$, adeoque is viſus in oculo eſt, ut $\frac{s^3}{a\,d^2}$, & proinde, ut ſit conſtans, debet eſſe s^3 ut $a\,d^2$, & $\frac{s^3}{d^2}$, ut a. Eſt autem s, ut $\frac{d}{a}$, adeoque a, ut $\frac{d}{s}$. Erit igitur $\frac{s^3}{d^2}$ ut $\frac{d}{s}$, ſive s^4 ut d^3. Nimirum erunt quadratoquadrata aperturarum lentis objectivæ, ut cubi diametrorum curvaturæ ipſius lentis; & aperturæ ipſæ, ac potentiæ amplificandi, ut radices cubicæ quadrato-quadratorum diametri curvaturæ lentis objectivæ, quod eſt contra experientiam. Newtoni Optica, ubi in ea prop. 6 hoc eodem argumento utitur, tam in editione latina Londinenſi, quam in Gallica, quam iterum in latina recentiſſima Patavina habet radices cubicas quadratorum, pro quadrato-quadratorum. Putamus eſſe mendum primæ editionis ab aliis exſcriptum.

114. Cauſa igitur imperfectionis teleſcopiorum dioptricorum repeti debet a diverſa refrangibilitate radiorum, quam mirum in modum confirmat. Et quidem hanc ipſam ob cauſam teleſcopia catadioptrica, quæ ſpeculis utuntur, & reflexione radios non dividente in regreſſu a ſpeculo tanto præſtant hiſce dioptricis.

115. Secundo loco deducimus eſſe terminum quendam hominibus præfinitum, ultra quem hoc teleſcopiorum prælidio viſum non extendant: nullum ex. gr. fieri poſſe teleſcopium, quod objecta in Luna ita repræſentet, quemadmodum nudo oculo viderentur in diſtantia unius milliarii, ac in quovis Planeta circumſolari, quemadmodum viderentur in diſtantia 100 milliariorum. Nimirum aſſumpta diſtantia Lunæ 60 ſemidiametrorum Terreſtrium, quarum quævis eſt proxime 4000 paſſuum, continentium quinos pedes, diſtantia Lunæ fit 240000 milliariorum, & diſtantia Veneris Perigeæ, quæ omnium ad Terram maxime accedit centuplo circiter major. Hinc deducitur, debere diametrum aperturæ lentis eſſe pedum circiter 550, quæ lens adeo immanis deberet eſſe, ut tranſverſim in ſolo poſita, vertice ſuo ſummum D. Petri tholum ſuperaret. Et hoc quidem argumentum æque valet contra teleſcopia catadioptri-

ca, quæ eandem aperturam requirerent ad claritatem. Accedit contra catoptrica teleſcopia, quod ejus teleſcopii longitudo deberet eſſe milliariorum 9978, multo major tota Telluris diametro.

116. Demum quod pertinet ad campum, ejus magnitudi-
F.17. nem in teleſcopio lentium convexarum fig. 17 determinat diameter aperturæ diaphragmatis, nimirum annuli X x cujuſdam, qui apponitur in eo loco, ubi pingitur imago e p maxime diſtincta, qui debet eſſe aliquanto minor amplitudine lentis ocularis D d. Tantum objecti devenit ad lentem, & inde ad oculum, quantum ipſe permittit, reliqua intercipiens. Ejus ope ipſe campus evadit admodum bene terminatus, & eſt ut diſtantia R p fóci lentis objectivæ ad ſemidiametrum ejus aperturæ ita ſinus totus ad dimidii campi angulum. Quoniam autem radiorum parallelorum manipuli coadunantur circa F, pupilla ibidem conſtituta omnes ejus campi radios admittit. Facile autem eſt demonſtrare eos, ibi occupare partem tantum pupillæ, adeoque devenire ad minorem partem humoris chryſtallini; unde in primis fieri arbitramur illud, quod major per teleſcopia habeatur diſtinctio, tum quia magis evitatur irregularitas, quæ ſit in pupillæ textu; tum quia minori aperturæ pupillæ id æquivalet, quod errorem ex diverſa refrangibilitate ortum in humore chryſtallino minuit in fundo oculi in eadem ratione. Accedit tamen, & illud, quod motu lentis ocularis teleſcopii ſuppletur accuratiſſimè nimio, vel nimis exiguo tumori lentis chryſtallinæ.

F.16. 117. At in teleſcopio Galileano in fig. 16 manipuli illi radiorum O Q, o q divergunt, adeoque exiguus ipſorum numerus in pupillam ingreditur. Si oculus admoveatur ipſi lenti concavæ prope G, quo caſu maximum excipit ejuſmodi manipulorum numerum, & ipſa pupilla pertingat ad o; erit ut F o ad ſemidiametrum pupillæ G o, ita radius ad ſinum anguli G F o, & ut o R ad F o, ita ſinus o F R, ſive o F G ad ſinum o R F, ſive ſemidiametri campi P R E. Quare ex æquo erit ut R o, ſive R G longitudo totius teleſcopii, ad ſemidiametrum pupillæ, ita radius ad ſinum dimidii campi. Patet ſane, quam anguſtus eſſe debeat is campus in longioribus ejuſmodi teleſcopiis, unde proinde nulli eſſe uſui poſſint, ſi nimis excreſcant.

118. Locus jam hic eſſet, ubi de campo agimus, determinandi ea, quæ pertinent ad colores, qui in extremo campo exhi-

hibentur, ubi nimia ſit amplificatio, ut etiam de uſu, & vitiis micrometrorum, quæ conſtituuntur per fila intra ipſum diaphragma, vel etiam de uſu diaphragmatis pro micrometro, de quo multis ab hinc annis diſſertationem dedimus in Actis Lipſienſibus recuſam, cui titulus. De novo teleſcopii uſu ad objecta cæleſtia determinanda. Sed anguſtiæ, quibus premimur, id argumentum cogunt omittere.

119. Illud non omittemus, unum e præcipuis uſibus micrometri conſtantis filis parallelis mobilibus eſſe ad diametros Planetarum apparentes determinandas. Ubi autem determinetur per micrometrum diameter apparens, ſi habeatur præterea diſtantia ex aliquo parallaxium genere, deducitur magnitudo vera, cum ſit in fig. 24 radius ad ſemidiametrum apparentem B A C, ita diſtantia A C ad ſemidiametrum veram C B. Hæc quidem methodus ſatis procedit, ubi diametri apparentes ſunt ſatis magnæ. At ubi ſatis exiguæ ſunt, cum omnes illi errores, de quibus egimus num. 88, augeant imaginem apparentem in oculo, fiet utique, ut error committatur intolerabilis in diametro quæſita. Ut unum proferamus exemplum, diametros apparentes Fixarum primæ magnitudinis, ut Syrii, alii putaverunt ante inventa teleſcopia trium, vel quatuor minutorum, ut ipſe Hevelius, alii poſt ea inventa ſaltem plurium ſecundorum, & Ricciolius quidem circellum conſiderans intra teleſcopium ſibi a ſuis vitris exhibitum, cenſuit eſſe ſecundorum 18. Alii Aſtronomi ſaltem 6 ſecundorum; & quidem Galileus alia methodo ſecundorum 5, vel 6 in Spica Virinis. Hugenius autem aliâ depreſſit ad 4 tertia; unde & in diſtantiam Fixarum inquiſivit. F. 24.

120. At nos illud affirmamus: de vera Fixarum magnitudine conſtare nihil, præter illud, multo minorem eſſe uno ſecundo, immo etiam ſi æquali ſuæ ſuperficiei parte emittunt æqualem luminis vim, ac Sol, minorem eſſe uno minuto tertio; de diſtantia vero nihil, præter illud, majorem eſſe, quam ſit diſtantia Terræ a Sole aſſumpta centies millies. Ut ordiamur ab hoc poſtremo, motus Fixarum ita jam omnes certi ſunt, ut ſecluſa omni parallaxi etiam annua nunquam duobus ſecundis diſtet ſatis exacta obſervatio a calculo. Quare paralliaxis ejuſmodi ad duo ſecunda non pervenit, ad quæ ſi perveniret, diſtaret utique per orbis annui ſemidiametros 100000, ut facili calculo trigonometrico conſtat. nihil, de apparenti

Quod

121. Quod autem attinet ad diametros apparentes, tota illa apparens ipſarum magnitudo provenit a radiis aberrantibus. Nam quo teleſcopia majora ſunt, & meliora, eo magis apparent inſtar puncti. Habemus nunc teleſcopia catoptrica, quæ imaginem augeant in diametro per 800. Hinc ſi eſſent quinque ſecundorum diametri ſpoliatæ aberrationibus, eo teleſcopio apparerent ſecundorum 4000, nimirum plus quam unius gradus, plus, quam dupla Luna nudo oculo. Si unius ſecundi eſſent, apparerent 800 ſecundorum ſive minutorum fere 14, fere quantum dimidia Luna. Apparent autem etiam per ipſa punctorum inſtar. Habent igitur in immenſum minorem uno ſecundo.

122. Quid vero de Hugeniana methodo. Ipſe, ut habet in
F. 22. Coſmotheoro ſub finem tubum aſſumpſit T V ut in fig. 22 pedum 14. Circa verticem obtexit in Bb, & ad foramen exiguum $\frac{1}{12}$ lineæ, ſive $\frac{1}{144}$ pollicis appoſuit globulum A a, qui radios ſolis e I deflexos primum per I i verſus f, tum per i F ad extremum S pupillæ S s appoſitæ ad foramen aliud L, & videbat ſolem non minore lumine eo, quod habet Syrius, Inde calculo inito invenit eam ſolaris luminis partem ad oculum devenire, ut ſi ſol eo deberet recedere, unde tantulus appareret, ejus diameter apparens eſſet 4 tertiorum. At omiſit ille conſiderationem diffractionis, quæ in diſtantia dimidiæ A a ſive $\frac{1}{288}$ partis pollicis agit plurimum, & plurimos radios detorquet. Inde igitur infertur ſolis lumen, niſi diffractio magnam ejus partem interciperet, multo vividius futurum fuiſſe, adeoque multo minorem debere eſſe diametrum apparentem Syrii, quam ipſe poſuerit.

123. Eodem malo laborat methodus Galilei, qui interpo-
F. 23. ſito inter oculum P, & fixam filo, cujus ſemidiameter craſſitudinis C F, receſſit donec ipſi ſtella filo obtegeretur, & e ſemidiametro ipſa C F, ac diſtantia C P inveſtigavit angulum E P I, cujus duplum attribuit diametro apparenti fixæ. At diffractio hic quoque rem omnem perturbat. Et quidem ſi filum ſit minus craſſum, quam apertura pupillæ S s fixa autem ſit punctum etiam unicum per radios D S, d s parallelos tangentibus B A, b a vi-

dere-

deretur hinc, & inde a filo. Sed id etiam diffractio perturbat, nec vacat in eo immorari pluribus, quod quidem facile expediretur, habita ratione diffractionis, amplitudinis pupillæ, & errorum ex ipſa amplitudine provenientium in oculi fundo.

124. Nos alia methodo invenimus tam exiguam eſſe in ipſo Syrio vim luminis, ut, ſi Sol ad eam diſtantiam abire deberet, in qua tantum haberet luminis, ne ad tertium quidem minutum ejus diameter apparens perveniret. Nam Jupiter etiam Apogeus plus habet lucis, quam Syrius. Tum vero ejus diameter apparens eſt circiter ſecundorum 40. Sit in fig. 21. E L e l globus Jovis. Eum vident omnes, qui adſint per totam ſphæram, cujus dimidium exhibet A D a. Si Sol, qui ipſum illuſtrat ſit ad partes A, is qui ſit in A, videt plenum, qui in a ex parte oppoſita, videt nihil, qui in D, videt dimidium. Aſſumptis autem A B, a b æqualibus, qui ſit in B videt tantum, quantum non videt ex apparenti diſco, qui eſt in I, ut ex ipſa patet ſchematis conſideratione. Quare ejus lumen reflexum ita dividitur per totam ſphæram, ut ubi videtur plenus in A, tantum habeatur luminis, quantum haberetur, ſi totum lumen æque divideretur per id hemiſphærium, cujus medium eſt A. Fig. 21.

125. Hinc autem ſi is reflecteret totum lumen, quod a Sole accipit, cujus menſura eſt ejus diſcus, ſive circulus maximus; eſſet intenſitas luminis Solaris ibi ad intenſitatem luminis ab eo reflexi hic apud nos, ut eſt ejus diſcus ad ſuperficiem hemiſphærii habentis pro ſemidiametro ejus diſtantiam a Terra, ſive conjunctim in ratione duplicata ejus ſemidiametri ad ejus diſtantiam a terra & ſimplici 1 ad 2; nam ſuperficies hemiſphærii eſt dupla circuli maximi, & circuli ſunt, ut quadrata radiorum. Sed quoniam maximam luminis partem abſorbet & Juppiter, ut tellus; concipiamus dimidium tantum abſorberi, dimidium reflecti. Erit lumen Solis ibi ad lumen ejus reflexum hic, in ratione duplicata ſemidiametri ipſius ad ejus diſtantiam a Terra, & duplicata 1 ad 2. Præterea Juppiter diſtat a Sole quintuplo magis, quam Terra. Quare ibi intenſitas luminis Solaris eſt minor, quam hic adhuc in ratione duplicata 1 ad 5.

126. Jam vero eſt ſemidiater Jovis ad ejus diſtantiam a Terra, juxta theorema poſitum ſupra, ut finus ſemidiametri

apparentis ipſius, ſive ſinus ſecundorum 20 ad ſinum totum, nimirum ut 1 ad 10000 quam proximè. Igitur omnibus rationibus collectis 1 ad 10000, 1 ad 2, 1 ad 5, habemus rationem 1 ad 100000. In hac ratione duplicata deberet eſſe minor diameter apparens Solis, ſi is deberet ad tantam diſtantiam recedere, ex qua lumen exhiberet æquale Jovis lumini ad nos devenienti. Cum igitur diameter apparens Solis ſit circiter minutorum 30, ſive ſecundorum 1800, vel tertiorum 108000, ea imminuta in ratione 100000 ad 1, deveniret ad minutum tertium; quo quidem adhuc eſſet minor in ſuppoſitione homogeneitatis cum Sole, quam aſſumpſimus, diameter apparens Syrii.

127. Deveniendo demum ad magnitudinem veram, ea poſſet innoteſcere tantummodo per diametrum apparentem, & diſtantiam. Sed utrumque incognitum nobis eſſe demonſtravimus. Quamobrem incognita itidem erit magnitudo vera. Nec vero illud eſt ſatis probabile eas omnes eſſe æquales inter ſe, ut nimirum in ipſis Planetis tantam videmus magnitudinum varietatem induxiſſe Supremum Naturæ Artificem, licet fortaſſe minus improbabile ſit, ex æquali ſuperficiei ſuæ parte luminis copiam æqualem emittere, ut certo conſtat emittere lumen ſpeciei ejuſdem. Sed de his ex occaſione lentium ac teleſcopiorum jam ſatis.

FINIS.

ERRATA		*CORRIGE*
Pag. 9.	lin. 29. I e	i e
	30. C B, C O	C b, C o
	31. i e, i d	I E, I D
	36. C i o	C I O
Pag. 10.	7. C i o	C i
14.	2. A R	A f
	38. B A	F A
15.	2. habet A F,	habet F f
19.	9. C A ... C A	c A ... C a
	11. d - r	+ (d - r)
24.	8. C A 4	C A

In fig. 16. pro recta O F duc ipſi parallelam o F

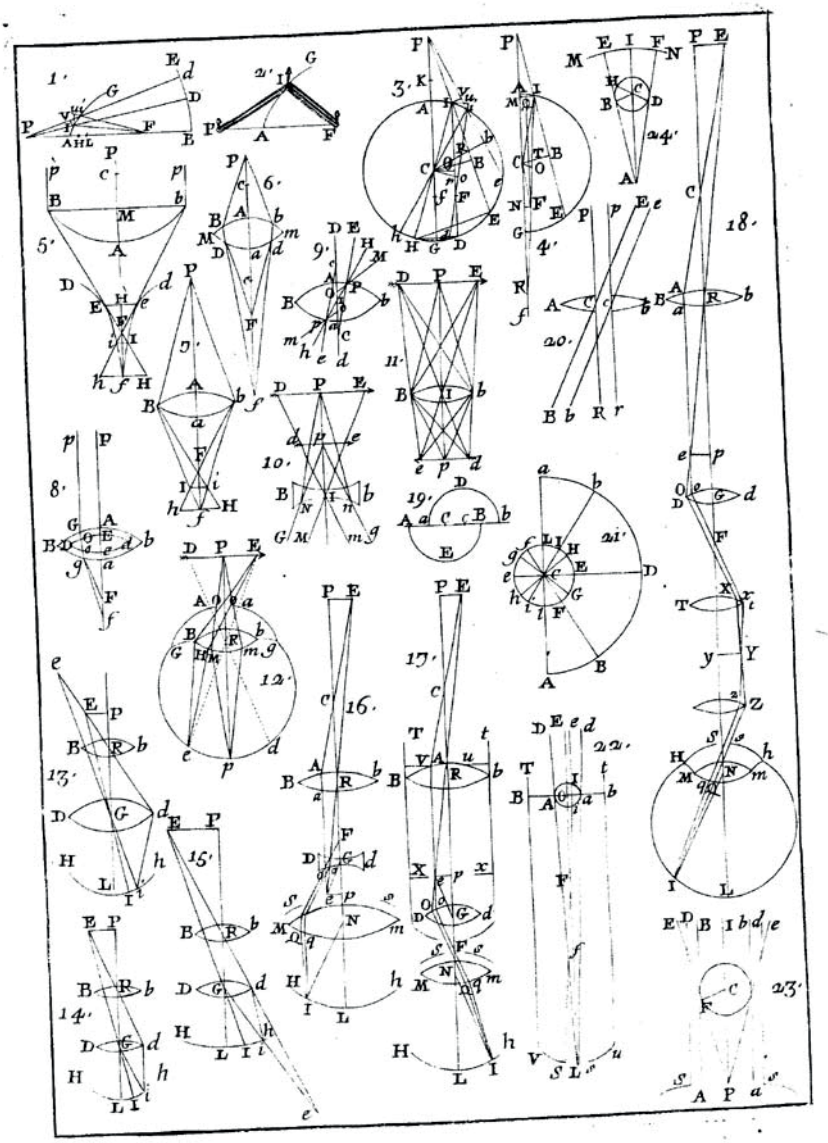
IMPRIMATUR,

Si videbitur Rmo Patri Magiſtro Sacri Palatii Apoſtolici.

F. M. De Rubeis Patr. Conſt. Viceſg.

IMPRIMATUR.

Fr. Vincentius Elena Rmi P. Mag. Sacri Palatii Apoſt. Socius, Ord. Præd.



1.**62**

Lectiones elementares Opticae, clarissimi viri N.L. de la Caille, […]. Quibus Auctorii loco accessit brevis Theoria Micrometri objectivi a R.P. Rogerio Josepho Boscovich, […]. Vindobonae, 1757

CLARISSIMI VIRI

D. DE LA CAILLE,

ACADEMIÆ REGIÆ SCIENTIARUM PARISINÆ, SUECICÆ, ET BORUSSICÆ, NEC NON INSTITUTI BONONIENSIS MEMBRI, AC PROFESSORIS MATHESEOS IN COLLEGIO MAZARINIANO PARISIIS

LECTIONES ELEMENTARES

OPTICÆ

EX

EDITIONE PARISINA ANNI MDCCLVI

IN LATINUM TRADUCTÆ

A

C. S. E S. J.

QUIBUS AUCTARII LOCO ACCESSIT

BREVIS THEORIA

MICROMETRI OBJECTIVI

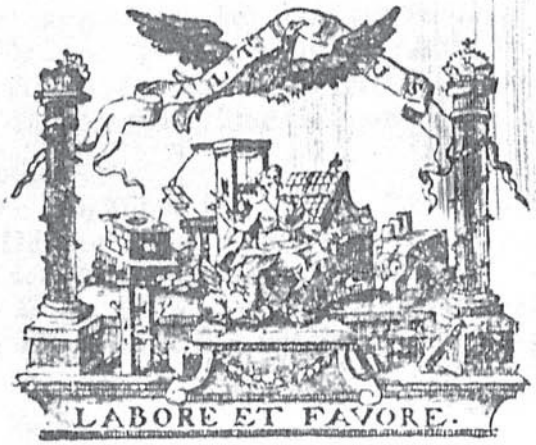
A

R. P. ROGERIO JOSEPHO BOSCOVICH, E S. J.

IN COLLEGIO ROMANO MATHESEOS PROFESSORE

CONCINNATA

M. DCC. LVII.



VIENNÆ AUSTRIÆ

TYPIS JOANNIS THOMÆ TRATTNER, CÆS. REG. AULÆ TYPOGRAPHI ET BIBLIOPOLÆ.

(o)

INDEX
CAPITUM ET ARTICULORUM.

PARS PRIMA.
OPTICA PROPRIE DICTA.

Pag.

ARTICULUS I. De principiis, quibus demonſtrationes Opticæ innituntur - 2
ARTICULUS II. De proprietatibus generalibus luminis - - - - 3
ARTICULUS III. De proprietatibus Umbrarum - - - - - - 8
ARTICULUS IV. De proprietatibus luminis, viſionis & colorum cauſa ſpectatis 11
ARTICULUS V. De ideis, quæ ex viſu in anima noſtra conſequuntur - - 17
ARTICULUS VI. Varia phænomena objectorum procul viſorum - - 20

PARS SECUNDA
COMPLECTENS CATOPTRICAM ET DIOPTRICAM.

CAPUT I. Notiones Generales Catoptricæ & Dioptricæ.
ARTICULUS I. De imaginibus & focis - - - - - - - - 28
ARTICULUS II. Leges & principia ab experientia deducta, quæ demonſtrationibus in Dioptrica, & Catoptrica fundamentum præbent - - 29

CAPUT II. De Catoptrica.
ARTICULUS I. De imaginibus, aut focis per reflexionem - - - - 31
ARTICULUS II. De loco, ſitu, & motu imaginum per reflexionem ortarum - 33
ARTICULUS III. Applicatio Theoriæ ſuperioris ad ſpecula plana - - - 37
ARTICULUS IV. De ſpeculis cylindricis, conicis &c - - - - - 41

CAPUT III. Dioptrica.
ARTICULUS I. De imaginibus ſive focis ex ſimplici refractione - - - 43
ARTICULUS II. De motu imaginum reſpondente motui objectorum, quando lux ex aere in vitrum tranſit & viciſſim - - - - - - 44
ARTICULUS III. De imaginibus, quæ per duplicem refractionem efformantur - 46
ARTICULUS IV. De motu & ſitu imaginum, quæ e duplici refractione oriuntur - - - - - - - - - - - - - - 50

CAPUT IV. De viſione.
ARTICULUS I. Deſcriptio Oculi, & imaginum, quæ in eo depinguntur - - 53
ARTICULUS II. De viſione diſtincta. De diverſis vitiis viſus, & remediis, quæ Dioptrica ſuppeditat - - - - - - - - - - 55
ARTICULUS III. De viſione, quæ fit ope vitrorum, vel ſpeculorum - - 58

CAPUT V. De Teleſcopiis, & Microſcopiis.
ARTICULUS I. Notiones præviæ - - - - - - - - - 60
ARTICULUS II. De Teleſcopiis Dioptricis, ſive refringentibus - - - 62

ARTI-

ARTICULUS III. De Teleſcopiis Catadioptricis - - - - - - - 65
ARTICULUS IV. De Microſcopiis - - - - - - - - - 67
ARTICULUS V. Animadverſiones Generales in Teleſcopia, & Microſcopia - 70

CAPUT VI. De Obſtaculis, quæ in conſtructione Teleſcopiorum & Microſcopiorum ſe produnt, & eorum perfectionem neceſſario minuunt. - 74
ARTICULUS I. De obſtaculis a figura ſphærica ſuperficierum pendentibus, & ratione iis occurrendi - - - - - - - - - 74
ARTICULUS II. De Obſtaculis, quæ reſolutio lucis in diverſæ naturæ radios opponit - - - - - - - - - - - - - 75
ARTICULUS III. Quæ de proprietatibus lucis dicta ſunt, univerſim ad Teleſcopia, & Microſcopia applicantur - - - - - - - - 78
ARTICULUS IV. Applicantur eadem ad Teleſcopia, & Microſcopia dioptrica - 78
ARTICULUS V. Applicatio dictorum de proprietatibus lucis ad Teleſcopia & Microſcopia Catadioptrica - - - - - - - - - 83

CAPUT VII. Diverſæ quæſtiones Opticæ - - - - - - - - 85

PARS TERTIA.

PERSPECTIVA.

CAPUT I. Notiones, & principia Generalia, quibus univerſa Perſpectivæ Theoria ſuperſtruitur - - - - - - - - - - 92

CAPUT II. Deſcribuntur præcipuæ Methodi Perſpectivæ Practicæ - - 99
I METHODUS per craticulam Perſpectivam - - - - - - - 99
II METHODUS ſine craticula Perſpectiva - - - - - - - - 102
III METHODUS per margines ſcalares - - - - - - - - 103
PROBLEMATA ope marginum ſcalarium ſolvenda - - - - - - 108

CAPUT III. Exemplum, & Obſervationes Generales pro delineationibus perſpectivis omnis generis - - - - - - - - - 119

CAPUT IV. Apparatus neceſſarius, quando magnus objectorum ſitu, & magnitudine datorum numerus eſt delineandus - - - - - - 125

CAPUT V. De perſpectiva Umbrarum - - - - - - - - 129
ARTICULUS I. De proprietatibus Umbrarum, quarum ratio in Perſpectiva habetur - - - - - - - - - - - - 130
ARTICULUS II. De umbris corporum, quando ſol vel luna eſt in eodem plano cum tabula - - - - - - - - - - - 132
ARTICULUS III. De umbris corporum, quando ſol vel luna eſt poſt planum tabulæ 133
ARTICULUS IV. De umbris, quando ſol eſt a tergo ſpectatoris - - - 134
ARTICULUS V. De umbris corporum, quando lucidum vicinum eſt, uti candela ardens - - - - - - - - - - - - 135
ARTICULUS VI. Varia Problemata de Umbris - - - - - - - 139
AUCTARIUM Theoria Micrometri objectivi - - - - - - - 148

LECTIO-

LECTORI BENEVOLO.

ectionibus Aſtronomiae Clariſſimi Authoris, quas nuper Gallici ſermonis ignari tironis commodo Latinas effeceram, has quoque, Opticam univerſam pulcherrimo compendio complexas, jungere viſum eſt. Neque enim ſatis aequum exiſtimabam, ut, quas privatis meis exercitationibus percommodas experirer, eas aliorum utilitati non perinde aptas redderem, apud quos id genus inſtitutiones, ut latina lingua fiant, uſus poſcit. Ceterum ita habe, Lector Benevole, ampliſſimam eſſe Authoris laudem, quam tametſi praefixam libro non legas, tu tamen, ubi evolveris, ni prorſus iniquus ſis, pronunciabis.

Illud autem tibi non injucundum fore exiſtimavi, ſi perbrevem **Micrometri Objectivi** *deſcriptionem, atque ex Opticis rationibus concinnatam theoriam, auctarii loco adjicerem, quam R. P. Rogerius Joſephus Boſcovich, cum his diebus apud nos degeret, petente R. P. Carolo Benvenuto, conſcripſerat, mihique pro ſua humanitate communicaverat. Utriuſque nomen apud litteratos notius eſt, quam ut a me ad eorum laudem quidpiam adjici poſſit. Committendum ſcilicet non putavi, ut iſthic, ſuoque adeo loco, praeſtantiſſimum, atque recens inventum taceatur, quod cum commoda non exigua in Aſtronomicis ſpondeat, in uſu tamen ſuas ſibi depoſcit cautelas. Vale.*

EXTRAIT

EXTRAIT

DES REGISTRES DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES DU 21. JANVIER 1750.

Meſſieurs Bouguer, & Caſſini de Thury ayant été nommés pour examiner des *Leçons Elementaires d'Optique*, que M. l'Abbé de la Caille ſe propoſe d'expliquer au Collége Mazarin; & en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de l'impreſſion : en foi de quoi j'ai ſigné le préſent certificat. A Paris ce 21 Janvier 1750.

GRANDJEAN DE FOUCHI,

Sec. perp. de l'Ac. Royale des Sciences.

MO-

MONITUM AUTHORIS.

ſcientiis Phyſico-Mathematicis ſola eſt Optica, cujus tam amœnitas, quam utilitas facile a multis cognoſci poſſit. Nullus eſt hominum ſtatus, nulla ſocietatis civilis conditio, ubi non frequens ſeſe det occaſio, jucundiſſima lucis ſpectacula admirandi, maximaque intelligendi commoda, & ſubſidia certiſſima, quæ inſtrumenta Optica nobis adferunt, ſive ut videndi facultatem extendamus amplius, ſive ut ejus vitiis medeamur; ut etiam vel maxime hebetes verum animi dolorem non poſſint non teſtari, quod in cauſas, rationesque effectuum, qui tanta varietate, & admirabilitate intuentium mentes percellunt, ac tam evidente præterea, tamque late patente cum utilitate ſunt conjuncti, obtuſa ingenii acie penetrare nequeant.

Muneris mei ratio poſcit, ut præcipuas Matheſeos partes explicem; ſed uſus, conſuetarumque exercitationum modus, ſolis ut inhæream principiis, admittunt. Conatus itaque ſum, ut nihil eorum prætermitterem, quæ his rite percipiendis eſſent neceſſaria; at vero a diſquiſitionibus Phyſicis, ab inſtrumentorum ac machinarum deſcriptione, & quidquid verius ad Phyſicam experimentalem pertinet, omnino abſtinui.

Addi-

Addidi etiam in hac editione tractatum de Perſpectiva, quod quamvis plures longe apud nos libri extent in hanc Optices partem conſcripti, quam in alias; nullus tamen, quod ſciam, ſit omnium, qui methodo ſatis generali principia illius tradat. In plurimis non niſi regulæ quædam in praxi ſervandæ ſparſim occurrunt, eæque verbis obſcurioribus propoſitæ, & ordine, & demonſtratione deſtitutæ. Uſus autem ſum in principiorum, quæ adfero, ac methodorum, quæ in eorum applicatione ſunt tenendæ, expoſitione, ſtylo paullo fuſiore, quam ceterùm adhibeam, quod ſcilicet non agamus hic de Theoria quapiam, quæ vel *Prælectionibus* evolvi primum debeat, vel ſtudio & meditatione Lectori familiaris poſſit reddi; ſed de Arte, quæ diuturnam potius normæ ac circini tractationem deſiderat, duce methodo, quæ nuſpiam ad intricatiorem aliquem caſum adhærere ſequacem patiatur.

INDEX

LECTIONES ELEMENTARES OPTICAE.

1.

Optica eſt ſcientia Phyſico-Mathematica, de lumine, & viſione agens.

2. Lumen tripliciter ad oculum ab objecto venire poteſt, *primo* directe, & ſine flexu. *Secundo* ſi prius frangatur, vel refringatur. *Tertio* per reflexionem. *Optica proprie dicta* eſt ea pars, quæ tractat de viſione, luce directe ad oculum veniente. *Dioptrica* dicitur pars altera, explicans viſionem, dum lux frangitur, vel refringitur. Et *Catoptrica* denique exponit viſionem, quæ fit lumine reflexo.

3. *Perſpectiva* itidem ad ſcientiam Opticam pertinet; eſtque ars exhibendi in ſuperficie data objecta, qualia apparerent, ſi e puncto dato conſpicerentur.

4. *Medium* dicitur ſpatium, quod lumen permeare debet. Hoc ſpatium vel eſt ſimpliciter vacuum, aut ejusmodi repletum materia, quæ nullum prorſus obſtaculum motui lucis objiciat, tumque *medium liberum* appellatur; vel vero continet talem materiam, per quam lumen majore, vel minore cum facilitate tranſit, vocaturque *medium diaphanum*. Si materia per totum, quod occupat, ſpatium, ſit ejusdem prorſus conſtitutionis, ſibique ſimile, erit *medium homogeneum*; at ſi conſtet partibus diverſæ indolis, efficiet *medium heterogeneum*.

PARS PRIMA.

Optica proprie dicta.

ARTICULUS PRIMUS.

De Principiis, quibus Demonſtrationes Opticæ innituntur.

5. Principia, quibus tanquam fundamentis Optica ſuperſtructa eſt, non aliunde quam ex experientia deducuntur. Sunt autem obſervata quædam in ipſa rerum natura, de quibus inter omnes Phyſicos convenit. Omnia hæc erui poſſunt e ſequente experimento, ſi ejus conditiones rite expendantur. Obſtruatur omnis omnino lumini in cubiculum aditus, exiguo tantum relicto foramine. Tum tempeſtate ſerena in pariete (qui nitidus ſit & albus) omnium objectorum extra foramen poſitorum imagines ſuis diſtinctæ coloribus, quamvis languentibus, & obſcurioribus, videbuntur. Rerum immotarum figuræ, ut arborum, ædificiorum, & ipſæ immotæ erunt; quæ vero moventur, harum quoque imagines moveri cernentur, uti hominum, equorum &c. Equidem ſitus horum omnium inverſus exhibebitur, quod inde accidit, quod radii per foramen decuſſatim tranſeant, quemadmodum uberius in Dioptrica & Catoptrica exponetur. Si lumen ſolare in foramen incidat, radius lucidus videbitur linea recta a foramine uſque ad oppoſitum parietem, aut tabulatum protenſus. Si oculus in hoc radio conſtituatur, oculus, foramen, & ſol in eadem recta apparebunt. Idem cenſendum de objectis aliis, quæ in pariete depinguntur. Porro imagines in eodem plano efformatæ tanto ſunt minores, quanto longius objecta a foramine ſunt remota. Cetera, quæ in hoc experimento occurrunt (quod exprimit, quæ in oculo noſtro contingunt, dum objecta nos ambientia videmus), alias examini ſubjiciemus; nunc ſi debita adhibeatur attentio, ſequentia deduci poſſunt.

6. I. *Lumen ſemper linea recta de ſe propagatur.*

7. II. *Punctum quodvis objecti luminoſi e loco quovis videri poteſt, ad quem ex eo recta, nullo interjecto obſtaculo, duci poteſt.* Tamdiu enim rei motæ imago in camera obſcura depingitur, quamdiu manet foramini oppoſita.

8. III. *Punctum quodvis luminoſum in omnem partem radiat. Eſt velut centrum ſphæræ lucis indefinite quaquaverſum extenſæ.* Et ſi cogitetur, quod interpoſito plano aliquo radii non nulli intercipiantur, erit punctum lucidum apex pyramidis luminoſæ, quam radii illi conſtituunt; & cujus baſis eſt planum eos excipiens.

9. IV. Imago quoque in camera obſcura objecti alicujus ſuperficiem exhibens, eſt baſis pyramidis luminoſæ, apicem in foramine habentis: & radii, qui hanc efformant, cum in foramine ſe in-

ter-

terſecent, aliam huic ſimilem & oppoſitam efficiunt, cujus vertex eſt in eodem foramine, & baſis in ſuperficie objecti.

10. *Particulæ luminis ſunt ſubtiliſſimæ* : utpote cum radii e quovis puncto objectorum foramini oppoſitorum venientes, per aperturam quam minimam, quin ſeſe invicem impediant, vel confundantur, quantum quidem percipi poteſt, tranſeant.

ARTICULUS II.

De proprietatibus generalibus Luminis.

11. PROPOSITIO I. *In medio libero vis & intenſitas luminis per radios parallelos propagati ſemper manent eædem.* In medio enim libero nihil eſt, quod motui lucis obſtet; nihil, quod impediat, quo minus eodem ſemper modo agat; nihil, quod ejus celeritatem, aut directionem mutet.

12. PROPOSITIO II. *In medio libero vis & intenſitas luminis, quod propagatur radiis vel ex eodem aliquo puncto digredientibus, vel ad idem punctum concurrentibus, ſunt in ratione reciproca duplicata diſtantiarum ab illo puncto.*

Nam intervalla inter duos radios ab eodem puncto venientes ſunt ſemper in ratione diſtantiarum ab eo puncto (ſunt enim hæc intervalla baſes parallelæ triangulorum iſoſcelium, quorum crura radii conſtituunt). Supponamus itaque, per interpoſitum planum in diſtantia quapiam a puncto concurſus certum radiorum numerum intercipi; removeatur dein hoc planum ad diſtantiam duplam; tum ad triplam, quadruplam &c; erunt intervalla radiorum binorum quorumvis inter ſe ut 1, 2, 3, 4 &c. (quæ eadem eſt ratio diſtantiarum a puncto concurſus); & quælibet dimenſio baſium pyramidum hac ratione factarum, erit in eadem ratione. Ergo ſuperficies (Element. 608) earundem baſium erunt ut 1, 4, 9, 16 &c; ita ut idem radiorum numerus ſucceſſive diſtribuatur per ſuperficies, quæ ſunt in ratione duplicata diſtantiarum a puncto concurſus, adeoque ut vis luminis eas ſuperficies occupantis in eadem ratione decreſcat. Etenim ſi in baſi ſecundæ, tertiæ, quartæ &c. pyramidis accipiatur ſpatium æquale baſi pyramidis primæ, manifeſtum eſt, quod in eo ſpatio accepto in baſi pyramidis ſecundæ non ſit niſi pars quarta luminis totius baſis; in ſpatio accepto in baſi pyramydis tertiæ, non niſi pars nona; in ſpatio ſumto in baſi quartæ non niſi decima ſexta &c.

13. Hinc ergo conſtat, quod luminis a puncto, unde emittitur, digredientis vis ſequatur hanc ſeriem 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{25}$ &c.

14. OBSERVA. Quamvis luminis vis adeo velociter decreſcat, quando ab origine ſua recedit, interim tamen *ſplendor corporis lucidi*

ad quodcunque intervallum in medio perfecte libero, & eadem apertura oculi viſi manet conſtans.

Hic enim ſplendor dependet a denſitate radiorum, qui imaginem in oculo depingunt, uti Articulo IV exponetur. Quod ſi jam oculus ad certam diſtantiam conſtitutus dein recedat ad diſtantiam duplam, in hac dupla diſtantia imaginis depictae diameter tantum eſt dimidia diametri imaginis, quae in ejus fundo ad diſtantiam ſimplam depingeba ur, adeoque ſpatium imaginis ſecundae eſt ſubquadruplum ſpatii imaginis primae: atqui etiam radiorum tantum quarta pars in dupla diſtantia recipitur eorum, qui incidebant in diſtantia ſimpla; ergo in imagine ſecunda eadem eſt radiorum denſitas, ac in prima, conſequenter idem ſplendor.

15. Equidem ſi experientiam conſulamus, ſemper objecta eadem tanto apparent obſcuriora quanto longius diſtant, donec tandem prorſus non amplius videantur; verum haec obſcuritas inde oritur, quod non niſi trans aerem ea videre poſſimus, qui eſt medium ſatis denſum, praecipue prope tellnris ſuperficiem, & incredibilem radiorum copiam per intervallum inter objectum & oculum diſſipat. Quippe ſecundum calculum a D. Bouguer initum in ſpatio horizontali 189 hexapedarum, ſive $\frac{1}{12}$ leucae communis, pars centeſima lucis perditur; & intervallo 7469 hexapedarum, ſeu fere $3\frac{1}{4}$ leucarum, pars tertia perit. (Eſſai d'Opt. p. 76 & 80). Diſparent tandem obiecta, quod eorum imaginum decreſcente ſemper magnitudine, minor quoque fibrarum nervearum oculi numerus moveatur, donec tam fiant exiguae, ut ſenſibilem impreſſionem facere non poſſint.

16. PROPOSITIO III. *Lumen per medium diaphanum ejusdem ubique denſitatis quomodocunque propagatum, decreſcit in progreſſione geometrica.*

DEMONSTRATIO. Supponamus denſitatem uniformem medii, v. g. fruſti vitri, eſſe ejus naturae, ut partes illius ſolidae radios lucis intercipientes efficiant partem $\frac{1}{n}$ totius voluminis vitri. Supponamus etiam, vitrum in lamellas aequales & parallelas ſectum, quarum craſſities aequet diametrum particulae unius ſolidae (quas omnes inter ſe aequales aſſumo): patet primo in cujusvis lamellae ſpatio, per quod lux tranſit, eſſe particulas radios intercipientes $\frac{1}{n}$ totius illius ſpatii. 2do ſi faſcis luminis, qui primam lamellam ingreditur, ſit $= 1$, in prima lamella intercipi $\frac{1}{n}$, adeoque lumen in egreſſu tantum fore $= 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$. Pariter ex lumine in

ſecun-

ſecundam lamellam veniente $= \frac{n-1}{n}$ intercipietur pars $\frac{1}{n}$, quæ eſt $\frac{n-1}{nn}$; hinc in exitu tantum manebit $\frac{n-1}{n} - \frac{n+1}{nn} = \frac{n^2-2n+1}{n^2} = \frac{(n-1)^2}{n^2}$. Ex hac quantitate in tertia lamella rurſus ſubtrahetur $\frac{1}{n}$ ſeu $\frac{n^2-2n+1}{n^3}$, ut emergens tantum ſit $\frac{n^2-2n+1}{n^2} - \frac{n^2+2n-1}{n^3} = \frac{n^3-3n^2+2n-1}{n^3} = \frac{(n-1)^3}{n^3}$; & ſic deinceps, id, quod evidenter progreſſionem Geometricam conſtituit.

17. PROPOSITIO IV. *In medio diaphano æquabilis denſitatis intenſitas luminis a puncto lucido intra hoc medium poſito divergentis decreſcit in hac ſerie* $\frac{n-1}{n}, \frac{(n-1)^2}{4n^2}, \frac{(n-1)^3}{9n^3}, \frac{(n-1)^4}{16n^4}, \frac{(n-1)^5}{25n^5}$ &c, in qua n exprimit quantitatem radiorum ad ſingula intervalla æqualia a puncto lucido per denſitatem medii interceptorum.

Cum enim lumen divergat, poſt ſingula intervalla intenſitas lucis decreſcit in ſerie 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{25}$ &c (13). Et quia etiam medium denſum eſt, decreſcit quoque in hac ſerie $\frac{n-1}{n}, \frac{(n-1)^2}{n^2}, \frac{(n-1)^3}{n^3}, \frac{(n-1)^4}{n^4}, \frac{(n-1)^5}{n^5}$ &c.

18. Exempli cauſa, quia lux ad diſtantiam 189 hexapedarum perdit partem $\frac{1}{160}$ ſuorum radiorum propter denſitatem aeris, ſequitur, eſſe intenſitatem luminis, qua objectum videtur ad diſtantiam $\frac{1}{12}$ leucæ, ad intenſitatem, qua idem videtur ad diſtantiam $\frac{1}{3}$ leucæ, ſive 756 hexapedarum, in ratione reciproca $\frac{96059601}{160000000}$ ad $\frac{99}{100}$, ſive ut 33 ad 2 fere.

19. OBSERVA I. Cum lumen ab aſtris ad nos non niſi per atmoſphæram, quæ tellurem undique ambit, pervenire poſſit, eo plus radiorum perit, quo tractu longiore per eam transmittitur; eſt vero hic eo longior, quo radii magis oblique ad nos pertingunt: ſit enim A B C (Fig. 1) arcus peripheriæ telluris, *a b c* arcus concentricus, atmoſphæram terminans, quæ non niſi ad aliquot leucarum altitudinem aſſurgit. Sit D B radius e zenith obſervatoris in B conſtituti perpendiculariter ad horizontem incidens; E B ſit alter radius oblique; & F B tertius horizontaliter veniens. Manifeſtum eſt, quod radius perpendicularis ſolam altitudinem atmoſphæræ *b* B permeare debeat; obliquo E B jam longior via,

quam *b* B, ſcilicet G B, conficienda ſit; horizontali F B, denique maximum ſpatium tranſeundum ſit, ut H B. E quo ſequitur, lucem aſtrorum eſſe maxime debilem, cum in horizonte verſantur; ſed ſemper augeri, dum magis ſupra horizontem elevantur; eſſe denique vivaciſſimam, dum per zenith tranſeunt.

20. D. Bouguer calculo propriis nixo experimentis reperit, quod e 10000 radiis, qui ſi atmoſphæra non eſſet, ab aliquo ſydere ad nos pervenirent, tot ſolummodo, quot ſequens Tabella exhibet, ad noſtros uſque oculos propagentur.

Gradus altitudinis apparentis	Numerus Radiorum.	Gradus altitudinis apparentis	Numerus Radiorum.	Gradus altitudinis apparentis	Numerus Radiorum
0	5	8	2423	30	6613
1	47	9	2797	35	6963
2	192	10	3149	40	7237
3	454	11	3472	50	7624
4	802	12	3773	60	7866
5	1201	15	4551	70	8016
6	1616	20	5474	80	8098
7	2031	25	6136	90	8123

21. OBSERVA II. Idem etiam experimentis oſtendit, Primo *lumen ſolare eſſe circiter* 300000^ca *fortius luce lunæ plenæ, cum hæc mediam inter maximam & minimam diſtantiam a tellure habet.* Secundo *lumen ſolis non eſſe amplius perceptibile, quando* 1000000000000 *vicibus imminutum eſt*, ita ut corpus ſit vere opacum, quod partem tantum 1000000000000^am lucis ſolaris transmittit.

22. Alia lucis affectio, quæ per obſervationes Aſtronomicas conſtitit, eſt, quod *maxima cum velocitate propagetur, ita ut tempore fere 8 minutorum ad nos usque a ſole perveniat*, hoc eſt, 27500000 Leucas percurrat. Hinc fit, ut nihil fere videamus in cœlo in loco ſuo vero, aſtris interea in ſuis orbitis progredientibus, cum lux ſpatium inter oculum noſtrum, & aſtra interjectum conficit. Et quia præterea ipſe oculus revolutione telluris circa ſolem abripitur, phænomena ita inter ſe complicantur, ut aſtra alio, quam ubi reipſa verſantur, referamus. Effectuum horum particularis expoſitio non exiguam Aſtronomiæ modernæ partem conſtituit, quam *Theoriam aberrationis luminis* appellant.

23. PROPOSITIO V. *Si radii luminis ab eodem puncto dimanentes, & per foramen in cameram obſcuram admiſſi, excipiantur plano ad foramen parallelo, efformabunt in plano figuram ſimilem figuræ foraminis, eoque majorem, quo major fuerit plani a foramine diſtantia.*

Nam

Nam in hoc caſu punctum luminoſum eſt apex pyramidis, cujus baſis eſt planum foraminis, & latera conſtituuntur per radios, qui latera foraminis radunt; hi porro in cameram obſcuram producti ſemper magis divergunt: unde per planum iis objectum pyramis continuata intra cameram ſecatur ad baſin parallele, adeoque ſectio eſt figura luminoſa foramini ſimilis, & tanto major, quanto remotior a foramine.

24. Ex natura pyramidis conſtat, quod ſi planum non parallele ad foramen, ſed oblique opponatur, figura luminoſa tot quidem habitura ſit latera, quot foramen, verum oblonga magis ſit futura.

25. Illud etiam facile apparet, hanc figuram lucidam nil aliud eſſe, quam collectionem tot imaginum puncti radios emittentis, quot puncta ſunt in foraminis plano.

26. PROPOS. VI. *Si lumen ſolis, vel luvæ plenæ per exiguum foramen cuiuslibet figuræ admiſſum excipiatur plano ad foramen parallelo in exigua a foramine diſtantia, figura ſpatii luminoſi in plano ſimilis erit foramini; at in majore diſtantia erit ad ſenſum circularis.*

Planum enim foraminis velut infinitis punctis conſtat, quæ ſunt totidem foramina contigua, per quæ ſingula radii e ſingulis diſci ſolaris punctis emiſſi transmittuntur. Quódlibet igitur punctum ſuperficiei foraminis eſt apex coni luminoſi, cujus baſis eſt diſcus ſolis, & axis radius e centro veniens; angulus vero ad apicem a radiis ab extimi limbi diametraliter oppoſitis punctis emanantibus comprehenſus 32 minutorum. Hinc radii iidem ultra foramen producti, alium efficiunt conum, cujus idem apex, idem axis, idem ad apicem angulus,& qui in partem ſoli oppoſitam indefinite prolongari poſſit. Quia autem amplitudo foraminis reſpectu diſtantiæ ſolis infinite parva, axes omnium horum conorum ſunt inter ſe paralleli; & ob anguli a lateribus ad verticem comprehenſi exilitatem, eadem latera cum axibus ſuis coincidunt fere in exiguo a foramine intervallo. Hinc ſi planum opponatur prope foramen, lux non aliter in eo excipitur, ac ſi ſoli axes conorum radioſorum inciderent; qui cum inter ſe ſint paralleli, eundem ordinem & ſitum habent, quem puncta, quibus ſuperficies foraminis conſtat,ideoque ſpatium illuminatum plani figuram foraminis habere debet. At vero ſi planum longius removeatur,latera conorum luminoſorum ſenſibiliter a ſuis axibus diſcedunt, efformantque conos ſemper latiores, ita ut figura ſpatii illuminati in plano intervallo majore a foramine conſtet meris baſibus circularibus conorum. Equidem centra horum circulorum, productis axibus determinata, eundem inter ſe ſitum habent in plano, eandem-

demque diſtantiam ab invicem, quem puncta ſuperficiem foraminis conſtituentia; attamen peripheriæ eorum inter ſe confunduntur, & figuram proxime circularem efformant, uti videre eſt figura 2, e ſeptem circulis, centris A, B, C, D, E, F, G deſcriptis compoſita, & heptagonum irregulare exhibente.

27. OBSERVA I. Figura ſpatii illuminati erit ſemper ad ſenſum circularis, ſi latera foraminis non multum inter ſe diſcrepant. At ſi foramen ſit oblongum, uti parallelogrammum, etiam figura ſpatii luminoſi oblonga evadet, terminis oppoſitis in ſemicirculos rotundatis. Univerſim, figuræ luminoſæ a ſole vel luna factæ in aliqua diſtantia ſemper angulis in rotundum verſis apparent.

28. II. Si planum lumen excipiens non ſit parallelum plano foraminis, figura erit ovalis, baſibus conorum luminoſorum in ellipſes abeuntibus.

29. III. Si parte foramini obſtructa ejus figura mutatur, figura imaginis lucidæ non mutabitur, ſed ſolum dilutior, ac debilior videbitur, & minor.

30. IV. Hinc eſt, quod in ambulacris altioribus arboribus conſitis, quæ denſis frondibus radios ſolares arcent, uti ſunt caſtaneæ majores, quandoque in terra circuli lucidi videantur, interſtitiis frondium, per quæ lumen ſolare penetrare potuit, reſpondentes.

31. COROLL. *Si ſint plura foramina vicina*, v. g. tria, *per quæ ſolaris lux in cameram obſcuram admittitur, in minore diſtantia tres circuli luminoſi depingentur; ubi vero tabula, qua radii excipiuntur, magis, magisque removetur, hi circuli ampliores fient, quin tamen eorum centra diſtantiam inter ſe mutent; tum ſeſe invicem contingent; tandem in unum abibunt, qui creſcente intervallo a foraminibus & ipſe ſemper creſcet, & ad accuratiorem rotunditatem accedet.*

ARTICULUS III.

De proprietatibus Umbrarum.

32. PROPOSITIO I. *Corpus opacum ex una parte illuminatum projicit umbram lineis rectis terminatam, & lumini directe oppoſitam.*

Lumen quippe (6) ſemper linea recta propagatur, eiusque radii extremam corporis ſuperficiem radentes, umbram ex parte averſa terminant.

33. PROPOSITIO II. *Umbra corporis opaci eo ſenſibilior & nigrior eſt, quo corpus ex altera parte intenſiore luce colluſtratur.*

Tunc

Tunc enim oppoſitio inter umbram & ſpatium vicinum illuminatum eſt ſenſibilior.

34. OBSERVA. Si corpus illuminetur a diverſis lucidis ad eandem fere partem conſtitutis, totidem diverſas umbras in plagas lucidis oppoſitas projicit, quæ proinde prope corpus opacum partim inter ſe coincidunt; & ex propoſitione hac patet, cur umbræ eo ſint obſcuriores, quo plurium confuſione oriuntur.

35. PROPOSITIO III. *Si umbra corporis in plano excipiatur, ſpatiis reliquis medii illuminatis, ea ſemper cingitur penumbra tanto latiore, quanto lucidum majus eſt, & corpus longius a plano abeſt, vel umbra magis oblique in planum incidit; eſtque hæc penumbra eo dilutior, quo remotior ab umbra vera.*

Sit AB (fig. 3.) ſol; ED corpus opacum ſuper ſolo DI. Ducantur radii BF, CG, AH. Manifeſtum eſt, quod ſi ſpectator ab I usque ad H accedat, ſemper videat integrum ſolis diſcum. At ubi ex H progreditur, inferior ſolis limbus A illi obtegetur primum, tum major ſemper pars, donec in G ſuperiorem ſolum partem mediam conſpiciat. Denique in F ad umbram veram DF pertinget, totusque diſcus ſolis ejus oculis eripietur. Ex quo patet, *Primo* ſpectatorem eo ſemper minus clare videre poſſe, quo umbræ veræ fit proprior, ut adeo ſpatium HF tegatur penumbra ſemper denſiore, quo umbræ veræ eſt vicinior, cujus limes eſt in F. *Secundo* in triangulo FEH latus FH, quod eſt menſura penumbræ, eo eſſe majus, quo angulus FEH, qui diametrum apparentem lucidi AB metitur, major eſt, quo item diſtantia ED extremi E corporis opaci a plano DI umbram excipiente major; & quo denique rectæ EH, EF magis oblique incidunt in hoc planum.

36. OBSERVA. Hæc cauſa eſt, cur limites umbræ corporum a ſole illuminatorum ſemper ſint incerti & confuſi, maxime quando umbra longius projicitur. Et quia diameter ſolis ſub angulo 32 minutorum videtur; eſt (Elem. 746) *magnitudo penumbræ* FH *a corpore opaco projectæ ad diſtantiam limitis umbræ veræ* F *ab extremo corporis* E, *ſive ad* FE, *ut ſinus anguli 32 minutorum ad ſinum anguli* EHD, *quo limbus inferior* A *ſolis ſupra planum* DI, *in quod umbra cadit, elevatus eſt.* Ceterum, quæ hic de ſole dicuntur, etiam de luna intelligenda ſunt, & univerſim de omnibus corporibus illuminantibus, quorum diameter, quæ cauſa eſt penumbræ, ſenſibilis eſt. Ut enim penumbra nulla eſſet, luminoſum deberet eſſe unicum punctum.

37. PROPOSITIO IV. *Longitudines umbrarum verarum corporum a ſole vel luna illuminatorum ſunt reciproce ut tangentes altitudinum apparentium horum ſyderum ſupra planum, in quod umbræ cadunt.*

Nam in triangulo rectangulo EDF, altitudine corporis opaci ED ſumpta pro radio, eſt (Elem. 748) longitudo umbræ DF tangens anguli DEF, complementi alterius DFE qui eſt altitudo limbi ſuperioris ſolis ſupra planum DI. Itaque umbræ veræ ſunt ut cotangentes harum altitudinum, ſive (Elem. 737) reciproce ut tangentes altitudinis ſuperioris limbi ſyderis corpus opacum illuminantis.

38. COROLL. *Datis duobus e ſequentibus tribus: angulo altitudinis limbi ſuperioris ſyderis; altitudine perpendiculari corporis opaci ſupra planum, ad quod altitudo ſyderis refertur; & longitudine umbræ veræ ab opaco projectæ computata a puncto, in quod cadit perpendiculum a ſupremo corporis puncto in planum demiſſum; tertium ſemper reperitur*, ſolutione trianguli rectilinei ut EDF.

39. PROPOSITIO V. *Si ſphæra lucida radiet in opacam, ſitque hæc illa major; pars illuminans ſphæræ lucidæ tanto major, & pars illuminata opacæ tanto minor erit reliqua in utraque ſphæræ ſuperficie, quanto magis opaca excedit lucidam. Contrarium fiet, ſi lucida ſuperet opacam. Et ſi ſphæræ ſint æquales, ſuperficies dimidia lucidæ illuminabit ſuperficiem dimidiam opacæ.*

Sit B (fig. 4) ſphæra minor lucida, & C opaca major. Evidens eſt, partem ſphæræ C, quæ illuminari poteſt, determinari per extimos radios, qui eam attingere poſſunt, ſive, per radios tangentes. Similiter ultimi radii, qui a ſphæra B ad opacam venire poſſunt, ſunt eiusdem tangentes. Itaque tangentes LP, KO determinant & ultima puncta illuminantia L, K, & ultima puncta illuminata P, O. Si porro ad rectam BC ducantur diametri HI, MN perpendiculariter, peripherias globorum B & C bifariam divident (Elem. 402); & ſi e centris B & C demittantur ad tangentes perpendicula BL, BK, & CP, CO, hæc in puncta contactus incident. Ergo arcus LRK (major 180 gradibus) exhibet partem illuminantem; & arcus PSO (180 gradibus minor) partem illuminatam. Quod ſi globus C eſſet lucidus, globus B opacus; arcus PSO foret pars illuminans, & LRK illuminata. Denique ſi globi eſſent æquales, tangentes forent inter ſe parallelæ, & per extrema diametrorum HI, MN tranſirent, ideoque tam arcus illuminans, quam illuminatus contineret 180 gradus.

40. COROLL. I. Ex ſimilitudine triangulorum rectangulorum LBH, PCM; KBI; OCN, arcus LH, PM, KI, ON eſſe ejusdem numeri graduum, facile apparet. Hinc *arcus globi metiens amplitudinem partis illuminantis eſt complementum ad 360 gradus arcus metientis amplitudinem partis illuminatæ in altero globo.*

41. COROLL. II. Ex eadem ratione *arcus obſcurus globi illuminati eſt tot graduum, quot arcus illuminans globi lucidi. Et arcus non illuminans globi lucidi habet tot gradus, quot arcus illuminatus globi opaci.*

42. COROLL. III. Et quia ſimilia ſunt triangula rectangula ABL, LBH, eſt angulus BAL = LBH. E quo ſequitur, exceſſum arcus illuminantis ſupra arcum non illuminantem; ſive differentiam inter partem illuminantem & illuminatam, menſurari per angulum LAK, quem radii tangentes efficiunt.

43. COROLL. IV. *Sphæra lucida opacæ æquaiis, ſemper hujus dimidium illuminat, quocunque intervallo diſtent; verum ſi lucida major ſit, quam opaca, tanto major hujus pars illuminatur, quanto minor eſt ſphærarum diſtantia, & viciſſim.* Quo enim ſphæra altera alteri propior eſt, eo angulus a tangentibus comprehenſus PAO fit major, & pars illuminata obſcuram magis excedit.

44. Hinc globi medietas, cujus diameter excedit diametrum pupillæ, uno oculo ſimul videri nequit. Et ſol plus quam hemiſphærium cujusvis planetæ illuminat; luna plena minus, quam dimidium telluris &c.

45. COROLL. V. *Umbra globi illuminati a globo æquali cylindrica eſt, & infinita.* Terminatur enim radiis inter ſe parallelis circumferentiam circuli ambientibus. *Umbra globi illuminati a globo majore eſt conica & finita,* ut KAL. Et *umbra* QPOV *globi* C *illuminati a globo minore* B *in infinitum extenditur forma coni truncati.*

46. COROLL. VI. Datis ſemidiametris BK, CO, & diſtantia centrorum BC duorum globorum, facile determinatur axis BA coni umbroſi a globo minore projecti. Ducta enim KD ad BC parallela, cum etiam BK, CO ſint parallelæ, eſt BK = CD, & BC = KD, & triangula KDO, ACO ſimilia. Hinc DO: OC = DK: CA; ſive CO — BK: CO = CB: CA: ſubtracta igitur CB ex CA, remanet BA, axis quæſitus. Exhibeat B terram, C ſolem; ſit BK = 1, CO = 80, 5, & BC = 17189; reperietur BA = 216, quæ circiter efficiunt 324000 leucas, ſi ſcilicet ſemidiametro telluris BK tribuantur 1500 leucæ.

47. OBSERVA. Manifeſtum eſt, quod pars illuminata, de qua in hac propoſitione ſermo eſt, etiam complectatur penumbram, & terminetur per umbram veram.

ARTICULUS IV.

De natura & proprietatibus luminis, viſionis & colorum cauſa ſpectatis.

48. Oculus, ſi quædam dempſeris, idem nobis præſtat, quod camera obſcura. Pupilla foramen eſt, quod radios lucis ſe in ea interſecantes admittit, ut in tunica fundum oculi veſtiente rerum omnium, ad quas viſus noſter ſe extendit, imagines in-

verſas depingant, quarum diametri fere ſunt ut anguli a radiis ab extremis objectorum punctis venientibus ipſo in ingreſſu in pupillam comprehenſi, dum ſcilicet hi anguli exigui ſunt; ſive quod idem eſt, imaginum ejusdem objecti diametri eo ſunt majores, quo objectum minorem habet diſtantiam ab oculo. Quamvis autem ſitum inverſum rerum imagines in noſtro oculo acquirant; nihilominus tamen omnia ſitu erecto videmus. Cum enim radii decuſſatim ingrediantur oculum, ii, qui ab objecti parte ſuperiore veniunt, inferiorem imaginis partem efformant, & ex oppoſito. Et quoniam nos non aliunde de ſitu objecti judicium ferre poſſumus, quam ex impreſſione in organum viſus per radios facta, neceſſe eſt, ut objectum ſecundum eam directionem collocatum cenſeamus, qua impreſſio fit: atqui ſi radius a ſuperiore objecti parte incidens feriat partem oculi inferiorem, reactio hujus exhibet objectum radios emittens in recta a parte inferiore ſurſum reducta; igitur, ut reipſa eſt, ſuperior objecti pars, etiam ſuperius videtur.

49. Licet ratio, & modus, quo per lumen in oculo objectorum imagines depinguntur, ſine legum Dioptricæ notitia accurate explicari nequeant; omittere tamen hic non poſſumus, quæ nos experientia tum de modo, quo lumen viſum afficit, tum de conſequentibus inde in nobis ideis docet.

50. Lumen eſt collectio particularum innumerarum materiæ, ſive corpuſculorum propemodum infinite parvorum, ac inter ſe diſtinctorum, ſummæ elaſticorum, & maxima cum velocitate motorum, ut cum ad organum viſus perveniunt, illud vi ſuæ denſitati, maſſæ, ac celeritati proportionali feriant, ad motum quemdam tremulum concitent, diverſasque impreſſiones efficiant, quas ex lege unionis animæ cum corpore in mente noſtra variæ conſequuntur ideæ de præſentia objectorum, e quibus ejusmodi corpuſcula, ſive atomi luminoſæ veniunt.

51. Atomi lucis diverſæ ſunt indolis, aut ſaltem proprietates peculiares quibuslibet ſunt inditæ, nulli obnoxiæ mutationi, nec a varia modificatione luminis pendentes, quæ dum propagatur, ei accidere poteſt.

52. *Radium luminis* cum dicemus, intelligemus viam atomi, vel puncti lucentis; ſive potius ſeriem ſubtiliſſimi fili ſpeciem exhibentem atomorum luminoſarum, contiguarum inter ſe, & ejusdem naturæ. Unde tot erunt radiorum diverſæ ſpecies, quot atomorum, quibus ſinguli conſtant. Illæ autem atomi diverſæ ſpeciei cenſendæ ſunt, quæ in organo viſus diverſas ſenſationes excitant. Denique ſenſationum diſcrimen in eo conſiſtere eſt putandum, quod *colores* appellamus.

53. Quam-

53. Quamvis autem fieri non poſſit, ut radii lucis in omnes omnino ſpecies, quæ re ipſa ſunt, diſtribuantur exacte; ſolent tamen ſeptem præcipuæ numerari, *colorum primigeniorum* nomine, quorum ordo idem eſt, ac eorum, qui in iride obſervantur, ſcilicet *ruber*, *aurantius*, *flavus*, *viridis*, *cæruleus*, *indicus*, *violaceus*. Hinc cum impoſterum ſermo de coloribus erit, *radios rubros*, *radios cæruleos* &c. vocabimus eas lucis atomos, quæ in oculo noſtro talem excitant ſenſationem, ut objectum, quod videmus, rubrum, aut cæruleum judicemus.

54. Objectum viſibile redditur, vel quia ipſum directe poteſt particulas lucis in noſtros oculos emittere, diciturque tum *objectum luminoſum*, uti ſunt ſol, fax ardens &c, & lumen illius *lumen directum*; vel quia radiis objecti luminoſi expoſitum eosdem poteſt in noſtros oculos remittere, atque ut diximus, hoc modo occaſionem præbere ideæ de ſua præſentia: vocatur vero tunc *objectum illuminatum*, & lumen inter hoc & noſtros oculos interceptum, *lumen reflexum*.

Quoniam ſol reſpectu noſtri eſt objectum maxime luminoſum, quod ad nos radios emittat, illud jam exponemus, qua ratione cetera objecta nobis faciat conſpicua. Idem enim de aliis lucidis, velut de flamma candelæ, ſentiendum eſt.

55. Sol verſus omnem partem ad immenſam uſque diſtantiam, incredibilem copiam radiorum omnis generis in ſe commiſtorum emittit *, ita quidem, ut neque ulla horum certa ſpecies prædominetur ad ſenſum, neque in toto univerſo, qua quidem nobis patet, ullum ſit punctum ſenſibile, quod radios non recipiat, ſaltem niſi vel a corpore ſolido occupetur, vel intra umbram veram corporum lucі imperviorum iit poſitum.

56. Radii, quos oculus noſter ex omnibus punctis ſuperficiei ſolis viſui objectæ directe recipit, conum conſtituunt, cujus baſis eſt ſuperficies ſolis, & apex in apertura, ſeu pupilla oculi. Idem radii ultra pupillam producti (ſi inflexionem quandam, de qua in ſequentibus dicemus, hic non attendamus) alium conum intra oculum efficiunt, atque in ejus fundo terminatum, qui propterea in ſpatio circulari hujus fundi impreſſionem facit, ad quam idea de præſente objecto lucido, & rotundo, quod ſolem dicimus, conſequitur.

57. *Imagines objectorum in oculo* dicemus in ſequentibus illa ſpatia

* Non iſthic illud agimus, ut litem inter Philoſophos componamus, an lux conſiſtat in vero, & continuo effluvio particularum a corpore luminoſo avulſarum; an vero efficiatur motu undulatorio aut oſcillatorio materiæ elaſticæ per hoc univerſum diffuſæ, quem ei ſol, aliaque corpora lucida per ſe imprimant, aut in eadem conſervent. Quam quisque partem hac in quæſtione tueri velit, Phyſicis liberum eſto decernere. *Nota Autboris.*

in fundo hujus organi, in quæ radii lucis recipiuntur, & ubi conſequenter impreſſio ſentitur. Vocabuli ratio eſt, quod reipſa, ſi reciſis ex parte poſtica oculi exterioribus tunicis, ante eum objectum lucidum, vel ſaltem fortiter illuminatum conſtituatur, objecti imago ſuis coloribus picta in fundo oculi videatur.

Dum radii ſolis tantum ex reflexione ad nos perveniunt, ſive magis generaliter, dum prius in aliud corpus incidunt, quadruplex caſus eſſe poteſt.

58. CASUS I. Si particulæ hujus corporis (quod luci impenetrabile ſuppono) ita ſint coordinatæ, ut qua parte radii in illud incidunt, ex integro reflectantur eo ſitu & ordine, quo advenerunt, * manifeſtum eſt, oculum in quem ita reflexi radii incurrunt, eodem prorſus modo debere affici, ac ſi directe e ſole venirent. Itaque in oculo ſolis tantum perceptio orietur, cujus imago quoque in eodem depingitur, & corpus reflectens verum eſt ſpeculum, oculo non viſibile. Sed quoniam radii primam ſuam directionem amiſerunt, ſol non apparet in eodem loco, in quo videretur radiis directe ad oculum emiſſis, quippe cum exiſtimemus objecta ſita eſſe in ea linea recta, quæ eſt radiorum directio ipſo momento, quo ad viſus organum pertingunt; quemadmodum ſi forte ictum lapidis recipiamus, quin eum, cum projicitur, videamus, putamus eum linea recta, atque ea ex parte, qua impreſſio fit, adveniſſe, quamvis ſubſultim, aut linea aliqua curva ad nos delatus ſit, cujus tangens in puncto, ubi nos ferit, eſt recta illa, quam veram lapidis viam arbitramur.

59. Porro experientia didicimus, corpus opacum, & ſoli expoſitum eo accuratioris ſpeculi vices gerere, quo ejus ſuperficies magis eſt polita, hoc eſt, eo minus a nobis cerni hanc ſuperficiem, ſed tanto vivaciorem ſolis imaginem ab ea ad nos reflecti. Quoniam itaque corpora nobis nota nequaquam tam exacte ſunt lævia, ſed particulis extimis nulla certa lege diſpoſitis, atque inæqualiter inclinatis, aliis altius & ſupra alias aſſurgentibus, figura diverſa &c; ſupponemus in hoc Articulo, corporum noſtratium ſuperficies exacte ſpeculares eſſe non poſſe.

60. CA-

---

* Altera hæc eſt lis inter Philoſophos, utrum ſcilicet reflexio lucis aliorum elaſticorum corporum more fiat ſola motus reſolutione ad impactum in partes ſolidas obſtaculi, an, quod potius videtur, lux reflectatur ex incurſu in materiam elaſticam per ſuperficiem corporum diffuſam: an denique reflexio hæc fiat repulſione, quæ ſit vis quædam activa in lucem appellentem ad corpora exercita. Quin quidquam hac de re ſtatutum velimus, ita loquemur de reflexione, velut ſi fieret in ipſis particulis ſolidis corporum. *Nota Authoris.*

60. CASUS II. Si is ſit particularum in ſuperficie corporis, in quam lux incidit, ſitus & ordo, ut ſive omnes, ſive plurimi radii reflectantur, ſaltem ut non plures ad ſenſum ex una, quam ex altera quavis eorum ſpecie abſorpti extinguantur, ſintque radii inter ſe confuſi & permiſti, quaquaverſum ſcilicet pro varia particularum reflectentium inclinatione directi; oculus in directione luminis ita confuſi poſitus radios ex omni parte ſuperficiei reflectentis recipiet, qui formam quandam pyramidis habebunt, cujus baſis eſt ſuperficies reflectens, apex oculi pupilla; producti dein intra oculum ſecundam efficient pyramidem ad fundum uſque pertingentem, cujus baſis fere ſimilis baſi exterioris. Jam vero quævis particula ſolida ſuperficiei reflectentis eſt ſpeculum quoddam minimum, quod exiguam tantum imaginis ſolis portionem repræſentare poteſt; ſitu autem irregulari fit, ut in corpore totidem ſpecilla minima diverſimode inclinata conſiderare debeamus, quot ſunt particulæ ſolidæ reflectentes: ideoque etiam totidem diverſi ſitus apparentes erunt cujusvis portionis imaginis ſolis. Unde neceſſe eſt, ut ad impreſſionem totalem, quæ per totam baſin pyramidis luminoſæ in oculo efformatæ fit, conſequatur idea collectionis cujusdam particularum lucentium, figura huic baſi ſimili circumſcriptarum.

61. Quæ jam diximus, exemplo ſequente clariora fient. Notum eſt, diametrum ſolis apparentem ſubtendere in ſuperficie ſphæræ cæleſtis angulum circiter 32 minutorum. Si itaque ſpeculo plano ſoli obverſo ejus imago verſus oculum reflectatur, ea videbitur ſpatium ſatis magnum in ſpeculo occupare. Supponamus dein hoc ipſum ſpatium ſpeculi fere totum obtegi, exigua tantum portione relicta, in quam radii cadere poſſint. Evidens eſt *primo*, partem ſolummodo parvam imaginis ſolis, quæ prius tota videbatur, tum exhiberi poſſe. *Secundo* hanc ipſam portionem imaginis eadem apparituram figura, ac eſt ſpatium ſpeculi non tectum. Idem prorſus contingeret, ſi loco ſpeculi majoris usque ad exile ſpatiolum obtecti adhiberetur ſpecillum exiguum, æquale ac ſimile parti apertæ majoris. Hoc poſito, cogitemus, plura ejusmodi exigua ſpecilla, quorum nullum integram ſolis imaginem exhibere poſſit, diſponi ita, ut figuram quamlibet regularem, vel irregularem, hexagonam verbi gratia, referant, poſſintque ſingula partem imaginis ſolaris, quam repræſentant, verſus oculum eundem reflectere (in ſequentibus dicetur, debere ea in diverſis planis collocari, ut id præſtare poſſint); liquet, tot in hoc caſu ab oculo videri partes imaginis ſolis, quot ſunt ſpecula, quæ omnes ſimul figuram lucidam efficient, diſpoſitioni ſpeculorum ſimilem, uti hexagonam; & ſiquidem

vel

vel novum adjungeretur prioribus ſpecillum, vel unum ex iis ſubtraheretur, etiam nova imaginis ſolaris portio adderetur, aut diſpareret figura illa lucida eundem in modum mutata, quo figura ſpeculorum.

62. Hinc etiam quisque facile videt, *Primo* ſpecilla dicta ita diſponi inter ſe poſſe, ut nullum inter portiones imaginis ſolaris ſenſibile intervallum advertatur, ac figura lucida, quam efformant, continua appareat, & nusquam interrupta. *Secundo* ut quodvis ſpecillum nitidius, aut obſcurius, ut politurae magis, minusve exactae fuerit, ita partem figurae, quam efformat, magis minusve fore fulgidam. *Tertio* Figuram hanc luminoſam eandem debere in oculo facere impreſſionem, ac ſi radii directe e ſole advenirent, ideoque ejusdem debere apparere coloris cum ſole, hoc eſt, albi.

63. Quod ſi igitur ſuperficies corporis, quae magnam radiorum ſolarium copiam, atque omnis generis, reflectit, quin plures ad ſenſum unius, quam alterius ſpeciei abſorbeat, conſideretur, tanquam quae conſtet particulis ſolidis, totidem polyedra inter ſe ſeparata referentibus, quorum plana ſint ſpecilla exigua, irregulariter collocata, atque diverſimode inclinata; extra dubium eſt, quin tale corpus album debeat apparere, ac figurae conſimilis imagini in oculo efformatae. Ut autem textura ejusmodi polyedrorum arctior, laxiorve fuerit, pluribus, paucioribusve inter ea relictis interſtitiis obſcuris; & plana magis minusve lævia, ut eorum ſitus tum reſpectu oculi, tum etiam ſolis opportunior; ita etiam albedo ſuperficiei corporis magis, minusve nitida videbitur.

64. Ex allatis jam ſequitur, in praeſente hypotheſi *illa corpora eſſe alba, quae radios omnis ſpeciei inter ſe permiſtos ad noſtros oculos reflectunt.*

65. CASUS III. Si particulae ſolidae corporis talem ſitum reſpectu ſolis & oculi habeant, aut ejusmodi ſint naturae, ut non niſi paucos radios verſus oculum remittant, reliquis omnibus intra poros, vel interſtitia ſua abſorptis, ibidemque per varia obſtacula interceptis, ne ad oculum pertingere poſſint, niſi exiguo numero; oculus tam paucas portiones imaginis ſolis recipiet, ut vix perceptibilem impreſſionem faciant, aut ſaltem ut non faciant aliam, quam quae requiritur, ut advertatur, oculo objici quasdam particulas exiguum lumen reflectentes. Atque hinc ejusmodi corpus vel prorſus, vel prope eſt nobis inconſpicuum, neque de ejus praeſentia & figura idea haberetur, niſi objecta vicina tanto eſſent lucidiora, ut diſcrimen fieret manifeſtius. Id genus corpora nigra dicimus.

66. Ex dictis porro colligitur, in hac hypotheſi *corpora illa eſſe nigra, quae aut nullos, aut paucos radios lucis reflectunt.*

67. CA-

67. CASUS IV. Quando particulæ ſolidæ ſuperficiem corporis conſtituentes ejusmodi ſunt, ut omnes fere radios abſorbeant, præterquam unius certæ ſpeciei, quos propemodum omnes reflectunt, oculus, in quem incurrunt radii reflexi, recipiet tot portiones exiguas imaginis ſolis, quot ſunt particulæ reflectentes, eruntque omnes ejusdem coloris, ut ſimul collectæ excitent ideam corporis præſentis certo colore præditi, quem natura radiorum determinat, atque ejus figuræ, quam ſitus harum exilium imaginum poſcit.

68. Hinc autem apparet I, *corpora certo colore prædita eſſe illa, quæ fere omnes radios aliarum ſpecierum abſorbent, ac unius tantum reflectunt.*

69. II. *Colorum alterius alterum temperantium variationem dependere a radiorum diverſæ ſpeciei, qui reflectuntur, combinatione.*

70. III. *Corpus certo colore imbuere nihil aliud eſſe, quam vel ejus particulis, ſeu interioribus, ſeu tantum ſuperficiem conſtituentibus alium ſitum, ac ordinem tribuere; vel in poros ejus materiam quandam extraneam inducere; vel ejus ſuperficiem vernice oblinere; aut quavis ſimili ratione efficere, ut radii ab hoc corpore non niſi unius ſpeciei reflectantur, aut certe ut una radiorum reflexorum ſpecies prædominetur.*

71. Si ad allatam hactenus viſionis & colorum explicationem advertamus, illud etiam inferemus, quod *quævis lucis atomus ſecum ferat imaginem puncti illius luminoſi, e quo emiſſa eſt.* Si radius flavus e ſole veniens incidat in corpus rubrum, ſeu ita tinctum, ut rubrum appareat, non reflectetur, ſed intra poros penetrabit, ac intercipietur, aut ſaltem non niſi ita detortus, & poſt varios flexus iterum emerget, ut ad oculum pertingere nequeat. At ſi idem radius in corpus flavum incurrat, inde reflectetur, quin in ejus interſtitia penetret. Interim tamen hæc non tanto cum rigore accipi volumus, ut putetur nullus omnino radius flavus abſorberi poſſe a corpore flavo, aut a rubro reflecti; verum id ſolum intelligimus, quod ſi faſcis luminis ingenti numero radiorum, v. g. flavorum, conſtans incidat in corpus rubrum, valde pauci inde reflectendi ſint, ſi conferantur cum reliquis, qui penetrant, vel abſorpti exſtinguuntur.

ARTICULUS V.

De ideis, quæ ex viſu in anima noſtra conſequuntur.

72. Diximus, figuram, & præſentiam objectorum a nobis non aliter percipi, quam per impreſſionem, quam eorum imagines, cum in fundo oculi depinguntur, faciunt; quin nec eorum

rum magnitudinem, ſitum, motum, & diſtantiam aliunde advertimus, quam ex impreſſionum ejusmodi diverſa indole, aut e judiciis quibusdam, quibus aſſuevimus, etſi perſæpe falſis, & per rectum ratiocinium corrigendis.

73. Eſt quædam viſus noſtri habitudo & facilitas ad certum intervallum ſeſe extendens, ad quod ſcilicet res externas tum quando verſamur cum aliis, tum in reliquis noſtris negotiis conſpicere ſolemus. Hunc diſtantiæ modum cum objecta habent, quamvis eorum imaginum dimenſiones in noſtris oculis admodum mutentur, iis paullo propius admotis, vel recedentibus; nos tamen haud advertimus ullam magnitudinis variationem. At vero quando objecta ultra eum terminum ſunt poſita, ea tanto minora nobis apparent, quanto ab iisdem longius abſumus, & ex oppoſito. In exemplo: ſi ſucceſſive ab eodem homine ad intervallum 2, 4, & 6 pedum recedam, extra dubium eſt (Elem. 415), dimenſiones ejus imaginis fore proxime inter ſe ut 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, conſequenter ejus magnitudo eadem ratione decreſcere deberet, de qua ſcilicet judicium ferendum non eſt, niſi dependenter ab imagine in oculo expreſſa. Interim tamen ejusmodi diminutionem haud advertere ſolemus. Atque ut pateat, id non aliunde, quam a dicta jam habitudine provenire, ſatis erit, ſi conſideremus, magnitudinem hominis ad 120 pedes in eadem, in qua nos ſumus, planitie diſtantis nobis haud videri ad tantam reduci exilitatem, cujus tamen eadem appareret, ſi ad pedem turris centum viginti pedes altæ conſtituti eundem hominem in turris vertice videremus. Id, quod non alia ex cauſa accidit, quam quod præter uſum ſit, oculos ad tantam altitudinem fere ad perpendiculum attollere, quando alias cum hominibus verſamur, neque id genus diſtantias experientia crebriore cognitas habeamus: ideoque haud amplius e familiari nobis videndi ratione judicare poſſumus, ſed magnitudinem objectorum apparentem præcipue ex imaginibus efformatis in oculo metimur.

74. Quando itaque objectum ad eam diſtantiam conſiſtit, cui oculus jam aſſuevit, videtur, quod de ejus magnitudine & intervallo objecto non aliunde judicemus, quam e notitia uſu longo hauſta dimenſionum rerum ceterarum inter oculum & objectum poſitarum, neque tum imaginum in oculo efformatarum diverſas extenſiones attendamus, ſeu quod idem eſt, nullam habeamus rationem angulorum, ſub quibus objectum apparet. Sed extra hanc diſtantiam, aut ſi interpoſitum obſtaculum rerum interjacentium conſpectum nobis eripiat, uti ſi objectum per teleſcopium videatur, vel microſcopium, aut ſaltem per exiguum foramellum

in

in plano opaco factum; magnitudo & diſtantia objecti apparens videtur dependere a dimenſionibus ejus imaginis in noſtro oculo, ita ut ſi hæc augeatur minuaturve artificio quovis optico, ipſum objectum, licet immotum, appareat magnitudine & diſtantia mutata; auctum vel imminutum; accedere, vel recedere, quemadmodum in ſequente articulo exponetur.

75. Quod ex D. Cheſſelden, celebri Anatomico Anglo, narrat Smithius, dictis lucem affundet. Oſtendit Cheſſelden, ab iis, quorum oculi vera cataracta laborant, nihilominus diſcerni poſſe inter noctem & diem, inter corpora nigra, alba, & intenſe rubra, cum ſufficienter illuminantur, quin tamen figuram eorum dignoſcant; tum narrat, ſe puero tredecim annos nato ſimili cataracta laboranti oculos conſanaſſe; ſed hunc oculorum uſum adeptum haud potuiſſe amplius colorata illa corpora noſcere, cum proponerentur, erroneis ideis, quas prius ſibi efformarat, ad id non ſufficientibus. Ea, quæ antea etiam de nomine norat, cum videret, revera eſſe eadem, vix credebat. Cum diſtincte cernere cœpiſſet, adeo non poterat de objectorum diſtantia judicium ferre, ut omnia oculis contigua putaret: inter ſe, & cubiculi parietes intervallum aliquod intereſſe, res ei erat conceptu difficillima. Omnia apparebant ei ſub initium ultra modum grandia: capere non potuit, qua ratione tota domus eſſet ſuo cubiculo major, licet perbene intelligeret, hoc illius partem eſſe. De corporum figura, & mole prorſus diverſorum diſcrimine, nihil certi poterat ſtatuere; neque ſciebat, quid eſſet, quo in rerum aſpectu ſe tantopere affici advertebat. Cum imagines coloribus expreſſæ exhiberentur, tum vero perplexa videbantur omnia: duorum menſium ſpatio opus erat, donec comprehenderet, non niſi repræſentationem corporum ſolidorum per eas haberi. Oculos ſub initium verſus objecta non dirigebat; imo ut hoc faceret, paullatim & longiore tempore aſſueſcere debuit.

Atque hæc facile cuivis perſuadebunt, nequiviſſe puerum de diſtantia, & figura corporum judicium ferre, niſi poſtquam ſæpius advertit, imo poſtquam habitudinem id advertendi contraxit, quod non ſolum diverſitas quædam eſſet in impreſſionibus ex mutata figura & ſitu imaginum in oculis depictarum, ſed etiam certa quædam relatio cum ideis ad motus organi tactus excitatis. Oculos verſus objecta dirigere haud antea didicit, quam experiretur, hanc ipſam idearum congruentiam eſſe tum maxime luculentam, cum oculus certum ſitum reſpectu objectorum haberet. Denique quisque videt, eum non ante videndi uſum ceteris communem obtinuiſſe, niſi aſſuetudine contracta dijudicandi quam promptiſſime, qua ratione id, quod oculum afficeret, in reliquos ſenſus eſſet acturum.

ARTICULUS VI.

Varia phænomena objectorum procul viſorum.

76. *Angulus opticus* eſt, quem in pupilla efficiunt radii ab extimis dimenſionis objecti punctis venientes.

77. PROPOSITIO I. *Objecta ſive æqualia, ſive inæqualia, ſub eodem angulo viſa apparent æqualia*, niſi ſcilicet aliud adſit, quod in caſu peculiari phænomenon mutet.

Etenim ceteris omnibus paribus de æqualitate vel inæqualitate objectorum non aliunde judicare poſſumus, quam ex imaginibus in oculo formatis: jam vero ſi duorum objectorum quorumvis dimenſiones ad pupillam eundem ſubtendunt angulum, imagines in oculo æquales efformari debent; videbuntur igitur æqualia.

78. PROPOSITIO II. *Objecta ſimiliter oculo obverſa ea ratione videntur minui, qua ab oculo recedunt.*

Nam dimenſio quævis objecti eſt baſis conſtans trianguli, cujus latera ſunt diſtantiæ utriuſque extremi ab oculo; quod ſi jam hæc latera augeantur, anguli quoque iis oppoſiti creſcunt, ideoque (Elem. 495) angulus ad oculum, lateri conſtanti oppoſitus, decreſcit, minoresque ſemper imagines in oculo formantur.

79. COROLL. I. *Magnitudines apparentes, ſive anguli optici objectorum, ſunt in ratione reciproca diſtantiarum ab oculo, quando hi anguli ſunt exigui.*

80. COROLL. II. *Partes æquales objecti valde magni, & extra diſtantiam, ad quam res alias ſpectare ſolemus, apparent inæquales.* Partes enim remotiores ab oculo, minorem debent angulum opticum ſubtendere; & ex oppoſito.

81. COROLL. III. *Fieri poteſt, ut pars objecti minor, major appareat, quam altera, quæ in ſe major eſt.* Nempe ſi ita objiciatur oculo, ut angulum opticum majorem ſubtendat.

82. PROPOS. III. *Lineæ parallelæ ad magnam diſtantiam productæ, videntur concurrere, & extremis ſuis angulum efficere.*

Nam lineæ intervallum parallelarum metientes, quod ſemper idem eſt, angulos opticos ſemper minores ſubtendunt, & tandem inſenſibiles, cum ad diſtantiam quodammodo infinitam perventum eſt: igitur verſus extrema intervallum inter parallelas nullum apparet, & parallelæ videntur concurrere.

83. OBSERVA. Hinc manifeſtum fit, *primo, cur turris admodum alta videatur verſus illum propendere, qui ejus verticem ex pede ſpectat.* Si enim turris eſt ad perpendiculum erecta, ſpectator eam refert ad perpendiculum, quod per ejus oculum tranſit. Hæc duo perpendicula inter ſe parallela videntur convergere: igitur murus perpendicularis turris in majore altitudine ad perpendiculum per oculum

lum ductum accedit, ideoque inclinari verſus ſpectatorem videtur velut in eum ruiturus. *Secundo, cur maris ſuperficies eo altius attolli videatur, quo longius a littore diſtat, & quo magis editus eſt locus, e quo ſpectatur.* Eadem hujus eſt ratio. Nam maris ſuperficies ad libellam compoſita, refertur ad lineam libellæ, ſive horizontalem, per oculum tranſeuntem; ambæ, cum ſint parallelæ, videntur eo magis convergere, quo ab oculo fiunt remotiores: creſcit autem hæc diſtantia, quo longius maris aſpectus patet; hicque patet eo longius, quo in altiore loco ſpectator conſiſtit. *Tertio, cur in longioribus porticibus & ambulacris lacunar videatur deprimi, & pavimentum attolli.* Rurſus enim lineas libellæ tam lacunaris, quam pavimenti cum horizontali per oculum ducta comparamus, quæ illa inferior, hac ſuperior eſt. *Quarto, cur quando prope murum longiorem, vel ſeriem continuam arborum viam facimus, ea, quæ ad dextram ſita apparent, videantur verſus ſiniſtram accedere: aut ſi utrinque ſit murus, vel arborum ſeries, cur ſemper longius a ſe ſe videantur recedere, quo propius accedimus? &c.*

84. COROLL. Linea libellæ per oculum tranſiens, v. g coronæ murorum, ſemper talis apparet, utcunque objiciatur oculo: aliæ vero omnes, ſeu ſupra hanc, ſeu infra eam ductæ, ad horizontem inclinatæ videntur.

85. PROPOS. IV. *Figura objecti apparens dependet a ſitu punctorum, quæ ad oculum radios emittere poſſunt.* Patet per ſe.

86. COROLL. I. *Linea recta ita poſita, ut producta per centrum pupillæ ad oculi ſuperficiem eſſet perpendicularis, inſtar puncti apparet.* A nullo enim ejus puncto, niſi extremo, radius ad oculum venire poteſt.

87. COROLL. II. *Planum ita ſitum, ut axis oculi productus in eodem perpetuo maneret, debet tanquam linea videri.*

Sola enim perimetri pars oculo obverſa in eundem radios emittere poteſt.

88. COROLL. III. *Solidum, cujus unicum tantum planum oculo objicitur, non aliter ac mera ſuperficies apparet.*

89. PROPOSITIO V. *Si oculus ſit in eodem plano cum linea admodum longa, & ad magnam diſtantiam deſcripta; ea, ſive regularis ſit, ſive irregularis, apparet ut arcus circuli, cujus centrum oculus occupat.*

Quoniam puncta G, F, A, B, C, D, E, (fig. 5) curvæ irregularis ſunt in plano per oculum tranſeunte, & extra diſtantiam, ad quam objecta conſiderare aſſuevit, diſcernere nequit, quænam eorum ſint aliis viciniora. Pariter differentiam rectarum OP, & OD haud diſtinguit, utpote quæ exigua eſt, ſi cum alterutra harum linearum conferatur. Itaque cum nullum ei ſuppetat medium de inæqualitate horum radiorum judicandi, eo connaturaliter propendet, ut eos æquales credat. Idem eſt de reliquis. Quare ſe in

centro circuli exiſtimabit, in cujus circumferentia omnia illa puncta ſint poſita.

90. OBSERVA. Si differentiæ radiorum eſſent admodum magnæ, partes viciniores ſive ex vivacitate luminis, ſive ex magnitudine apparente dignoſci poſſent. Et ſi oculus haberet magnam diſtantiam a plano curvæ, itidem ejus inæqualitates diſcerneret; nam cum lineæ DP, BL, FI non ſint infinite parvæ relate ad OD, OB, OF, & ipſo ſitu directius viſui exponerentur, ſenſibiles evaderent.

91. *Linea irregularis parva procul viſa, ut* ABCDE, *inſtar rectæ apparere debet.* Quoniam ſcilicet videtur tanquam arcus circuli paucorum graduum.

92. Hinc eſt *primo*, quod quis in magna planitie variis anfractibus terminata conſtitutus ſe putet eſſe in centro circuli. *Secundo* quod talis, etſi ſemper progrediatur, nullum ſpatium ſe confeciſſe arbitretur: quod nempe ſe adhuc in centro conſtitutum videat. *Tertio* quod cælum inſtar ſphæræ cavæ appareat, in cujus axe ſit oculus poſitus, & aſtra ejus ſuperficiei inhæreant. *Quarto* quod urbes majores, ſylvæ latæ in formam amphitheatri flexæ videantur, quando procul conſpiciuntur. *Quinto* quod ſphæræ admodum diſtitæ, ut ſol, luna, tanquam mera ſuperficies circularis plana appareant. *Sexto* quod polyedrum variis areolis planis terminatum ad diſtantiam mediocrem inſtar globi, ad magnam autem diſtantiam ut circulus videatur. *Septimo* quod turris quadrangularis, vel polygona rotundæ, aut etiam planæ ſpeciem e majore intervallo exhibeat. *Octavo* quod non advertatur motus in globo circa axem æquabiliter rotato etiam in diſtantia parva, niſi quibusdam maculis ſit notatus, & motus lentior.

93. PROPOSITIO VI. *Si oculus conſtituatur in axe polygoni regularis perpendiculariter per ejus centrum tranſeunte, polygonum advertit eſſe regulare; ſed ſi ponatur extra hunc axem, polygonum videbitur illi irregulare.*

Oculo in axe conſtituto, radii ex ſingulis polygoni angulis ad eum ducti efficiunt pyramidem baſis regularis, cujus conſequenter omnes anguli plani angulum ſolidum ad verticem conſtituentes inter ſe æquantur, uti etiam omnia plana pyramidem efformantia. Itaque latera polygoni ab oculo ſub æqualibus angulis, & ſimiliter poſita videntur. At ſi oculus ſit extra axem, latera æqualia polygoni inæqualiter ab oculo diſtant, ideoque apparent inæqualia, nec eodem modo collocata.

94. COROLL. *Polygonum regulare oblique viſum apparet oblongum; & circulus inſtar figuræ ovalis.* Partes enim remotiores videntur minores, magisque contractæ; viciniores autem majores, & latiores: igitur diagonales aliæ apparent majores, aliæ minores.

95.

95. OBSERVA. Perſpectivæ eſt, phænomena ſuperioribus propoſitionibus expoſita Geometrice determinare.

96. PROPOSITIO VII. *Objecta in regione circumſita aſpectui noſtro expoſita videntur eo obſcuriora, magisque confuſa, quo remotiora ſunt. Quæ autem nobis propiora ſunt, ea vivacioribus coloribus, magisque diſtincta apparent.*

Præcipua hujus phænomeni ratio eſt, quod viſio diſtincta, & colorum vivacitas dependeat ab intenſitate luminis, quæ, quo objectum remotius eſt, eo magis minuitur ex interjecto aere craſſiore inter objectum & oculum.

97. Inde fit *primo*, ut objecta magis in edito collocata, ut quæ in vertice altiorum montium ſunt, longe diſtinctius videantur, quam quæ ad eorum radicem ſunt poſita, quod aer ſubtilior, & a vaporibus purior ſit in ejusmodi altitudine, quam in locis humilioribus. *Secundo*, ut pictores colores clariores, & illuſtriores obſcurioribus, & languidioribus rite temperando efficere poſſint, ut corpora depicta extra tabulam emineant, & ſolidi ſpeciem referant.

98. PROPOSITIO VIII. *Objecta obſcura & confuſa, ſimul etiam ceteris remotiora apparent.*

Ratio eſt, quod cum remota non niſi obſcura & confuſa videre ſoleamus, etiam illa judicemus remota, quæ horum more apparent.

99. OBSERVA. Si quavis ratione contingat, ut objectum extra limites collocatum, intra quos de corporum magnitudine ex uſu judicare poſſumus, attamen ejus molis, cui videndæ alias aſſuevimus, reddatur ſolummodo obſcurius, & magis confuſum; illico etiam remotius, quam ſit, putabimus. Et quia manſit in eadem diſtantia, adeoque in oculo noſtro imago imminuta non eſt, exiſtimamus objectum fuiſſe majus factum.

100. Ex his pronum erit rationem reddere, *primo* cur noctu ignis lucidior appareat propior, ac vere ſit. *Secundo*, cur phantaſmata, quæ per tenebras ſibi quidam effingunt, & ipſa vera objecta, noctu iter facientibus prope occurrentia, uti vicinæ arbores, domus &c, videantur remotiora, quam ſint. *Tertio*, cur cælum inſtar fornicis aliquantum depreſſi ſuperne ſubſidere intuentibus putetur. Nempe luce ſtellarum horizonti viciniorum decreſcente (20), eas magis diſtare exiſtimamus, quæ ad horizontem propiores ſunt. Hinc experimur, diſtantiam apparentem oculi ab horizonte, eſſe fere triplam diſtantiæ ejusdem a zenith. Colligimus hanc cæli depreſſionem ex eo, quod dum oculi judicio punctum cæli inter zenith & horizontem medium deſignare volumus, illud ad 23 vel 24 gradum altitudinis referamus, cum tamen, ſi cælum hemiſphærii formam referret, ad 45 gradum ſupra horizontem

idem

idem punctum designandum foret. *Quarto* cur sol & luna, cum nudo oculo in ortu suo spectantur, longe majores appareant, eaque ratione decrescant, qua altius supra horizontem ascendunt; licet si eorum diametri instrumentis Astronomicis explorentur, contrarium detegatur. Sit enim AE (Fig. 6) horizon, O locus observatoris: sol in diversa altitudine designetur per BC, DH, FG; superficies apparens cæli sit AMRE. Evidens est, solem in quocunque loco circuli AHGE constitutum, exhibere diametrum sub angulis ad centrum O æqualibus BOC, DOH, FOG: at quia figura cæli depressior apparet, sol cum est in BC, videtur in KI; cum hæret in DH, vel FG, putatur esse in PN vel TS: hinc licet sub iisdem videatur angulis, IOK, PON, TOS; minor tamen creditur, utpote vicinior oculo.

101. PROPOSITIO IX. *Objecta eo remotiora, & majora apparent, quo major aliorum numerus, ampliusque in plano spatium inter ea & oculum interjacet; & ex opposito tanto videntur propiora & minora, quanto pauciora alia corpora, & angustius loci spatium inter oculum & objecta intercedit.*

Amplitudo enim spatii intercedentis, ac objectorum aliorum numerus speciem magnæ distantiæ exhibent, ideoque fallitur oculus, ut corporibus justo majorem molem tribuat; & ex opposito.

102. Hæc causa est *primo*, cur horizon usque ad cæli superficiem procurrere videatur, utpote cum nullum intermedium corpus appareat. *Secundo*, Cur si quis in planitie constitutus inter oculum & objecta alia interjectam vallem cernere nequeat, ea sibi longe viciniora arbitretur; & distantiam non advertat, nisi jam prope vallem conspicuam positus. *Tertio*, Cur vesperi objecta paullo in edito collocata, & visui recte exposita, admodum dissita, & magna existimentur. Cum enim per tenebras non liceat ex interjecto spatio de distantia eorum judicium ferre, ad extremum horizontem ea referimus, ideoque etiam valde magna putamus.

103. PROPOSITIO X. *Si duo objecta inæqualiter ab oculo remota, percurrant spatia temporibus æqualibus æqualia, & parallela, id, quod remotius est, videbitur tardius moveri altero.*

Patet; nam spatium descriptum a remotiore minorem angulum ad oculum subtendit.

104. OBSERVA. Si directiones mobilium non sint parallelæ, fieri potest, ut vicinius appareat tardius moveri remotiore, etsi plus reipsa spatii eodem tempore percurrat, quam alterum. Nempe possunt hæc spatia ita obliqua esse posita respectu oculi, ut minorem angulum radii ab eorum extremis ducti efficiant, quam sit angulus subtensus a spatiis minoribus remotioris mobilis, sed magis directe oculo objectis.

105. PROPOSITIO. XI. *Objectum quavis celeritate motum, si describat singulis secundis spatium, quod in oculo angulum non majorem 15 vel 20 secundis subtendit, immotum videtur.*

Constat experientia, cum astra nudo oculo nullum motum sensibilem habere videantur, licet plura eorum tempore minuti secundi describant spatium angulum 15 secundorum subtendens.

Hinc est, quod in horologiis portatilibus motus indicis per circulum horarium, imo etiam alterius circulum minutorum percurrentis, sit insensibilis.

106. OBSERVA. Ratio spatii percursi a mobili ad distantiam ejusdem ab oculo, quando motus est insensibilis, censeri potest 1 ad 1200; hoc est, si corpus tempore unius secundi non describat plus, quam $\frac{1}{1200}$ suæ distantiæ ab oculo, immotum apparet, quia tum illud spatium non subtendit angulum majorem, quam 17 secundorum & 12 tertiorum.

107. Ex opposito, *si objectum moveatur celeritate summa, uti glans plumbea e catapulta ferrea in pulveris nitrati ejecta, videri nequit.* Nullibi enim tamdiu moratur, ut oculis illio figi possit, & objectum percipere.

108. PROPOSITIO. XII. *Duo aut plura objecta eadem velocitate apparente & directione mota, si referantur ad aliud immotum, quiescere videntur; objectum vero quiescens directione opposita, & celeritate eadem moveri apparet, qua reipsa alia moventur.*

Nam Duo aut plura objecta eadem directione, & velocitate apparente lata inter se situm non mutant; sed quia motu suo vero alium semper situm respectu objecti immoti acquirunt, & ad alias successive, aliasque hujus partes referuntur, videtur istud moveri in partem oppositam, & celeritate eadem.

109. Hinc pendet *Prima*; quod curru vel navi vectus se credat semper in eodem loco manere, & objecta vicina in partem oppositam moveri. Hæc oculorum fallacia eo est efficacior, quo navis major est: tunc enim navis partes, magno numero, & variis distantiis spectatorem ambientes, cujus respectu eundem semper situm retinent, haud possunt videri locum mutare, vel moveri. Et certe si spectator immoto perstet capite, imagines partium navis in ejus oculo locum non mutant, sed in eisdem semper spatiis depinguntur, ideoque non solum partes navis immotæ apparere debent, sed etiam aptissimæ, ad quas alia objecta referantur, ut, an moveantur, an quiescant, exploretur. Jam vero ob motum verum navis fieri debet, ut objecta extra navem imm[illegible] a omni momento situm & distantiam ab oculo spectatoris mutent: i[illegible]

tur eorum imagines diverſa ſpatia in oculo ſucceſſive percurrunt, ut adeo totus motus navis illis videatur tribuendus.

110. Simili illuſione fit, quod nobis perſuadeamus, ſolem & omnia ſydera intra 24 horas circa tellurem moveri, & quod revolutio annua ſolis reipſa circa terram fiat.

111. *Secundo*, quod cum nubes magna celeritate feruntur, luna velociſſime videatur in partem oppoſitam moveri, & nubes abſque motu hærere in eodem loco. Hæ quippe ſimul eadem directione, & celeritate progrediuntur.

112. PROBLEMA. *Datis poſitione loco ſpectatoris* S (figur. 7), *in quo ſe putat quieſcere; quotcunque punctis* A, B, C *ſpatii veri mobilis in plano quovis progredientis; & totidem punctis* a, b, c, *ad quæ ſpectator iisdem momentis pervenit, determinare viam apparentem mobilis.*

Ductis rectis A *a*, B *b*, C *c*, fiant his parallelæ & æquales Sα, Sβ, Sγ omnes per punctum S tranſeuntes; erunt α, β, γ, puncta, per quæ ſemita apparens mobilis ducenda eſt. Nam cum v. g. recta Sα ſit æqualis & parallela rectæ A *a*, punctum α reſpectu S eundem ſitum habet, ac punctum A reſpectu *a*. Igitur ſpectator, ſe in S poſitum credens, exiſtimare debet, mobile eſſe in α. Idem eſt de reliquis punctis β, γ &c.

113. COROLL. I. *Locus verus, & locus putatitius oculi; locus verus & locus apparens objecti ſemper ſunt in angulis parallelogrammi.* Locus verus objecti, & locus putatitius oculi, ſemper ſunt in angulis oppoſitis; locus apparens objecti, & locus verus oculi ſunt in reliquis duobus angulis oppoſitis. Hinc *objectum ſemper apparet oppoſitum loco vero oculi ſpectatoris.*

114. COROLL. II. *Si objectum ſit immobile in* A, *ejus ſemita apparens* $\alpha\beta\gamma$ (fig. 8) *eſt æqualis ſemitæ veræ oculi, & in plano parallelo.*

Quoniam $\alpha a, \beta b, \gamma c$ ſunt parallelogramma, quorum S A eſt diagonalis communis, ſimulque interſectio communis planorum eorum, baſibus S*a*, S*b*, S*c*, in eodem plano exiſtentibus, in quo ſcilicet eſt ſemita vera oculi; etiam his parallelæ & æquales Aα, Aβ, Aγ debent in eodem plano ad planum ſemitæ oculi parallelo exiſtere, angulosque αAβ, βAγ, æquales angulis *a*S*b*, *b*S*c* efficere. Ergo puncta α, β, γ ſunt in linea æquali lineæ *a b c*, & in plano parallelo, ſed ſitu inverſo. Si vero objectum ſit in eodem plano cum ſemita oculi, etiam ejus ſemita apparens in eodem erit.

115. COROLL. III. *Si objectum quieſcat in loco putatitio oculi ſpectatoris, ab eo refertur ad extremum radii æqualis & in directum jacentis radio ex vero loco oculi ad ejus locum putatitium ducto.*

Itaque ſi ſpectator moveatur in circulo, cujus centrum ab objecto occupatur, eſtque ſpectatoris locus putatitius; videtur objectum

jectum eundem circulum deſcribere, ſed ſemper in punctis peripheriæ illis diametraliter oppoſitis verſari, in quibus eſt ſpectator, ideoque eadem moveri velocitate, ac reipſa oculus ſpectatoris movetur.

116. OBSERVA. Corpora terreſtria nos undique ambientia, ac noſtri reſpectu quieſcentia, quamvis reipſa una nobiſcum circa ſolem volvantur, ita hac ſpecie nobis illudunt, ut nos credamus in centro univerſi immobiles, ſolemque circa nos agi, licet is in ſe quieſcat; Planetas item circa ſolem latos percurrere curvas mire flexas, ut jam in ortum, jam in occaſum progrediantur, etſi de ſe non niſi ab occaſu in ortum moveantur. Ope Problematis præcedentis omnes hi motus apparentes in plano deſcripti exhiberi poſſunt. Si enim fiant duo circuli concentrici, quorum alter exhibeat orbitam Telluris, alter orbitam alterius planetæ, exempli causa, Jovis; ſintque radii horum circulorum proportionales diſtantiis ſolis a terra, & Jove, hoc eſt circiter ut 1 & 5; & denique peripheriæ circulorum dividantur, in ratione celeritatum terræ & planetæ, in caſu noſtro ſcilicet 12 ad 1, ita ut v. g. circulus orbitæ terræ reſpondens dividatur in gradus duodenos; alter, qui orbitam Jovis exprimit, in ſingulos; ſi, inquam, his ita conſtructis, notentur in circulo telluris diviſionum puncta ſucceſſiva *a*, *b*, *c*, &c, hiſque totidem correſpondentia in circulo Jovis A, B, C, &c (initio, a quo libuerit, ſumpto), centro eorum communi S; facile erit omnia puncta curvæ apparentis a Jove deſcribendæ determinare, atque ex iis omnium mirarum illarum variationum rationem reddere.

117. PROPOSITIO. XIII. *Imagines ejusdem objecti, ſi in fundo utriusque oculi non depingantur ad partes homologas, exhibent objectum duplicatum.*

Quod objectum, etſi duobus oculis ſpectatum, ſimplex appareat, non aliunde pendet, niſi quod utraque impreſſio in fibras homologas, & æqualiter tenſas utriusque oculi ad ſenſum eadem ſit; ſive, quod plurimis experimentis congruit, quod anima non niſi ad unam e duabus æqualibus & ſimultaneis impreſſionibus advertat. Quod ſi igitur impreſſiones per imagines in partibus diverſis oculorum depictas fiant in fibras inæquales, & non homologas, ipſæ impreſſiones jam diverſæ ſunt, ideoque tales, ut duplicis objecti idea conſequatur.

118. OBSERVA. Imago in utroque oculo depingitur in fibris homologis, quando objectum videtur per radios ad ſenſum parallelos, ſive quando uterque oculus eodem modo verſus objectum dirigitur. Hinc accidit, ut objectum nimis admotum oculis appareat duplicatum, quod nempe axes optici nimium inclinari debeant,

beant, ut objectum utroque oculo videri poſſit; & ſiniſtro quidem apparebit ad partem dextram, dextro ad ſiniſtram, quia hæc eſt eorum axium inclinatio. Idem fit, ſi alia quavis ratione oculi diſtorqueantur. Ebrii ſæpe objecta duplicata vident, fibris & muſculis omnibus ita laxatis, ut motus æquales non recipiant; hinc oculos nequeunt eodem modo verſus objecta dirigere. Patebit hoc manifeſte, ſi eorum oculi attentius conſiderentur.

119. In vehementioribus commotionibus, dum quis affectuum impetu, v. g. ira abripitur; item hominibus furioſis, quandoque objecta duplicata apparent, cum tunc liberum non ſit, oculos, ut convenit, in ea dirigere.

PARS SECUNDA

Complectens Catoptricam, & Dioptricam.

CAPUT I.

Notiones Generales Catoptricæ, & Dioptricæ.

ARTICULUS PRIMUS.

De imaginibus & focis.

120. Quoniam ſumma eſt atomorum lucis exilitas, fieri ſane nequit, ut unius, paucorumve radiorum impreſſionem in organum viſus, cujus fibræ cum lucis radiis comparatæ rudes admodum ſunt, & craſſæ, percipiamus. Majore itaque radiorum numero ex eadem ſuperficiei corporis parte digredientium opus eſt, ut ea nobis viſibilis reddatur. Verum quia radii ex eodem puncto dimanantes continuo a ſeſe invicem divergunt (8), excogitanda fuerunt media, quibus ſecum iterum conjungi, in puncto quovis dato rurſus, quia etiam, ut libuerit, diſpergi poſſent. Atque de hiſce adminiculis Dioptrica, Catoptricaque agit; de vitris, inquam, & ſpeculis, quæ eum in finem adhibet.

121. Ope itaque vitrorum, ſpeculorumque ingens radiorum numerus ab objecti parte quavis egreſſorum, in eodem iterum ad ſenſum puncto uniri poſſunt: & cum quisque radius imaginem puncti illius, e quo emanat, ſecum deferat (71); omnes ad idem collecti ſpatium imaginem partis objecti, unde emiſſi ſunt, efforment, neceſſe eſt, eo quidem vivaciorem, quo major radiorum copia coacta fuerit; eo accuratiorem, magisque diſtinctam, quo ordo idem, dum colliguntur, ſervatus fuerit exactius, quem in digreſ-

digreſſu ab objecto tenuerunt. Eſt hæc imago adeo luculenta, ut ſi planum quodpiam læve & candidum eo in loco, in quo radiorum unio fit, conſtituatur, ſuis accurate diſtincta coloribus appareat, maxime, ſi dum experimentum capitur, luci cuivis alteri aditus negetur.

122. Punctum illud, in quod ope vitri, ſpeculive luminis radii coguntur, *focus* vitri, aut ſpeculi vocatur; & ſiquidem vera fiat radiorum collectio, *focus realis*, aut citra additum, *focus* nuncupatur, eſtque locus, in quo imago objecti lucem emittentis effingitur, ipſumque apparet objectum eſſe, ſi plures radii, poſtquam per focum decuſſatim tranſierunt, in oculum incidant. At vero ſi punctum illud tale modo ſit, ad quod, diſperſis per vitrum aut ſpeculum radiis, nova eorum directio tendat, *focus imaginarius* appellatur, illicque etiam tunc objectum conſiſtere videtur, ſi major radiorum diſperſorum vis oculum ſubeat, quæ objecti imaginem ſatis ſenſibilem efformet: quippe illic univerſim objectum exiſtere putatur, unde ejus radii ad noſtrum oculum venire videntur (58, & 48).

123. Quod ſi vero quivis radius imaginem objecti, e quo emanat, ſecum deferat, ſequitur, quod *ſi radii, poſtquam ſemel collecti ſeſe ſecuerunt, ac in concurſu ſuo imaginem depinxerunt, poſtea ſeu refractione, ſeu reflexione quapiam uniti rurſus fuerint, denuo imaginem efformant, ac ſic deinceps, quamdiu eorum inter ſeſe ordo non fuerit perturbatus.* Igitur tot ejusdem objecti imagines fieri poſſunt, quoties radii ab eo emiſſi citra confuſionem iterum poſſunt colligi.

124. Illud etiam deducitur, quod *quando ſolum de via radiorum luminoſorum agitur, imago vicem objecti ſubire poſſit, & objectum vicem imaginis; quin etiam ſecundæ imaginis reſpectu prima tanquam ejus cauſa productrix haberi poſſit, ac ſic de reliquis.*

125. Si radii in faſce luminoſo ad ſeſe invicem inclinentur, *convergentes* aut *divergentes* dicuntur, prout ſcilicet ſive diſceſſus eorum a puncto quopiam unionis, ſive congreſſus conſideratur. E quo liquet, focum eſſe in ipſo tranſitu a convergentia ad divergentiam, & viciſſim.

ARTICULUS II.

Leges & principia ab experientia deducta, quæ demonſtrationibus in Dioptrica & Catoptrica fundamentum præbent.

126. LEX I. *Quivis lucis radius per medium quodpiam propagatus, dum in aliud diverſæ denſitatis aut naturæ incurrit, directionem mutat: Si*

novum illud medium penetrare nequeat, in ſuperficie reflectitur; ſi penetrat, tu ingreſſu frangitur, ſive refringitur.

Sit A C (fig. 9) radius, ex aere in ſuperficiem P Q cryſtalli, aut vitri ſolidi P S incidens. E puncto C, in quo radius A C in novum hoc medium incurrit, & quod propterea *punctum incidentiæ* dicitur, erigatur perpendicularis M D ad vitri ſuperficiem (vocatur ea nonnunquam cathetus incidentiæ; angulus vero A C M, ejve æqualis D C B eſt angulus incidentiæ). Quod ſi *radius incidens* A C offendat in aliquod obſtaculum aditum in vitrum prohibens, mutata directione reflectitur, viamque C I tenet; tumque angulus M C I vocatur *angulus reflexionis*: verum ſi radius incidens A C vitrum penetrarit, deſerta priore directione C B deviat, & novam C T ſequitur. Atque in hoc caſu angulus D C T dicitur *angulus refractus*; C T *radius fractus*, vel *refractus*; B E *ſinus anguli incidentiæ*; & T H *ſinus anguli refracti.*

127. Lex II. *Si punctum lucidum, poſtquam in occurſu diverſorum mediorum & ſuperficierum diverſimode reflexum, refractum, aut inflexum eſt (uti ſcilicet mediorum & ſuperficierum occurrentium natura & poſitio exigit), tandem in obſtaculum offendat, quod ei directionem præciſe oppoſitam impertit, eadem accurate via, & celeritate, qua advenerat, regreditur.*

Sic radius T C per vitrum P S propagatus, dum in ejus ſuperficiem P Q incurrit, via C A egreditur; ſive, quod eodem recidit, ſi radius A C, refractus ſit in C T, & ex T directione T C repellatur, e vitro directione C A exit.

128. Lex III. *Angulus reflexionis aut refractionis eſt in eodem plano cum angulo incidentiæ, eſtque hoc planum ad ſuperficiem medii perpendiculare.* Etenim ejus poſitio per Cathetum incidentiæ, quæ ad ſuperficiem medii perpendicularis eſt, determinatur.

129. Lex IV. *Sinus anguli reflexionis aut refractionis alicujus radii eſt in ratione conſtante cum ſinu ſui anguli incidentiæ.*

In reflexione ea ratio eſt æqualitatis: & conſentientibus omnibus experimentis, differentia nulla eſt, quæ percipi poſſit.

130. Quando lux ex aere in aquam pluviam tranſit, ratio ſinus anguli refracti ad ſinum anguli incidentiæ proxime eſt, ut 3 ad 4, aut accuratius, ut 3 ad 4,0076; dum ex aere in vitrum incidit, ut 2 ad 3, vel accuratius ut 20 ad 31; dum e vitro in aquam propagatur, ut 9 ad 8 *&c, & viciſſim ratio ſinus anguli refracti ad ſinum anguli incidentiæ eſt in tranſitu ex aqua in aerem, ut 4 ad 3; e vitro in aerem, ut 3 ad 2 &c.

131 Co-

* Newton. Opt. L. c. part. II. Prop. III. Exper. VIII. rationem anguli incidentiæ ad ſinum anguli refractionis ſuæ ponit ut 80 ad 93; hinc typothetis numerorum 8 & 9 transpoſitio in exemplari Gallico adſcribenda.

131. COROLL. I. *Si radius incidens ſit perpendicularis ad ſuperficiem medii, in quod incurrit; vel in ſe ipſum reflectitur, vel medium ſine refractione tranſit.* Cum enim tunc ſinus anguli incidentiæ ſit = o, ſinus anguli reflexionis, aut refractionis pariter eſt = o; aut, quod idem eſt, radius tum cum catheto incidentiæ congruit.

132. COROLLARIUM II. *Sub quocunque angulo incidentiæ radius occurrat alicui medio luci alias pervio, ſemper ſub eodem reflecti poteſt, ſiquidem in caſu particulari illud penetrare nequeat; verum quando juxta naturam medii ſinus anguli incidentiæ debet minor eſſe ſinu anguli refracti, radius non ſemper poteſt medium, facta refractione, penetrare;* aut, quod idem eſt, *in angulis incidentiæ certi dantur limites, ultra quos radius refringi nequit, conſequenter nec exire e medio, in quo propagatur, ut in alterum, cui occurrit, transeat.*

Etenim ſi lux ex aere in ſuperficiem aquæ incidat ſub angulo ſere 90°, angulus refractionis erit proxime 48° ½, ſinu toto, aut incidentiæ, ad ſinum anguli refracti exiſtente tunc ut 4 ad 3, quæ ratio angulum refractum præbet 48° ½ circiter: itaque ſi ex oppoſito radius ex aqua in aerem transire debeat ſub angulo incidentiæ 48° ½, is ex aqua egreſſus debebit ejusdem ſuperficiem radere, angulo refracto 90° exiſtente; quod ſi igitur radius ſub majore angulo incidentiæ, quam 48° ½, ex aqua egredi deberet, ſinus anguli refracti ipſo ſinu toto major fieret, quod impoſſibile eſt: unde neque fieri poteſt, ut talis radius ex aqua emergat, docetque nos experientia, eum in communi aquæ & aeris ſuperficie reflexum intra aquam manere. Simili ratiocinio in aliis mediis limites refractionis inveniri poſſunt, data ratione ſinuum anguli incidentiæ & refractionis. Deinceps de planis ſolummodo, & ſphæricis ſuperficiebus agemus, quarum ſcilicet ſolarum in reliquis artibus uſus eſt.

CAPUT II.

De Catoptrica.

ARTICULUS I.

De imaginibus, aut foci per reflexionem.

133. PROBLEMA. *Datis puncto, aut objecto quovis* O *in axe* A O *ſpeculi cujuscunque ſphærici concavi* M A B (fig. 10. & 11) *aut convexi* (fig. 12), *& radio incidente* O M, *axi* A O *infinite propinquo, invenire punctum axis* F, *per quod radius in* M *reflexus tranſit.*

RESOLUTIO. Ducatur ad centrum C e ſuperficie ſphærica recta M C, quæ cum (Elem. 459) ad ſuperficiem ſpeculi in pun-

ſto incidentiæ M normalis ſit, erit cathetus incidentiæ: hinc angulus OMG, vel CME eſt angulus incidentiæ; & ſi fiat CMF = OMG, erit radius reflexus MD, axi OA in F occurrens.

Ut jam valor de AF, ſeu MF (ponuntur enim OM & OA infinite propinquæ) analytice exprimatur, ſit OA, ſive MO, diſtantia objecti a ſpeculo, $= \pm d$ ($+ d$, ſi ſpeculum ſit concavum; & $- d$, ſi ſit convexum: quippe cum hæc ſignorum determinatio a ſitu radii incidentis OM reſpectu ſemidiametri ſpeculi AC pendeat); ſit $AC = r$, & FA, vel $FM = f$. Hinc erit $FC = r - f$ (fig. 10. & 12), aut $= f - r$ (fig. 11); & $CO = -r + d$ (fig. 10), vel $= r - d$ (fig. 11), vel $= r + d$ (fig. 12). Eſt autem (Elem. 560) CO: CF = MO: MF, ſive (fig. 10 & 11) $\mp r \pm d : \pm r \mp f = d : f$; unde formula generalis pro ſpeculis concavis eruitur $f = \frac{dr}{2d - r}$.

Porro in triangulo CMO fig. 12, habetur (Elem. 746) CO: MO = *ſin* CMO (vel FMC): *ſin* MCO (ſive MCF): item in triangulo FMC eſt *ſin* FMC: *ſin* MCF = CF: FM; igitur etiam CO: CF = MO: MF, ſive $r + d : r - f = d : f$. Ex quo deducitur formula pro ſpeculis convexis $f = \frac{dr}{2d + r}$. Ut adeo formula utrique ſpeculorum ſphæricorum generi communis ſit $f = \frac{dr}{2d \mp r}$.

134. OBSERVA I. Hæc formula eo accuratius exhibet valorem de AF, quo radius incidens OM axi OA fuerit propior, ſive quo AM, inter radium incidentem, & axem AO per objectum O ductum, intercepta, minor portio ſuperficiei totius ſphæræ fuerit. Sic cum MF (fig. 10 & 12.) ſemper ſit major, quam AF, quo radius incidens a puncto A longius diſcedit, eo propius ad idem A radius reflexus MF cum axe AF concurrit.

135. OBSERVA II. Si ſciatur arcus AM, per Trigonometriam planam valor de AF calculo rigido erui poteſt. Nam in triangulo OCM, datis OC, CM, & angulo MCO, cujus menſura eſt AM, anguli COM, & CMO cum latere MO reperiri poſſunt. (Elem. 760). Dein in triangulo FMO habetur MO, angulus FOM, & FMO, duplus (aut dupli complementum (fig. 12)) anguli CME: quare per calculum obtinetur latus OF, & inde AF.

Si radius incidens OM fiat parallelus axi OA, hoc eſt, ſi diſtantia objecti fiat infinita, angulus EMC erit æqualis angulo FCM, & triangulum CMF iſoſceles, utrumvis ejus angulum metiente

tiente arcu AM. Sit exempli cauſa CM = 6 ped. arcus AM = 1°; reperietur AF = 2,99964 pedum. Si AM ponatur = 10°, habebitur AF = 2,95372 ped. Si AM ſit = 30°, fiet AF = 2,53789 pedum.

136. COROLL. I. Quoniam tota lux ab objecto O in ſpeculum in exigua a puncto A diſtantia incidens, per punctum axis F aut ſaltem admodum prope, tranſit in ſpeculis concavis; ſequitur ad idem punctum F debere imaginem objecti O ſenſibilem efformari. In ſpeculis vero convexis radii e puncto O venientes reflexione ita diſperguntur, ut producti ad F concurrant, & ſi quidem lux eum in modum reflexa oculum ſubeat, objectum verſus F exhibeat.

137. COROLL. II. Cum imago objecti O ſita ſit in axe ſphæræ per punctum O producto, ſi quando occurrat obſtaculum, quo minus ab objecto ad centrum ſphæræ recta duci poſſit, imago objecti formari nequit. Simili ratione, quocunque ſitu oculus collocetur, ut imaginem ſuam in ſpeculo videat, eam ſemper in recta per centrum ſpeculi tranſeunte videt.

138. OBSERVA III. Si objectum O tantam vim lucis emittat, ut radii etiam nondum collecti ſenſum caloris excitent, uti id præſtant radii ſolares, facis, carbonis accenſi &c, manifeſtum eſt, quod ſi ope ſpeculi concavi colligantur, calorem tum eorum denſitati, tum illi, quem per ſeſe habent ſinguli incidentes, proportionalem excitaturi ſint. Atque hinc nomen *foci* puncto illi, in quod coguntur, impoſitum eſt.

ARTICULUS II.

De loco, ſitu, & motu imaginum per reflexionem ortarum.

139. Si diverſæ aſſumantur diſtantiæ, e quibus objectum in ſuperficiem ſpeculi ſphærici reflectentem radiare poteſt, haud difficile erit, ex formula generali, ſuperiore Articulo tradita, locum ejus imaginis reperire.

Itaque ſupponamus objectum quodpiam, primo in ipſa ſpeculi ſuperficie poſitum, dein ſucceſſive in infinitum ab eodem removeri...

140. I. *Si diſtantia a ſpeculo ſit infinite parva, imago objecti eſt infinite propinqua poſt ſpeculum.* Quippe cum ſit $\pm d = \frac{1}{\infty}$, formula $f = \frac{dr}{2d \pm r}$ in hanc abit $f = \frac{1}{\pm \frac{2}{\infty}}$. Denotat autem ſignum —, in ſpeculo concavo imaginem eſſe ex parte oppoſita illi, in qua aſſumebatur ſe-

midiameter cavitatis $= +r$, adeoque poſt ſpeculum: ſignum vero $+$ oſtendit, in ſpeculo convexo imaginem eſſe ex parte centri convexitatis, cujus ſemidiameter ponebatur $= +r$; manifeſtum autem eſt, in formula $f = \frac{dr}{2d+r}$ ſemper fore f poſitivum, quicunque valor de d aſſumatur: unde ſequitur, *in ſpeculo convexo imaginem neceſſario eſſe ex parte centri convexitatis, in quacunque diſtantia objectum fuerit;* id, quod in ſequentibus toto hoc Articulo probe notandum.

141. II. *Diſtantia objecti a ſpeculo a* 0 *uſque ad quartam axis ſphæræ, vel dimidiam ſemidiametri partem creſcente, imago quoque poſt ſpeculum ſemper recedit; & quidem in concavo a* 0 *uſque ad* ∞; *in convexo vero a* 0 *uſque ad* $\frac{1}{3}$ *axis.* Nam *Primo* ſi ponatur $d < \frac{1}{2}r$, ſeu $2d < r$, patet, eſſe $2d - r$ quantitatem negativam; ergo in ſpeculo concavo f quoque erit negativa, & locus imaginis poſt ſpeculum. *Secundo.* At vero ſi fiat $d = \frac{1}{2}r$, erit formula pro ſpeculo concavo $f = \frac{\frac{1}{2}rr}{0} = \infty$. E quo liquet, *imaginem ad diſtantiam infinitam recedere, ſi objectum ad quartam axis partem collocetur;* ſive, quod idem eſt, *radios ab objecto venientes reflecti inter ſe parallelos a ſpeculo, adeoque* non niſi ad diſtantiam infinitam a ſpeculo concurrere. Verum quia nulla eſt ratio, ob quam lineæ parallelæ in infinitum utrinque productæ ex una potius, quam altera parte concurſuræ concipiantur, ideoque eodem jure concurſus utrinque fieri ſupponitur; in caſu, in quo verſamur, dum ſcilicet objectum $\frac{1}{4}$ axis parte a ſpeculo concavo diſtat, ejus imago a ſpeculo tam antrorſum, quam retrorſum in infinitum diſcedit.

142. Quod ad ſpeculum convexum, patet, poſito $-d = \frac{1}{2}r$, *fore* $f = \frac{1}{4}r$.

143. III. *Diſtantia objecti a ſpeculo ab* $\frac{1}{4}$ *axis usque ad* $\frac{1}{2}$ *ejusdem (hoc eſt usque ad ſemidiametrum ſphæræ) creſcente, imago in ſpeculo concavo eſt cis ſpeculum, atque e diſtantia infinita usque ad centrum ſpeculi accedit; at in ſpeculo convexo imago poſt ſpeculum ab* $\frac{1}{3}$ *axis uſque ad* $\frac{1}{2}$ *ejusdem recedit.*

Manifeſtum enim eſt, quamdiu $d > \frac{1}{2}r$, ſive $2d > r$, formulam pro ſpeculo concavo non poſſe fieri negativam, atque adeo imaginem ſemper fore ex parte concavitatis. Quod ſi formula ſolvatur in analogiam $d : 2d - r = f : r$, quia $d > \frac{1}{2}r$, & $d < r$, erit antecedens d majus conſequente $2d - r$, atque propterea $f > r$ (Elem. 306): hinc imago eſt ultra centrum ſpeculi reſpectu objecti. Si fiat $d = r$, erit $2d - r = d$, & $f = r$. Igitur *in ſpeculo concavo ſi objectum in centro ſpeculi collocetur, imago ibidem erit;* at ſi in ſpeculo convexo fiat $-d = r$, habebitur $f = \frac{1}{3}r$.

144. Ex his petenda eſt ratio, cur oculus ante ſpeculum intra

tra $\frac{1}{4}$ partem axis & centrum collocatus ſuam imaginem nulla ratione videre poſſit, quippe quæ tum poſt oculum efformatur, atque in infinitum recedit, quando is ad $\frac{1}{4}$ axis conſtituitur; ex diſtantia autem infinita usque ad centrum redit, ibique cum oculo confunditur, hoc ab $\frac{1}{4}$ axis ad centrum usque a ſpeculo recedente. Dum autem oculus ejusque imago in locum eundem conveniunt, omnia confuſa apparent, oculo ſe ipſum in quovis puncto vidente.

145. IV. *Diſtantia objecti a ſpeculo a ſemidiametro ſphæræ usque in infinitum creſcente, imago a centro usque ad $\frac{1}{4}$ partem axis verſus ſpeculum accedit, ſi ſpeculum ſit concavum; at ſi convexum ſit, ea poſt ſpeculum ab $\frac{1}{8}$ axis usque ad $\frac{1}{4}$ ejusdem recedit.*

Nempe in analogia $d : 2d - r = f : r$, poſito $r < d$, antecedens d minus eſt ſuo conſequente $2d - r$; ideoque etiam $f < r$. Quod ſi ponatur $d = \infty$, formula in hanc mutatur $f = \frac{1}{2} r$.

146. THEOREMA. *Si objectum ſit arcus circuli* O P Q (fig. 13 & 14) *ſpeculo ſphærico* B A D *concentrici, erit* PRIMO *etiam imago arcus circuli concentrici,* SECUNDO *radius hujus imaginis circularis, adeoque ipſa imago quoque, major, minorve erit, prout ea a centro ſpec: : C longius, propiusve abfuerit;* TERTIO *hæc imago erit ſitu erecto, hoc eſt, eodem ac objectum, quamdiu ex eadem cum objecto parte fuerit reſpectu centri ſpeculi; at vero ejus ſitus erit inverſus, ſive contrarius ſitui objecti, ubi inter eam & objectum centrum ſpeculi extiterit.*

Cum enim O P Q ſit arcus cum B A D concentricus, rectæ O B, P A, Q D, per centrum C tranſeuntes, in quibus exiſtunt imagines *o*, *p*, *q*, punctorum O, P, Q, æquales ſunt inter ſe: itaqua *d* (quod earum valorem in formula generali exprimit) erit quantitas conſtans, æque, ac *r*; & hinc etiam *f* conſtans eſt: hoc eſt, rectæ *o* B, *p* A, *q* D ſunt æquales: ergo *opq*, O P Q, B A D ſunt arcus concentrici.

147. Ex his evidens eſt *Primo*, quod dum imago & objectum ſunt ex eadem parte reſpectu centri, uti figur. 14, ſitus imaginis ſit idem cum ſitu objecti, ſingulis ſcilicet punctis imaginis exiſtentibus in iisdem ſemidiametris, quæ per ſingula puncta correſpondentia objecti ducuntur. Verum ſi imago reſpectu objecti ſit ultra centrum (fig. 13), cum rectæ, in quibus exiſtunt imagines ſingularum partium objecti neceſſario per centrum ſpeculi tranſeant, eæ, quæ a puncto objecti ſito ſupra axem (qui per medium objectum ducitur) veniunt, poſtquam per centrum tranſierunt, deorſum vergunt, & ex oppoſito. Igitur in omnibus rectis venientibus e parte ſuperiore objecti (quæ hoc ipſo ſupra axem ſita eſſe debet) imago exiſtit inferius, quippe quæ in il-

lis non niſi poſtquam per centrum tranſierint, efformatur: eſt ergo ſitus imaginis inverſus reſpectu objecti ſui.

148. *Secundo* manifeſtum eſt, imaginem integram objecti, quæ tota lineis in centro concurrentibus comprehenditur, eo eſſe debere minorem, quo centro ſpeculi fuerit vicinior, & ex oppoſito.

149. COROLL. I. *Si objectum ſit arcus concentricus ſpeculo convexo, imago illius ſemper apparet ſitu erecto*, quia ſcilicet ex eadem parte centri ſpeculi efformatur, in qua objectum eſt; *decreſcit vero ea ratione, qua objectum recedit*, cum magis ſemper, magisque tum ad centrum accedat. *In ſpeculo concavo imago eſt erecta, & objecto a ſuperficie ſpeculi uſque ad ¼ axis recedente, creſcit. Hinc vero uſque ad centrum promoto objecto, imago decreſcit, ſitumque inverſum acquirit: Tandem a centro in infinitum abeunte objecto, ſitum quidem inverſum retinet, ſed denuo creſcit.* Verum quod ad ultimum præcipue caſum pertinet, obſervandum eſt, quod ſi objectum non ſimul augeatur pro ratione majoris ſemper diſtantiæ, ſed ſolummodo figuram ſpeculo concentricam, quam radius diſtantiæ exigit, acquirat, ejus imago creſcente intervallo minuatur.

150. COROLL. II. *Si cetera omnia paria ſint, quo minor eſt radius ſphæræ ſpeculi, eo minor etiam eſt imago objecti.*

151. OBSERVA. Præſens theorema ad objecta alterius cujusvis figuræ in ſpecula ſphærica radiantia cum rigore applicari nequit. Quod ſi tamen adeo ſupponantur exigua, ut eorum latitudo pro arcu ſpeculo concentrico haberi poſſit, ex iis, quæ præſente Articulo expoſita ſunt, intelligi poterit *primo*, cur imagines in ſpeculis ſphæricis jam minores, jam majores ſuis objectis depingantur; *Secundo*, cur earum ſitus nunc erectus, ſit nunc inverſus; *Tertio*, cur videantur verſus ſua objecta accedere, objectis ipſis a ſpeculo cavo recedentibus &c.

152. Similiter intelligitur ex dictis, figuram objectorum, quorum ſuperficies ſpeculo non eſt concentrica, eo magis deformem reddi debere, id eſt, imagines eo magis fore diſſimiles ſuis objectis, quo ſuperficies objectorum major, & radius ſpeculi minor fuerit. Etenim ſi v. g. linea recta opponatur ſpeculo ſphærico, ejus imago curva apparebit, quoniam punctis ejus rectæ inæqualiter a ſpeculo diſtantibus, etiam eorum punctorum imagines inæquales acquirunt diſtantias, quarum tamen non eadem eſt ratio. Ejusmodi imagines eo etiam magis a figura objecti diſſident, quo id intra ſpeculum concavum & centrum uni quartæ axis parti propius fuerit, cum tunc imagines admodum magnæ efformentur, & exigua diverſarum objecti partium differentia in diſtantia a ſpeculo, ingens diſcrimen diſtantiarum & magnitudinum in imaginibus earum partium efficiat.

AR-

ARTICULUS III.

Applicatio Theoriæ ſuperioris ad ſpecula plana.

153. E formula generali proprietates ſpeculorum planorum ſponte veluti fluunt, ſi id genus ſpecula tanquam ſphærica conſiderentur, in quibus diameter dimidia ſphæræ ſit infinita, ſive ſi ponatur $r = \infty$; nam tum formula $f = \frac{dr}{2d - r}$ in hanc abit $f = -d$, quæ oſtendit, *imagines in ſpeculis planis viſas apparere tanto intervallo trans ſpecula, quanto cis eadem exiſtunt objecta, easque ſemper eſſe erectas.* Et quoniam in ſpeculis ſphæricis imago cujusvis puncti objecti depingitur in recta per punctum illud, & centrum tranſeunte, adeoque ad ſpeculorum ſuperficiem perpendiculari; *imago cujusvis puncti objecti ante ſpeculum planum collocati eſt in perpendiculari ex eo puncto ad ſuperficiem ſpeculi ducta.* Denique, cum perpendiculares ab extremis objecti punctis ad ſpeculum ductæ ſint inter ſe parallelæ, & hinc non niſi in diſtantia infinita (ad quam centrum ejusmodi ſpeculi remotum eſt) concurrere poſſint, *imagines inter has comprehenſæ quoad ſingulas dimenſiones objectis ſuis æquantur.*

154. Simili argumento ceteræ quoque ſpeculorum planorum proprietates deduci poſſent; verum quia uſus horum ſpeculorum frequentior eſt, quam aliorum, non nullas iſthic in particulari indagare juvat.

155. THEOREMA I. *In ſpeculo plano horizontaliter collocato, objecta, quorum ſitus erectus eſt, apparent inverſa, & viciſſim. Si ſpeculum ſit inclinatum, omnia objecta in contrarium inclinata videntur. Si angulus inclinationis ſpeculi ſit 45°, objecta verticalia fiunt horizontalia; & horizontalia acquirunt ſitum verticalem &c.*

Omnia hæc ex eo conſequuntur, quod partium objecti ſpeculo viciniorum imagines poſt ſpeculum viciniores quoque ſint; & remotiorum imagines longius quoque poſt ſpeculum diſtent. Quod ſi pro ſingulis caſibus theorematis ſchemata conſtruantur, facile ex iis demonſtratio elicietur.

156. THEOREMA II. *Pars dextra objecti in imagine in ſpeculo plano depicta apparet ad ſiniſtram, & ſiniſtra ad dextram.*

Pendet id ex eo, quod imagines ſitum objectorum ſuorum retineant, partesque dextræ ad dextram depingantur &c. Jam vero dum vultum alterius conſpicimus, illius dextra ſiniſtræ noſtræ opponitur, & viciſſim. Cum itaque hunc in modum alios ſine ſpeculo conſiderare aſſueverimus, quando nos ipſos in ſpeculo conſideramus, dum manum verſus dextram movere volumus, eam re-

reipſa verſus ſiniſtram movemus; dum eam antrorſum tendere volumus, retrahimus, ita, ut peculiari habitudine opus ſit, ut quis ſpeculo recte utatur.

157. THEOREMA III. *Imago objecti ad ſuperficiem ſpeculi plani paralleli videtur in ſpeculo tantum dimidium ſpatii illius occupare, quod objectum occupat.*

DEMONSTRATIO. Sit AB (fig. 15) dimenſio quævis alicujus objecti ad ſpeculum IG paralleli; ſit *ab* imago de AB. E puncto quolibet P in AB accepto ducantur P*a*, P*b*, manifeſtum eſt, eſſe IE partem ſpeculi ab imagine *a b* occupatam: & quoniam IG ab AB, & *ab* æqualiter diſtat, pars IE debet eſſe dimidium de *ab*, vel AB.

158. SCHOLIUM. Ut itaque ſe quis integrum in ſpeculo verticaliter poſito videre poſſit, neceſſe eſt, ut ſpeculi altitudo & latitudo ſaltem ſit dimidia altitudinis & latitudinis ſpectatoris ſitu erecto conſiſtentis. Unde ſi quis in ſitu erecto non niſi partem ſui conſpicere poſſit, reliqua imagine ſub margine ſpeculi verticalis occultata, non plus videre unquam poterit, ſeu accedat, ſeu recedat a ſpeculo.

159. THEOREMA. IV. *Si ſpeculum circa axem ſuum moveatur, motus angularis imaginis eſt duplus motus angularis ſpeculi.*

DEMONSTRATIO. Sit primo AB (fig. 17) ſitus ſpeculi, OE radius incidens, EF radius reflexus: acquirat dein ſpeculum circa axem, per E tranſeuntem, motum novum ſitum CD; erit EG radius reflexus reſpectu incidentis OE. Oſtendendum eſt, angulum FEG, quo motus angularis, ſeu quantitas, qua radius reflexus EG a priore ſitu ſuo EF diſceſſit, exprimitur, eſſe duplum anguli AEC, ſive motus angularis ſpeculi. Nam cathetus incidentiæ ſemper eſt in medio inter radium incidentem, & reflexum; & quia ad ſpeculum eſt normalis, eundem habet motum angularem cum ſpeculo. Quod ſi itaque ſpeculum motu angulari accedat verſus radium incidentem, cathetus incidentiæ ab hoc radio tantundem removetur; & ſimul eadem quantitate radius reflexus a catheto recedere debet, ut inter radium incidentem, & reflexum media maneat. Quare peracto hoc motu radius incidens a reflexo dupla quantitate motus angularis ſpeculi receſſit.

160. SCHOLIUM. Dum ſpeculum arcum quadrantis deſcribit, radius reflexus integrum ſemicirculum percurrit. Atque ob hanc cauſam imago reflexa ſolis in ſpeculis tanta celeritate moveri poteſt. Similiter imago ſolis e ſuperficie aquæ fere ſtagnantis reflexa videtur admodum agitata, præcipue ſi in majore a puncto incidentiæ diſtantia excepta fuerit &c.

161. THEO-

161. THEOREMA V. *Si ſpeculi vitrei ſuperficies poſtica ſtanno ſit obducta, duplicem ejusdem objecti imaginem ſpeculum exhibet: alteram vicinioremque & debilem; remotiorem alteram & vivaciorem: diſtantia autem utriusque imaginis æquatur duplæ vitri craſſitiei.*

Phænomeni cauſa ea eſt, quod ipſa anterior ſpeculi ſuperficies polita & ſolida ſpeculi vicem agat, omnes eos radios, qui vitrum non penetrant, reflectens, ſicque debilem quamdam objecti imaginem formans, quæ eo videtur clarius, quo magis oblique aſpicitur: ſi quis enim perpendiculariter eam intueatur, alteri vivaciori a poſtica ſpeculi ſuperficie, quæ ſtanno obducta eſt, effformatæ directe incumbit, atque cum ea confundirur. Quod ſi diſtantia objecti a ſuperficie anteriore ſpeculi ſit $= d$, craſſities vitri $= e$; erit diſtantia objecti ab imagine vivaciore (153.) $= 2d + 2e$; at diſtantia ejusdem ab imagine debiliore ſolummodo $= 2d$.

162. THEOREMA VI. *Quiscunque ſit ſpeculorum planorum in eodem plano collocatorum numerus, unica tantum ejusdem objecti imago effformari poteſt.*

Nempe omnia tunc ſpecula unius vicem agunt; & quoniam imago ſemper apparet in catheto incidentiæ ab objecto demiſſa, ac nonniſi unica perpendicularis ex eodem puncto ad idem planum duci poteſt (Elem. 634), una etiam tantum imago effformabitur.

163. THEOREMA VII. *Si oculus* I (fig. 16) *conſtituatur intra angulum quemvis* A B C, *a duobus ſpeculis planis* A B, B C *comprehenſum; tot videbit imagines objecti* O *intra eundem angulum poſiti, quot perpendicula ab eodem objecto, & ſingulis ejus imaginibus in quodvis ſpeculum intra angulum* B *duci poſſunt.*

DEMONSTRATIO. *Primo.* Demiſſa ab objecto O in ſpeculum B C catheto O D, factaque N D = N O, erit punctum D locus unius imaginis. Nam ducta ex oculo I recta I D, & per *g* (ubi ea occurrit ſpeculo) altera *g* O, erit *g* O radius incidens, ejusque reflexus I *g*, per quem oculus imaginem in D videt, ob triangula D *g* N, O *g* N æqualia, adeoque O *g* N = D *g* N = B *g* I.

Secundo. Si e puncto D demittatur in ſpeculum A B perpendicularis D E, fiatque *k* E = *k* D, erit punctum E locus alterius imaginis, reſpectu cujus imago in D vicem objecti ſubit. Etenim quia O N = N D, & triangulia O N *f*, D N *f* itidem æqualia, radius incidens O *f* reflectitur in *fi*; & ob triangula rectangula D *ki*, E *ki* pariter æqualia, radius *fi* in *i* I reflectitur, adeoque ad oculum in I pervenit.

Tertio. E puncto E in ſpeculum B C demiſſa catheto E Q, ſumptaque Q F = E Q, obtinetur locus F tertiæ imaginis, cujus objectum eſt imago altera in E. Nam ob æqualitatem triangulorum rectangu-

ſtangulorum OdN, NDd; Drk, rkE; FQb, bQE, manifeſtum eſt, radium incidentem Od reflecti in dr, tum in rb, denique in bI, ubi ad oculum pertingit.

Quarto. Si a puncto F ducatur perpendicularis ad ſpeculum AB, reperietur, quod jam extra ſpeculum in FG cadat, atque adeo non poſſit amplius eſſe cathetus incidentiæ, nec imago.

164. Simili ratione oſtendetur, eſſe in H imaginem objecti O, quæ per radium Ih, ex incidente Oh reflexum, videatur; eſſe imaginem alteram in K, quæ cernatur radio cI, reflexo ex ct, reſpectu cujus incidens eſt Ot; eſſe tertiam in L, viſam per radium incidentem Ol, & primo in la poſtea in ak, denique in kI reflexum. Tandem non poſſe eſſe plures imagines, perpendiculo LM a poſtrema imagine demiſſo jam extra ſpeculum cadente.

165. COROLL. I. Ex ipſa conſtructione facile apparet, *imaginem primam videri per radium ſemel reflexum, ſecundam per bis, tertiam per ter reflexum &c.*

166. COROLL. II. *Diſtantia imaginis cujusvis ab oculo æquatur ſummæ ex radio incidente, & reflexis, per quos videtur.* In exemplo $IF = Od + dr + rb + bI$. Nam $IF = Ib + bF$; & $bF = bE = br + rE$; item $rE = rD = rd + dD$; denique $dD = dO$: ergo $IF = Ib + br + rd + dO$. Atque hinc quo magis multiplicatur imago, eo longius diſtat.

167. COROLL. III. *Prima imago vivacior eſt quam ſecunda; hæc, quam tertia, & ſic deinceps;* tum quod intenſitas luminis ſemper decreſcat tota ea via, quam radii incidentes & reflexi conficiunt, cum etiam quod ingens radiorum numerus in ſingulis reflexionicus pereat.

168. COROLL. IV. *Quo major eſt angulus a ſpeculis comprehenſus, eo minor eſt numerus imaginum, quæ effingi poſſunt.* Cum enim catheti incidentiæ eodem motu angulari a ſeſe invicem recedant, quo ipſa ſpecula, ſemper eæ vertici anguli a ſpeculis intercepti fiunt propiores tandemque extrorſum cadunt, ubi non amplius eſt locus imagini. Atque hinc *quo angulus duorum ſpeculorum magis augetur, eo imagines ad verticem illius propius accedunt, ibique confunduntur inter ſe, ac tandem ſub illo ſeſe occultantes diſparent;* ita ut quando angulus is fit rectus, nequeant eſſe plures, quam duæ imagines; dum vero fit infinite obtuſus, unica exhiberi poſſit, quoniam numerus imaginum dependet ſemper (162) a numero perpendiculorum, quæ tum ab objecto, tum ab ejus imaginibus in utrumvis ſpeculum cadere poſſunt.

169. COROLL. V. *Si duo ſpecula ſint inter ſe parallela, atque oculus cum objecto in eadem ad ſpeculorum planum perpendiculari conſtituatur, infinitæ fiunt objecti imagines,* quæ tamen ſemper remotiores apparent, itaque fiunt debiles, ut paullo poſt haud amplius percipi poſſint.

AR-

ARTICULUS IV.

De ſpeculis Cylindricis, Conicis &c.

170. Specula cylindrica, conica, prismatica, & pyramidalia vix alium uſum habent, quam ut ſpectatorem oblectent, dum vel objectorum figuram deformem exhibent, vel imagines, quæ ex induſtria deformatæ ſunt, ſuis objectis conſimiles repræſentant.

171. Quoniam ſpecula prismatica, & pyramidalia nil aliud ſunt, quam plana verticalia vel inclinata, opus non eſt, ut de iis in particulari agamus. At cylindrica conſideranda ſunt tanquam collectio ſpeculorum, quæ tam e planis verticalibus, quam e ſphæricis participant; & conica, velut quæ partim plana inclinata, partim ſphærica ſint; ita, ut compoſitis inter ſe affectionibus ſpeculorum planorum, & ſphæricorum, facile ſit rationes invenire, cur id genus ſpecula imagines objectorum regulares deformes reddant, & viciſſim.

172. In exemplo, ſi objectum figura debita præditum ſitu verticali collocetur ante ſpeculum cylindricum, itidem vertica-liter erectum, manifeſtum eſt, dimenſiones verticales objecti haud poſſe deformari, quæcunque ſit ejus a ſpeculo diſtantia, quippe cum eæ objiciantur ſpeculis planis & verticalibus; at vero dimenſiones horizontales debere figuram ſuam amittere, prout ea plus minusve a concentrica cum ſpeculo abeſt, atque diſtantiarum majus eſt diſcrimen (152.); etenim dimenſiones iſtæ velut in totidem ſpecula ſphærica radiant. Cum itaque ejusdem objecti partium aliarum imagines in ſpeculo cylindrico recte exhibeantur, aliarum autem figuræ deformentur, omnium collectio imaginem admodum diſtortam, in qua objectum vix dignoſcas, repræſentat.

173. En autem methodum in plano delineandi imaginem deformatam, ut in ſpeculo cylindrico (cujus radius datur) in ejusdem plani loco certo verticaliter poſito, e certa oculi diſtantia viſa, recta, & objecto ſuo conformis, appareat.

Pingatur in plano ſeparato objectum in ſpeculo exhibendum vera dimenſionum omnium ſervata proportione, attamen ne maxima ejus latitudo major ſit chorda arcus 130, vel 140 graduum ſpeculi cylindrici. Hæc imago parallelogrammo rectangulo (fig. 18) includitur, quod *craticulam prototypi* dicere licet. Hoc parallelogrammum in plura minora quadrata aut rectangula parallelogramma dividitur, ut imago hac ratione in plures partes diſpeſcatur. Dein in plano dato deſignetur locus, in quo collocanda eſt ſpeculi cy-

lindrici baſis, portio nempe circuli F′TK′ (fig. 19.) cujus radius æqualis radio baſis cylindri; applicetur huic chorda F′K′, æqualis lateri FK craticulæ prototypi, pedi imaginis reſpondenti, atque in totidem partes dividatur, ac ipſum latus FK. Erigatur in puncto biſectionis chordæ H perpendicularis HO, uſque ad punctum O producenda, ſupra quod oculus conſtituendus eſt. Agantur ex O per puncta diviſionum chordæ rectæ indefinitæ OA′, Og′, Oh′, Oi′, Ok′, atque ſuper una ex iſtis, v. g. OA′ erigatur perpendicularis OV æqualis altitudini oculi ſupra planum. In eadem recta OA′ ex puncto F′, ubi occurrit chordæ K′F′, erigatur altera perpendicularis F′A, æqualis lateri alteri FA craticulæ prototypi, & in totidem partes ſecetur. Ex puncto V ducantur per puncta diviſionum rectæ F′A lineæ VF′, VE′, VD′, VC′, VB′, VA′, & ubi eæ rectæ OA′ occurrunt in E′, D′, C′, B′, A′, fiant parallelæ ad K′F′, nempe E′e′, D′d′, C′c′, B′b′, A′k′; habebitur ex legibus Perſpectivæ trapezium K′F′A′k′ perſpectivum craticulæ prototypi AK, viſum ex eo puncto, in quo collocandus eſt oculus, ut objectum in cylindro cernat, hoc eſt, in altitudine OV ſupra punctum O.

Ex centro Q arcus F′TK′, ſuper quo pes cylindri collocandus eſt, per puncta incidentiæ F′, S, T, K′, in quibus rectæ (ſive radii) OF′, OG, OI, OK′ dicto arcui occurrunt, ducantur catheti incidentiæ QL′, QP, QR, QX, atque indefinitæ F′a, Sg, Ti, K′k, quæ faciant angulos aF′L = OF′L, gSP = OSP, iTR = OTR, & kK′X = OK′X, adeoque radii reflexi erunt (133). In has lineas, ſive radios reflexos, transferantur diviſiones rectarum correſpondentium trapezii perſpectivi, nempe rectarum F′A′, Sg′, Mh′, Ti′, K′k′, & per ſingula puncta hac ratione reperta ducantur curvæ, quæ parum aberunt ab arcubus circulorum concentricorum, communis centri H, ipſasque rectas Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, FK craticulæ prototypi repræſentant, quemadmodum ab F′a, G′g, H′h, I′i, K′k, rectæ FA, Gg, Hh, Ii, Ka ejusdem craticulæ exhibentur, ac denique a trapeziis mixtilineis parva quadrata vel rectangula craticulæ. Quod ſi itaque cylinder ſuper arcu F′TK′, & oculus in puncto jam determinato collocetur, in cylindro imago craticulæ prototypi recte exhibebitur. Unde ſi in trapezia mixtilinea partes in ſingulis correſpondentibus areolis craticulæ prototypi delineatæ transferantur, habebitur imago deformata, uti deſiderabatur.

CAPUT III.

CAPUT III.

Dioptrica.

ARTICULUS PRIMUS.

De Imaginibus, ſive focis ex ſimplici refractione.

174. PROBLEMA. *Datis objecto* O (fig. 20 & 21) *poſitione reſpectu ſuperficiei ſphæricæ refringentis* BAI *dati radii* AK, *& ratione ſinus anguli incidentiæ ad ſinum anguli refracti, invenire locum imaginis* P, *quæ per refractionem efformatur.*

Sit ratio data *p* ad *q*. Per objectum O & centrum K ducatur indefinita AO, quæ repræſentet axem ſphæræ per objectum O tranſeuntem: incidat radius OI infinite propinque ad axem OA: ducatur e centro K ad punctum incidentiæ I ſemidiameter, quæ erit cathetus incidentiæ. Ex eodem centro demittatur in radium incidentem, productum, ſi opus ſit, perpendicularis KG, quæ erit ſinus anguli incidentiæ OIN, ſive KIG: fiat ut *p* ad *q*, ita KG ad terminum quartum, quo tanquam radio centro K deſcribatur arcus, ad quem e puncto I ducta tangens, ſi producatur, ſecabit axem AO in puncto quæſito P. Si enim ad punctum contactus ducatur recta KH, patet, eam eſſe ſinum anguli KIP, qui conſequenter eſt angulus refractus ex radio incidente OI. Et quoniam manet eadem conſtructio pro omnibus radiis e puncto O infinite propinque ad A in ſuperficiem refringentem incidentibus, ſequitur, eos ita refringi, ut omnium directio ſit verſus P, in quo adeo focus eſt ſeu imago objecti.

175. Ut autem valor de AP analytice exprimatur, ſit AO, ſive OI = *d*, radius ſphæræ KI vel KA = $\mp r$ (adhibito $+r$, quando objectum eſt ex parte convexitatis (fig. 20); & $-r$, quando objectum eſt ex parte cavitatis (fig. 21)). Sit AP, ſive IP = *f*. Ex conſtructione præcedente eſt $p : q = KG : KH$; adeoque $KG = \frac{p \times KH}{q}$. Quia vero OI ſupponitur infinite propinqua ad OA, arcus AI pro recta ad axem OA perpendiculari haberi poteſt, ac propterea ſimilia ſunt triangula rectangula AOI, & OKG; item PAI & PKH. Et hinc $OK : OI = KG : AI = \frac{OI \times KG}{OK}$; item $KH : AI$ (ſive $\frac{OI \times KG}{OK}$) $= PK : PI$ (vel PA). Quare $PA = \frac{OI \times KG \times PK}{OK \times KH}$.

Et ſi ſubſtituantur valores literales, ut eruatur f, invenietur $f = \frac{dpr}{dp-q(d+r)} = \frac{dpr}{d(p-q)-rq}$, pro ſuperficiebus convexis; item $f = \frac{dpr}{d(q-p)-rq} = \frac{dpr}{q(d-r)-dp}$, pro ſuperficiebus concavis, quia in his r habet ſitum oppoſitum.

176. Quod ad accurationem harum formularum, & imagines, quæ per eas determinantur, attinet, eadem ſunt attendenda, quæ ſuperius (135) annotavimus. Quin theorema Num. 146. cum ſuis Corollariis huc etiam transferri debet; quod factum eſſe, impoſterum ſupponemus.

ARTICULUS II.

De motu imaginum reſpondente motui objectorum, quando lux ex aere in vitrum tranſit, & viciſſim.

Quoniam maxima utilitas, quam a Dioptrica expectare licet, eſt accurata cognitio legum, quas lumen obſervat, dum ex aere in vitrum, vel viciſſim, tranſit, ut conſpicillorum, teleſcopiorum, & microſcopiorum effectus rite percipiantur; exemplum hujus rei in applicatione duarum præcedentium formularum dabimus.

177. Quando radius ex aere tranſit in vitrum, eſt $p = 31$, & $q = 20$. Unde formulæ duæ præcedentis articuli ad has reducuntur, $f = \frac{31dr}{11d-20r}$ pro ſuperficiebus convexis; & $f = \frac{31dr}{-11d-20r}$ pro ſuperficiebus concavis.

178. Sint duo media indefinite extenſa, aer, & vitrum, utrumque in ſe homogeneum, & communi ſuperficie ſphærica alterum ab altero ſeparatum. Supponamus primo convexitatem obverti aeri, in quo collocatum objectum lucidum, exiguæ extenſionis, concipiatur in infinitum recedere, directione ad dictam ſuperficiem perpendiculari. Ope formulæ $f = \frac{31dr}{11d-20r}$, determinabuntur omnes motus imaginis hujus objecti, quemadmodum ſupra (Num. 140 & ſequentibus) de ſpeculis ſphæricis factum eſt, prout alii ſemper fuerint valores diſtantiæ d, quam exprimemus in partibus, quarum unitas ſit r.

I.a-

Itaque quamdiu d fuerit intra $d = \frac{1}{\infty} r$, & $d = \frac{20}{11} r$, erit f ſemper quantitas negativa, creſcente ejus valore in infinitum, & imago extra vitrum ſive ad eandem cum objecto partem apparebit, quia ſcilicet in formulæ calculo ponebatur f poſitiva, qua deſignabatur diſtantia ſuperficiei refringentis ab imagine ultra eam ſuperficiem reſpectu objecti exiſtente: præterea imago ſemper erit erecta (149), & a ſuperficie refringente in infinitum recedet, ejus locum determinante concurſu directionis radiorum, quam in ingreſſu in vitrum acquiſiverunt, minus ſemper divergentium, donec paralleli evadant exiſtente $d = \frac{20}{11} r$. Ab hoc valore $d = \frac{20}{11} r$ uſque $d = \infty r$, f ſit poſitiva, imago exiſtit intra vitrum ſitu inverſo, & ex diſtantia infinita verſus ſuperficiem refringentem accedit uſque ad $\frac{31}{11} r$, radiis, qui vitrum transmittunt, a parallelismo magis ſemper convergentibus.

179. At vero ſi ſuperficiei communis, media diſterminantis, cavitas ſit obverſa aeri, formula $f = \frac{31 dr}{-11d - 20r}$ oſtendit, quod quæcunque fuerit objecti ab ea ſuperficie diſtantia, ſive valor de d, f ſit ſemper negativa; atque hinc imago ſemper eſt extra vitrum, & erecta. Dum autem d ab $\frac{1}{\infty} r$ usque ad ∞r creſcit, f etiam ab infinite parva usque ad $\frac{31}{11} r$ augetur, & imago a ſuperficie refringente usque ad diſtantiam $\frac{31}{11} r$ recedit, radiis, qui vitrum ſubeunt, perpetuo quidem divergentibus, attamen ſemper minus.

180. Quod ſi objectum intra vitrum exiſtere, illicque moveri ſupponeretur a ſuperficie media ſeparante in infinitum, tum vero ſumendum foret $p = 20$, & $q = 31$, atque formula pro ſuperficie convexa in hanc abiret $f = \frac{20 dr}{-11d - 31r}$; pro concava autem $f = \frac{20 dr}{11d - 31r}$.

Unde ſi objectum ponatur primo in ſuperficie convexa, calculo & ratiocinio priori ſimili clarum fiet, quod objecto in infinitum recedente imago erecta intra vitrum maneat, a ſuperficie communi ad diſtantiam $\frac{20}{11} r$ removenda, radiis, qui e vitro in aerem exeunt, ſemper minus divergentibus.

181. Si denique objectum in ſuperficie concava collocetur, e formula $f = \frac{20\,dr}{11d - 31r}$ deducetur, f ſemper fore negativam, quiscunque ſit valor de d, incipiendo a $d = \frac{1}{\infty} r$ usque ad $d = \frac{31}{11} r$: atque hinc imago habebit ſitum erectum intra vitrum, & a ſuperficie in infinitum recedet, radiis qui in aerem emergunt, ſemper minus divergentibus, donec paralleli fiant. Verum a $d = \frac{31}{11} r$ usque ad $d = \infty r$, fiet f poſitiva, imago invertetur, & in aere verſus ſuperficiem refringentem ad diſtantiam $\frac{20}{11} r$ accedet, radiique in aere ſemper magis convergent.

Eodem prorſus modo, ut ex hoc exemplo liquet, inveſtigari poterit via imaginis alicujus objecti in aliis mediis refringentibus, uti in aere & aqua, vel vitro & aqua.

ARTICULUS III.

De imaginibus, quæ per duplicem refractionem efformantur.

In vitris, quorum uſus eſt, plerumque duplex conſideranda eſt refractio, altera in ingreſſu radii in vitrum; in egreſſu altera.

182. PROBLEMA I. *Datis dimenſionibus lentis vitreæ cujuscunque* AB (fig. 22). *poſitione objecti* O *in communi axe utriusque ſuperficiei ſphæricæ lentis, quarum centra ſunt in* C & K, *invenire punctum axis* E, *in quo radius* OI *axi* AO *infinite propinque incidens, poſt duplicem refractionem, alteram in* I, *alteram in* T, *eundem ſecat.*

RESOLUTIO. Sit $OA = d$, $CB = R$, $KA = r$, $FB = x$, $PB = z$; ex inſpectione ſchematis patet, eſſe P punctum axis, quo dirigitur radius incidens OI poſt primam refractionem in I; ſit AB, quæ vitri craſſitiem exhibet, $= e$; & ratio ſinus anguli incidentiæ ad ſinum anguli refractionis in ingreſſu radii in lentem, ut p ad q; in egreſſu ut q ad p. Sit denique $CD = m$, $KG = n$. Liquet porro ex ipſa figura, eſſe $p : q = KG$ (ſive n): $KH = \frac{nq}{p}$; & $q : p = CD$ (ſeu m): $CE = \frac{mp}{q}$.

His poſitis, ob triangula rectangula OAI, OKG ſimilia, eſt $OK : OA = GK : AI$, ſive $d + r : d = n : AI = \frac{dn}{d+r}$; &

quia

quia triangula PAI, PKH ſimilia quoque ſunt, habetur PA $(z+e)$: PH$(z+e-r)$ = AI $\left(\frac{dn}{d+r}\right)$: KH $\left(\frac{nq}{p}\right)$; unde oritur æquatio $\frac{dnz+den-dnr}{d+r} = \frac{nqz+enq}{p}$, e qua invenietur valor $z = \frac{deq+eqr+dpr-dep}{dp-dq-pr}$. Dein e triangulorum PCD, PBT ſimilitudine eſt PD (ſeu $z+R$): PB (ſive z) = CD (vel m): BT = $\frac{mz}{z+R}$. Denique triangula FCE, FBT itidem ſimilia ſuppeditant hanc analogiam FC (id eſt $x+R$): FB (ſeu x) = CE $\left(\text{ſive } \frac{pm}{q}\right)$: BT $\left(\text{vel } \frac{mz}{z+R}\right)$, e qua facta æquatione, obtinetur alter valor de $z = \frac{pRx}{qx+qR-px}$; hi duo valores, ut reperiatur x, inter ſe comparentur, & factis reductionibus neceſſariis tandem obtinebitur $x = \frac{dpqRr+deqqR-depqR+eqqR}{dppR-dpqR-pqrR-deqq-dpqr+2depq-depp+dppr-eqqr+epqr}$.

183. Hæc æquatio generalis ad multo ſimpliciorem expreſſionem in caſibus particularibus reducitur. Etenim ſi lens ſupponatur vitrea, eſt $p = 31$, $q = 20$, & formula prior in hanc mutatur $x = \frac{620drR-220deR+400erR}{341dR+341dr-620rR-121de+220er}$. Et ſi ponatur $e = 0$, ſive vitri craſſities negligatur, habetur $x = \frac{620drR}{341dR+341dr-620rR} = \frac{20drR}{11dR+11dr-20rR}$. Denique ſi aſſumatur $r = R$, ſive ſi utraque ſuperficies ſphærica ſupponatur ejusdem radii, fiet $x = \frac{10dr}{11d-10r}$.

184. OBSERVA. I. Dato arcu AI, inter punctum axis utrique ſuperficiei ſphæricæ communis A, & punctum I (in quod oblique incidit radius OI, e puncto O ejusdem axis emiſſus) intercepto, ope trigonometriæ planæ inveniri poteſt verum punctum F, in quo radius OI poſt duplicem refractionem axi occurrit. Nam in triangulo OKI nota ſunt OK, KI, & angulus AKI, unde reperitur IO, & angulus KIO cujus complementum eſt KIG Porro in triangulo rectangulo IKG habetur IK cum angulo KIG, & hinc obtinebitur KG. Fiat tum $p : q = KG : KH$, & in triangulo rectangulo KIH invenietur angulus KIH, habitis nempe KI & KH. I. triangulo KIP datur jam IK & anguli IKP, KIP; quare dabitur etiam latus KP cum angulo KPI. In triangulo

PCD,

PCD, rectangulo ad D, habetur PC = PK + KA + CB — AB, & angulus CPD, e quibus reperietur PCD, & CD. Fiat $q : p = CD : CE$. Tum in triangulo rectangulo CTD cognita erunt CT, & CD, e quibus reperietur angulus TCD. In triangulo CTE habitis CT & CE, angulus ETC invenitur, cujus complementum eſt CTF. Unde tandem in triangulo CTF, notis latere CT, & angulis CTF, FCT = PCD — TCD, reperitur CF, conſequenter BF = CF — CB.

Si objectum habeat diſtantiam infinitam, calculus paullo contractior erit: etenim cum in eo caſu fiat radius OI axi parallelus, anguli KIG = AKI, menſura eſt arcus datus AI.

185. OBSERVA. II. E calculo præcedente, imo ex ipſa conſtructione Geometrica, facile apparet, quod *dum radius* OI *ad aliquam diſtantiam a puncto* A *axis utrique ſuperficiei ſphæricæ communis incidit, curvitas arcus* AI *eum citius verſus axem inclinet.* E quo fit, ut punctum F, in quo axis a radio refracto ſecatur, eo propius ſit ad B, quo plures gradus arcus AI continet.

186. PROBLEMA II. *Datis dimenſionibus lentis cujusvis* AD (fig. 25) *cujus ſuperficies habent centra in* C & K, *poſitione objecti* O *extra axem* BK *ſed in eadem cum puncto axis* B *a lente diſtantia; invenire punctum* F, *in quo radii ab* O *emanantes poſt tranſitum per lentem concurrunt.*

RESOLUTIO Ducatur per O & centrum K recta OK, quæ erit axis ſuperficiei primæ ſphæricæ ALD; & omnes radii (174) ex O in hanc ſuperficiem (quæ per hypotheſin paucorum graduum eſt) incidentes concurrent in aliquo puncto P ejusdem axis, quod per formulam Num. 175 determinatur; quemadmodum etiam omnes radii e puncto B emiſſi uniuntur in *p*. Jam vero conſiderari poteſt punctum P tanquam objectum aliquod intra maſſam vitream poſitum, quod radios in ſuperficiem ATD emittat: itaque ducta recta PC per centrum C & punctum P, quæ erit axis hujus ſuperficiei, radii ex P incidentes ita refringi debent in hac ſuperficie, ut eorum directio tendat ad idem punctum F cis T ſitum (174), quod per formulam Num. 175 invenitur; quemadmodum punctum *p*, cum ſit prima imago objecti B per refractionem in ſuperficie ALD efformata, objecti vicem agit reſpectu ſuperficiei ATD, quæ ſecunda refractione efficit imaginem ipſius *p* in *f*, ſive imaginem ſecundam objecti B.

187. COROLL. I. Quod ſi craſſities vitri negligatur, & ſupponantur B & O æqualiter diſtare a lente, manifeſtum eſt, etiam puncta *p* & P habitura æqualem diſtantiam, utpote quæ reperiuntur ex eadem formula, & iisdem datis. Ob eandem rationem F quoque & *f* eodem ſpatio ſunt a vitro remota.

188 Co-

188. COROLL II. Quoniam quæ de puncto O diximus, omnibus punctis ſuperficiei objecti applicari poſſunt, liquet, quomodo imago integra alicujus objecti efformetur, cujus figura proxime ſimilis eſt ſuperficiei objecti, quæ in vitrum radiat.

189. COROLL. III. Si partes objecti magnam habeant extenſionem, vel ſi plura objecta ſint in eadem a vitro diſtantia, eorum imagines in magna portione ſphæræ, cujus centrum occupat vitrum, diſtincte depingi debent.

190. COROLL. IV. *Itaque ſufficit, ope formularum præcedentium quærere locum imaginis illius puncti, quod in axe vitri exiſtit, ut habeatur locus imaginis totius objecti.*

191. COROLL. V. Ex ipſa conſtructione quoque præcedente apparet, quod ſi tanta ſit diſtantia objecti O B, ut imago depingatur ultra ſemidiametrum ſuperficiei ſecundæ refringentis hæc imago habeat ſitum inverſum, hoc eſt ejus partes contrario ſitu appareant, quam habeant partes correſpondentes objecti.

192. Experientia docemur, campum, in quo imagines objectorum in lentes radiantium diſtincte depinguntur, eſſe ſatis amplum. Etenim ſi in camera obſcura (qualem N. 5. deſcripſimus) fiat appertura 2 vel 3 digitorum in diametro, atque in eam vitrum convexum inſeratur, in charta alba ad diſtantiam tum ſemidiametris convexitatis, cum etiam diſtantiæ objectorum proportionatam collocata videbuntur imagines inverſæ objectorum per foramen radiantium, quarum colores eo vivaciores apparebunt, quo objecta magis fuerint illuminata: eruntque hæ imagines admodum diſtinctæ, quamvis illæ præ ceteris, quarum objecta propius ad axem lentis ſunt poſita.

193. THEOREMA. *Si in vitro utrinque convexo, vel utrinque concavo, radii convexitatis vel concavitatis fuerint æquales; e radiis lucis a puncto O extra axem poſito* (fig. 23 & 24) *in vitrum incidentibus ille, qui per punctum I, medium craſſitiei vitri, tranſit, in egreſſu e vitro poſt duplicem refractionem acquirit directionem* T F *parallelam directioni* O L, *quam habuit ante ingreſſum.* Atque hic radius deinceps dicetur *radius principalis.*

DEMONSTRATIO. Ob arcus A L D, A T D eodem radio deſcriptos æquales, figura vitri conſiderari poteſt tanquam polygonum infinitorum laterum ſymmetrum, cujus partes in ſingulis diagonalibus oppoſitæ æquales ſunt, centro in I exiſtente. Unde radius lucis T L per I tranſiens utrinque in latera parallela & æqualia (quorum ſitus per tangentes G L, H T determinatur) incurrit; & propterea utrobique æqualem patietur refractionem, hoc eſt, angulus refractionis I L O debebit æqualis eſſe angulo refractionis I T F, atque adeo (Elem. 434) directiones M C, T F erunt parallelæ.

194. COROLL. I. *Si ponatur vitrum ex una parte planum, ex altera convexum vel concavum, radius principalis erit is, qui per ſupremum convexitatis vel cavitatis punctum vel vitrum ingreditur, quando convexitas aut concavitas obvertitur objecto; vel egreditur, dum planities objectum reſpicit.* Nam ſupremum ſuperficiei ſphæricæ punctum haberi poteſt pro plano infinite parvo, atque ſuperficiei planæ vitri paralelo.

195. COROLL. II. *Neglecta vitri craſſitie, radius principalis in eadem recta exit, qua ingreditur;* ſeu quod idem eſt, *radius oblique incidens, qui ad illud axis punctum dirigitur*, quod eſt medium craſſitiei vitri, in eadem recta transit per vitrum, quin patiatur refractionem.

ARTICULUS IV.

De motu & ſitu imaginum, quæ e duplici refractione oriuntur.

196. I. Si ſupponatur objectum exiguæ extenſionis in ipſa ſuperficie vitri utrinque æqualiter convexi, ubi communis utriusque ſuperficiei axis transit, collocari, dein ab eo in eodem axe producto in infinitum recedere; e formula $x = \frac{10\,dr}{11\,d - 10\,r}$ (183) liquet, imaginem hujus objecti ſemper fore in eodem axe: & quia in formula quantitas x eſt negativa, & valoribus omnibus de d, a $d = \frac{1}{\infty} r$ uſque ad $d = \frac{10}{11} r$, ſubſtitutis, creſcit; erit imago erecta, & ab initio in eodem loco cum objecto, poſtea verſus eandem partem a vitro (in quam objectum movetur) in infinitum recedet, radiis, qui e vitro exeunt, ſemper minus divergentibus, donec paralleli evadant. In omnibus aliis valoribus de d, incipiendo a $d = \frac{10}{11} r$ usque ad $d = \infty\, r$, quantitas x fit poſitiva, & decreſcit, imago habet ſitum inverſum ex parte altera objecti, & e diſtantia infinita redit verſus vitrum usque ad $\frac{10}{11} r$, radiis eam formantibus, dum e vitro egrediuntur, ab initio parallelis, tum ſemper magis convergentibus.

197. II. Si vitrum ſit plano-convexum, unus e radiis fit infinitus; ſit itaque $R = \infty$; formula $x = \frac{20\,drR}{11\,dR + 11\,dr - 20\,rR}$, mutatur in hanc $x = \frac{20\,dr}{11\,d - 20\,r}$. Quod ſi jam eædem fiant ſuppoſitiones, quæ Num. præcedente, diverſarum diſtantiarum objecti ab hoc vitro, reperietur motus imaginis fieri eadem ratione, niſi

quod

quod poſitis æqualibus valoribus de d, quantitas x ſemper ſit major, & imago non acquirat diſtantiam infinitam, niſi dum d ſumitur $= \frac{20}{11} r$.

198. OBSERVA. Dum vitrum eſt plano-convexum, quæri poteſt, an perinde ſit, ſive objecto ſuperficies plana obvertatur, ſive convexa? Ad quod reſpondendum, perinde id eſſe, ſi vitri craſſities inſuper habeatur. At ſi ad eam attenditur, imago magis diſtat a ſuperficie convexa, dum objecto ſuperficies plana obvertitur, quam diſtet a ſuperficie plana, dum convexa objectum reſpicit. Et ſiquidem objectum magnam habeat a vitro diſtantiam, hæc differentia eſt circiter $\frac{2}{9}$ craſſitiei vitri. Etenim ſi in formula $x = \frac{620drR - 220deR + 400erR}{341dR + 341dr - 620rR - 121de + 220er}$ (183) fiat $d = \infty$, & $r = \infty$, ut exprimatur ſuperficies plana A I (fig. 22) objecto obverſa, hæc formula reducitur ad hanc $x = \frac{620}{341} R$; at ſi ponatur $R = \infty$, ut denotetur, quod ſuperficies plana B T ſit ab objecto averſa; prior formula mutatur in hanc $x = \frac{620}{341} r - \frac{220}{341} e$. Uſus hujus obſervationis eſt in Teleſcopiis dioptricis, in quibus reticula, ſive micrometra applicantur, uti in ſequentibus videbimus. Ejusmodi teleſcopiorum vitra objectiva ſæpe ſunt plano-convexa; unde dum e tubis eximuntur, ut v. g. maculæ iis adhærentes detergantur, cura adhiberi debet, ut dum reponuntur, ſuperficies utravis parti, cui prius, obvertatur: hoc ſi negligeretur, fieri poſſet, ut ſi vitri craſſities $1\frac{1}{4}$ lineam excederet, fila reticuli ſeu micrometri, plus integra linea extra locum debitum conſtituerentur.

199. III. Si vitrum eſt ex utraque parte æqualiter concavum, radius ſuperficiei objecto obverſæ K A (fig. 22) cadit ad partem objecti O, ideoque ponendum $= -r$; & radius C B, qui prius ex parte objecti erat, venit ad partem oppoſitam, adeoque erit $= -R$. Hac ratione formula pro vitris utrinque æqualiter convexis etiam applicari poterit utrinque æqualiter concavis, fietque $x = -\frac{10drr}{11d + 10r}$; e qua ſimul apparet, quod ſi objectum primo collocetur in alterutra talis vitri ſuperficie in puncto, per quod communis axis tranſit, poſtea ab ea in infinitum recedat, ejus imago moveatur verſus eandem partem uſque ad diſtantiam $\frac{10}{11} r$ a ſuperficie in hoc axe ſumtam; quod ſemper ſit erecta; quod radii, a quibus depingitur, e vitro exeant ſemper minus divergentes. Nam va-

lor de x in hac formula eſt ſemper negativus, quæcunque quantitas pro d aſſumatur.

200. IV. Si vitrum ſit plano-concavum, formula erit $x = -\frac{20dr}{11d+20r}$; moto objecto erit ſimilis motus imaginis, ut in vitro utrinque concavo, niſi quod valor de x ſemper ſit major, & diſtantia maxima imaginis a vitro $= \frac{20}{11}r$.

201. Denique ſi vitrum ſit *Meniſcus*, hoc eſt, ex altera parte convexum, ex altera concavum, ut obtineatur formula ei competens, ſignum alterutrius radii mutandum eſt, exempli cauſa ponendum $-R$, loco $+R$ in formulis Num. 183; & neglecta vitri craſſitie obtinebitur $x = \frac{20drR}{11dR-11dr-20rR}$; quod ſi dein diverſi valores de d aſſumantur, invenietur motus imaginis. Verum hæc ſingillatim diſcutere ſuperſedemus, tum quod rarior ſit uſus ejusmodi vitrorum, tum quod plures occurrant caſus, quam nobis præfixa brevitas ferat. Ex eadem cauſa nihil adferimus de vitris concavis vel convexis utrinque, quorum concavitates vel convexitates diverſos habent radios.

202. OBSERVA. *In praxi ſupponi poteſt, objecti diſtantiam eſſe infinitam a vitro, quando radium ſphæræ millies vel decies millies excedit.* Sic ſi in formula $x = \frac{10dr}{11d-20r}$ ponatur $r = 10$ digit. & $d = 10000$, hoc eſt, d millies majus, quam r, reperietur $x = 9,102$ digit. Et ſi ponatur $d = \infty$, prodit $x = 9,091$ digit. Ex quo patet, differentiam diſtantiæ imaginis eſſe circiter $\frac{1}{100}$ dig. quando diſtantia objecti radium ſphæræ excedit millies, a diſtantia ejusdem, dum objectum infinite diſtat. *

CAPUT

* Si $d = 10000.$, $r = 10$; fit $x = 9,107+$; & ſi $d = \infty$, eſt $x = 9,091-$, unde differentia eſt $\frac{16}{1000}+$. Apparet tamen, quod nondum æquet $\frac{2}{100}$.

CAPUT IV.

De Viſione.

ARTICULUS I.

Deſcriptio oculi, & imaginum, quæ in eo depinguntur.

203. Oculus tribus tunicis veſtitur: prima & extima EDNNDE (fig. 26.) *cornea* dicitur, eſtque figuræ ſphæricæ, parte DED minoris ſphæræ ſegmento exiſtente, quam altera, atque laminæ tenuis corneæ inſtar pellucida. Altera PIIP *ſclerotica* appellatur, apertura ad P P prædita, quam pupillam nominant, quamque annulus niger, griſeus, vel cæruleſcens (iridem appellant) ambit: hic ſemper figuram circularem pupillæ conſervat, ſeu ea dilatetur, dum oculus ad locum obſcurum venit, ſeu contrahatur in majore luce. Neuter motus nobis non eſt voluntarius. Tertia *choroides* dicitur, eſtque textum villoſum, nigerrimo colore tinctum, nempe C B ſ B C, quæ adeo oculo ſpeciem cameræ obſcuræ conciliat, atque radios, quorum refractio inordinate fit, abſorbet. Choroidi infra pupillam lens quædam, ſeu *humor Cryſtallinus* connexus eſt C C. Ejus convexitas anterior minoris eſt radii, quam poſterior. Retinetur autem duobus muſculis B C, B C (ſive *ligamentis ciliaribus*), a quibus, dum poſcente caſu verſus B a C trahitur, minus convexus redditur. Fors etiam illud præſtant hi muſculi, ut eam antrorſum, retrorſumve moveant.

Fundo circa H H reticulum album & ſubtiliſſimum, quod *retinam* dicunt, inhæret, ac ſuper choroide ſeſe explicat. hæc retina nil aliud eſt, quam expenſio nervi optici, impreſſiones usque ad ſedem animæ transmittentis. * Spatio intra corneam & humorem cryſtallinum continetur liquor admodum limpidus, & clarus, cui iris innatat, ac *humor aqueus* vocatur; Intra humorem cryſtallinum vero & fundum oculi eſt alter, admodum quidem pellucidus, conſiſtentiæ tamem majoris, quam aqueus & mucilaginoſæ: dicitur *humor vitreus*.

204. Radii lucis oculum ſubeuntes ita in humore aqueo refringuntur, ut ſinus anguli incidentiæ ſit ad ſinum anguli refracti ut 5 ad 3: patiuntur quoque aliquam refractionem in ingreſſu &

* Phyſici non nulli choroidem tanquam immediatum viſus organum habent, quod experimentis conſtet, objecta ceſſare videri, oculo ita collocato, ut eorum imagines incidant in centrum faſcis N N e tenuiſſimis filamentis compoſiti, e quo retina incipit ſe ſupra choroidem expandere. *Nota Authoris.*

egreſſu ex humore cryſtallino, ratione dictorum ſinuum exiſtente in ingreſſu ex humore aqueo in cryſtallinum ut 13 ad 12; in egreſſu ex humore cryſtallino in vitreum ut 12 ad 13. His autem refractionibus efficitur, ut radii ex eodem objecti puncto emiſſi rurſus uniantur, & conſequenter ejus imaginem depingant, quæ objectum diſtincte exhibet, quando in ipſa retina efformatur, confuſe autem, ſi radii citius concurrant, quam attingant retinam, vel etiam quando punctum concurſus ultra retinam exiſtit.

205. Verum ut hæc non nihil clarius intelligantur, quodlibet ſuperficiei corporis punctum in omnem partem radios emittens, reſpectu pupillæ oculi conſiderari debet tanquam apex coni, cujus baſis eſt ipſa pupilla: per refractionem vero in oculo fit alter conus priori oppoſitus, cujus baſis eſt eadem pupilla, vertex autem in fundo oculi, ubi radiorum concurſu imago puncti illius, e quo dimanarunt, perceptibilis efformatur. Utrique huic cono axis eſt communis, qui ad ſenſum eſt linea recta (nam refractio, quæ in ingreſſu & egreſſu ex humore cryſtallino fit, hic conſiderari vix meretur): unde ſupponi poteſt, omnes radios, utrumque conum conſtituentes, cum axe communi congruere & hac ratione quodvis objecti punctum diſtincte depingi, quia ejus imago per radium, centrum pupillæ transeuntem, in fundo oculi formatur.

Hoc poſito, *Primo* ſi punctum viſibile ſit circa centrum ſuperficiei objecti, velut in R (fig. 26), alterum quodpiam Q ad partem dextram prioris, iſtud ſuam imaginem radio Q *q* in oculum transmittet, qui radium R *r*, prioris imaginem deferentem, in centro pupillæ interſecat: unde imago *q* depingetur in fundo oculi e parte ſiniſtra imaginis *r*, quæ punctum R repræſentat, atque ideo ſitus imaginum *q* & *r* contrarius eſt ſitui punctorum R & Q in ſuperficie objecti.

Secundo. Quoniam quivis faſcis vel conus luminoſus e quovis ſuperficiei puncto egreſſus reduci poteſt ad unicum radium, qui axem conſtituit; ſuperficies objecti ſit reſpectu oculi baſis pyramidis, cujus vertex eſt in centro pupillæ: & radii hanc pyramidem formantes e centro pupillæ in oculum producti alteram efficiunt in fundo oculi terminatam, cujus conſequenter baſis eſt imago tota objecti, quæ ſuis depicta coloribus ideam præſentis objecti, ejusque figuræ excitat, ut in prioribus jam diximus.

ARTICULUS II.

De Viſione Diſtincta.

De diverſis vitiis viſus, & remediis, quæ Dioptrica ſuppeditat.

206. Quoniam radii luminis ab aliquo puncto A emiſſi ſecum deferunt imaginem illius (71), atque poſt tranſitum per vitrum convexum in foco iterum uniuntur, manifeſtum eſt, quod ſive cis, ſive trans ſocum in tabula quapiam plana excipiantur, puncti quidem illius A imaginem exhibeant, verum tanto majorem, minuſque vivacem, quo major a foco fuerit tabulæ diſtantia. Ob eandem extenſionem imaginis puncti alterius B, priori A vicini, neceſſario fiet, ut imagines utriusque partem aliquam commiſceantur: & ſiquidem diverſi ſint coloris, imago e binis compoſita trium colorum apparere debebit, quia pars utrique imagini communis referet colorem e miſtione duorum ortum. E quo liquet, imaginem ita commiſtam ſuo objecto nec dimenſione, nec figura, nec colore, nec nitore fore ſimilem, ſed juſto majorem, atque confuſam. At ſi radii in ipſo foco excepti fuiſſent, utriusque puncti imago ſeparatim fuiſſet ſuo colore depicta. Atque hunc in modum viſio diſtincta, vel confuſa concipienda eſt. Viſio objecti tunc eſt diſtincta, quando lumen in ipſo concurſu radiorum retinam contingit, ſive quando apices conorum luminoſorum, qui e ſingulis objecti punctis egrediuntur (ſupponimus enim objectum eſſe ſufficienter illuminatum), in ipſa retina efformantur. At viſio confuſa eſt, dum lux ad retinam pervenit vel ante, vel poſt punctum concurſus.

207. Illud quoque jam diximus (174); imaginem vivacem & diſtinctam objecti, refractione radiorum in ſuperficie convexa productam, eſſe in axe per centrum ſuperficiei ſphæricæ & objectum tranſeunte; unde apparet, objecta diſtincte videri haud poſſe, niſi oculo verſus illa obverſo, hoc eſt, niſi recta per centrum oculi & pupillæ tranſiens verſus objecta dirigatur; quin non aliud punctum, ſi cum rigore loqui velimus, vere diſtincte cernitur præter illud, in quo ea recta terminatur.

208. Si objectum a ſuperficie ſphærica refringente convexa, cujus radius ſit conſtans, certo intervallo remotum ſit, dein ad eam immotam accedat, ejus imago a ſuperficie refringente recedit (179): unde ut imago in eodem loco perſtaret etiam admoto propius objecto, neceſſe foret, ut vel ipſa ſuperficies refringens a loco imaginis removeretur, vel radius convexitatis minueretur, prout major objecti vicinia exigit: quippe poſtremum ſi fieret, imaginis diſtantia (quæ juxta formulas Artic. II (179) ſemper eſt multiplum

tiplum radii ſuperficiei ſphæricæ) ratione magnitudinis novi radii habita major evaderet, quamvis in ſe prorſus eadem maneret. Atque hoc eſt, quod bonitatem viſus apud quosdam ſingularem conſtituit, quibus nempe ita conformatus eſt oculus, motusque partium adeo expeditus, ut radiis lucis ex eodem puncto emiſſis pupillam fere parallele ingredientibus (objecto ſcilicet ad magnam diſtantiam remoto (202)) ſocus accurate in ipſa retina efformetur; dum vero accedente objecto radii ex eodem puncto venientes jam ad ſenſum quoque divergunt, ita pro diverſo objecti intervallo poſſint componere oculum, ut imago nihilominus ſemper ſuper retina depingatur, ſeu deinde id efficiant humorem cryſtallinum verſus pupillam admovendo, ſeu augendo illius convexitatem, ſeu etiam corneam reddendo magis convexam, aut denique bina ex iſtis, aut omnia tria ſimul præſtent, ut in quavis diſtantia objecta diſtincte cernant, modo ea nec in ſe nimis magna ſit, nec 5, vel ſex digitis minor.

209. Verum ſi contingat oculi vitio (ſeu id e natura advenerit, ſeu contractum ſit mala aſſuetudine, ſeu alicunde infortunato acciderit) ut muſculis tum firmitas, tum ſeſe contrahendi, laxandique facultas ad novam oculo conciliandam figuram neceſſaria deſit, tum equidem objecta diſtincte videri non poterunt, niſi quæ conſtituta fuerint intra certos diſtantiæ limites, ampliores, arctioresve, pro diverſa oculi, ut imagines in rectinam incidant, figuram ſuam mutandi poteſtate. Exempli cauſa ſi humor cryſtallinus, aut etiam anterior corneæ pars, nimium ſint convexa, locus verus imaginum objectorum valde remotorum eſt humori cryſtallino admodum vicinus, adeoque intra hunc humorem & retinam ; unde non niſi confuſe apparere debent, & ut in majore diſtantia ſuper ipſa retina depingantur, neceſſe eſt, ut objecta prope admoveantur. Atque hoc illorum eſt vitium, qui vicina modo diſcernunt, & *Myopes* appellantur.

210. Ex oppoſito, ſi ſegmentum anterius corneæ, vel humor cryſtallinus, tam exiguam habeant convexitatem, ut objectorum multum diſtantium ſolummodo imagines in retinam incidant, radii ex objectis vicinis venientes trans retinam ſuum focum habent ſitum ; quare cum jam intercipiantur in retina ante concurſum, objecta confuſe exhibeant, eſt neceſſe ; quod vitium eorum eſt, qui remota tantum vident, & *Presbytæ* dicuntur, quales magnam partem ſunt ſenes, apud quos ipſa ætas humores deſiccat, humoris cryſtallini convexitatem minuit, facitque, ut anterior corneæ pars ſubſidat aliquantum.

211. Itaque Myopes objecta vicina ſolum diſtincte cernunt, ſive illa, e quibus emiſſi radii ſenſibiliter divergunt; & Presbytæ obje-

objecta remota tantum vident diſtincte, id eſt, ea, e quibus radii ad ſenſum paralleli veniunt; in ſequentibus enim videbimus, quod ſi accurate loquamur, ad viſionem diſtinctam neceſſarium ſit, ut radii tantillum divergant (323). Jam vero ex theoria vitrorum concavorum & convexorum patet, radios parallele incidentes in vitra concava (ſive qui e magna diſtantia veniunt) ex iisdem egredi divergentes, quia ſi concavitatis ſemidiametri utrinque ſint æquales, radii in exitu e vitro acquirunt talem directionem, ut verſus vitrum reducti concurrant in puncto intra vitrum & objectum ſito, quod a dimidio axis parum abeſt. Quare Myops, in cujus oculum radii hunc in modum divergentes incidunt, objectum illorum diſcernere poterit; atque id genus vitium ope vitri concavi corrigetur, objectis remotis diſtincte apparituris, ſi concavitas conformationi oculi proportionata fuerit. Simili argumento colligitur, a Presbytis objecta vicina diſtincte videri poſſe, ſi in foco vitri convexi conſtituantur, quod radios e foco divergentes ad parallelismum refringit.

212. Verum nec Myopes, nec Presbytæ defectum ullum ſentirent, ſi pupilla non tam late pateret. Si enim in oculum aditus per unicum tantum punctum foret, ut e ſingulis objecti punctis ſinguli tantum admitterentur radii, hi in ſingula, & ſeparata retinæ puncta inciderent, ideoque imaginem diſtinctam efformarent, attamen ob paucitatem radiorum admodum debilem. Et niſi hæc debilitas viſioni obeſſet, ſan promtum haberemus tam Myopibus, quam Presbytis remedium, ſcilicet tenuem & opacam laminam, exiguo foraminulo pertuſam: quamvis fatendum, reipſa quibusdam in caſibus eos hoc modo juvari.

213. Hinc etiam ſequitur, *objecta per admodum parvum foramen viſa debere diſtincte apparere, utcunque exigua eorum ſit ab oculo diſtantia.*

214. Evenit quandoque, ut apud eundem hominem oculus alter ſit recte conſtitutus, alter vitio, ſive myopum, ſive presbytarum, laboret. Tum vero ut talis objecta recte cernat, neceſſe eſt, ut oculum alterum, nulli defectui obnoxium, ea verſus dirigat, alterum vitioſum ab iisdem avertat, utpote non receperum niſi imaginem confuſam, quæ alterius imagini diſtinctæ officeret. Hæc alterna, jam hujus, jam alterius oculi diſtorſio *Strabiſmus* appellatur, iique dicuntur *Strabi*, qui hoc vitio laborant. *

* Quod ſi alter oculus ſit rite conſtitutus, alter presbytarum vitio ſubjectus, ſe'um vitioſus avertendus eſt ab objectis vicinis, a nullo vero objecto is, qui vitio non laborat; ſi vitium alterius oculi ſit myopum, & objecta ſint iuſto viciniora, oculus integer averti debet in hoc ſolo caſu. At ſi uterque oculus ſuo laboret vitio, alter myopum, presbytarum alter, tum vero alterna facienda eſt eorum diſtorſio, ut diverſa fuerit objectorum diſtantia.

ARTICULUS III.

De Viſione, quæ fit ope vitrorum, vel ſpeculorum.

215. Cum objecta extra nos poſita non aliter, niſi per imaginem in oculo depictam percipiamus, illud imprimis eſt manifeſtum, *quod ea videamus in directione radiorum, qua imaginem efformaturi oculum ingrediuntur*, quemadmodum jam ſuperius eſt dictum (58). Quod ſi itaque radii oculum non ſubeant, niſi poſt complures refractiones, reflexionesque, quibus prima eorum, quam ab objecto emiſſi habuerant, directio admodum mutata eſt, fieri nequit, ut objectum videamus in linea recta, inde ad noſtrum oculum ducta.

216. *Secundo.* Extra dubium quoque eſt, cum magnitudo apparens objecti, quacunque tandem ratione videatur, ſemper potiſſimum dependeat ab angulo ad oculum (77) qui a radiis ab extremis objecti punctis venientibus comprehenditur; ſi hic angulus ſive refractione, ſive reflexione reddatur major, minorve, quam citra eam, & nudo oculo objectum inſpiciente foret; aut (quod idem eſt) *ſi angulus inter duos radios ab extremis imaginis ultima refractione, vel reflexione efformatæ punctis ductos comprehenſus major ſit vel minor, quam qui fieret, ſi ab extremis objecti punctis radii ſine refractione aut reflexione ad oculum pervenirent, objectum auctum vel diminutum pro diverſa anguli magnitudine appariturum: atque adeo oculo ad imaginem hanc ultimo efformatam accedente, vel ab eo recedente, objectum creſcere, aut decreſcere videbitur, etiam tunc, quando acceſſu ad imaginem oculus ab objecto recedit, & receſſu ab imagine objecto reipſa vicinior fit*: eſt enim imago objecti vicaria, non niſi hujus ope videndi. Quod ſi autem *objectum, vel etiam objecti imago, talem ſitum reſpectu vitri cujusdam tenuiſſimi, aut ſpeculi obtineret, ut radii inde egreſſi, vel illuc tendentes, per refractionem reflexionemve evaderent paralleli, oculus in radiorum directione collocatus objectum, aut imaginem illius, videret ſemper ejusdem magnitudinis, utcunque ad vitrum vel ſpeculum accederet, vel ab eo recederet; eſſetque hæc magnitudo eadem, ac ſi oculus in loco vitri vel ſpeculi conſtitueretur.* Etenim ſit RS (fig. 27 & 28) ſemidiameter objecti vel imaginis ita reſpectu vitri CB ſitæ, ut radii e puncto R digreſſi (aut ad hoc punctum directi) paralleli inter ſe exeant; vitri craſſitie poſita infinite parva unus ex his radiis RC (ſcilicet principalis) ſine refractione tranſit (195). Sit porro radius SC e centro imaginis vel objecti emiſſus, qui cum axe vitri congruit: patet, oculo in C poſito, ubi eſt vitrum, objectum, vel imaginem SR, ſub angulo SCR appariturum; eodem vero in quovis axis puncto alio E conſtituto, modo illuc dirigatur radius e puncto R veniens (vel ad R tendens), angulum viſorium fore

CEB = SCR. Idem eveniet, oculo in ſoco vitri, vel ſpeculi collocato, in quod radii ex imagine vel objecto quopiam paralleli incidunt: quæcunque ſit imaginis vel objecti diſtantia a ſpeculo, ſemper ejusdem magnitudinis oculo videbitur.

217. Quod ad diſtantiam oculi a loco, in quo objecta eſſe apparent, ea non deſumitur a diſtantia vera oculi a loco imaginis per ultimam reflexionem vel refractionem factæ. Sed quoniam de intervallo apparente præcipue judicium ferimus ex idea, quam de eorum magnitudine acquirimus (74, 101), conſequens eſt, ut cum objecta per imagines refractione aut reflexione auctas vel diminutas videmus, ea ad noſtrum oculum acceſſiſſe, aut ab eo receſſiſſe exiſtimemus, prout ratio magnitudinis viſæ ad magnitudinem, quam aliunde ſcimus objectis eſſe, poſtulat. Jam vero cum ſuperficies corporis directe viſi ſit baſis pyramidis luminoſæ (23) cujus apex eſt in oculo, quando idem apex una, pluribusve reflexionibus, vel refractionibus fit magis obtuſus, objectum (quod ſemper videtur eſſe baſis pyramidis) hoc ipſo verſus oculum vel apicem novæ pyramidis admotum apparere debet. Oppoſitum continget, ſi apex pyramidis auctior evaſerit. Ex his ſequens conſtructio pro determinando loco apparente objectorum, quæ per vitra aut ſpecula conſpiciuntur, deduci poteſt. Sit R Q vera dimenſio objecti (fig. 29.); O locus oculi; O R axis pyramidis opticæ, qua objectum videtur; O T directio radii ab extimo puncto Q venientis poſt quotcunque refractiones vel reflexiones in ſuperficiebus ſphæricis, quarum axes omnes cadant in O R. Ducatur O*q* ad O R parallela, donec occurrat radio O T; erit punctum *q* locus apparens puncti objecti Q, ſive ultimæ illius imaginis; O*r* diſtantia apparens ab oculo; *qr* locus apparens ultimæ imaginis reflexione vel refractione factæ, quam oculus O videt.

218. Hinc porro facile explicatur, cur objecta per vitra convexa aucta, & viciniora; per concava imminuta & remotiora appareant.

219. Denique intelligitur, quod radiis ab objecto emanantibus ita reflexis vel refractis, ut imago a tergo ſpectatoris depingatur, aut corpus opacum quodpiam inter eam, & oculum interponatur; objectum nulla ratione videri poſſit, quamdiu oculus in eodem manet loco. Quod ſi vero radii ita inflexi ingrediantur oculum, ut imaginem non niſi cis, vel trans retinam efformare poſſint, objectum confuſe tantum videbitur.

220. Hæc omnia ut exemplo generali explicentur, ſit G R (fig. 30) axis quotcunque vitrorum A, B, C; Q R dimenſio objecti cujusvis; E locus oculi excipientis radium Q K I H E, egreſſum primum a puncto Q, dein refractione lentis A ad K facta verſus F

directum, verum denuo refractionem in vitro concavo ad I paſſum, & verſus *f* in egreſſu inflexum; tandem in transitu per novam lentem CH ad axis punctum E refractum, ubi in oculum incurrit. Patet *Primo*, cum ET ſit directio poſtrema radii, qua ad oculum pervenit, ductis *Qq* ad GR, & *qr* ad QR parallelis, locum apparentem ultimæ imaginis objecti QR eſſe *qr* (217). *Secundo*, diſtantiam apparentem oculi ab objecto eſſe E*r*. *Tertio*, magnitudinem apparentem eſſe ad magnitudinem veram objecti, ut ER ad E*r*, quia ſcilicet ratio angulorum *q*E*r*, QER (qui per hypotheſin ſunt valde exigui) eadem eſt (79). *Quarto*, ſitum objecti eſſe vel erectum vel inverſum, ut imago poſtrema cis vel trans centrum ultimi vitri vel ſpeculi reſpectu objecti vel prioris imaginis, quæ objecti vicem egit, ſita fuerit, quod inito calculo focorum pro ſingulis vitris determinatur. *Quinto*. Si rectæ, quæ medii puncti vitri diſtantiam ab extimo limbo metiuntur (qualis eſt CH) inſtar objecti alicujus conſiderentur, & earum ſitus apparens eadem ratione determinetur, qua N. 217 uſi ſumus, ſupponendo, quod per vitrum inter eas & oculum ſitum videantur, illa, quæ minimum angulum ad oculum ſubtendit, determinat angulum viſionis, hoc eſt, ſpatium maximum, quod trans omnia vitra videri poteſt.

Si modo vocibus, *refractio*, *lens* &c. ſubſtituantur *reflexio*, *ſpeculum* &c aut univerſim, *medium diverſum*, facile intelligitur, omnia, quæ modo attulimus, Catoptricæ cum Dioptrica communia eſſe.

CAPUT V.

De Teleſcopiis & Microſcopiis.

ARTICULUS I.

Notiones præviæ.

221. Illud univerſim in *Teleſcopio* (ſive tubo optico objectis diſſitis contemplandis deſtinato) & *Microſcopio* ſpectatur, ut *Primo* imaginem vivacem objecti, quod quis diſtincte videre cupit, exhibeat, obverſo illi (objecto nempe) vitro utrinque convexo, aut plano-convexo, aut etiam meniſco, vel ſpeculo concavo (quod propterea *vitrum*, vel *ſpeculum objectivum* appellatur). *Secundo* ut hanc imaginem nitidam, diſtinctamque videndam præbeat, imo auctam etiam ope alterius alicujus, pluriumve vitrorum, *quæ ocularia* dicuntur, quod ad eam partem collocentur, cui oculus eſt applicandus.

222. Duo

222. Duo itaque ſunt teleſcopiorum & microſcopiorum genera; alterum eorum, quæ ſolis vitris conſtant; alterum illorum, quæ tum ſpeculis, tum vitris ſunt inſtructa, ideoque *catadioptrica* vocantur.

223. *Campus* teleſcopii vel microſcopii dicitur totum illud ſpatium, quod oculus videre poteſt, ſi ita applicetur, ut microſcopium, vel teleſcopium totum ſuum effectum præſtare poſſit.

224. Quando deinceps *focum* ſimpliciter, & citra additum nominabimus, ſemper intelligemus locum concurſus radiorum refractorum, vel reflexorum, qui ab objecto ad diſtantiam infinitam remoto veniunt, ſive qui ex eodem objecti puncto digreſſi parallele incidunt. Idem eſt, ſi dicemus, vitrum, vel ſpeculum habere focum tot pedum vel digitorum.

225. Si detur vitrum, vel ſpeculum ſphæricum quodvis, longitudo foci experimentando determinari poteſt hunc in modum.

I. Si ſpeculum ſit cavum, & vitrum convexum, obvertatur ſoli, quæraturque illud punctum, in quo radii reflexi vel refracti, plano quopiam excepti, efficiunt circulum quam minimum, atque luce candidiſſima & vivaciſſima, materiamque combuſtioni aptam quam citiſſime incendunt. Vel vero tegatur ſpeculum, vel altera vitri ſuperficies, charta nigro colore tincta, & pluribus foraminulis acu factis pertuſa; tum quæratur diſtantia, in qua radii ſolis per hæc foramella ingreſſi rurſus uniuntur, atque unicum circulum candidum efformant. Vel denique obvertatur ſpeculum aut vitrum candelæ ardenti, & ad magnum intervallum remotæ, ut ſit ultra ſpeculi vel vitri centrum; quæratur diſtantia tum a candela, tum a ſpeculo vel vitro, in qua collocanda eſt tabula, ut imago candelæ inverſa, maxime diſtincta, quamque minima depingatur; utraque hac diſtantia habita, ope formulæ calculari poteſt radius concavitatis ſpeculi, vel convexitatis vitri, adeoque innoteſcet longitudo foci, quæ in ſpeculo eſt radii dimidia; in lente utrinque æqualiter convexa, ipſe fere radius; in vitro plano-convexo, dupla.

226. II. Si ſpeculum ſit convexum, vel vitrum concavum, tegatur rurſus ſpeculum, vel altera vitri ſuperficies charta nigra, foraminulis pluribus in circuli circumferentia exciſis; radii ſolis per ea transmiſſi, atque poſt refractionem vel reflexionem tabula excepti, divergent, totidemque maculas albas depingent, omnes in circuli eo majoris peripheria ſitas, quo tabula longius removetur: dum igitur diameter hujus circuli dupla erit illius, in quo foramina chartæ ſunt inciſa, tabulæ a ſpeculi vel vitri puncto medio diſtantia æquabitur longitudini foci quæſitæ.

227. Dum focus ſpeculi convexi quæritur, in tabula, qua radii reflexi excipiendi ſunt, exſcindendus eſt circulus paullo major illo, in cujus peripheria ſita ſunt foramella, quæ in charta ſpeculum tegente facta ſunt; ut ſcilicet lux ſolaris commode in eadem incidere poſſit.

ARTICULUS II.

De Teleſcopiis Dioptricis, ſive refringentibus.

228. Tres fere cenſentur Teleſcopiorum refringentium, ſeu ſpeculo reflectente carentium, ſpecies, figura, diſpoſitione, & numero vitrorum ocularium inter ſe diverſæ.

229. Prima eſt teleſcopii, quod *Batavum*, ſive *Hollandicum*, aut *Galilæanum* dicunt, prima quoque circiter annum 1609. reperta, atque quadraginta fere annis una adhibita. Hic tubus vitrum oculare habet unicum vel utrinque concavum, ut PQ (fig. 31), vel plano-concavum, intra objectivum convexum vel plano-convexum, ac ejus focum ita collocatum, ut axes utriusque in eandem rectam A*o*, & foci in idem punctum *o* coincidant.

230. Ex hac conſtructione patet *primo*, quod cum vitrum objectivum longe magis patere poſſit, quam pupilla oculi, longe quoque majorem radiorum copiam ex eodem objecti puncto emiſſorum excipiat, quam alias ad oculum perveniret. *Secundo*, quod radii ab objecto O admodum remoto paralleli (ut hic per AD, & duas utrinque parallelas exhibentur) in vitrum objectivum MN incidentes, ac ejus refractione ad punctum *o* convergentes, in egreſſu e vitro oculari rurſus fiant paralleli (197); & quia vitrum oculare prope *o* conſtitutum eſt, ubi eſt vertex coni radioſi per vitrum objectivum collecti, atque adeo radii admodum denſi; etiam in exitu e vitro iidem adhuc valde denſi eſſe debent. Unde *tertio* ſi poſt vitrum oculare incidant in oculum rite conformatum, vel alicujus presbytæ, (211) imaginem objecti fui eo vivaciorem depingent, quo faſcis lucidus ex oculari vitro egreſſus denſior eſt illo, qui in vitrum objectivum incidit, & quo vitri objectivi major eſt amplitudo, quam pupillæ.

231. Quod reliqua puncta objecti OB, velut B, extra axem teleſcopii A*o* ſita concernit, eodem modo patet, quod radii, hic per CD, eique utrinque parallelas deſignati, ex iis in vitrum objectivum paralleli veniant, dein refracti ad punctum *b*, puncto *o* vicinum (187), tendant, ac tandem e vitro oculari PQ ad ſenſum paral-

paralleli, & valde denſi egrediantur, ut in oculo nullo vitio laborante, vel presbytæ, imaginem admodum vivacem efforment ſui objecti B. Verum quia faſcis hic radioſus puncti B imaginem depingens in egreſſu ex oculari vitro divergit ab altero, qui imaginem puncti O exhibet, idem oculus utramque imaginem ſimul excipere nequit, niſi vel pupilla admodum diducatur, vel puncto F, ad quod radii P*c* reducti tendunt, ſit valde vicina. Ex quo infertur, *ope ejusmodi teleſcopii eo plures objecti partes ſimul videri poſſe, quo oculus vitro oculari propior, & ejus pupilla amplior fuerit.* Et quia pupilla non modo per ſe exigua eſt, ſed etiam nobis nolentibus contrahitur copioſiore luce incidente, conſequitur, *campum talis teleſcopii eo fore minorem, quo objectum lucidius, & longitudo foci vitri oculariſ fuerit major.* Denique quoniam natura lucis focum tam brevem, ac quis cupiat, non patitur; imo vero focos vitrorum ocularium eo longiores exigit, quo longiores ſunt foci vitrorum objectivorum, ut in ſequentibus videbimus (270), neceſſe eſt, *ut campus in his teleſcopiis ſit tanto minor, quanto major, eſt tubi longitudo.* Atque hoc incommodum fecit, ut uſus id genus teleſcopiorum pene ſit abolitus pro objectis admodum remotis, quæ tubos longiores requirunt; nec amplius, niſi valde brevia conficiantur, in quibus augmentum modicum exigitur, quæ vulgo *tubulos theatrales* appellant.

232. Ipſa quoque hæc conſtructio indicat, objectorum ſitum fore erectum; radii enim *c*, objecti extremum B exhibentes, infra axem A K poſitum, ad oculum directione *c*F veniunt, quæ producta infra axem deſcendit.

233. Si ſupponatur *objectum magis ſemper, magisque verſus vitrum objectivum accedere*, conſequens eſt (196), ut imago ſimili ratione longius removeatur; adeoque etiam *oculare, prolongato tubo, in majore diſtantia applicari debebit*, ut ejus focus ſemper cum imagine per objectivum depicta coincidat.

234. Myops vitrum oculare objectivo propius admovere debet, ut diſtincte videat. Hoc enim ſi fiat, radii, qui prius paralleli egrediebantur, fiunt divergentes. Nam imagine *bo* (ſi ea inſtar objecti conſideretur) recedente a foco vitri concavi, radii refracti, & verſus alteram partem producti minus divergunt, adeoque ex parte ipſius *bo*, ubi prius paralleli erant, jam divergere debent verſus oculum (199).

235. II. Altera teleſcopiorum ſpecies eorum eſt, quæ quod obſervationibus ſyderum ſint aptiſſima, ideoque ſola fere hunc in uſum conficiantur, *tubi aſtronomici* vocantur. Unica inſtructa ſunt lente oculari utrinque convexa (aut plano-convexa) P Q (fig. 32)

quæ

quæ ea ratione collocanda eſt, ut ejus focus *o* cum foco vitri objectivi M N inter utramque vitrum in axe communi congruat.

236. Hæc conſtructio oſtendit *primo*, radios ab objecti puncto O admodum remoto (& per hypotheſin in axe producto exiſtente) parallele incidentes (ac propterea per A D & utrinque parallelas exhibitos) ſeſe refractione vitri objectivi in ejus foco interſecare, illicque imaginem *o* puncti O efformare.

237. *Secundo.* Hanc imaginem vicem objecti in foco lentis ocularis P Q collocati agere, conſequenter radios ab ea in lentem ocularem emiſſos ita refringi (196) ut paralleli inde egrediantur, eo autem denſiores, quo focus ocularis brevior eſt foco vitri objectivi: & hinc in oculo presbytæ (211), vel nulli vitio obnoxio, novam efformari imaginem objecti O, tanto vivaciorem, quanto amplius eſt vitrum objectivum, ſive plus lucis admittit.

238. *Tertio.* Ab oculo in quacunque ab oculari vitro diſtantia, modo faſcis radiorum parallelorum in eum incurrat, æque bene imaginem videri, quam iidem radii in communi vitrorum foco depingunt.

239. *Quarto.* Per radios parallele ab objecti Q B extremo B venientes, ac per vitrum objectivum refractos, debere prope *o* efformari imaginem *b* puncti B (188); hinc autem incidentes in vitrum oculare, poſt refractionem inter ſe parallelos egredi, cumque axe eo propius ad hoc vitrum concurrere, quo major eſt ejus convexitas, ita ut hic concurſus in foco ejus F fiat. Unde ut oculus totam ſimul imaginem *ob* videat, neceſſe eſt, ut ad punctum F conſtituatur, communem nempe interſectionem omnium faſciculorum lucis ex omnibus imaginis *ob* vel objecti O B punctis venientium.

240. *Quinto* objectum O B videri inverſum, quia ejus imago *ob*, quæ in lentem ocularem radiat, jam habet ſitum oppoſitum ſitui objecti, & punctum illius *b* per radios divergentes ſupra axem refertur, exiſtente extremo objecti B infra axem.

241. *Sexto.* Amplitudinem campi hujus teleſcopi præcipue pendere a magnitudine ſpatii ad *ob*, quod in foco communi utriusque vitri eſſe cenſetur, cum oculus in F conſtitutus omnes objecti partes videre poſſit, quarum imagines in ocularis foco, aut huic valde vicinæ, depinguntur. Atque ob hoc commodum prioris generis teleſcopiis merito præfertur.

242. *Septimo.* Accedente magis objecto ad vitrum objectivum, imaginem ejus longius removeri (196); & hinc etiam vitrum oculare, prolongato tubo, majorem debere acquirere diſtantiam, ut imago ſemper in ejus foco perſtet. Quare per hujusmodi teleſcopia tam objecta diſſita, quam vicina recte exhibentur, modo competens utriusque vitri intervallum ſervetur.

243.

243. *Octavo*, ſi myopes hiſce utantur, lentem ocularem propius ad objectivam admoveri oportere, ſive ad ejus imaginem *ob*, ut hac intra ſocum ocularis conſtituta, radii ex oculari egreſſi divergant (196).

244. III. Tertium Teleſcopiorum genus ad contemplanda objecta terreſtria in uſu, a priore non differt, niſi quod duæ præterea addantur lentes oculares, ut imaginis *ob* ſitus inverſus erigatur. Ipſe figuræ 33 aſpectus conſtructionem docebit. Quatuor vitra MN, PQ, RS, TV habent axem communem *Af*. Focus cujusvis vitri coincidit cum foco binorum utrinque poſitorum, ſolentque ocularia ejusdem fere foci adhiberi. Sit OB objectum infinite diſſitum, & punctum ejus O in axe teleſcopii: radii inde paralleli in vitrum objectivum incidentes, per refractionem in ejus foco *o* imaginem puncti O efficiunt, e qua in oculare PQ incurrentes ad paralleliſmum inter ſe, & focum F refringuntur; hinc digreſſi in ſecundum oculare RS ad ejus focum ω convergunt, alteramque objecti O imaginem depingunt, unde tandem in tertium oculare TV venientes rurſus paralleli fiunt, ut oculo recte conſtituto, vel etiam presbytæ, excepti objectum ſuum vivace imagine exhibeant. Simili modo radii a puncto B ad vitrum objectivum paralleli venientes in ejus foco *b* prope *o* primam efformant imaginem (187); dein in vitro oculari PQ refracti, paralleli inter ſe axem eo propius ad PQ interſecant, quo focus hujus lentis eſt brevior. Hinc in RS delati, atque ad ejus focum inflexi ſecundam puncti B imaginem β conſtituunt, donec tandem ab ultima lente TV inter ſe paralleli ad ejus focum *f* refringantur, in quo conſtituendus eſt oculus, ut imaginem ωβ videat, uti ſuperius (239) diximus, quæ habet ſitum erectum, ſive eundem cum objecto OB.

245. Teleſcopia modo deſcripta, quæ per *quatuor vitrorum* numerum plerumque deſignantur, easdem, ut patet, proprietates generales habent, ac Aſtronomica. Sed ob quæ Aſtronomica his præſtant, & eorum in obſervationibus præfertur uſus, ſunt *primo*, quod tubus Aſtronomicus ampliorem habeat campum. *Secundo*, quod lentem ocularem minoris foci patiatur, ideoque majoris ſit augmenti. Utriusque rationes in ſequentibus videbimus. *Tertio*, quod brevior ſit. *Quarto*, quod in eo minus radiorum pereat, qui non niſi per duo vitra trajici debent.

ARTICULUS III.

De Teleſcopiis Catadioptricis.

246. Teleſcopii catadioptrici munus generatim eſt, faſces lucis ab objecto venientes a via detorquendo colligere, ut in

oppoſito ſpeculo concavo reflexi convergant, & imaginem ſui objecti in axe ſpeculi, vel pone eum, depingant, velut in F' (fig. 35). Situs hujus imaginis intra ſpeculum & objectum impedit, quo minus per unam, aut tres lentes oculares directe videri poſſit: ad hoc enim opus eſſet, ut ſpectator caput inter objectum, & imaginem interponeret, quo fieret, ut lumen nec ſufficiens, nec ſatis prope axem, in ſpeculum illabi poſſet.

247. Ad hoc incommodum tollendum, ſpecillum exiguum planum I H ad angulum 45 graduum cum axe inclinatum ita collocatur, ut apicem coni radioſi, in quo imago eſt, ad *o* reflectat; tum in recta *o*K, una, tresve lentes oculares applicantur, prout ſitus objecti inverſus, erectuſve exhiberi debet; quem in finem latus tubi ſpecula continentis M N perforatur.

248. Præcipuum in hoc teleſcopiorum genere, quod Newtonianum appellatur, commodum eſt, quod licet multo breviora ſint refringentibus, eundem tamen effectum præſtent. Cujus rei cauſa eſt, tum quod imago a ſpeculo objectivo formata ab eodem non amplius quarta axis parte abſit, ſi objectum infinite diſtet, quæ per vitrum æqualiter utrinque convexum in diſtantia ſemiaxis depingitur; tum etiam quod imago non intra ſpeculum objectivum & lentem ocularem ſit, ut in teleſcopiis dioptricis primi, ac ſecundi generis; maxime vero quod ſpeculum objectivum patiatur ocularia diverſorum focorum, imo breviſſimi. Ex quo fit, ut idem teleſcopium catadioptricum pluribus tubis dioptricis diverſæ longitudinis æquivaleat, cum hi effectum debitum præſtare nequeant, niſi ocularibus iis inſtructi ſint, quorum foci ad ſonos objectivorum rationes determinatas habeant, quarum rationum tamen valde arcti ſunt limites, ut deinceps videbimus.

249. Cum imago a ſpeculo objectivo recedat, objecto ad illud accedente (145), ut uſus ſit hujus teleſcopii, manifeſtum eſt, debere ſpecillum I H eſſe mobile, ut imago ſemper in focum ocularis incidat. Itaque etiam neceſſe eſt, ut moto intra tubum ſpecillo I H ſimul ſecundum latus tubi M N ipſum oculare in eandem partem moveatur, ut nempe ejus focus ſemper congruat cum apice coni radioſi a ſpecillo H I reflexi.

250. Patet præterea, myopes debere ſpecillum planum aliquantum ad ſpeculum objectivum admovere, ut imagine intra lentem ocularem & ejus focum conſtituta radii ita divergentes in corum oculum veniant, ut hujus conformatio ad viſionem diſtinctam poſtulat.

251. Alterius quoque formæ, paulloque magis compoſitæ, teleſcopia catadioptrica conſtruuntur, tam objectis terreſtribus, quam cæleſtibus apta, quæ Gregoriana appellant. En brevem deſcriptionem. Objecto ſpeculum ſphæricum concavum AB (fig. 36) opponitur, & paullo ultra focum F in ejus axe collocatur alterum ſpecillum multo minus itidem concavum CD, ſed foci brevioris, ita, ut utriusque axes congruant. Imago F intra hujus ſpecilli focum G, & centrum E poſita, ejus reſpectu vices objecti agit. Quare (143) in eodem axe ſecunda imago H efformabitur, eo longius ultra centrum E ſpecilli CD, quo prior F foco G vicinior eſt. Et quia ſpecillo CD ad imaginem F admoto propius, vel ab eadem remoto, imagini H diſtantia quævis tribui poteſt, ſolet ea tantillum intra ſpeculum AB in medio ad I foramine circulari præditum, conſtitui, ut per lentem ocularem PQ videri poſſit. Manifeſtum autem eſt, hanc imaginem apparituram ſitu erecto, cum reſpectu imaginis F, ſitum objecti invertentis, inverſa ſit.

252. Quando objectum eſt copioſo lumine illuſtratum, ut major fiat ſecunda imago, ea trans ſpeculum AB verſus O dirigi poteſt, & in O focus vitri ocularis PQ conſtitui, ut radii verſus O convergentes e vitro paralleli egrediantur, ac poſtea lente ultra O excepti iterum colligantur ad punctum, in quo oculus eſt collocandus.

253. Ex dictis conſtat, per ſpecillum parvum in utriusque hujus teleſcopii axe ſitum intercipi radios lucis parallelos, qui in medium ſpeculi objectivi inciderent. Unde nil refert, ſeu hoc ſpeculum in medio pertuſum ſit, ſeu integrum.

254. Incommoda his teleſcopiis annexa ſunt, quod modicum habeant campum; quod difficulter verſus objecta dirigantur; quod multis cautelis tum in conſtructione, tum in uſu eorum opus ſit; quod cum magni ſint pretii, damnum tamen facile accipiant.

ARTICULUS IV.

De Microſcopiis.

255. I. Microſcopiorum, quæ in uſu ſunt, prima ſpecies eſt ſimplex vitrum MN (fig. 34) vel utrinque, vel una ex parte convexum, quod *vitrum auctorium* generatim appellant. Itaque ſi objecti conſiderandi BO punctum O ad focum in axe collocetur, radii inde emiſſi e vitro paralleli egrediuntur, apti proinde, qui imaginem illius in oculo recte conſtituto, vel presbytæ,

in quavis diſtantia efforment, modo oculus in eorum directione reperiatur. Myops objectum paullo intra focum conſtituet, ut imaginem accurate depictam videat. Punctum B ejusdem objecti, axi valde vicinum, ut in lentis foco poſitum cenſeri adhuc poſſit, pariter emittet radios, qui refractione ad ſenſum paralleli fiant, eoque magis ad axem inclinati, quo convexitas lentis minoris ſphæræ fuerit, ſive foci brevioris. Quare ſi oculus prope *o*, ubi radius principalis B C axem ſecat (ideoque in valde parva a lente diſtantia) ponatur, objectum O B ſub angulo B *o* O tanto magis auctum videbitur, quanto minore intervallo ab oculo abeſt, quam ſoleat illud eſſe, in quo objecta alias diſtincte videre conſuevimus.

256. Exempli gratia, quia objecta mediocri viſu præditi non ſolent diſtincte videre nudo oculo, niſi ea 7, aut 8 circiter digitis diſtent, ſi hæc diſtantia recta *o* ∞ deſignetur, & ope lentis objectum diſtincte appareat, nemo ſibi facile perſuadebit, ejus diametrum B O eſſe oculo adeo vicinam, ut reipſa eſt; ſed eam circa ∞ exiſtere putabit, ideoque in ratione ∞β ad O B, ſive *o* ∞ ad *o* O auctam (79). E quo ſimul conficitur, *magnitudinem apparentem objecti per lentem viſi dependere ex parte ab ipſa oculi conformatione.*

257. II. Sed lente hac in re longe ſuperior eſt ſphærula vitrea, facile parabilis, ſi ad flammam ſpiritus vini ellychnio affuſi (ne admiſta fuligine opaca reddatur) exiguum vitri fruſtulum colliqueſcere ſinatur. Reſumpta enim formula N. 182, ac poſito $p = 3$, $q = 2$, fit $x = \frac{6drR + 4erR - 2deR}{3dR - 6rR - de + 3dr + 2er}$; quæ ut ſphæræ vitreæ accommodetur, ſumi debet $e = 2r$; $r = R$, & $d = \infty$; his ſubſtitutis habetur $x = \frac{1}{3}r$; hoc eſt, objecto in axe ſphæræ ad diſtantiam quartæ partis diametri collocato, radii prope axem in ſphæram incidentes, egrediuntur inter ſe paralleli; ergo diſtincte objectum videbitur, eoque magis auctum, quo oculo fuerit vicinius, & conſequenter quo minor fuerit ſphæræ diameter.

258. Vicem etiam microſcopii ſimplicis obire poteſt globulus vitreus cavus & aqua repletus, qui eundem fere præſtat effectum, quem ſphæra aquea, tum quod craſſities vitri exigua ſit, tum etiam quod ſuperficies utraque concentrica eodem modo refringat radios, ac ſi ſola aqua adeſſet. Verum quia lux minus refringitur in aqua, quam vitro, ratione ſinus anguli incidentiæ ad ſinum anguli refractionis in aqua exiſtente 4 ad 3 circiter, focus, in quo collocandum eſt objectum, ut radii in ſphæram incidentes refringantur ad paralleliſmum in egreſſu, diſtat a ſphæra ſemidiametro, ut facile invenitur e formula generali pro focis data (182), ſi fiat $p = 4$, $q = 3$, $r = R$, $e = 2r$, & $d = \infty$. E quo li-

quet,

quet, horum globulorum non esse tantum augmentum, quam eorum, qui e vitro solido funduntur.

259. Parari quoque potest lenticula mere aquea, si exiguum laminæ tenuis metallicæ foramellum gutta aquæ ope acus imposita repleatur, ne ejus limbis madefactis aqua convexitatem amittat. Major adhuc erit talis lenticulæ effectus, si in lamina $\frac{3}{4}$ lineæ circiter crassa utrinque cavitas sphærica exigua fiat, axe communi per oppositos utriusque vertices transeunte, & inæqualis radii, ita ut tenuissima laminæ pars vertices separet, quæ dein acus cuspide perforetur; repletur tum duplex hæc cavitas aquæ gutta.

260. III. Altera Microscopiorum species Telescopiis Astronomicis non absimilis est. Constat duabus lentibus convexis, quarum objectiva MN (fig. 37) est foci admodum brevis, extra quem paullum collocatur objectum OB, ut ejus imago *ob*, in aliqua distantia, & cum proportione aucta, efformetur (196): tum, ut distincte videri possit, focus lentis ocularis ad eundem cum hac imagine locum constituitur.

261. Ex hac constructione patet *primo*, *distantiam imaginis a lenticula objectiva magnas subire mutationes, dum intervallum inter eam, & objectum* O B *paullum mutatur* (196). Et quoniam difficillimum est, ut quis in distantia data, ac loco eodem objectum certo collocet; in usu hujus microscopii lens ocularis tamdiu versus objectivam admovenda est, vel ab ea retrahenda, donec imago objecti distinctissime depingatur; aut vero necesse est, ut in objecto ipso, vel toto microscopio motus, ut res postulat, quam lentissimus effici possit: id, quod pro diverso microscopii apparatu facilius, difficiliusve obtinetur. *Secundo* colligitur, *objectum debere eo majus apparere, quo ejus imago* o b *longius abest a vitro objectivo* M N; *& (cum postea per lentem ocularem videatur) quo oculo est propior, quam sit intervallum, ad quod objecta sine vitris distincte videre solemus. Tertio* manifestum est, *magnitudinem apparentem objecti debere mutari, quando hoc a lente objectiva recedit*; nam objecto recedente, ejus imago versus eandem accedit, ac simul minuitur.

262. IV. Quandoque fere circa medium inter lentem objectivam MN, & imaginem *ob*, altera ocularis interponitur, ut imago propius multo ad lentem objectivam formetur, adeoque tubus microscopii brevior adhiberi possit. Hac ratione simul campus microscopii amplior redditur, quemadmodum id patebit, si ipsa figura construatur, & quæ N. 220 adduximus, rite applicentur.

263. V. Denique fieri possunt microscopia catadioptrica, objecto inter focum & centrum speculi concavi constituto, ut imago ultra centrum efformata (143), ac lente oculari excepta distin-

ete videatur. Apud Smith extat etiam deſcriptio microſcopii e duobus ſpeculis ſphæricis compoſiti, concavo altero: altero convexo, utroque in medio foramine circulari prædito, ut lux liberum acceſſum habeat. Collocatur autem objectum inter centrum & focum ſpeculi concavi, a quo reflexi radii in convexum incidunt, unde denuo reflexi imaginem prope foramen ſpeculi concavi depingunt, ope lentis ocularis ſpectandam.

ARTICULUS V.

Animadverſiones generales in Teleſcopia & Microſcopia.

264. I. *Tangens anguli, ſub quo ſemidiameter objecti per primæ & ſecundæ ſpeciei teleſcopia dioptrica* (imo etiam tertiæ, ſi trium lentium ocularium ſit idem focus) *videtur, eſt ad tangentem anguli, ſub quo nudo oculo ſpectatur, ut longitudo foci vitri objectivi ad longitudinem foci ocularis*, neglecta ſcilicet vitrorum craſſitie.

Nam objecti extremitas altera B (fig. 31 & 32) per faſcem radiorum parallelorum F*c*; altera vero per faſcem *o* K repræſentatur: angulus igitur, ſub quo objectum per teleſcopium videtur, eſt ille, quem axes utriusque faſcis F*c*, & *o*K comprehendunt. Et quoniam imago *o b* in foco ocularis P Q exiſtit, radii e puncto *b* (quod tanquam objectum ab aliis ſeparatum & ſolitarium conſiderari poteſt) in vitrum oculare incidentes, ex eodem cum radio principali paralleli egredi debent (196); ergo angulus *c* F K = *b* K *c*. Sed angulus O D B, ſive huic æqualis *b* D *o* (quia radius B D ſine refractione per vitrum M N transit (195)) eſt ille, ſub quo oculus in D collocatus objectum ſine teleſcopio videret; quare angulus, ſub quo objectum per teleſcopium apparet, eſt ad angulum, ſub quo nudo oculo ſpectatur, ut *b* K *o* ad *b* D *o*. Eſt autem, ſumpto radio *b o*, in triangulo rectangulo *b* K *o*, *o*K cotangens anguli *b* K *o*; & in triangulo *b* D *o*, *o* D cotangens anguli *b* D *o*; ergo cotangentes horum angulorum ſunt ut *o*K ad *o*D; ergo (Elem. 737) tangentes eorundem ſunt reciproce ut *o*D ad *o*K.

265. COROLL. I. Quia magnitudines apparentes objectorum maxime dependent ab angulis opticis, ſub quibus eorum ſemidiametri videntur; ſequitur, *diametrum objecti per teleſcopium viſam eſſe ad eandem ut nudo oculo apparet, ſicut eſt longitudo foci vitri objectivi ad longitudinem foci vitri ocularis*; ſive, quod idem eſt, *magnitudines apparentes diametri ejusdem objecti per diverſa teleſcopia viſi eſſe inter ſe in ratione compoſita ex directa longitudinum focorum vitrorum objectivorum, & recipro a longitudinum focorum ocularium.*

266. Co-

266. COROLL. II. Et quoniam (79) diſtantiæ apparentes objectorum ſunt reciproce ut anguli optici, ſub quibus eorum ſemidiametri videntur; erit *diſtantia apparens objecti per tubum opticum ſpectati, ad ejusdem diſtantiam apparentem, ſi nudo oculo videatur; ut eſt longitudo foci vitri oculoris ad longitudinem foci lentis objectivæ.*

267. Quod hic de teleſcopiis dioptricis oſtendimus, verum etiam eſt de catadioptricis, & microſcopiis ſecundæ ſpeciei, quemadmodum patebit, ſi quod diximus, ad verbum applicetur ad figuram 35; modo literæ o', b', c', K', F', virgula notatæ ſubſtituantur literis o, b, c, K, F, & ſupponatur radius OD axi admodum vicinus, ut triangulum $o'b'$ D pro rectangulo haberi poſſit; dein dum applicatio ad microſcopia in figura 37 fit, loco *longitudo foci vitri objectivi*, poſitum intelligatur *diſtantia imaginis a lente objectiva.*

268. COROLL. III. *Ut objecta per teleſcopia quam maxime aucta apparerent, neceſſe foret, ut longitudo foci vitri objectivi eſſet admodum magna, & longitudo foci oculoris valde exigua.* Et propterea eo longiores adhibentur etiam tubi, quo objecta & minora ſunt, & magis diſſita. Verum figura ſphærica, quæ vitris tribuitur, & natura lucis faciunt, ut effectus, quem quis forte ſibi ſpondeat, expectatione ſit inferior. Rationes in ſequentibus dabimus.

269. II. Teleſcopia & microſcopia, quæ imaginem objecti in foco lentis oculoris ex altera reſpectu oculi parte efficiunt, illud habent commodi, quod omnes hujus imaginis dimenſiones menſurari poſſint ope filorum tenuiſſimorum, quæ per totum ſpatium, quod occupat, mobilia ſunt: ejusmodi fila ſumi poſſunt e folliculo bombycis; machina autem ad motum filorum efficiendum, ejusque quantitatem metiendam, conſtructa *micrometrum* dicitur. Hæc fila diſtinctiſſime videntur, vitro oculari eorum reſpectu vices microſcopii primæ ſpeciei obeunte; & tanto accuratius imaginis dimenſiones acquiruntur, quanto eadem majus augmentum a vitro oculari accipit, & ſimul quo fila exactius in eodem cum imagine plano fuerint conſtituta: reddimur vero de hoc certi, ſi filis & objecto immotis, oculus jam in hanc, jam in alteram partem moveatur, & nihilominus eadem objecti pars ad eandem partem fili ſemper videatur.

270. Quod ſi moto, ut dictum eſt, oculo advertatur, objectum non ad easdem filorum partes manere immotum, micrometrum *parallaxin* habere dicitur, qua voce ſignificamus, objectum apparere in diverſis locis, ut diverſa eſt oculi poſitio. Tollitur hic defectus, ſi margines reticuli, in quibus fila tenſa ſunt, vel ad vitrum objectivum, vel ad oculare propius admoveantur, prout

oculo

oculo recedente objectum vel attolli vel deprimi reſpectu filorum videtur.

271. *Micrometri uſus errori eſt obnoxius*, ſive, quod eodem recidit, error a parallaxi filorum pendens ſit eo minus ſenſibilis *quo minus eſt ſpatium, per quod fila moventur; quo minor eſt vitri objectivi apertura; & quo longior eſt focus ocularis.* Ut enim ſecure, & citra erroris periculum, micrometro utamur, neceſſe eſt, ut ejus fila accurate in eodem plano ſint poſita, in quod foci vitrorum objectivi & ocularis coincidunt: jam vero foci utriusque fiunt in ſuperficiebus ſphæricis (189) externe ſe tangentibus, quæ adeo cenſeri nequeunt in eodem ad ſenſum plano, niſi quatenus hoc ſpatium exiguum eſt, & utriusque ſuperficiei radius ſat magnus. In ſequentibus porro oſtendetur (279 & 298), imagines objectorum non formari in ejusdem ad ſenſum ſuperficie ſphæræ, niſi quando apertura vitri objectivi modica eſt.

272. III. Si ſervata eadem vitri objectivi, in eodem teleſcopio, apertura, diverſa ſucceſſive ocularia adhibeantur ad idem objectum contemplandum, hoc eo obſcurius apparet, quo oculare brevioris fuerit foci. Etenim faſciculi radiorum parallelorum omnes ſeſe interſecant in eo axis puncto, in quo collocandus eſt oculus, adeoque efformant conum aliquem, cujus baſis eſt vitrum oculare, apex in oculo: eſt vero hic eo magis obtuſus, quo focus ocularis eſt brevior; unde neceſſe eſt, ut radii magis a ſeſe invicem ſeparati, ac minus denſi, oculum ingrediantur, & conſequenter imaginem minus vivacem, licet majorem, depingant. Itaque *obſcuritas imaginum eſt in ratione reciproca duplicata longitudinum focorum vitrorum ocularium.* Nam cum eadem ſit luminis quantitas, manente per hypotheſin eadem vitri objectivi apertura; eo major eſt obſcuritas, quo minor eſt denſitas luminis; hæc vero eo eſt minor, quo ſpatium a lumine occupatum majus eſt, hoc eſt, quo areæ, in quibus imagines depinguntur, ſunt ampliores, & conſequenter (Elem. 608) quo diametrorum apparentium quadrata ſunt majora; igitur obſcuritas in teleſcopiis eſt directe ut quadrata diametrorum apparentium imaginum. Sunt autem (265) diametri apparentes in ratione compoſita ex directa longitudinum focorum vitrorum objectivorum, & reciproca longitudinum focorum ocularium; ergo longitudine foci vitri objectivi manente eadem, ſunt diametri apparentes imaginum in ratione reciproca longitudinum focorum ocularium: & hinc manente eodem vitro objectivo, obſcuritas imaginum eſt in ratione reciproca duplicata longitudinum focorum ocularium.

273. IV. Duo teleſcopia, vel duo microſcopia æqualis bonitatis in ſuo genere cenſentur, quando objecta eadem claritate, ſive eadem vivacitate luminis oſtendunt. Quod ſi jam vi-

tra

tra objectiva & ocularia in utroque ex materia æque bona elaborata ſupponantur, ſi eorum figura, & politura æqualis ſint perfectionis, erit *claritas objectorum in ratione compoſita ex directa duplicata diametrorum aperturæ vitrorum objectivorum, & reciproca duplicata numerorum, qui utriusque teleſcopii vel microſcopii augmentum exprimunt.* Sit claritas $= c$, diameter aperturæ $= d$, diſtantia vitri objectivi ab imagine $= a$, longitudo foci vitri ocularis $= b$, adeoque (265) ratio augmenti $\frac{a}{b}$; dico eſſe $c = \frac{b\,b\,d\,d}{a\,a}$. Nam areæ imaginum in retina depictarum, ſunt ut areæ, quas occupant imagines a vitro objectivo efformatæ; hæ vero ſunt (Elem. 608) ut quadrata diametrorum, adeoque (265) ut $\frac{a\,a}{b\,b}$: quare ſi areæ imaginum in retina factarum ſint eædem, earum claritas erit ut quantitas luminis per vitrorum objectivorum aperturas incidentis, ſive ut quadrata diametrorum aperturarum (Elem. 608); ergo quadratis augmenti iisdem exiſtentibus, claritas eſt in ratione duplicata diametrorum aperturæ, ſive $c = d\,d$. Verum ſi ponantur aperturæ objectivorum eædem, quantitates luminis eædem quoque ſunt, ideoque claritas imaginum eſt in ratione reciproca duplicata diametrorum earum, hoc eſt, $c = \frac{b\,b}{a\,a}$. Ergo ſi nec eædem ſint objectivorum aperturæ, nec eadem imaginum augmenta, earum claritas erit $c = \frac{b\,b\,d\,d}{a\,a}$.

274. V. Teleſcopia majora, quæ diametros objectorum octuagies vel centies majores exhibent, non poſſunt objecta terreſtria diſtincte repræſentare, ſed uſum habent ſolum in obſervatione ſyderum. Lumen enim ex objectis terreſtribus diffuſum, jam alias longe debilius, quam quod ex aſtris allabitur, nimium diſpergitur in tam amplis imaginibus, quas vitra objectiva talium teleſcopiorum efformant. Quin etiam radii ex objectis terreſtribus ad teleſcopia prope terræ ſuperficiem, eam veluti perſtringentes advehiunt: in progreſſu ubique fere magnam partem intercipiuntur, aut detorquentur ab occurrentibus craſſioribus particulis in atmoſphæra perpetuo aſcendentibus, & agitatis; unde imago tremula, & male terminata apparet. Poſtremum hoc incommodum experimur, ſi tempeſtate calida, vel vento vehementiore vapores humidos agitante, quamvis cælum ſudum alias & innube videatur, aſtra ſpectemus.

CAPUT VI.

De Obſtaculis, quæ in Conſtructione Teleſcopiorum & Microſcopiorum ſe produnt, & eorum perfectionem neceſſario minuunt.

275. Duplex obſtaculorum genus ſeſe offert in conſtructione cujusvis machinæ dioptricæ & catoptricæ: alterum a figura pendet, ſuperficiebus refringentibus, aut reflectentibus tribuenda, quæ vel plana eſt, vel ſphærica: ſaltem perquam difficile, & vix non phyſice impoſſibile eſt, ut iis alia accurate concilietur; alterum a reſolutione lucis in diverſæ naturæ radios, quando refringitur, vel reflectitur, provenit.

ARTICULUS I.

De Obſtaculis a figura ſphærica ſuperficierum pendentibus, & ratione iis occurrendi.

276. Ex calculo formularum, quas adhibuimus (134 & 182) ad determinandas longitudines focorum ſuperficierum ſphæricarum refringentium, & reflectentium, manifeſtum eſt, nos aſſumpſiſſe, curvaturam ab eo puncto, per quod axis tranſit, usque ad punctum incidentiæ radii ex objecto in eodem axe exiſtente oblique venientis, eſſe inſenſibilem. Hac ſtante hypotheſi formulæ oſtendunt, omnes radios ab eodem objecti puncto egreſſos, poſt reflexionem, vel refractionem, concurrere cum axe in uno eodemque puncto: ſed quoniam hæc hypotheſis geometrice accurata non eſt, nequit eſſe unicum punctum interſectionis omnium radiorum ab eodem objecto venientium cum axe, ſi in ſuperficie ſphærica reflectantur, vel refringantur; & hinc quod *focum*, ſeu locum imaginis vocavimus, reipſa non eſt niſi locus ille, in quo plurimi radii ſe interſecant; reliquorum radiorum eo plures erunt interſectiones, quo ſuperficies reflectens, vel refringens plurium fuerit graduum: hujus rei exemplum & calculus N. 135 extat.

277. Cum quodvis interſectionis punctum ſit locus alicujus imaginis, eo magis ſenſibilis, quo plures radii concurrunt; ſequitur, quod *omnes ejusmodi imagines principali vicinæ eandem confuſam reddere, & ejus figuram turbare debeant.*

278. Dato numero graduum, & extenſione ſuperficiei refringentis aut reflectentis, trigonometrice calculari poteſt longitudo foci radiorum prope limbos incidentium (135 & 184); quæ ſi compare-

paretur cum ea, quæ ex formulis generalibus deducitur, reperitur ſpatium ab extremis hiſce focis occupatum, quod equidem notabile non eſt, niſi in microſcopiis refringentibus, ubi ob brevitatem foci lentis objectivæ, curvitas etiam in exiguæ aperturæ ſpatio eſt admodum ſenſibilis.

279. His defectibus e figura ſphærica provenientibus mederi poſſumus *primo*, ſi apertura exigua tribuatur vitro, quod objecto obvertitur, ut arcus eam metiens valde paucorum ſit graduum; illa tamen cautela adhibita, ne juſto minor apertura neceſſariæ ad claritatem & vivacitatem imaginum luminis copiæ obſit. *Secundo*, ſi prope focum conſtituatur *diaphragma*. Eſt autem diaphragma planum rotundum, nigro colore tinctum, & opacum, in medio exciſo foramine circulari, cujus diameter fere æqualis diametro imaginis, quæ ab objecto maximo, quod per vitrum oculare adhuc diſtincte cerni poteſt, depingitur. Limbi diaphragmatis radios inutiles intercipiunt, & abſorbent. *Tertio*, ſi interna tubi ſuperficies colore nigro inficiatur, ut abſorbeantur radii ab objectis multum ab axe diſſitis venientes, qui alias valde oblique incidentes, & a lateribus tubi reflexi ad ipſam usque imaginem, & vitrum oculare pervenirent, ac viſionem confuſam efficerent.

280. Celebres Geometræ demonſtrarunt, cujusnam curvaturæ deberent eſſe ſuperficies refringentes, & reflectentes, ut radii omnes ab eodem objecti puncto emanantes ad idem omnino punctum rurſus unirentur; verum infortunato accidit, ut ex obſtaculis, quæ conſtructioni ac perfectioni machinarum opticarum opponuntur, illud ſit omnium minimum, quod a figura ſphærica pendet.

ARTICULUS II.

De obſtaculis, quæ reſolutio lucis in diverſæ naturæ radios opponit.

Cum de viſione ageremus, ſumpſimus interea (51) lumen componi e diverſæ ſpeciei radiis, e quorum combinatione colores dependeant: hic igitur paucis præcipua exponenda ſunt experimenta, quibus aſſertum innititur.

281. I. Supponamus in cameram obſcuram (ut eam N. 5. conſtitutam vidimus) per exiguum foramen C (fig. 38) patere aditum faſci radiorum ſolarium A B, qui ſeu in objecta charta alba, ſeu in oppoſito pariete L K, ad D imaginem albam ſolis efformet e tot circulis luminoſis inter ſe commiſtis conſtantem, quot in foramine C puncta concipi poſſunt. Si iidem radii inter poſita ſuperficie Q R priſmatis triangularis vitrei, cujus axis ſit ad axem faſcis lu-

luminoſi perpendicularis, intercipiantur, imago alba ſolis ad D mutabitur in figuram GF ſupra D, oblongam, extremis rotundis, lateribus utrinque rectis, ſeptem coloribus diſtinctam, quos in iride obſervamus, ſpatio nempe ad *r* rubro, *a* aurantio, ad *f* flavo, ad *v* viridi &c.

282. Hinc vero patet *primo*, figuram hanc coloratam (quam *ſpectrum* appellant) efformari non potuiſſe, niſi radii in faſce AB contuſi, & non interpoſito priſmate uſque ad D ita perventuri, ſeparati fuiſſent per refractionem in duabus priſmatis ſuperficiebus QR, PR, ad ſeſe invicem inclinatis.

283. *Secundo*, cum imago D ſit alba, & ſpectrum FG omnes ex ordine colores iridis referat, ſequitur, *lucem albam nil aliud eſſe, quam miſtionem omnium colorum; ſingulos vero colores eſſe certæ ſpeciei radios.* Id vero infinitis aliis experimentis evincitur: ac inter alia ſequente.

284. II. Si in loco, in quo ſpectrum GF depingitur, conſtituatur lens, ut radii ſpectrum componentes in ſoco rurſus uniantur, atque ad eundem ſocum collocetur tabula vel charta, imago alba & circularis apparebit. Si charta propius ad lentem admoveatur, imago verſus medium alba manebit, ſed inferne rubro, ſuperne cæruleo & indico terminabitur: cum enim ante ſocum radii nondum ſint uniti; verſus F rubri, verſus G autem cærulei prævalent. Si charta ultra ſocum ponatur, imaginis medium rurſus album erit, ſed partem ſupremam color ruber, infimam cæruleus tinget, quod radii ſcilicet per ſocum decuſſatim tranſeant.

285. *Tertio* colligitur, *radios rubros omnium minime refringi*, ſive radios rubros eſſe minime refrangibiles; paullo magis aurantios; tum flavos &c. Newtonus menſuris accurate acceptis invenit, luce ex aëre in vitrum tranſeunte, ſinum anguli incidentiæ eſſe ad ſinum anguli refracti (quorum ſinuum ratio in radiis ejusdem ſpeciei ſemper eſt conſtans) in ratione, quam ſequens tabella exhibet:

Pro omnibus colorum commiſſuris, ut ſefe ordine excipiunt, dum radii iunt adhuc certo

Rubri	ut	1, 54	1, 5425	ad 1.
Aurantii		1, 5425	1, 544	
Flavi		1, 544	1, 54667	
Virides		1, 54667	1, 55	
Cærulei		1, 55	1, 55333	
Indici		1, 55333	1, 55555	
Violacei		1, 55555	1, 56	

286. Ex ipſo aſpectu confuſorum limitum colorum ſpectri, & figuræ oblongæ extremis rotundis, facile intelligitur, eos oriri ex meris ima-

imaginibus circularibus ſolis, quarum ſingulæ ſint coloris magis minusve ſplendidi & vivacis ſecundum ordinem a nobis expoſitum.

287. III. Si charta, qua ſpectrum coloratum F G excipitur, ita perforetur, ut non niſi radii, v. g. rubri transmitti poſſint, iisque novum, aut ſucceſſive plura nova priſmata objiciantur, ſeu etiam lentes; hi radii manebunt rubri, utcunque reflectantur, vel refringantur, cujuscunque ſint coloris vitra, per quæ tranſeunt, vel corpora, in quæ incidunt. Illud ſolum diſcrimen notari poterit, quod hic color ruber radiorum eo ſit vivacior, quo color vitrorum, vel corporum reflectentium magis analogus eſt rubro. Idem ſentiendum de radiis alterius coloris, quem, ubi ſemel a reliquis ſeparati fuerint, haud amplius amittunt.

288. Per lentem vitream duo, tresve colores ſpectri rurſus inter ſe commiſceri poſſunt, atque color aliquis, ut libuerit, compoſitus effici; cujus tum claritatis gradus, tum ad primigenios ratio alia, aliaque erit, ut diverſa ſuerit cujuslibet e componentibus quantitas; idem vero rurſus, ſi viſum fuerit, in eosdem ope priſmatis reſolvetur, quorum commiſtione eſt ortus.

289. IV. Sit priſma, cujus duo plana ſint æqualia & ad angulum rectum inclinata, adeoque ejus ſectio triangulum rectangulum iſoſceles Q Γ H (fig. 39) exhibeat. In hujus planum Γ Q incidat fere ad perpendiculum faſcis radiorum ſolarium A K, ut ſine refractione per illud tranſeat: reflectetur pars radiorum D L in baſi Q H fere perpendiculariter ad planum H Γ, ob angulum ad Γ rectum, e quo paralleli ad M pervenient. Objiciatur illis hic fere ad angulum rectum planum G E alterius priſmatis G F E, efformabunt ſpectrum omnium colorum *v r*, quorum nominum primæ literæ ſunt adſcriptæ, quamvis hoc ſpectrum ob exiguum radiorum numerum in Q H reflexorum non ita vivax ſit futurum. Reliqui radii per Q Γ H penetrantes, refractione itidem ſpectrum coloratum U R depingent. Vertatur tum lente priſma Q Γ H circa axem ſuum, ut angulus incidentiæ radiorum A D cum catheto Γ D paullatim major fiat, quam ut lux tranſire poſſit, adeoque reflecti debeat; videbitur primo diſparere lux violacea D U, tum coloris Indici D I, dein cærulea D C &c, verum ſimul colores iidem *v*, *i*, *c* &c. in ſpectro *v r* vivaciores fient. E quo intelligitur, radios in ſpectro U R diſparentes ſucceſſive incipere reflecti a baſi Q H, atque uniri faſci D M, adeoque radios maxime refrangibiles ſimul eſſe maxime reflexibiles. Quoniam autem nunquam differentia aliqua ſenſibilis obſervatur inter angulum incidentiæ & reflexionis alicujus faſcis radioſi, videtur, quod radii violacei non poſſent ante alios reflecti, niſi, dum ad D perveniunt, jam a ceteris eſſent ſe-

parati, adeoque quod reflexio non fiat, niſi præcedente aliqua refractione, quæ in exiguo ſpatiolo inter punctum incidentiæ, & punctum reflexionis facta ſit, ita ut radii tantillum ſeparati per refractionem, in minimo illo ſpatiolo factam, ſub eodem angulo poſt reflexionem egrediantur, ſub quo inciderunt.

ARTICULUS III.

Quæ de proprietatibus lucis dicta ſunt, univerſim ad Teleſcopia & Microſcopia applicantur.

290. E diverſa radiorum lucis refrangibilitate neceſſario conſequitur, illud, quod ſuperius *imaginem* alicujus puncti lucem emittentis in foco lentis efformatam diximus, nil aliud eſſe, quam continuam ſeriem punctorum coloratorum *a*, *f*, *v*, *c*, *i*, *v* (fig. 40) ordine colorum iridis ſeſe excipientium, ita, ut focus *r* radiorum rubrorum a vitro ſit remotiſſimus; focus vero *v* radiorum violaceorum viciniſſimus. Poſtremi hi radii, ubi ſecto axe producuntur, vel per imagines a vitro remotiores tranſeunt, vel extrema earum radunt, quo fit, ut vel confuſæ evadant, vel fimbrias coloratas attextas habeant, in quibus lux cærulea & violacea plerumque dominatur, id, quod Optici *iridem* appellant.

291. Evenit hoc plerumque in imaginibus per vitra objectiva teleſcopiorum & microſcopiorum depictis, maxime ſi *primo* hæ imagines longe a vitro remotæ ſint, cum ſeparatio radiorum refractione ad exiguos angulos facta eo ſenſibilior evadat, quo majus eſt intervallum imaginis a ſuperficie refringente vel reflectente. *Secundo.* Si apertura vitri objectivi ſit major, hoc eſt, ſi ſuperficies radios incidentes excipiens ſit plurium graduum: tunc enim angulus radiorum prope limbos incidentium fit major, atque ideo etiam refractio creſcit, ut anguli radiorum poſt ſeparationem divergentium; ut colores a ſeparatione pendentes citius percipi poſſint.

ARTICULUS IV.

Applicantur eadem ad teleſcopia & microſcopia dioptrica.

292. Si in formula generali ſuperius (182) inventa ponatur $q = 1$, $p = 1$, 54 ab initio, dein $p = 1$, 56, ſcilicet illud pro radiis rubris, hoc pro violaceis; inveniri poteſt ſpatium, ad quod ſpectrum coloratum *r v* (fig. 40) extenditur in foco teleſcopii. Itaque neglecta vitri craſſitie, ſi fiat $e = 0$, $r = R$, & $d = \infty$, formula

mula abit in hanc $x = \frac{pr}{2pp - 2p}$; & hinc diſtantia foci radiorum rubrorum elicitur $x = 0{,}9259\,r$; violaceorum vero $x = 0{,}8928\,r$. Facile autem intelligetur, differentiam inter hos duos focos 331 eſſe partem 28am proxime majoris, cum 9259 diviſa per 331 dent quotum 28 proxime. Quare *dum objectum ad diſtantiam infinitam remotum eſt, longitudo ſpectri colorati e diverſa refrangibilitate lucis provenientis eſt* $\frac{1}{28}$ *longitudinis foci lentis.*

293. Et quoniam lux circa medium ſpectri (ad ſenſum) prope C D eſt maxime denſa, & minime ſeparata, ubi proinde ſupponi poteſt verus locus imaginum objectorum alborum, qualia ſunt aſtra, ſequitur *primo*, quod in teleſcopio termini viſionis confuſæ e diverſa radiorum refrangibilitate ortæ, a loco vero imaginis objectorum valde remotorum diſtet utrinque circiter $\frac{1}{55}$ longitudinis foci vitri objectivi.

294. Quia porro triangula v C F, v A G ſimilia ſunt, eſt C F: F v = A G: G v; itaque etiam C F = $\frac{1}{55}$ A G; & hinc *ſecundo*, *diameter* C D *fimbriarum coloratarum imaginem* F *objecti valde diſſiti ambientium, eſt* $\frac{1}{55}$ *aperturæ vitri objectivi.*

295. OBSERVA. I. Si conſtituatur imago F in C D, ea per imagines ſingulas ſingulorum colorum r, a, f, v, c, i, v reddetur quodammodo nebuloſa; & per radios, qui tranſeunt per C D, acquiret fimbrias, ſive *iridem*; ita ut ſingulis alicujus imaginis punctis ſimul iride cinctis, ſimul nebula obſuſcatis, imago tota objecti confuſa eſſe debeat.

296. COROLL. I. Si objectum per teleſcopium ſpectandum ſit certi alicujus coloris, v. g. rubri, manifeſtum eſt, tubum prolongandum eſſe, retracto vitro oculari, ut diſtincte videatur, quia ejus imago reliquis accuratior eſt ad r. Contrarium faciendum eſt, ſi color objecti ſit cæruleus vel violaceus. E quo colligitur, *focum teleſcopiorum vel microſcopiorum eſſe varium, ut varius eſt objectorum color, quæ per ea ſpectantur.* Idem verum eſt, ſi aſtra ſpectentur cælo non perfecte ſudo: ut enim vapores, aut raræ nubeculæ hujus vel illius generis radiorum majorem copiam transmittunt; ita etiam imago ſyderum vel propius, vel remotius a vitro objectivo ad ſenſum quoque efformatur, quemadmodum id annotavit D. Bouguer.

297. COROLL. II. Si loco vitri albi, e quo objectiva teleſcopiorum elaborari ſolent, adhiberetur certo colore tinctum, quod non niſi ſui coloris radiis aditum præberet; uti v. g. ſi foret cæruleum;

ruleum; tum vero imago, per ſolos radios cæruleos ab objecto emanantes formata nec confuſa eſſet, nec iride cincta: ejusque diſtantia & magnitudo vera exacte reperiretur, adhibita in calculo formulæ pro teleſcopiis & microſcopiis ratione 1 ad 1, 551667. At enim ſimul illud eveniret, ut imagines fierent nimis debiles defectu luminis, ideoque nec ſatis diſtincte cernerentur.

298. COROLL. III. Angulis, ſub quibus radii colorati facta refractione a ſeſe invicem divergunt, iisdem manentibus, patet, CF fore eo minorem, quo minor ſit A G. Qüin etiam addi poteſt, Fv quoque tum imminuendam, quod extenſio foci, a figura ſphærica vitri pendens, decreſcente apertura decreſcat (279). Igitur *ut apertura vitri objectivi minuitur, ita irides imaginum, & obfuſcantes eas nebulæ tolluntur.* Verum quia hoc genus remedii cum detrimento luminis, & ex hoc pendentis claritatis imaginum conjunctum eſt, is modus aperturæ ſtatuendus eſt, ut & ſufficiens lucis copia admittatur, & imagines ſine iride ſenſibili ſint quam maxime nitidæ; id quod ſola experientia, & vitrorum perfectio, quibus quis utitur, determinare poteſt.

299. OBSERVA. II. Similibus calculis pro microſcopiis ex datis dimenſionibus, & habita ratione eorum, quæ in caſu particulari in conſiderationem veniunt, inſtitutis, patebit, quandonam irides, & objectæ imaginibus nebulæ, plus minusve ſpatii occupent, ac plus, minusve viſioni obturbent. Inde vero determinabitur, quam ampla eſſe poſſit objectivorum apertura, ut quantum fieri citra confuſionem poteſt, lucis admittatur. Quod ut certius in quovis caſu ſingulari obtineatur, plura parari poſſunt diaphragmata, vitrum objectivum tangentia, illudque retineri, quod effectus optimus commendat.

300. OBSERVA III. Radii violacei, & indici ſpectri colorati ſunt maxime debiles, & fere inſenſibiles, niſi quando objectum eſt valde fulgidum, uti ſol; cærulei item adhuc ſunt admodum debiles, uti etiam rubri ad extremum *r*. Hinc vero ſequitur *primo*, quod in teleſcopiis & microſcopiis multum detrahendum ſit a longitudine vera ſpectri colorati, ut habeatur longitudo hujus ſpectri, qua ſenſibile eſt; item quod tantundem minuendæ ſint diametri veræ iridum, ut obtineantur diametri, ad quas irides ſenſibiles extenduntur. Newtonus invenit, loco $\frac{1}{55}$ accipiendam eſſe $\frac{1}{250}$ circiter. *Secundo* quod verus locus CD imaginis F conſtituendus ſit inter focos radiorum flavorum, & aurantiorum, ubi ex experimentis prismatis lumen eſt vivaciſſimum. Invenitur vero hoc punctum,

ctum, ſi in formula pro focis vitrorum ponatur $p = 31$ & $q = 20$ *.

301. OBSERVA IV. Diminuta objectivi apertura non tollit ex integro irides imagini circumfuſas, ſed ſolum minuit tum earum magnitudinem, tum colores, ſeu, ut rectius dicamus, colorum ab objecto propriis diſcrimen, idque magis, ſi objectum ſit magis lucidum. E quo deducitur, *per irides augeri diametrum apparentem imaginum.* Atque hoc locum etiam habet in objectis nudo oculo ſpectatis, pupilla idem præſtante reſpectu imaginum in oculo depictarum, quod facit apertura vitri reſpectu foci. Ex hac obſervatione complurium illuſionum opticarum ratio redditur; exempli cauſa primo, *cur flamma e longinquo viſa ſub majore appareat angulo, quam qui diſtantiæ & magnitudini illius veræ ex calculo reſpondet?* ſic D. Picard obſervavit, ignem tres pedes latum noctu ad diſtantiam fere 32000 hexapedarum, ſive 16 leucarum Pariſinarum, per tubum viſum habuiſſe diametrum apparentem 8″, cum reipſa tantum $3''\frac{1}{4}$ eſſe debuiſſet. Secundo. *Quare ſtellæ fixæ, quæ diametrum apparentem ſenſibilem habere videntur, diſpareant momento, quando limbus obſcurus lunæ iis motu admodum lento occurrit?* Tertio. *Quare ſtellarum maxime illuſtrium diameter minor videatur, ſi per teleſcopia longiora ſpectentur, quam ſi aſpiciantur per breviora, quæ proinde objecta longe minus aucta exhibent?* Notandum iſthic, aperturam vitri objectivi in teleſcopiis majoribus, proportione longitudinis habita, minorem fieri, quam in brevioribus. Ita in teleſcopio Aſtronomico triginta pedes longo, vitrum objectivum non niſi 3 digitos patet; & in teleſcopio 3 pedum adhuc fere integri digiti aperturæ diameter admittitur. Quarto. *Cur ſi luna, dum parum a novilunio abeſt, & per lucem e terra reflexam ſatis fortiter illuminatur, ut etiam ejus pars, ad quam radii e ſole nondum directe pervenire poſſunt; cur, inquam, ſi luna tunc per teleſcopium conſpiciatur, ſemicirculus illuminatus ſoli obverſus ſenſibiliter appareat major altero oppoſito?* Quinto. *Cur limbo illuminato lunæ verſus ſtellam primæ magnitudinis progrediente in occultatione, ſtella, cujus lumen eſt multo vivacius lunari, non diſpareat, niſi poſtquam jam tota infra diſcum lunæ ſubiiſſe videtur?* ſcilicet, quando ſtella tamdiu videtur, quamdiu adhuc eſt extra verum limbum lunæ, & tantummodo verſatur adhuc in ſpatio transparente iridis lunam ambientis.

302. SCHOLIUM. Ex omnibus prioribus obſervationibus colligitur, ſolam eſſe experientiam, quæ pro diverſitate objectorum, tum quod ad copiam lucis, qua colluſtrantur, tum quod ad colores, decidere poſſit, quanta ſive in teleſcopiis, ſive in microſcopiis debeat eſſe objectivorum apertura, quis ſit verus imaginum

* Newtonus Opt. L. I. part. I. Prop. VII. Exper. XVI.. *ubi hæc definit, ponit rationem ſinus anguli incidentiæ ad ſinum anguli refractionis in his radiis* 17 *ad* 11).

locus, quæ aptiſſima diaphragmatum diameter, quæ illic ad definiendum viſionis campum ſunt conſtituenda.

303. Quod ad rationem longitudinis foci vitri objectivi ad longitudinem loci ocularis, rurſus ea non aliunde, quam ex experientia definienda eſt, utpote cum admodum diverſa eſſe debeat pro diverſa vitrorum perfectione & objectorum luce. Sic objectum valde lucidum perquam diſtincte videri poterit per objectivum accurate elaboratum, ſi cum oculari exigui foci conjungatur; cum enim imago citra ſenſibilem defectum efformetur, atque ſat vivax ſit, per vitrum, quod ei magnum augmentum adfert, recte adhuc videtur; verum ſi objectum per ſe ſit obſcurum, cerni diſtincte nequit, niſi per oculare, quod ejus radios non multum diſpergit, cujus conſequenter focus adeo brevis eſſe non poteſt; ſimiliter, ſi vitrum objectivum aliquo vitio laboret, quod etiam in imaginem transfunditur, huic ſpectandæ adhiberi non debet vitrum magni augmenti, ne ejus vitium notabilius evadat. Denique objecta interdiu conſideranda, ocularia minus acuta poſcunt; cum enim magna lucis vis tum ſpectatoris oculum jam prius ſubeat, atque aciem viſus quodammodo obtundat, antequam eum ad teleſcopium applicet, lumen nimia foci brevitate diſperſum haud ſatis perciperet.

304. Nulla igitur conſtans regula in hiſce rebus ſtatui poteſt, cui praxis ſemper ſit adſtringenda; ſed oportet uſu ejusmodi machinarum acquiſitam experientiam conſulere, atque dimenſiones earum, quæ pluris apud æquos æſtimatores fiunt, tanquam normam & modum novis, quæ conſtrui debent, adhibere. Atque hoc non modo de vitris ipſis, ſed etiam de tubis, toroque ad uſum neceſſario apparatu, dictum putetur.

305. Nos iſthic dimenſiones ſolum ſubjiciemus, quas meliores artifices in conſtructione teleſcopiorum, & microſcopiorum magis uſitatorum obſervare ſolent.

Pro Teleſcopio quatuor vitrorum.

Longitudo foci vitri object.	Diam. aperturæ vitri object.	Longit. foci vitri ocul.	Diam. diaphragm. in foco vitri object.	Augm. diametrorum apparentium object.
1 Ped.	4½ Lin.	16 Lin.	4 Lin.	9ies
2	6½	22	5½	13
3	9	26	7½	17
4	11	28	9	21
5	12	30	10	24
6	13	31	10½	28
7	14	34	11	30
8	15	36	11½	32

Sumuntur in hac tabula vitra objectiva accurate elaborata, non tamen excellentia; hæc enim & focum lentium ocularium breviorem,

&

& majorem tam aperturæ objectivi, quam diaphragmatis in ejus foco conſtitui, diametrum patiuntur.

Pro Teleſcopio Aſtronomico.

Longitudo foci vitri objectivi Ped.	Diameter aperturæ vitri objectivi Digit. Lin.	Longitudo foci vitri ocularis Digit. Lin.	Augmentum diametrorum apparentium objecti circiter
1	0. 6½	0. 8	20ies
2	0. 9	0. 10	28
3	0. 11½	1. 0½	34
4	1. 1	1. 2½	40
5	1. 2½	1. 4	44
6	1. 4	1. 6	49
7	1. 5½	1. 7½	53
8	1. 6½	1. 8½	56
9	1. 8	1. 9½	60
10	1. 9	1. 11	63
11	1. 10	2. 0	66
12	1. 11	2. 2	69
14	2. 0½	2. 5	75
16	2. 2	2. 8	79
18	2. 4	2. 7	85
20	2. 5½	2. 8½	89
25	2. 8	3. 0	100
30	3. 0	3. 3½	109
35	3. 3	3. 7	118
40	3. 6	3. 10	126
45	3. 8	4. 0½	133
50	3. 10	4. 3	141

306. Si objectiva vitra præter morem excellant, eorum apertura amplior eſſe poteſt, & focus ocularis minor. Sic objectivum a Campani elaboratum foci 34 pedum patitur oculare foci 2½ digitorum, & aperturam 4 digitorum diametri: atque tum 163ies diametros objectorum cæleſtium apparentes, quæ ſufficientem claritatem retinent, auget.

307. Pro Microſcopiis trium vitrorum, oculare debet eſſe foci digitalis, & diametri circiter 9 linearum; quod in medio ad diſtantiam 8 fere linearum ab oculari collocatur, focum 18 linearum habeat, & diametrum unius digiti. Cum his variæ lentes objectivæ mutabiles conjungi poſſunt, v. g. foci 1, 2, 4, 6 linearum; ſed aperturæ harum admodum exiguæ ſint, oportet, atque bonitati vitrorum proportionatæ; diſtantia autem ob oculari ſex circiter digitorum.

ARTICULUS V.

Applicatio dictorum de proprietatibus lucis ad Teleſcop. & Microſcop. Catadioptrica.

308. Experientia docuit, imagines reflexione formatas longe minus eſſe confuſioni obnoxias, quam quæ per refractio-

nem fiunt. Et ſane intelligitur, radios, cum facta refractione ſeparentur, atque a ſeſe invicem divergant, quo longius progrediuntur, eo magis colorum diſcrimina prodere. At vero in reflexione ſeparatio radiorum parallelorum non fit niſi (ut ita dicam) in ipſo puncto incidentiæ, vel in intervallo inter hoc, & punctum reflexionis. Poſt reflexionem itaque hi radii quodammodo infinite parum ſeparati, ſunt adhuc ad ſenſum paralleli; unde neque ſeparatio percipi poteſt, ſed illud ſolum advertitur, quod faſcis radioſus reflexus tantillo magis dilatatus appareat, quam fuerit prius. Hinc eſt, quod in teleſcopiis catadioptricis irides haud videantur, ſed tantum exigua in imaginibus confuſio notetur, partim ex dilatatione faſciculorum lucis, partim ex figura ſphærica ſpeculorum orta. Quare longe ampliorem aperturam ſpecula objectiva teleſcopiorum, & microſcopiorum ferunt, quam vitra ejusdem foci: ex quo fit, ut imagines reflexione depictæ multo vivaciores ſint, ideoque diſtincte per lentem exigui foci cerni poſſint, & magnum acquirere augmentum ſine claritatis detrimento. Quod commodum in teleſcopiis dioptricis haberi nequit, niſi tanto ſint longiora (ut e tabulis ſuperioris Articuli liquet), tantoque etiam minus tractabilia.

309. Teleſcopia catadioptrica primæ ſpeciei, qualia N. 246 & ſequente deſcripſimus, diverſa vitra ocularia admittunt, pro modo luminis, quo objecta fulgent, & deſiderati in eorum diametris apparentibus augmenti. En dimenſiones, ſecundum quas partes hujus generis teleſcopiorum conſtrui poſſunt, ut effectum debitum præſtent (vide Smith, Tom. I. pag. 364.).

Longitudo foci Speculi concavi	Diameter aperturæ Specula.		Longitudo mediocris foci vitri ocularis		Augm. Diametrorum apparentium objecti
Ped.	Digit.	Lin.	Lin.	Centeſim.	Circiter
½	0	11	2,	00	36
1	1	6	2,	39	60
2	2	6	2,	83	102
3	3	3	3,	13	138
4	4	1	3,	37	171
5	4	10	3,	54	202
6	5	7	3,	73	232
7	6	3	3,	88	260
8	6	11	4,	01	287
9	7	7	4,	13	314
10	8	2	4,	24	340
11	8	9	4,	34	365
12	9	4	4,	44	390

Quod ad ſpecillum planum HI (fig. 35) pertinet, id ovale eſſe debet, cum axem Ao' coni Do'D radiorum ad eundem axem paral-

parallele incidentium ſub angulo 45 graduum ſecet: ejus dimenſiones petuntur a ſpatio, quod radii reflexi occupant in illo loco, in quo collocandum eſt ſpecillum, dum oculare foci minimi adhibetur, id, quod facili calculo reperitur. Eſt mihi hujusmodi teleſcopium, cujus ſpeculi objectivi focus eſt duorum pedum: ſpeculum minus fere ſeptem lineas in maxima ſua latitudine habet; quinque in minima.

CAPUT VII.

Diverſæ quæſtiones Opticæ.

Inviolabilis in hiſce *lectionibus* brevitatis lex, atque arctior cum Phyſica Experimentali a noſtris exercitationibus aliena nexus quam plurima non modo ſcitu jucunda, ſed etiam utilia, nos prætermittere cogunt. Interim tamen ſupplementi inſtar eorum, quæ minus a Phyſica pendent, & quibus tirones exerceri poſſunt, quæſtiones non nullas, indicatis modo reſponſis, ſubjungere viſum eſt.

310. I. *Cur, ſi cui in tenebris in caput ictus impingatur, tractus quidam lucis videntur?*

Ictus omnes partes elaſticas capitis concutit, iisque tremorem quemdam, aliquamdiu perdurantem, inducit, adeoque etiam nervi optici fibræ contremiſcunt, quod ſenſationem ſimilem excitat, ac ſi lux confuſa oculos feriret.

311. II. *Quare, dum per tabulas vitreas feneſtrarum in vicos deſpicimus, melius videmus tranſeuntes, quam illi nos trans easdem videre poſſint?*

Qui in vicis ſunt, majore in luce verſantur; hinc modica illa, quæ e feneſtris tranſit, exiguam facit impreſſionem: contrarium accidit illis, qui e cubiculo tranſeuntes ſpectant.

312. III. *Cur, ſi caput acus prope ad oculum cis chartam exiguo foramello pertuſam teneatur, & idem foramellum luci obverſum aſpiciatur, caput acus videtur eſſe trans chartam, & ſitu inverſo?*

Caput acus non videtur cis chartam, quia oculo nimis vicinum eſt; & videtur trans chartam & inverſum, ob easdem cauſas, propter quas, ſi quis extra cameram obſcuram poſitus per ejus aperturam aſpicere poſſet, quin impediretur luci aditus, objectorum exteriorum imagines inverſas cerneret.

313. IV. *Cur, ſi carbo ardens admodum velociter in gyrum agatur, videtur tæniam igneam exhibere?*

Impreſſio lucis in retinam motum illic quemdam tremulum excitat aliquamdiu perdurantem cum ſenſatione lucis: hinc ſi carbo ma-

gna velocitate circulum non magnum deſcribat, tremor ille perſeverat integræ revolutionis tempore.

Viſus noſter eſt ſenſus ſatis lentus & ſegnis; & diverſi colores magna cum celeritate alter alteri ſuccedentes haud poſſunt ſatis diſtinctas impreſſiones facere, neque oculum ſimili voluptate afficere, ac experiatur auris, cum ſonorum celerrime ſeſe conſequentium harmoniam percipit.

314. V. *Quare videntur ſæpe nubes albæ magno numero in faſcias circulares, modicæ latitudinis, & verſus idem horizontis punctum convergentes, diſpoſitæ?*

Si nubes leviores, ideoque ſatis elevatæ, aliæ ab aliis ſint ſeparatæ, a vento in diſtantia paullo majore a terra, & directione horizontali ſpirante, omnes verſus eandem plagam impulſæ faſciarum longarum inter ſe, & cum horizonte parallelarum formam induunt, quæ conſequenter (82) debent videri verſus idem punctum lineæ libellæ per oculum tranſeuntis, & ideo in horizonte, convergere. Et quoniam a ſpectatore valde diſſitæ ſunt, velut in ipſa ſuperficie ſphæræ cæleſtis ſitæ, & circulares apparent.

315. VI. *Si candelabrum penſile, accenſis candelis, ſuſpenſum e fune longiore & contorto, dein ſibi permiſſo, circa axem rotetur, cur contingit quandoque, ut uni e ſpectatoribus videatur in hanc, alteri in alteram partem moveri, quamvis uterque ex eodem illud loco aſpiciat?*

Candelæ accenſæ circulum deſcribunt, & motus candelabri refertur ad diametrum per oculum tranſeuntem: jam vero in diſtantia aliqua ſæpe non ſatis diſcernitur, utra e duabus candelis oppoſi is ſit in extremo hujus diametri remotiore ab oculo (89), præcipue quando planum circuli fere per oculum tranſit, nec ſatis attenditur ad phænomena Perſpectivæ. Hinc ſi alter e duabus candelis hanc, alter aliam exiſtimet remotiorem eſſe; candelabrum illi verſus hanc plagam moveri videbitur, huic verſus oppoſitam. Idem contingere poteſt, ſi duo videant pinnulas ventorum indices in tectorum vertice valde oblique, vel alas molendini a ventis acti in majore diſtantia.

316. VII. *Quæ cauſa, quod ſi quis e tenebris ad lucem majorem repente veniat, viſus tantopere perſtringatur; & cum ad locum etiam mediocriter tantum obſcurum e magna luce tranſit, prorſus nihil videat?*

In tenebris pupilla eſt admodum dilatata, in luce magna valde contracta: jam motus iridis, quo hæc dilatatio & contractio peragitur, non eſt adeo velox; & lumen repente in pupillam valde amplam incidens majus eſt, quam ut imaginem diſtinctam efformare poſſit (288), ſed potius organa viſioni deſtinata ſubito, & violente concitat, quo fit, ut acies oculi obtundatur. At vero ſi

ad

ad lucem copioſam pupilla nimium arctetur, & repente in loco obſcuro conſtituatur, ſufficiens ad diſtinguenda objecta lumen non admittit, unde illa cæcitas oritur, quæ non prius deſinit, quam pupilla ſatis temporis ad dilatationem habuerit.

317. VIII. *Quare objectum ſi prope oculum poſitum per foramellum acu in chartæ nigræ ſolio factum aſpiciatur, eo apparet majus, quo magis ad oculum admovetur, cum tamen ſi ſine eo foramine conſideretur, ejusdem ad ſenſum videatur magnitudinis, quamvis ad diverſas ab oculo diſtantias collocetur?*

Viſio per tale foramellum fit accurata (213), & interjecta inter oculum & objectum charta aſpectum rerum aliarum circumpoſitarum impedit, nec admittit, ut aliunde, quam ex imaginibus in oculo depictis de magnitudine judicium feramus.

318. IX. *Quare charta madefacta acquirit colorem quemdam griſeum, & fit magis transparens?*

Chartæ ſiccæ pori filis varie implexis impediti ſunt; humor aſperſus ac in poros penetrans, hæc fila explicat, ac ordinatius componit, ut pori quaſi totidem tubuli fiant liquore pleni, aptique ad lucem transmittendam, quod chartam reddit aliquantum transparentem, & ſimul candorem tollit, quem a radiis intra poros non ſatis pervios varie reflexis habebat.

319. X. *Quare quidam circa veſperum clarius vident, quam alii?*

Sunt hi præcipue myopes, qui objecta valde vicina diſtincte, & quin oculis vim inferant, vident; cum ex oppoſito alii, qui ſunt oculis recte conſtitutis, cogantur pupillam contrahere, quando objecta admodum prope ſunt admovenda; unde non recipiunt tantum luminis, ac myopes.

320. XI. *Quare myopibus objecta remotiora apparent plerumque majora, quam aliis viſu bono præditis?*

Imagines objectorum non efformantur diſtincte, niſi in puncto interſectionis radiorum ab eodem objecti puncto egredientium: in oculo myopis hi radii non attingunt retinam, niſi poſt punctum concurſus, adeoque ubi ad retinam perveniunt, jam iterum divergunt.

321. XII. *Quare, qui fiunt presbytæ, minuto charactere ſcripta non poſſunt, ut prius, legere, niſi exponant radiis ſolaribus, aut pone candelam ardentem collocent?*

Ad lumen copioſum pupilla contrahitur, & ad exigui foraminis magnitudinem reducitur; atqui per ejusmodi foramen viſio debet eſſe diſtincta (213).

322. XIII. *Quare etiam ex illis non nulli, qui nullo oculorum vitio laborant, putant ſe in luna, dum pleno orbe fulget, quamdam faciei humanæ figuram videre, cum tamen, ſi per teleſcopium conſpiciatur, nullam prorſus ſimilitudinem referat?*

Sunt

Sunt quædam in luna, maxime verſus limbos oppoſitos, maculæ magnæ, aut potius ſpatia reliquo diſco obſcuriora (quæ Aſtronomi plerumque *maria* vocant): majores hæ maculæ non prorſus ad limbos uſque ſe extendunt, nec etiam ad centrum pertingunt, & ſpatio interiecto clariore a ſeſe invicem ſeparantur, per mediam lunam protenſo, quod verſus extrema ſua maculis longioribus & exiguæ latitudinis, variisque lucidis apicibus, interruptum eſt. Dubium non eſt, per magnam lunæ a terra diſtantiam, & lumen intenſius totius orbis, veras ſpatiorum ejusmodi clariorum, obſcuriorumque figuras diſcerni non poſſe. His ſi addatur præjudicium quoddam, quod facile ex aſpectu imaginum lunæ plenæ, quæ ei plerumque faciem humanam tribuunt, hauriri poteſt, fit ut majores illæ, & obſcuriores maculæ ſpatiis verſus limbum clarioribus cinctæ, atque ſimili lucidiore circa medium ſeparatæ, videantur velut genæ; tractus ille ſplendidior in medio naſum repræſentet, reliquus orbis variis clarioribus, ac obſcurioribus maculis diſtinctus, reliquas faciei partes exhibeat. At vero cum teleſcopium omnes maculas diſtincte oſtendat, ea faciei figura prorſus evaneſcit.

323. Hæc occaſionem præbent obſervationi cuidam magni momenti hic faciendæ. Si ſplendor nimius lunæ eſſet præcipua cauſa confuſionis, qua ejus maculæ videntur, promptum eſſet remedium, ſi per exiguum foramellum aſpiceretur (212). Interim tamen, licet hæ maculæ ſint admodum magnæ, & obſervator inſigni oculorum acie præditus, nunquam bene terminatæ, niſi per teleſcopium apparent. Neceſſe itaque eſt, ut diſtantia lunæ excedat eam, ad quam viſus utcunque excellens ſeſe extendit; & cum luna circiter 90000 leucis a terra abſit, adeoque radii inde ad nos ex ſingulis ejus punctis emiſſi ſint quam qui maxime ad ſenſum paralleli, manifeſte ſequitur, *paralleliſmum radiorum cum oculum ſubeunt nullo vitio laborantem, non efficere viſionem diſtinctam, ſed potius ad hanc requiri, ut tantillo divergant.* Hoc ſi non eſſet, ſane objecta remotiſſima viderentur maxime diſtincta, quod evidenter falſum eſt, experientia teſte. Per teleſcopia radii, quantum neceſſe eſt, ad divergendum cogi poſſunt, ideoque, ceteris paribus, objecta ſemper diſtincte cerni. Verum ut hoc fiat, focus vitri ocularis non debet accurrate congruere cum foco objectivi, ſive vero loco imaginum, ſed tantillo ultra eum conſtitui, ut radii ex oculari paullulum divergentes egrediantur. Diſcrimen in teleſcopiis fere imperceptibile eſt: at non item in microſcopiis ſive ſimplicibus, ſive compoſitis, eoque id magis, quo augmentum diametrorum apparentium objectorum majus eſt, atque magis diversa oculorum conſtitutio apud obſervatores. Hinc

regu-

regulæ, quas ſive pro conſtructione, ſive pro calculando effectu teleſcopiorum & microſcopiorum attulimus, non tanto cum rigore accipi debent, utpote quæ paralleliſmum radiorum e vitris ocularibus egredientium ad viſionem diſtinctam neceſſarium ſupponunt. Retinuimus tamen hanc hypotheſin tanquam ſimpliciſſimam, eique maxime vicinam, quam natura oculi recte conſtituti poſtulat. Itaque præſcriptæ regulæ in teleſcopiis pro ſatis accuratis haberi poſſunt; at in microſcopiis ejusmodi ſolum cenſendæ ſunt, quæ poſſint ita proxime determinare ſitum debitum vitrorum pro viſione diſtincta, atque magnitudines apparentes diametrorum objectorum, ut perbrevi tentamine obſervator dein facile aptiſſima vitrorum ac objecti intervalla deprehendere poſſit, e quorum dimenſione in caſibus peculiaribus etiam calculos juxta regulas generales factos eadem facilitate corriget.

324. XIV. *Quare, dum lux ſolaris vel alia ſatis fortis, in latera interna vaſis rotundi radiat, apparent in tali vaſe duo ſemicirculi lucidi ita inter ſe juncti, ut figuram cordis exhibeant, puncto concurſus eo viciniore ad axem vel centrum vaſis, quo lumen propius admotum eſt.*

Hæ curvæ lucidæ oriuntur ex interſectionibus valde invicem vicinis radiorum reflexorum a ſingulis ſemicircumferentiæ punctis ſuperficiei cavæ vaſis, quæ illuminatur, uti figura 41 oſtendit. Punctum B eſt focus hujus ſemiperipheriæ, ejusque diſtantia a centro dependet (145) a diſtantia objecti lucentis a ſemiperipheria illuminata. Curvæ A B, B C dicuntur *cauſticæ per reflexionem.*

325. XV. *Quare ſi gladius nudatus verſus ſpeculum concavum protenditur, terreri ſolent ii, qui ſe in tali ſpeculo ſpectant?*

Si gladius ſit intra centrum & focum ſpeculi, ejus imago inverſa apparet ante ſpeculum, & ex parte ſpectatoris, hæc imago porro a ſpeculo recedit (143) gladio ad ſpeculum propius admoto, ideoque ejus acies verſus ſpectatorem accedit.

326. XVI. *Quare ſi ſol, luna, aut ſtax, in aquam fluentem, velut rivum, radiat, videtur in ejus ſuperficie tractus quidam longus lucidus, tremulus & interruptus?*

Partes aquæ aliæ ſuper alias decurrunt inſtar tenuiſſimarum lamellarum, quæ vices totidem ſpeculorum planorum varie inclinatorum agunt, atque omni momento magnitudinem, locum, velocitatem & inclinationem mutant, planitiem jam ad ſpectatorem, jam in partem oppoſitam vertentes

327. XVII. *Si tabula vitrea ſpeculi valde oblique aſpiciatur, cur quinque vel ſex imagines candelæ ardentis pone ſpeculum poſitæ videntur?*

Tabulæ hujus craſſities pluribus ſtratis invicem ſibi incumbentibus, & lamellis conſtat, quarum ſuperficies ſingulæ tanquam totidem ſpecula conſiderandæ ſunt.

328. XVIII. *Si baculus ad dimidiam longitudinem aquæ immergatur, & oculus ſpectatoris collocetur in plano anguli refractionis, cur pars ſubmerſa propius ad ſuperficiem aquæ inflexa, & brevior apparet, quando oculus ad eam partem conſtituitur, ad quam baculi pars ex aqua eminens facit cum ſuperficie aquæ angulum acutum, quam ſi ſpectator ſit ex parte altera?*

Ratio facile ex aſpectu figuræ 42 colligitur, in qua radii HT, GT ab extremo baculi T venientes, refracti exeunt directione OH, OG verſus oculum, qui eos in T concurrere putat, ideoque hic conſtitutus partem baculi BT videt, quaſi ea eſſet BT; at ex altera parte, eadem illi apparet ut Bt.

329. XIX. *Quare objecta trans aquam, vel tabulam ſpecularem paullo craſſioris vitri viſa apparent majora, viciniora, & ſubinde etiam clariora?*

Repræſentet (fig. 43) IK diametrum pupillæ. Objectum O trans vitrum videtur per radios extimos OBDI, OCEK, qui apparent, velut ſi e puncto *o* venirent, angulumque I *o* K majorem comprehendunt, quam ſit IOK, qui fieret ab extimis radiis vitro remoto. Dein ſi objectum per vitrum ſpectetur, radii qui ex O inter B & C cadere poſſunt, ad oculum veniunt; at ſi tollatur vitrum, ad oculum non pertingunt radii, niſi inter F & G intercepti, adeoque pauciores.

330. XX. *Cur urinatores ſub aquam demerſi objecta tantum confuſe videre poſſunt?*

Refractio radiorum ex aere in aquam incidentium tanta fere eſt, ac illa, quæ fit in noſtro oculo; itaque oculo intra aquam poſito exigua tantum fit refractio; ideoque radii imaginem nequeunt diſtincte efformare, niſi multum ultra retinam.

331. XXI. *Quare humor cryſtallinus in oculis piſcium eſt ad ſenſum globulus ſolidus?*

Humor aqueus in oculis piſcium inutilis foret; & ſi humor cryſtalinus ſimilem a pupilla diſtantiam haberet, ut in animantium terreſtrium oculis, campus viſionis nimium parvus eſſet. Oportuit itaque, ut humor cryſtallinus infra pupillam illico collocaretur, ut pupilla latius pateret, ut humor cryſtallinus eſſet denſior, ideoque majores efficeret refractiones, ut denique eſſet globoſus, ne majus inter eum & fundum oculi ſpatium relinqueretur.

332. XXII. *Quare qui nictante oculo, ac lacrymis ſuffuſo, candelam ardentem aſpiciunt, faſces radioſos ex ea emitti, maxime ex ſuprema & infima parte vident?*

Pen-

Pendet hoc a refractione irregulari, quæ fit in humore extremis palpebrarum limbis adhærente, & oculo connivente ad pupillæ aperturam admoto; ſive etiam in ipſis lacrymis ſupra corneam ſe diffundentibus.

333. XXIII. *Cur imago objecti per vitrum polyedrum viſi toties multiplicatur, quot in vitro ſunt areolæ planæ?*

Ex radiis ab objecto paullum remotiore in talem areolam fere ſub æqualibus angulis incidentibus, complures per duplicem refractionem ad oculum perveniunt, atque faſcem luminoſum conſtituunt, ſatis fortem, qui in oculo imaginem objecti depingat, quæ proinde in axe hujus faſcis apparere debet. Jam vero cum inclinatio cujuslibet areolæ alia ſit, totidem faſces efformantur, quorum axes alium ſemper ſitum ab inclinatione areolarum pendentem habent. Quare tot imagines diverſæ, ac in tot locis diverſis videntur, quot areolæ radios ad oculum transmittunt.

334. XXIV. *Quare per lucernam magicam objecta tantopere augentur?*

In hac lucerna eſt AC (fig. 44) ſpeculum ſphæricum cavum; B lumen candelæ, vel lampadis craſſioris ellychnii paullo intra focum collocatum, ut radii a ſpeculo reflexi convergant; DD lens vitrea, radios tum directos, tum etiam reflexos a ſpeculo, adhuc magis colligit: EF eſt objectum coloribus transparentibus in tabula vitrea pictum, & ſitu inverſo. Radii per hanc tabulam transeunt, incidunt in lentem GH, a qua refracti convergunt, & imaginem in K efformant, ubi diaphragma radios inutiles, & irregulariter refractos, intercipit. Poſtquam radii in K ſeſe interſecuerunt, in lentem LM incidunt foci valde longi, e qua egreſſi admodum divergunt. Tum tandem in tabula alba ad maximam, qua fieri poteſt, diſtantiam excipiuntur, habita ratione vivacitatis, & diſtinctionis imaginis *fe*, quæ ſitu erecto depingitur. Jam vero patet, ut hæc omnia ita fiant, quemadmodum diximus, focum lentis DD debere eſſe intra B; lentis autem GH focum alterum conſtituendum eſſe inter eandem, & objectum EF; denique lentis LM focum collocandum ultra K verſus GH.

335. XXV. *Quare ſi laminæ metallicæ exiguum foramellum gutta aquæ, cui animalcula microſcopica innatant, repleatur, atque verſus candelæ lumen aſpiciatur, quandoque ejusmodi animalculum maximo cum augmento & diſtincte videtur?*

Superficies interior guttæ reſpectu animalculi vices ſpeculi ſphærici concavi agit. Itaque quando animalculum eſt intra focum, & ſuperficiem guttæ internam ab oculo remotiorem, ita, ut radii ab animalculo venientes ab ea verſus oculum reflexi per alteram guttæ ſuperficiem oculo viciniorem inter ſe paralleli egrediantur,

tur, videbitur imago ſuperficiei animalculi ab oculo averſæ; atque hæc imago eo erit major, quo animalculum propius ad focum illum fuerit.

PARS TERTIA

Perſpectiva.

CAPUT I.

Notiones & Principia Generalia, quibus univerſa Perſpectivæ Theoria ſuperſtruitur.

336. Objectum ex legibus Perſpectivæ delineare in tabula, ultra quam plerumque reſpectu oculi ſitum ſupponitur, nihil eſt aliud, quam ſingula puncta tabulæ deſignare, per quæ radii luminis ex ſingulis ſuperficiei viſibilis punctis ad oculum venientes tranſirent. Et ſimilitudo imaginis cum objecto omnibus numeris abſoluta eſt, ſi ad eadem puncta tabulæ iidem colores applicentur, cujus ſunt radii illic tranſeuntes. Colores autem hunc in modum applicare, eſt *Perſpectivæ Pictoriæ*, quæ ad claſſem Mathematicam non pertinet.

337. PRINCIPIUM I. *Quidquid in tabula optice repræſentatur, ex uno eodemque puncto ſpectari debet.* Exprimit enim tabula, quod fit actione momentanea, quod adeo unico oculi obtutu videri poteſt.

338. PRINCIPIUM II. *Projectio perſpectiva puncti objectivi in tabula illic fieri debet, ubi radius ex eo puncto ad oculum ductus, per planum tabulæ tranſit.*

339. PRINCIPIUM III. *Projectio perſpectiva lineæ rectæ objectivæ, quæ producta per oculum non tranſit, eſt recta in tabula, in qua eam ſecat planum trianguli, cujus baſis eſt recta objectiva, & latera radii ab ejus extremis uſque ad oculum ducti.*

340. PRINCIPIUM IV. Ut projectio perſpectiva figuræ planæ recte intelligatur, cogitandum eſt, quod *radii ex omnibus ſuperficiei aſpectabilis figuræ planæ punctis ad oculum ducti efficiant pyramidem, cujus baſis figura objectiva eſt, & vertex in oculo: jam figura, quæ fit ſectione hujus pyramidis per planum tabulæ, eſt projectio perſpectiva figuræ illius objectivæ.*

341. COROLL. I. *Projectio perſpectiva polygoni nequit eſſe ſimilis polygono objectivo, niſi hujus planum ſit tabulæ parallelum.* Elementa enim pyramidis ſimilia eſſe non poſſunt baſi, niſi fiant ſectionibus ad baſin parallelis.

342. Co-

342. COROLL. II. *Projectio perſpectiva ſolidi eſt figura plana compoſita ex projectionibus omnium planorum ſolidum comprehendentium, quæ ſimul oculo ſunt conſpicua.*

343. THEOREMA I. *Quemcunque ſitum habeat tabula, projectio perſpectiva duarum aut plurium rectarum objectivarum inter ſe parallelarum convergere debet verſus punctum aliquod in plano tabulæ (ſive intra hanc, ſive extra eam poſitum), in quod cadit recta ex oculo ad rectas objectivas parallele ducta.*

DEMONSTR. Utcunque duæ pluresve parallelæ objectivæ reſpectu oculi poſitæ ſint, ſemper debent videri concurrere (82); igitur etiam earum projectio perſpectiva convergere debet. Jam vero oculo per eundem radium repræſentatur punctum concurſus parallelarum objectivarum, & punctum concurſus earum projectionis; quare neceſſe eſt, ut punctum concurſus projectionis ſit illud in plano tabulæ, per quod tranſit recta ab oculo ad punctum concurſus linearum objectivarum ducta. Sed quoniam punctum concurſus parallelarum objectivarum infinite diſtat ab oculo, recta ex oculo ad hoc punctum ducta eſt iisdem parallela; ergo punctum concurſus projectionis perſpectivæ linearum objectivarum inter ſe parallelarum eſt illud plani tabulæ, producti ſi opus ſit, in quod cadit recta ex oculo ad parallelas objectivas parallele ducta.

344. COROLL. I. Si parallelæ objectivæ ſimul ſint parallelæ ad planum tabulæ, recta ex oculo ad punctum earum concurſus apparentis ducta, nuſpiam poteſt occurrere tabulæ plano, utpote cui parallela quoque eſt: igitur neque dari poteſt punctum concurſus earum projectionis, ſive earum projectiones perſpectivæ ſunt etiam parallelæ inter ſe. Hinc *ſi tabula ſit verticalis, ſive ad horizontem perpendicularis, omnium verticalium objectivarum projectiones ſunt rectæ verticales; & projectiones omnium horizontalium, ſive ad libellam ductarum, ſimulque ad planum tabulæ parallelarum, ſunt rectæ in tabula ad libellam ductæ.* Projectiones item rectarum objectivarum cum plano tabulæ parallelarum, ſed ad horizontem inclinatarum, ſunt etiam parallelæ in tabula, & tantundem ad horizontem inclinatæ.

345. COROLL. II. *In tabula verticali projectiones omnium rectarum objectivarum, quæ ad libellam ducuntur, ſimulque ad planum tabulæ ſunt perpendiculares, debent concurrere in puncto viſus tabulæ.* Dicitur enim *punctum viſus*, in quod cadit recta ex oculo ad planum tabulæ perpendicularis, conſequenter ad rectas objectivas parallela.

346. THEOREMA II. *Si recta objectiva ſit plano tabulæ parallela, & in partes æquales diviſa, etiam ejus projectio perſpectiva erit recta in partes æquales diviſa: at ſi recta objectiva plano tabulæ non ſit parallela, ejus projectio non dividitur in partes æquales.*

DEMONSTR. Sit AB (fig. 45) recta objectiva trifariam ſecta in C, D, & plano tabulæ GH parallela; ſit O locus oculi; erit *ab* projectio rectæ AB. Manifeſtum, ductis rectis OA, OC, OD, OB, triangula AOC, *a*O*c*; COD, *c*O*d*; DOB, *d*O*b* eſſe ſimilia (Elem. 510). Cum itaque baſes AC, CD, DB æquales ſint: etiam iis homologæ *ac*, *cd*, *db* æquari inter ſe debent. At vero ſi PQ exhibeat ſitum tabulæ ad rectam AB inclinatæ, triangula $\alpha O \beta$, $\beta O \gamma$, $\gamma O \delta$ non amplius ſunt ſimilia triangulis correſpondentibus AOC, COD, DOB; adeoque cum baſes AC, CD, DB inter ſe æquales ſint, baſes $\alpha\beta$, $\gamma\beta$, $\gamma\delta$ inter ſe æquales eſſe non poſſunt.

347. COROLLARIUM I. Ex ſimilitudine triangulorum ſequitur, partes projectionis perſpectivæ alicujus rectæ ad tabulam parallelæ & in partes inæquales diviſæ, etiam inæquales eſſe debere, verum proportionales partibus homologis rectæ objectivæ; atque adeo projectionem perſpectivam figuræ ad tabulam parallelæ eſſe ſimilem figuræ objectivæ.

348. COROLL. II. Lineæ perſpectivæ, quæ in tabula ſunt parallelæ, ſunt in eadem ratione diviſæ, ac earum objectivæ; ſed lineæ perſpectivæ in tabula convergentes, non dividuntur in ea ratione, in qua ſectæ ſunt earum objectivæ, utpote cum in hoc caſu iſtæ (objectivæ) nequeant eſſe parallelæ ad tabulam.

349. THEOREMA. III. *Projectio perſpectiva ejusdem lineæ objectivæ ſemper eſt ejusdem magnitudinis in tabula, quemcunque ſitum reſpectu horizontis habeat, & quæcunque ponatur diſtantia ab oculo, modo ſemper ſit in plano eodem ad tabulam parallelo.*

Idem intelligendum eſt de quotcunque lineis objectivis inter ſe æqualibus, & de lateribus polygoni, quemcunque ſitum in plano eodem tabulæ parallelo habeant.

DEMONSTR. Quamvis hoc theorema evidenter conſequatur ex dictis NN. 341, & 347; illius tamen veritas luculentior erit e ſequente ratiocinio. Cogitetur recta data objectiva circa unum extremum immotum rotari, altero circulum in plano ad tabulam parallelo deſcribere. Radii ex oculo ad omnia hujus circuli peripheriæ puncta ducti conſtituent pyramidem conicam (ſive conoides) plano tabulæ baſi parallelo ſectam. Ergo projectio perſpectiva baſis erit itidem circulus in tabula. Ulterius concipiantur omnem diametri hujus circuli objectivi indefinite produci verſus omnem partem, & in eas productas transferri continuo longitudo radii: fiet, ut hac ratione omnes in partes æquales dividantur, & quælibet talis pars conſiderari poteſt tanquam linea objectiva data, in alio ſemper, alioque ſitu, quem habere poteſt. Sed

(345) projectiones harum partium æqualium ſunt pariter inter ſe æquales ; ergo projectio perſpectiva rectæ ejusdem objectivæ, quemcunque ſitum in plano eodem ad tabulam parallelo habentis, eſt magnitudinis conſtantis, ſive ejusdem.

350. PROBLEMA FUNDAMENTALE. *Datis poſitione plano tabulæ, loco oculi, & puncto objectivo poſt tabulam, invenire ejus projectionem perſpectivam in tabula.*

Pro reſolutione Problematis notandum eſt, ſitum alicujus puncti in ſpatio abſoluto non poſſe determinari, niſi per ejus diſtantias a tribus planis datis diverſum inter ſe ſitum habentibus. Fit autem hæc determinatio commodiſſime, ſi tria plana data ſibi perpendiculariter inſiſtant; atque id etiam in praxi Perſpectivæ obſervatur. Supponi enim ſolet imprimis planum indefinitum HR (fig. 46) per oculum in O poſitum tranſiens: ſitus hujus plani eſt ad libellam, ſeu horizontalis, unde etiam *planum horizontale* dicitur. Præcipuus illius uſus eſt, ut diſtinguantur objecta *ſuperne* & *inferne* poſita; quidquid enim in plano hoc exiſtit, cum ſit in linea libellæ oculi, nec *infra*, nec *ſupra* eſſe dici poteſt; quæ autem ſunt ſupra hoc planum, oculo altiora; & quæ infra idem ſunt, oculo depreſſiora ſunt.

Dein aſſumitur alterum planum indefinitum VC, pariter per oculum O tranſiens, & verticaliter, ſeu ad perpendiculum erectum, ideoque etiam *planum verticale* vocatur. Servit, ut diſcrimen ſtatuatur inter objecta dextima & ſiniſtima: nam quæ in hoc plano collocata ſunt, directe opponuntur oculo. Eſt hoc planum ad alterum HR perpendiculare; utpote verticale ad horizontale. Tandem ſumitur planum tabulæ TB ad aliquod intervallum ab oculo & perpendiculare planis horizontali & verticali, ut adeo omnia tria ſint perpendicularia inter ſe, ſingula binis quibusvis.

Linea horizontalis tabulæ *hr*, eſt interſectio plani horizontalis cum plano tabulæ. *Linea verticalis* tabulæ *ut* eſt interſectio plani verticalis cum plano tabulæ. *Punctum viſus* tabulæ eſt punctum *a*, in quo linea horizontalis ſecat lineam verticalem. *Radius principalis* eſt pars O*a* interſectionis plani verticalis cum plano horizontali, quæ metitur diſtantiam oculi a plano tabulæ.

351. I. RESOLUTIO PER CALCULUM. Sit datum punctum D, cujus projectio *d* in plano tabulæ TB petitur. Demittantur ex hoc puncto D in planum horizontale HR, & in planum verticale VC, perpendicula DI, DS; ducatur ex I recta IA in plano horizontali ad verticale perpendicularis; & ex S altera SA in plano verticali ad planum horizontale perpendicularis. Patet, DSAI eſſe parallelogrammum rectangulum, cujus planum eſt

norma

normale ad plana verticale V C, & horizontale H R, ideoque parallelum plano tabulæ T B. S A, ſive D I, eſt menſura diſtantiæ puncti dati D a plano horizontali, ſive ejus altitudo ſupra libellam oculi: & D S, ſeu I A metitur ejusdem diſtantiam a plano verticali, ſeu quantum objectum reſpectu oculi ſit ſiniſterius. Denique pars *A a* interſectionis planorum verticalis & horizontalis, (quæ adeo ad planum tabulæ normalis eſt) menſura eſt diſtantiæ parallelogrammi D S A I a plano tabulæ, conſequenter etiam puncti dati D. His poſitis, cum punctum D detur poſitione, dantur hoc ipſo tres diſtantiæ dictæ D I, D S, *A a* magnitudine.

Ducantur ex loco oculi O rectæ O I, O D, O S; habebitur pyramis quadrangularis O D S A I, per planum tabulæ baſi parallelæ ſecta in *d s a i*. Ergo (340) rectangulum *d s a i* eſt projectio perſpectiva rectanguli D S A I, & *d* puncti dati D. Evidens quoque eſt, rectangulum *d s a i* eſſe ſimile rectangulo D S A I, utpote cum ſint elementa ejusdem pyramidis ſectionibus parallelis formata: hinc latera rectanguli *d s a i* proportionalia ſunt lateribus homologis rectanguli D S A I; & ob triangula O *a s*, O A S ſimilia, habetur O A : O *a* = A S : *a s* ; ergo etiam eſt O A ad O *a* , ut quodvis latus rectanguli D S A I ad latus homologum rectanguli *d s a i*: ergo (Elem. 686) ſequentes duæ habentur analogiæ: O A (ſive O *a* + *a* A) : O *a* = A I (ſeu D S) : *a i* ſive *d s* ; & O A (vel O *a* + *a* A) : O *a* = A S (vel D I) : *a s* vel *d i*, ex quibus duæ dantur regulæ, aut analogiæ pro ſolutione generali Problematis per calculum

I

Ut radius principalis plus diſtantia objecti a plano tabulæ eſt
Ad radium principalem ;
Ita eſt diſtantia objecti a plano verticali
Ad diſtantiam ſui puncti perſpectivi a linea verticali tabulæ.

II

Ut radius principalis plus diſtantia objecti a plano tabulæ eſt
Ad radium principalem ;
Ita eſt diſtantia objecti a plano horizontali
Ad diſtantiam ſui puncti perſpectivi a linea horizontali tabulæ.

352. EXEMPLUM. Supponamus oculum diſtare a tabula 6 pedibus ſeu 72 digitis; punctum vero objectivum ab eadem remotum eſſe 15 pedibus, vel 180 digitis; 4 pedibus, ſive 48 digitis ſupra libellam oculi elevatum: & 7 pedibus, ſive 84 digitis verſus ſiniſtrum a plano verticali diſſitum. Oporteat jam hujus puncti projectionem perſpectivam invenire.

Sit

Sit (fig. 49) L T A B margo tabulæ datæ, quem rectangulum ſuppono. Aſſumatur in tabula punctum *a*, cui oculus directe eſt opponendus, ſive *punctum viſus* tabulæ: ducatur per idem punctum recta *t u* ad marginis latera T A, L B normalis (quod ſi margo tabulæ non eſſet rectangularis, ita ducenda foret *t u*, ut, cum peracta delineatione tabula loco deſtinato collocatur, ſitum habeat verticalem): erit hæc linea verticalis tabulæ; agatur etiam recta *h r* lateribus T L, A B perpendicularis per idem punctum *a* (vel ſi margo non ſit rectangulus, ut ſit normalis ad *u t*), quæ erit linea horizontalis tabulæ.

Fiant tum hæ duæ proportiones: $72 + 180 : 72 = 48 : x$;
$72 + 180 : 72 = 84 : y$.
his rite ſolutis, obtinebitur $x = 13, 71$, ſeu 13 dig. $8\frac{1}{2}$ lin. quæ eſt diſtantia puncti projectionis *d* quæſiti a linea horizontali tabulæ *h r*, & ſupra eandem accipienda; *y* autem fiet = 24 digitis, quæ eſt diſtantia ejusdem puncti *d* verſus ſiniſtram a linea verticali *u t*.

Deſignatio ipſa hujus puncti *d* in tabula variis modis fieri poteſt. Subjiciemus eos, qui commodiores, & exactiores videntur.

353. I. Si margines tabulæ ſint rectanguli, accipiantur in lateribus T L & A B puncta E, & *e* a punctis *h* & *r* lineæ horizontalis 13 dig. $8\frac{1}{2}$ lin. remota, & agatur per ea linea cæca E *e*, in qua (per primam analogiam) ſitum eſſe debet punctum perſpectivum quæſitum. Simili ratione ad partem ſiniſtram lineæ verticalis in lateribus T A, L B accipiantur puncta *b* & K ab *u* & *t* lineæ verticalis 24 digitis diſtantia, ducaturque per ea linea cæca, in qua (per analogiam alteram) pariter eſſe debet punctum quæſitum, quod adeo erit interſectio *d* linearum E *e*, *b* K.

In praxi, cum hoc modo utimur, qui pro majoribus tabulis eſt accuratiſſimus, opportune latera marginis in digitos, aut etiam in lineas dividuntur, initio diviſionum in punctis *t*, *u*; *r*, *h* ſumto; ex *t* ſcilicet verſus L; dein verſus B pergendo; ex *u* verſus T & A; ex *h* verſus T & L iisdem diviſionibus translatis; ut etiam ex *r* verſus A, & B. Ex his etiam illud commodi emerget, ut facile duci poſſint perpendiculares, & ad horizontalem parallelæ, id quod fieri frequentiſſime oportet, quando plurium objectorum delineatio optica facienda eſt.

354. II. Si margines tabulæ non ſunt rectanguli, accipiatur in linea verticali *t a* punctum *s* ſupra punctum viſus *a* 13 dig. $8\frac{1}{2}$ lin. ac per illud agatur E *e* ad verticalem perpendicularis. Tum accipiatur in linea horizontali punctum *i* a puncto *a* verſus ſiniſtram 24 digitis diſtans, & ducatur per illud perpendicularis K *b*: interſectio harum perpendicularium erit punctum *d* quæſitum. Modus

hic commode adhibetur pro tabulis minoribus, cum præcipue ope duplicis gnomonis labor excitandi perpendiculares evitetur.

355. III. Potest quoque punctum *d* determinari, quin ulla linea ducatur, idque ope duplicis circini, hunc in modum. Crura unius circini aperiantur accurate ad distantiam puncti quæsiti a linea verticali, alterius ad distantiam ejusdem a linea horizontali. Tum crure unius circini altero in puncto visus *a* fixo, notetur altero in linea horizontali punctum *i*; similiter ope alterius notetur in linea verticali punctum *s*. Denique circino priore manu altera, altera posteriore prehenso, figatur crus unum illius in *i*, hujus in *s*; ubi reliqua duo crura in tabula conveniunt, punctum quæsitum *d* esse debet.

356. II. RESOLUTIO GRAPHICA. Sit TB (fig. 47 & 48) planum tabulæ, *ut* ejus linea verticalis; *rh* horizontalis; *a* punctum visus, D punctum objectivum datum. Transeat per D planum horizontale KF, parallelum lineæ horizontali *rh*; sit XZ intersectio hujus plani cum plano verticali, quod concipitur per *ut* & XZ transire; BY sit intersectio plani KF cum plano tabulæ. Ex puncto D demittatur ad BY perpendiculum DE, quod metitur ejus distantiam a plano tabulæ; punctum E, in quod cadit in tabula, dicitur *punctum incidentiæ*: conjungantur puncta visus *a* & incidentiæ E recta *a*E; transferatur distantia DE objecti a tabula in rectam BY, ex E in G; (perinde est, sive punctum G versus B, sive versus Y accipiatur): dein in lineam horizontalem *hr* ita transferatur ex puncto visus *a* radius principalis *a*O, ut punctum O in partem alteram respectu puncti G cadat, hoc est, ad partem dextram puncti visus *a*, si G fuerit ad sinistram puncti incidentiæ E, & vicissim: ducatur OG; ejus intersectio *d* cum *a*E erit punctum perspectivum dati D.

DEMONSTR. Ducatur per *d* recta LN parallela verticali *ut*, ac ideo ad horizontalem *hr* & ad BY perpendicularis; erunt triangula *d*GE, *da*O similia, eorumque altitudines *d*N, *d*L in ratione laterum homologorum (Elem. 378); itaque O*a*: GE = *d*L: *d*N, & (Elem. 304) O*a* + GE: O*a* = *d*L + *d*N (seu *at*): *d*L, quæ est prima analogia resolutionis prioris, cum *at* sit altitudo oculi supra planum libellæ, in quo objectum ponitur, ideoque distantia objecti a plano horizontali. Denique quia parallelas *d*L, *ut* secat recta *a*E, triangula *ad*L (seu *asd*), & *at*E similia sunt, & hinc *at*: *as* (sive *d*L) = *t*E (seu DS): *ds*. Atqui ostendimus esse O*a* + GE: O*a* = *at*: *d*L; ergo etiam O*a* + GE: O*a* = DS: *ds*, quæ est secunda analogia resolutionis primæ.

357. OB-

357. OBSERVA. Evidens eſt, conſtructionem Problematis manere eandem, ſeu ponatur planum tabulæ perpendiculariter erectum ſupra planum KF, ſeu cum eo congruere, modo linea BY repræſentet ſectionem tabulæ cum plano KF, & linea verticalis *tu* maneat in linea ZX ejusdem plani KF. Atque ſic rem habere ſupponendum erit in prioribus duabus methodis, quas ſequente Capite allaturi ſumus.

Ex hac ſecunda ſolutione praxes variæ deductæ ſunt, quæ paſſim in libris de Perſpectiva conſcriptis traduntur; præcipuas ſubjungemus.

CAPUT II.

Deſcribuntur præcipuæ Methodi Perſpectivæ Practicæ.

I METHODUS

Per Craticulam Perſpectivam.

358. Conſtruitur imprimis quadratum ABDE (fig. 51), quod exhibet planum objectivum tabulæ, hoc eſt, totum ſpatium, quod objecta delineanda in plano occupant. Dicitur etiam *planum Geometricum*. Quadratum hoc dividitur in plura alia, quam fieri poteſt, parva; & poſito, quod margo inferior tabulæ AB congruat cum latere AB quadrati AD, ducitur in plano tabulæ linea horizontalis QO ad eam altitudinem, quæ commoda viſa fuerit; uti etiam linea verticalis VI, prout oculus ſpectatoris vel directe medio tabulæ opponendus eſt, vel ad alterutram partem collocandus, ita, ut S ſit punctum viſus, SI altitudo oculi ſupra planum Geometricum. Ex puncto S ad ſingulas diviſiones lateris BA ducuntur rectæ SB, SG, SI, SC, SM, SA. Radius principalis (ejus longitudinis, quæ opportuna judicatur, ut tantundem oculus a tabula diſtet) utrinque ex puncto S in lineam horizontalem (etiam productam, ſi opus ſit), velut in O & Q, transfertur. Ex utroque hoc puncto ad puncta diviſionum lateris AB, aguntur rectæ OB, OG, OI, OC, OM, & QA, QM, QC, QI, QG, QB, quarum interſectiones *e*, *k*, *l*, *n*, *r*; *d*, *t*, *p*, *f*, *h*, cum rectis SA, SB determinant puncta, per quæ ductæ rectæ *de*, *tk*, *pl*, *fn*, *hr* cum rectis *g*G, *i*I, *c*C, *m*M conſtituunt trapezia maiori B*d e* A incluſa, quæ omnia ſunt projectio perſpectiva quadrati BDEA, atque minorum in eo contentorum. Trapezium

B *d e* A *craticula perſpectiva* vocatur. Pro demonſtratione, quod B *d e* A ſit projectio perſpectiva quadrati B D E A, manifeſtum eſt (356) punctum A eſſe punctum incidentiæ puncti E, & A B eſſe æqualem diſtantiæ puncti E a plano tabulæ; igitur interſectio *e* rectarum S A, O B eſt punctum perſpectivum puncti E. Eodem modo puncti K punctum incidentiæ eſt idem A, & A G = A K; ergo puncti K projectio perſpectiva eſt *k*, ubi rectæ S A, O G ſe interſecant. Idem eſt de ceteris omnibus punctis quadrati A B D E.

359. SCHOLIUM. Equidem ex conſtructione patet, craticulam perſpectivam deſcribi poſſe independenter a puncto S, ex datis ſolum O & Q; cum rectæ ex O & Q ad diviſiones lateris plani Geometrici A B ductæ, interſectionibus ſuis determinent diagonales trapeziorum, quæ in craticula deſcribuntur, adeoque his datis etiam ipſa trapezia conſtrui poſſint. Verum modus, quem dedimus, accuratior eſt; cum enim rectæ G *g*, I *i*, C *c* in puncto viſus S concurrere debeant (345); exactius verſus illud tendunt, ſi ipſum punctum S adhibeatur, quam ſi ſolum utamur angulis trapeziorum.

Rectæ *d* B, *g* G, *i* I, *c* C &c, quarum diviſiones inæquales repræſentant partes æquales rectarum B D, G R, I X, C Y &c, dicuntur *Scalæ decreſcentes longitudinum*, quod ſerviant *diminuendis* dimenſionibus objectorum ea ratione, qua diverſæ eorum partes magis a tabula diſtant. Et parallelæ *h r*, *f n*, *p l* &c ſunt *ſcalæ decreſcentes latitudinum & altitudinum*, cum ad *diminuendas* latitudines, & altitudines objectorum in diſtantiarum a tabula ratione adhibeantur.

360. USUS CRATICULÆ PERSPECTIVÆ. Quoniam craticula perſpectiva exhibet in tabula ſpatium quadrati Geometrici B D E A, manifeſtum eſt, quod ſi planum alicujus objecti, cujus projectio perſpectiva petitur, delineetur in hoc quadrato, ita ut diviſiones ejusdem ſpectentur tanquam ſcala dimenſionum plani delineati, facile quoque projectio perſpectiva fieri poſſit. Ut ſi v. g. quadratum in plano Geometrico oblique ad tabulam ſitum perſpective delineare velim, cujus ſingula latera ſint trium pedum; conſtruo quadratum B A E D (fig. 52), cujus ſingulæ diviſiones ſint unius pedis, aut ſaltem unum pedem exhibeant, ac intra hoc alterum oblique poſitum I M N O, cujus ſingula latera æquentur tribus diviſionibus lateris quadrati Geometrici, ſitumque datum habeant. Tum in craticulæ perſpectivæ arcolis correſpondentibus quadratulis plani Geometrici, in quibus ſunt puncta I, M, N, O, deſigno puncta *i*, *m*, *n*, *o*, ut ſingula ſint ad arcolarum partes homologas. Ductis *m i*, *i o*, *o n*, *n m* habeo trapezium *i o n m* perſpectivum quadrati I O N M, ut per ſe liquet.

361. Si

361. Si quadratum IONM ſit baſis cubi perſpective delineandi, præterea e punctis *i*, *m*, *n*, *o* erigi debent perpendiculares ad horizontem *i*F, *m*P, *n*Q, *o*H; & quoniam altitudo cubi objectivi eſt æqualis tribus diviſionibus lineæ AB quadrati geometrici; ſingulæ dictæ perpendiculares fiant æquales triplæ latitudini areolæ illius, cui quævis inſiſtit, & acceptæ ope cricini in lineis horizontalibus, quæ per puncta *i*, *m*, *n*, *o*, tranſeunt. Denique ducantur QP, PF, FH, HQ; habebitur projectio perſpectiva cubi. Nam rectæ Plana verticalia cubi objectivi terminantes, plano baſis ſunt perpendiculares; igitur (344) earum projectiones debent eſſe rectæ verticales, ſive parallelæ ad VK; & quia earum dimenſio objectiva æquatur triplici diviſioni quadrati geometrici; earundem altitudo perſpectiva æqualis eſt triplici latitudini trapeziolorum craticulæ, acceptæ in eodem plano (parallelo ſcilicet ad planum tabulæ), in quo ea altitudo collocari debet.

362. OBSERVA I. Facile apparet, in hiſce operationibus ſupponi quadratum geometricum eſſe reſpectu oculi poſt tabulam; ideoque neceſſe eſt, ut objecta, quæ in tabula tanquam anteriora, & oculo propiora repræſentanda ſunt, propius ad AB, latus maximum craticulæ perſpectivæ, delineentur; quæ vero remotiora apparere debent, conſtituenda ſunt verſus latus quadrati DE.

363. II. ſi in plano objecti, cujus delineatio ex legibus Perſpectivæ facienda eſt, vel in pluribus ejusdem planis, aut in planis inter ſe parallelis, deſcriptæ ſint plures lineæ parallelæ inter ſe, uti v. g. ſunt membra ornatus Architectonici, tum ut labori parcatur, tum ut accurationi conſulatur, determinandum eſt punctum earum concurſus (quod earum *punctum accidentale* dici ſolet). Jam vero quando hæ parallelæ ſunt ſimul horizontales, quod quam ſæpiſſime accidit, earum punctum concurſus eſt in linea horizontali tabulæ, ita, ut, ſi habeatur projectio unius ex illis, tantum opus ſit hanc projectionem uſque ad lineam horizontalem producere; punctum, in quod cadit, eſt ſimul reliquarum punctum accidentale. Cum enim ſupponantur omnes parallelæ ſimul eſſe ad libellam ductæ, radius ex oculo ad easdem parallelus debet duci in plano horizontali, ergo tabulæ nullibi occurrere poteſt, quam in linea horizontali.

Itaque habita ſemel projectione perſpectiva *nm* rectæ objectivæ NM, eandem projectionem produco in R, quod eſt punctum accidentale projectionis rectæ objectivæ OI, & duarum baſis ſuperioris, quæ ſunt ad NM, & OI parallelæ. Idem eſt de puncto L, in quo concurrere debent projectiones parallelarum ON, IM, hisque correſpondentium in baſi ſuperiore cubi. At ſi parallelæ objectivæ non ſint ad libellam ductæ, opus eſt, ut duarum reperian-

riantur projectiones, quæ in eam partem, in quam convergunt, productæ concurſu ſuo determinant punctum accidentale omnium reliquarum.

364. III. Ut repleatur vacuum extra latera craticulæ perſpectivæ relictum, rectæ *de*, *tk*, *pl* &c (fig. 51) utrinque produci poſſunt uſque ad tabulæ margines, & diviſiones lineæ *de* in utramque partem productam transferri; ſi dein ex puncto viſus S ad puncta harum diviſionum ducantur rectæ, donec occurrant marginibus tabulæ, efficient cum *kt*, *lp* &c productis nova trapezia, ſive projectiones perſpectivas quadratulorum, quæ ex utroque latere quadrati geometrici BAED adhuc addi poſſunt, quo ſpatium plani geometrici capacius reddetur.

365. IV. Quando tabulæ minores faciendæ ſunt, & objecta ſub diverſis obliquis ſitibus repræſentanda, uſus craticulæ perſpectivæ commendandus eſt. Verum pro magnis tabulis hæc methodus locum non habet, præcipue, ſi objecta magno numero, & inter ſe diſtantia dantur; tunc enim planum Geometricum iis ſufficiens conſtrui nequit. Quod ſi tamen tam magnum haberi poſſit, ut omnia objecta ſub dimenſionibus ſubduplis, ſubtriplis, vel ſubquadruplis capiat, hæc in craticula ſeparatim perſpective delineari poterunt; ſed dein in tabula ad id deſtinata rurſus depingenda, lineis, quæ in craticula deſcriptæ ſunt, duplicatis, triplicatis, vel quadruplicatis; eritque objectorum projectio ejusmodi tanto accuratior, quanto minus dimenſiones ex craticula acceptæ augeri debuerunt.

366. V. Omitti etiam poteſt deſcriptio quadratulorum in plano Geometrico, ſi accurata tabella conſcribatur, quæ dimenſiones, ſitum, & diſtantiam objectorum in tabula exhibendorum contineat. Tum enim latere infimo tabulæ in tot, quot libuerit, partes æquales diviſo, quarum quævis digitum, pedem, hexapedam, aut generatim menſuram eam repræſentet, juxta quam tabella magnitudinum conſcripta eſt, & quæ *modulus* dici poterit, craticula his diviſionibus conveniens fiet, cujus ſingula trapezia digitum quadratum, aut pedem, vel hexapedam quadratam, aut denique *modulum quadratum* valebunt. Unde objecta delineanda eo modo, quo tabella magnitudinum exigit, in craticula collocari poterunt.

II METHODUS
Sine Craticula perſpectiva.

367. In hac methodo, ut in præcedente, ſupponitur planum baſis objecti delineandi EFGHI (quod in præſente exemplo eſt pri-

priſma pentagonum) (fig. 50) in ea diſtantia a limbo inferiore tabulæ in plano geometrico conſtructum eſſe, in qua apparere debet.

Ducatur in plano tabulæ linea verticalis V K, atque paullo ultra planum baſis objecti continuetur; fiat item horizontalis S P, in qua accipiatur S O, æqualis radio principali, verſus utramque partem puncti S. Tum ab angulo B marginis infimi tabulæ abſcindatur B C altitudini priſmatis objectivæ æqualis, jungaturque C cum extimo puncto lineæ horizontalis P. Inveniatur per conſtructionem ſuperius deſcriptam (356) omnium angulorum prismatis projectio perſpectiva: exempli cauſa pro angulo E, accipiatur circino ejus diſtantia a linea verticali V K, & transferatur ex K in D, erit D punctum incidentiæ anguli E. Accipiatur præterea ejusdem diſtantia a margine tabulæ A B, & transferatur ex D in N, in partem ſcilicet oppoſitam puncto O reſpectu D; ducantur S D, O N; harum interſectio *e* erit projectio perſpectiva puncti E.

Repertis hac ratione projectionibus reliquorum angulorum pentagoni, excitentur ex iis perpendiculares *e* T, *f* L, *g* M &c, quæ fiant æquales lineis $\varepsilon\tau$, $\phi\lambda$, $\gamma\mu$ &c inter P C & P B interceptis ex parallelis ad A B, quæ e ſingulis punctis *e*, *f*, *g* &c ducuntur. Reliqua peragantur ut priore methodo; erit eadem demonſtratio.

368. Obſervationes, quas priore articulo ſubjunximus, hic quoque locum habent. Poteſt etiam fieri exacta diſtributio objectorum delineandorum, & tabella tum diſtantiarum a linea verticali, tum a limbo tabulæ A B ſingulorum punctorum, quorum projectio petitur, conſcribi, cujus ope, ut ſuperius dictum eſt, puncta D & N reperiantur; uti etiam tabella altitudinum pro punctis ſupra baſin objectorum elevatis. Delineatio perſpectiva eo erit accuratior, quo ichnographia, & objectorum altitudines exactius ſuerint acceptæ; & id quidem, quamvis ſingulis pedibus dimenſionum objectivarum non niſi duæ vel tres lineæ in ſcala moduli reſpondeant.

III METHODUS

Per margines ſcalares.

Hæc methodus priores duas includit, atque alia præterea habet commoda, ob quæ iis merito præferatur, quorum unum e præcipuis eſt, quod delineatio æque ope angulorum figurarum, ac laterum perfici poſſit. Unde in ea deſcribenda paullo prolixiores erimus, quam in præcedentibus.

Con-

Conſtructio marginum ſcalarium.

369. Conſtituto in tabula punĉto viſus S (fig. 53), ducatur per illud linea horizontalis H S Q, atque utrinque, quantum fieri poteſt, ultra tabulam prolongetur. Fiat etiam linea verticalis V T, in qua accipiatur punctum C ſeu verſus V, ſeu verſus T, ita, ut S C æquetur radio principali. Centro C radio quovis (quo hic fuerit longior, eo diviſio fiet accuratior) deſcribatur arcus A B, 60, vel 70 graduum circiter, qui in ſingulos, vel in denos ſaltem gradus dividatur, initio ad A facto. Ex C per ſingula diviſionum punĉta ducantur rectæ occurrentes lineæ horizontali, quæ hac ratione una ex parte diviſa erit. Tum eædem ejus diviſiones ex punĉto S in alteram partem transferantur, ut utrinque æqualiter dividatur tota ejus longitudo. Compendii cauſa ad C A applicari poteſt inſtrumentum *Transportatorium* in ſuos gradus accurate diviſum, & ope fili tenuis in ejus centro fixi, & per ſingulos gradus tenſi, in linea horizontali punĉta diviſionum notari.

370. Et quia ex hac conſtructione manifeſtum eſt, diviſiones lineæ horizontalis a punĉto S computatas eſſe tangentes angulorum ad C, ſinu toto exiſtente C S; eædem multo accuratius reperientur, ſi conſtruatur ſeparatim ſcala R D in quotvis partes æquales diviſa, ita tamen, ut earum 10 æquentur radio principali, quæ iterum in denas minores ſubdividi poterunt, & harum quævis rurſus in denas alias, quo fiet, ut radii principalis partes milleſimæ habeantur. Quodſi ſi jam e tabula tangentium excerpantur competentes numeri, iidem ex ſcala parata facile in lineam horizontalem transferentur.

371. In margine infimo tabulæ F E accipiantur (incipiendo ab extremo F & pergendo verſus E) tot, quot libet, partes æquales, quæ ſint *modulus* dimenſionum objectorum delineandorum; & ex punĉto Q, accepto in horizontali producta ad diſtantiam a P æqualem radio principali, ducantur ad eas lineæ cæcæ, vel vero applicata regula notentur punĉta interſectionum in linea F G, adſcriptis notis 1, 2, 3, 4 &c. Eædem diviſiones transferantur ab E in latus E K.

372. Denique in marginem F E ex utraque parte punĉti T transferantur partes æquales 1, 2, 3, 4 &c illis, ad quarum diviſionum punĉta prius lineæ cæcæ ex Q ductæ fuerunt, quarum interſectione latus F G diviſum eſt. Quin majoris commoditatis gratia eædem partes æquales transferantur ex punĉto V in utramque partem marginis ſupremi tabulæ, iisdemque numeris notentur. Atque ita conſtructio marginum ſcalarium abſoluta erit.

Ex

Ex his marginibus ſcalaribus diviſiones lineæ horizontalis ſervivunt projectioni perſpectivæ linearum ad libellam ductarum, quæ ad planum verticale ſunt obliquæ. Diviſiones marginum dextri & ſiniſtri ſunt *ſcalæ decreſcentes* longitudinum proportionatæ objectorum a tabula diſtantiis; & diviſiones ſuperioris & inferioris ſunt *ſcala frontis*, ſive objectorum in ipſa fronte, ſive margine tabulæ FE conſtitutorum, & ad planum tabulæ parallelorum, modulus.

373. Conſtructionem marginum ſcalarium rite factam eſſe, ut demonſtretur, concipiatur *primo* centrum C ita elevari ſupra punctum viſus S, ut planum trianguli SCH ſit ad planum tabulæ normale. Liquet punctum C tunc fore locum oculi, atque gradus arcus AB centro C deſcripti eſſe menſuram angulorum ad oculum, quos efficiunt lineæ in plano horizontali deſcriptæ, & ad planum verticale obliquæ; quare recte in linea horizontali notari poſſunt puncta, ad quæ radii ex oculo per ſingulos gradus ducti terminantur. *Secundo* cogitetur ſimiliter, quod linea QP elevetur perpendiculariter ad planum tabulæ, ut angulus SPQ ſit rectus, linea vero FE ſit ad idem planum, ſed ex parte altera ab oculo averſa, normalis, atque propterea planum, in quo ſunt rectæ ex Q ad puncta diviſionum FE ductæ, ſit ad planum tabulæ perpendiculare, FG exiſtente communi utriusque interſectione. Patet, diviſiones FE fore diſtantias a tabula in plano Geometrico producto acceptas. Exempli cauſa, FN deſignet unitatem moduli diſtantiæ ultra tabulam, erit F 1 ejus projectio perſpectiva; nam ob triangula rectangula QP 1, FN 1 ſimilia eſt PQ : FN = P 1 : F 1; igitur etiam PQ + FN : PQ = P 1 + F 1 (ſeu PF) : P 1, quæ cum ſit ex primis analogiis reſolutionis generalis (351), ſequitur, punctum 1 eſſe projectionem puncti N. Idem eſt de aliis diviſionibus.

374. COROLL. Ex his conſtat, quod ſi nequeat ſufficienter produci planum tabulæ, ut diviſiones in marginibus dextro & ſiniſtro, quot requiruntur, obtineantur, eæ facili calculo reperiri poſſint; id, quod faciendum quoque eſt pro majoribus tabulis. En hujus rei exemplum!

Sit radius principalis SC decem pedum, aut generatim decem unitatum moduli; altitudo oculi ſupra planum Geometricum 6: ut obtineantur diſtantiæ P 1, P 2, P 3 &c, quarum intervalla ſingula ſingulis moduli unitatibus reſpondeant, faciendæ ſunt ſequentes proportiones.

10 + 1	- - - -		5, 45 = P 1
10 + 2	- - - -		5, 00 = P 2
10 + 3	- - - -		4, 61 = P 3
10 + 4	- - - -		4, 29 = P 4
10 + 5	- - - -		4, 00 = P 5
ut 10 + 6	sunt ad 10; ita 6 ad		3, 75 = P 6
10 + 7	- - - -		3, 53 = P 7
10 + 8	- - - -		3, 33 = P 8
10 + 9	- - - -		3, 16 = P 9
10 + 10	- - - -		3, 00 = P 10
10 + 11 &c	- - - -		2, 86 = P 11 &c.

Unde ex ſcala in partes decimales (quarum in præſente exemplo diſtantia lineæ horizontalis a margine infimo tabulæ contineat 6, 00) facile erit in marginibus lateralibus tabulæ diviſionum puncta accurate notare, quotquot delineationi neceſſaria fuerint.

375. Alter modus dividendi margines laterales, ſua facilitate ſe commendat, eſtque prioribus duobus expeditior, niſi quod magnam circumſpectionem, ut errores vitentur, exigat; ideoque tum commodiſſime adhibendus, quando ſolummodo majoribus diviſionibus opus, uti ſi minores objecti partes paucæ ſunt, & tantum præcipua quædam puncta deſignanda, quæ conſtituendis ceteris ſerviant, vel dum res non ſinit, ut tam minutim ſequamur regulas, ſed naturali quadam æſtimatione rudiusve, adumbrandum eſt objectum.

Menſura, quæ pro unitate moduli aſſumpta eſt, transferatur in marginem inferiorem tabulæ ex F in N (fig. 54), & radius principalis ex P in Q ad eandem partem puncti N; ducantur PN, QF: ex puncto interſectionis *a* demittatur ad PF perpendiculum *a* 1; ducatur Q 1, & ex *b*, ubi ſecat PN, rurſus demittatur perpendicularis *b* 2 ad PF: tum iterum ducatur Q 2, & ex puncto interſectionis *c* cum PN, perpendicularis *c* 3 ad PF, & ſic deinceps, donec tot diviſiones habeantur, quot opus eſt.

376. DEMONSTR. Quoniam QP, NF ſunt parallelæ, erunt triangula QP*a*, NF*a* ſimilia: itaque PQ : FN = P*a* : *a*N; & PQ + FN : PQ = P*a* + *a*N (ſeu PN) : P*a*. Sunt vero etiam triangula rectangula PNF, P*a* 1 ſimilia; ergo PN : P*a* = PF : P 1; conſequenter PQ + FN : PQ = PF : P 1, quæ eſt analogia, juxta quam diviſio facienda erat.

Obſervanda circa lineam horizontalem tabulæ.

377. Si ſupponamus ſpectatoris oculum ita reſpectu tabulæ collocatum, uti debet, cum projectio perſpectiva perfecta eſt, atque ei per tabulæ quadrum (quæ ideo inſtar vitri transparens ſupponitur) patere liberum aſpectum plani indefiniti, continui, & ad li-

libellam poſiti, manifeſtum eſt, quod hæc planities ei appareat usque ad circulum procurrere, qui cæli ſuperficiem aſpectabilem a tellure ſeparare videtur (*qui horizon cæleſtis dicitur*). Jam vero projectio perſpectiva hujus circuli non poteſt eſſe niſi linea recta: cum enim hic circulus habeat centrum in ipſo ſpectatoris oculo, radii ex eo ad omnia circumferentiæ illius conſpicuæ puncta ducti ſunt in eodem plano: itaque eorum interſectio cum plano tabulæ eſt interſectio binorum planorum, quæ neceſſario linea recta eſt (Elem. 629). Patet igitur, hanc eſſe lineam horizontalem tabulæ, quæ adeo eſt projectio perſpectiva portionis horizontis cæleſtis, ſpectatori viſibilis, ejusque diviſiones ſunt projectio graduum ejusdem.

378. Quoniam oculus centrum eſt horizontis cæleſtis, ſequitur, quod ſi duæ lineæ objectivæ in plano libellæ per oculum transeunte convergant ad aliquem angulum in oculo, gradus horizontis, & conſequenter diviſiones lineæ horizontalis tabulæ, metiantur hunc angulum, ideoque earum ope linearum objectivarum inclinatio optice repræſentari poſſit. Et quia omnia plana inter ſe parallela ad diſtantiam infinitam ab oculo videntur concurrere; planum geometricum, & univerſim omne planum libellæ convergit cum plano horizontali per oculum tranſeunte, donec in horizonte cæleſti cum eo coincidat. Atque hinc *linea horizontalis tabulæ eſt linea concurſus projectionum omnium planorum ad libellam poſitorum.*

Planorum omnium ad libellam poſitorum, quibus inſiſtunt objecta delineanda, diſtantia a ſe invicem finita eſt, cum interim horizontis cæleſtis peripheria infinite ab oculo diſtat; igitur intervallum inter ea plana infinite parvum eſt reſpectu diſtantiæ ab oculo, ad quam concurrere videntur; atque adeo omnia plana ad diſtantiam finitam ſupra vel infra oculum ad libellam poſita, reſpectu horizontis cæleſtis, & conſequenter reſpectu lineæ horizontalis tabulæ, quæ illius projectio eſt, inſtar unius cum eodem horizonte cæleſti congruentis conſideranda ſunt, verticali per oculum tranſeunte, ſeu perpendiculari eorum diſtantiam inter ſe metiente, evaneſcente, & rationem puncti cum centro horizontis coincidentis non excedente.

Unde angulus, qui fit a duabus rectis in plano quopiam ad libellam poſito convergentibus, atque verticem in verticali per oculum tranſeunte habet, non aliter ſpectari debet reſpectu peripheriæ horizontis cæleſtis, ſive lineæ horizontalis tabulæ, quam ſi fieret in ipſo oculo: quare ejus menſura erunt etiam diviſiones lineæ horizontalis, earumque ope optice delineari poterit.

Denique cum objecta quævis, quæ ab oculo diſtincte cerni poſſunt, ideoque in tabula delineari, habeant diſtantiam tum inter ſe, tum

ab oculo finitam, horizonte cæleſti infinite diſtante: puncta omnia, quibus objectorum partes conſtant, cenſenda ſunt infinite propinqua, atque adeo omnes anguli, quos in plano quovis ad libellam poſito efficiunt termini eorum planorum, ſive latera, ita conſiderandi ſunt, tanquam in centro horizontis cæleſtis eorum vertices exiſterent, ut adeo diviſiones lineæ horizontalis eosdem metiantur.

379. Hinc ſequitur I°. *per diviſiones lineæ horizontalis tabulæ menſurari poſſe, & perſpective delineari omnes angulos, in plano quovis ad libellam poſito ſitos.*

380. II°. *Ut projectio perſpectiva anguli cujuslibet objectivi fiat, inveniri debere projectionem illius verticis* (qua ratione reperiatur, inferius Num. 389 dicetur), *atque ex ea rectas ad bina diviſionum lineæ horizontalis puncta, inter quæ numeri graduum menſura contineatur, duci; ſive ad ea, ad quæ radii ex oculo lateribus objectivis anguli paralleli pervenirent.*

381. III. *Si e quotlibet punctis* C, D, E, *in tabula acceptis* (fig. 55) *ducantur binæ ad easdem interſectiones lineæ horizontalis* A, B, *angulos* A C B, A D B, A E B *fore projectiones angulorum objectivorum inter ſe æqualium, quorum menſura eſt numerus graduum diviſionibus inter* A & B *comprehenſis æqualis;* in præſente figura ſcilicet 30°. Certe, cum C B, B D, B E ad idem punctum accidentale convergant, neceſſe eſt, ut ſint projectiones opticæ trium parallelarum (363); ſimiliter rectæ A C, A D, A E tres parallelas alias deſignant: atqui ſi tres parallelæ inter ſe occurrant tribus aliis itidem inter ſe parallelis, eadem debet eſſe omnium inclinatio, ideoque idem angulus.

382. Infertur denique, rectam, uti D A, aut E A, ex quovis tabulæ puncto D vel E ad punctum quodpiam A lineæ horizontalis ductam eſſe projectionem perſpectivam lineæ objectivæ in plano libellæ ſitæ, & ad planum verticale tot gradibus, & verſus eam partem inclinatæ, quot, quæve a puncto A indicantur. In hoc exemplo lineæ D A, vel E A ſunt projectiones rectarum ad libellam ductarum, quæ decem gradibus verſus dextram a plano verticali declinant.

Problemata ope marginum ſcalarium ſolvenda.

383. PROBLEMA I. *Ex dato puncto tabulæ* C (fig. 55) *ducere rectam, quæ ſit optice parallela datæ lineæ perſpectivæ* D F. Supponitur, quod hæ lineæ ſint in planis ad libellam poſitis.

RESOLUTIO. Producatur perſpectiva data D F, donec occurrat lineæ horizontali in quovis puncto B; tum jungantur C B.

384. PROBLEMA II. Ad extremum D (fig. 55) lineæ perſpectivæ D F, cujus objectiva eſt in plano libellæ, angulum numeratum graduum petitum continentem conſtruere.

RESOLUTIO. Producta linea perſpectiva, donec occurrat horizontali in B, numerentur ex B verſus eam partem, ad quam conſtruen-

ſtruendus eſt angulus, v. g. verſus A, tot diviſiones lineæ horizontalis, quot graduum eſſe debet angulus, & ducatur DA.

385. OBSERVA I. Si angulus conſtruendus fuiſſet 60 aut 80 graduum, eodem modo accipi inter B & A 60 vel 80 gradus debuiſſent, 20 ſcilicet, aut 40 gradibus ultra punctum viſus S ſumtis.

386. II. Si angulus ad partem puncti B debuiſſet conſtrui; diviſionibus ex hac parte non ſufficientibus, accipi debuiſſet anguli petiti complementum ad duos rectos, & gradus ex B verſus ſiniſtram A numerari, indeque linea ADR duci; atque ita angulus BDR fuiſſet petiti numeri graduum.

387. PROBLEMA III. *Ex dato puncto* D (fig. 56) *lineæ perſpectivæ datæ* CE, *erigere optice perpendicularem.*

RESOLUTIO. Problema hoc ad præcedens redit. Producta CE usque ad lineæ horizontalis punctum B, a B in diviſionibus horizontalis numerentur 90 gradus v. g. usque ad A, indeque ducatur AD.

388. PROBLEMA IV. *Ex puncto tabulæ dato ducere perſpective perpendicularem ad rectam datam.*

RESOLUTIO. Sit data CE (fig. 56), & F punctum tabulæ pariter datum. Producatur CE uſque ad horizontalem in B; inde usque ad A numerentur 90 gradus, & per F ducatur ex A recta ad AD, quæ erit perpendicularis quæſita.

389. PROBLEMA V. *Data puncti objectivi in plano Geometrico diſtantia a tabula, & a plano verticali, invenire ejus punctum perſpectivum.*

RESOLUTIO. Per diviſiones marginum lateralium diſtantiæ puncti objectivi a tabula reſpondentes ducatur linea cæca, & alia itidem cæca ex puncto viſus ad eam diviſionem marginis inferioris, quæ indicat diſtantiam puncti objectivi a plano verticali, utriusque interſectio erit punctum perſpectivum quæſitum. Exempli cauſa, ſi diſtantia a plano tabulæ eſſet quatuor unitatum moduli; & a plano verticali trium verſus ſiniſtram, punctum perſpectivum foret G.

390. Si punctum datum non ſit in plano Geometrico, ſed vel ſupra illud elevatum, vel infra depreſſum, v. g. in foſſa quapiam, concipienda eſt perpendicularis ex eo ad planum Geometricum ducta, quæ ſeu altitudinem, ſeu depreſſionem metiatur; quoniam itaque hæc perpendicularis tam plano tabulæ, quam verticali parallela eſt, punctum plani Geometrici, in quod cadit, eandem ab his planis habet diſtantiam, quam punctum objectivum datum. Unde ſi fiat projectio puncti hujus in plano Geometrico, in quod cadit perpendicularis, & ducatur per illud parallela lineæ verticali, determineturque longitudo perpendicularis eo modo, quem Pro-

blemate ſequente præſcribemus, extremum perpendicularis punctum erit projectio perſpectiva dati.

391. PROBLEMA VI. *Lineam objectivam poſitione, & magnitudine datam optice deſcribere in tabula.*

RESOLUTIO. Sit longitudo lineæ datæ duarum unitatum moduli, alterum ejus extremum G (fig. 56) diſtet a plano verticali tribus, & a plano tabulæ quatuor ejusmodi unitatibus: quæratur per Probl. Præcedens ejus projectio G. Sed ut alterius extremi punctum perſpectivum rite determinetur, triplex expendendus eſt caſus.

392. CASUS I. *Dum linea objectiva plano verticali parallela eſt.* Ponatur extremum lineæ G eſſe tabulæ propius. Quia longitudo eſt duorum modulorum, alterum ejus extremum a tabula ſex modulis diſtat. Ducatur jam ex G ad punctum viſus recta G S, & per diviſionum marginum lateralium puncta 6, 6 cæca 6 I 6: interſectio I erit projectio alterius extremi.

Quod ſi extremum G altero magis diſtaret a tabula, duo moduli ex quatuor ſubducendi eſſent, & recta per puncta 2, 2 marginum lateralium ducta abſcinderet in recta S 3 extremum quæſitum.

393. CASUS II. *Dum linea objectiva eſt plano tabulæ parallela.* Vel in hac hypotheſi extremum G propius eſt plano verticali, quam alterum, vel eſt remotius? Si hoc, liquet, alterum extremum a plano verticali diſtare uno modulo. Unde ex puncto viſus S ducatur cæca ad marginis inferioris diviſionem 1; hujus interſectio K cum parallela ad horizontalem per G tranſeunte determinat alterum extremum quæſitum.

At ſi extremum G lineæ objectivæ ſit plano verticali vicinius, diſtantia alterius ab eodem plano erit 5 modulorum, & recta ex S ad diviſionem 5 inferioris marginis duci debebit.

394. CASUS III. *Quando linea objectiva tam ad planum verticale, quam ad planum tabulæ obliqua eſt;* uti ſi 20 gradibus verſus dextram a plano verticali declinet.

Ducatur per G recta ad diviſionem 20° lineæ horizontalis ad partem dextram puncti viſus; per idem G, & verſus eam partem, ad quam linea objectiva declinat, ducatur quoque GK lineæ horizontali parallela, & optice æqualis objectivæ (393) ſive duorum modulorum: ex hujus extremo K ducatur K Q, quæ ſecet rectam G L ad 20° ex G ductam verſus eam partem, ad quam ſitum eſſe debet extremum quæſitum, & ſimul tranſeat per diviſionem illam lineæ horizontalis, quæ indicat dimidium complementi anguli obliquitatis, quem facit linea objectiva cum plano verticali (in noſtro

ſtro exemplo per 35°, quod eſt medietas de 70°, ſive complementi 20°). Interſectio rectarum KQ, & GL determinat punctum L perſpectivum extremi alterius quæſiti. Quod ſi enim ad ea, quæ fieri præcepimus, attendatur, patebit, factam fuiſſe projectionem perſpectivam trianguli objectivi iſoſcelis GKL, cujus crura GK, & GL optice æqualia ſunt.

395. OBSERVA. Si ſeparatim conſtruatur, vel trigonometrice calculetur triangulum rectangulum, cujus hypotenuſa ſit recta objectiva data, & unus ex angulis acutis æqualis angulo obliquitatis lineæ objectivæ cum plano verticali, ex valore lateris huic angulo oppoſiti reperietur, quantum extremum alterum lineæ objectivæ magis, minusve diſtet a plano verticali, quam extremum G: & ſi, ducta ex puncto viſus per G recta SM, accipiatur in inferiore margine tabulæ linea MP, qua lineæ objectivæ extremum quæſitum L magis, minuſve a plano verticali abeſt, & ducatur ad punctum viſus alia recta PS, hujus interſectio cum GH erit punctum L quæſitum.

396. PROBLEMA VII. *Lineam datam perſpectivam in quotvis partes optice æquales dividere.*

RESOLUTIO. Sit data PQ (fig. 57) in quatuor partes æquales dividenda. Ex quovis puncto S lineæ horizontalis ducantur per ejus extrema P, Q rectæ SD, ST occurrentes margini inferiori tabulæ. Intervallum DT ſecetur in partes æquales DM, ML, LG, GT, & ducantur SM, SL, SG, quæ datam PQ in punctis *m*, *l*, *g*, in partes optice æquales divident. Manifeſtum enim eſt, eas partes intercipi inter parallelas objectivas SD, SM, SL, SG, ST (383) æqualiter inter ſe diſtantes, ac rectam TD in partes æquales ſecantes; igitur per easdem data PQ in partes perſpective æquales dividitur.

397. OBSERVA I. Pro majore accuratione, punctum S ita ſeligendum eſt, ut quantum fieri poteſt, diſtantiæ ejus ab extremis datæ PQ ſint æquales.

398. OBSERVA II. Si recta PQ dividenda ſit in partes inæquales in ratione data, in eadem ratione dividatur TD (id, quod ope *circini proportionum* expedite fit), & rectæ ex S ad diviſionum puncta ductæ ſecabunt quoque datam PQ in ratione data.

399. PROBLEMA VIII. *Ex dato puncto A in tabula ducere perſpectivam AK rectæ, quæ cum plano verticali faciat angulum objectivum majorem, quam ut graduum numerus in diviſionibus lineæ horizontalis exhiberi poſſit* (fig. 57).

Ex dato puncto A ad eam partem, ad quam ſpatii commoditas admittit, ducatur recta AH horizontali parallela, & æqua-

lis

lis projectioni perſpectivæ radii principalis. Ex puncto viſus O accipiatur OZ deſignans gradus complementi anguli dati, & conferatur cum diviſionibus marginis inferioris, ut ſciatur, quot modulos contineat: tum ducatur OH, & ex ea abſcindatur HK, tot modulis perſpective æqualis, quot continet OZ: recta AK erit quæſita perſpectiva.

Etenim cum AH ſit æqualis radio principali, & AHO projectio anguli recti, ſequitur, HK eſſe tangentis anguli HAK, ſive complementi anguli dati, projectionem: igitur AK habet ſitum, qui quærebatur.

400. OBSERVA. Quod ſi recta quæſita ſimul debeat eſſe magnitudinis datæ, accipiendum eſt in AH punctum N ita, ut AN ſit perſpective æqualis magnitudine datæ; & ducenda NC ad diviſionem lineæ horizontalis, quæ indicat dimidium complementi anguli objectivi dati (394): obtinebitur AV.

401. SCHOLIUM. Allata adhuc Problemata oſtendunt, ope marginum ſcalarium haberi poſſe delineationem perſpectivam plani alicujus objectivi non tantum ex laterum, ſed etiam angulorum magnitudine. Atque ut id fiat accuratius, & expeditius, ſæpe perutile eſt, adhibere ſimul diverſarum diagonalium tum ſitum, tum longitudinem, quarum computus in polygonis regularibus admodum facilis eſt. Verum res hæc diligens requirit exercitium.

402. PROBLEMA IX. *Rectas ad planum horizontale perpendiculares optice exhibere; ſive*, quod idem eſt, *linearum altitudinum projectionem perſpectivam invenire.*

I RESOLUTIO. Problemati ſatisfit per ea, quæ ſuperius N. 357 dicta ſunt.

403. II RESOLUTIO. Oporteat ex puncto Q (fig. 57) ad horizontem perpendicularem excitare, $6\frac{1}{2}$ modulos altam. Ducatur ex puncto viſus O, vel alio quovis lineæ horizontalis, per Q recta OF usque ad inferiorem marginem tabulæ F, indeque erigatur ad eundem marginem normalis FE, $6\frac{1}{2}$ modulos, in ejusdem diviſionibus acceptos, longa: ducatur OE: hujus interſectio I cum QI ad horizontalem perpendiculari ex Q erecta, erit ſupremum punctum lineæ quæſitæ.

Nam evidens eſt (381), OF, OE eſſe projectiones duarum linearum ad libellam ductarum, ac inter ſe parallelarum, conſequenter rectis FE, QI, ab illis interceptis, exhiberi objectivas æquales.

404. III RESOLUTIO. Conſtat, diſtantiam lineæ horizontalis a projectione perſpectiva alicujus puncti objectivi in plano Geometrico collocati tot eſſe modulorum, quot aſſumta eſt altitudo

oculi

oculi ſupra planum Geometricum. Exempli gratia, ſi linea horizontalis ducta eſt ad diſtantiam 5 modulorum a margine inferiore, diſtantia puncti Q a linea horizontali debet continere quinque modulos perſpective acceptos. Quod ſi itaque ſpectetur QR ut quinque modulorum, in eadem ſupra R accipi poteſt punctum I, quod a Q diſtet $6\frac{1}{4}$ partibus æqualibus, quarum in QR continentur quinque. Executio facilis eſt ope *circini proportionum.*

405. PROBLEMA X. *Lineas perſpectivas altitudinum in partes æquales, ſive inæquales in ratione data, dividere.*

RESOLUTIO. Cum lineæ perſpectivæ altitudinum ſint ad planum tabulæ parallelæ, in partes æquales, vel inæquales in ratione data non ſecus, ac lineæ objectivæ dividendæ ſunt, idque vel ope *circini proportionum*, vel ex diviſionibus rectæ FE, in margine inferiore acceptis, ductis per QI rectis ad O, quibus in eadem ratione, ac FE, ſecatur QI.

406. PROBLEMA XI. *Determinare in tabula punctum accidentale parallelarum inter ſe, & ad horizontem inclinatarum, quarum poſitio datur.*

RESOLUTIO. Cum parallelæ poſitione dentur, ſi concipiantur plana verticalia, in quibus ſingulæ ſitæ ſunt, evidens eſt, hæc plana fore inter ſe parallela, ideoque dari eorum ſitum reſpectu plani verticalis tabulæ. Jam igitur hæc plana vel ſunt plano verticali tabulæ parallela, vel ad illud obliqua quantitate data:

407. I. Si ſunt parallela ad planum verticale tabulæ, punctum accidentale quæſitum eſt in linea verticali tabulæ, ſupra, vel infra punctum viſus quantitate æquali numero graduum, qui ſunt complementum inclinationis parallelarum cum horizonte, & ex puncto viſus in diviſionibus lineæ horizontalis accipiuntur: & quidem ſupra punctum viſus, ſi parallelarum extrema ſuperiora a plano tabulæ ſint reclinata; infra vero, ſi verſus tabulam vergant.

408. Sit exempli cauſa delineandum parallelepipedum rectangulum, cujus plana ſint ad horizontem ſub angulo 39° inclinata, longitudine illius ad planum verticale parallela, velut trabs quadrangularis in murum ad planum tabulæ parallelum reclinata (fig. 60). Manifeſtum eſt *primo*, rectas quatuor plana lateralia parallelepipedi claudentes eſſe omnes ad horizontem angulo 39° inclinatas; dextimum vero & ſiniſtimum planum eſſe plano verticali tabulæ parallelum. *Secundo* Plana baſium eſſe itidem ad horizontem inclinata angulo 51°, complemento ſcilicet ad 39°, ob rectos angulum quemvis ſolidum conſtituentes. *Tertio* ex octo lateribus baſium eſſe quatuor horizonti parallela (quorum projectiones hic ſunt *ab*, *dc*, AB, DC), nempe imprimis latus, cui in plano Geometrico incumbit, eique in eadem baſi parallelum (AB, DC); dein latus,

quo innititur muro, & huic in baſi illa parallelum (*a b*, *d c*): reliqua quatuor harum baſium latera (*a d*, *b c*; A D, B C) eſſe ad horizontem inclinata angulo complementi ad 39°. Ex his apparet, in linea verticali reperienda eſſe duo puncta accidentalia; alterum T ſupra punctum viſus, pro lineis A *a*, B *b*, C *c*, D *d*, plana lateralia parallelepipedi terminantibus, quarum puncta ſuprema recedunt a plano tabulæ: alterum P infra punctum viſus S, pro lateribus baſium A D, B C, *a d*, *b c*, quorum ſuperior pars verſus tabulam accedit. Itaque ex linea horizontali accipienda eſt imprimis tangens 39°, & in verticalem ex S in T transferenda; dein tangens 51° ex S in P. Reliqua ex inſpectione figuræ patent.

409. II. Si plana verticalia, in quibus ſunt parallelæ datæ, faciunt cum plano verticali tabulæ angulum, uti ſi ſupponamus, parallelepipedum exempli prioris eſſe reclinatum in planum, quod cum verticali faciat angulum 30°, ſive cum plano tabulæ angulum 60°, tum opus eſt tribus punctis accidentalibus, uno in T (fig. 59) pro rectis terminantibus plana lateralia parallelepipedi; altero in Q pro lateribus baſium, quorum alterum eſt in plano geometrico, alterum in plano, in quod reclinatur parallelepipedum, atque pro his parallelis: tertio in P pro reliquis quatuor lateribus baſium, quorum duo plano geometrico, duo muro oblique inſiſtunt.

410. Quod ad punctum Q pro parallelis, quarum una eſt in plano geometrico, nulla eſt difficultas, quippe quod ſumi debet in lineæ horizontalis ea diviſione, quæ denotat angulum obliquitatis earum cum plano verticali. Sed ut reliqua, v. g. T, reperiantur, ſequens adhiberi poteſt methodus.

411. In linea horizontali V Q accipiatur V E tangens complementi anguli inclinationis planorum lateralium parallelepipedi cum horizonte; transferatur ex O in perpendicularem O F, ſumpto O ad diviſionem 45°: jungantur F & V recta, quæ ſecet in R alteram perpendicularem, erectam ad D, ubi notatur complementum declinationis planorum lateralium a plano verticali: transferatur O F ex D in K, & junctis K & R, fiat D T = K R; erit T punctum accidentale quæſitum. Eodem modo invenitur punctum P.

412. Ut methodi veritas demonſtretur, cogitandum eſt, quod recta ad horizontem ſub angulo v. g. 39° inclinata indefinite producta in ſuperficie ſphæræ cæleſtis pertingeret ad punctum 39° ſupra horizontem elevatum, aut vero ad peripheriam circuli minoris ſphæræ cum horizontali paralleli, & undique ab eo 39° diſtantis (id genus circulus voce Arabica *Almicantarath* appellatur). Jam vero cum projectio perſpectiva horizontis cæleſtis ſit linea

hori-

horizontalis tabulæ (377), *projectio alicujus Almicantarathi eſt hyperbola, cujus vertex eſt in linea verticali, & ſemiaxis principalis æquatur tangenti altitudinis illius ſupra horizontem* (ſive parti lineæ horizontalis interceptæ inter punctum viſus, & diviſionem numerum graduum altitudinis deſignantem); *ſemiaxis vero conjugatus radio principali.*

413. Circulus enim cæleſtis horizonti parallelus eſt baſis coni optici, cujus vertex in oculo, & baſis coni oppoſiti aliud Almicantarathum tantundem infra horizontem depreſſum. Sit A (fig. 58) locus oculi; A B H repræſentet planum horizontis cæleſtis cum plano geometrico ad diſtantiam infinitam ab A concurrentis; P T ſit planum tabulæ; E G M Almicantarathum ſupra horizontem angulo H A E elevatum; K N I Almicantarathum infra horizontem. Evidens eſt, ſectiones conorum oppoſitorum M S *m*, N S *n* per planum tabulæ P T ad eorum axem C L parallelum eſſe hyperbolas, quarum centrum eſt punctum viſus tabulæ B, & ſemiaxis principalis A D, ſive S B. Et ut oſtendatur, quod ſemiaxis conjugatus ſit A B, eſto A D vel S B $= a$, S D $=$ P C $=$ A B $= b$ (eſt autem A B radius principalis). A C, vel B P ſit $= x$; hinc S P $= x - a$; P M $= y$. In triangulis rectangulis A S D, S E P ſimilibus eſt A D : S D $=$ S P : E P; igitur E P $= \frac{bx - ab}{a}$; & E C $=$ E P $+$ P C $= \frac{bx}{a}$; item P G $=$ P C $+$ C G $= \frac{bx + ab}{a}$. Jam vero ex natura circuli E M G, habetur (Elem. 565) P M^2 $=$ P E $\times$ P G; igitur $yy = \frac{bb\,xx}{aa} - bb$, quæ eſt æquatio ad hyperbolam, cujus ſemiaxes ſunt a & b (Elem. 840).

414. Hinc jam conſtat, quod ſi, ſumta V C $=$ V E, notetur in plano (fig. 59) verticali punctum C altitudinis 39°, ac per illud deſcribatur hyperbola C T ſemiaxibus V C, V O, ea ſit projectio perſpectiva Almicantarathi 39°, & punctum accidentale quæſitum in eadem exiſtat, ubi a perpendiculari ex D erecta ſecatur. Reſtat jam, ut demonſtretur, conſtructione expoſita (411) verum punctum T reperiri.

415. Sit itaque V O $= b$, V C, vel O F $= a$; V D $= y$; D T, aut K R $= x$: ob triangula V D R, O V F ſimilia, eſt O V : O F $=$ V D : D R, hinc D R $= \frac{ay}{b}$; & D R^2 $= \frac{aayy}{bb}$. Et quia K D, ſeu V C $= a$, eſt K D^2 $= aa$. Porro ob triangulum K D R rectangulum, K R^2 $=$ K D^2 $+$ D R^2, ſive $xx = aa + \frac{aayy}{bb} =$ D T^2: ergo (Elem.

844) D T eſt ordinatim applicata ad axem conjugatum hyperbolæ, cujus ſemiaxes ſunt V C, V O.

416. COROLL. I. Liquet (Elem. 833), V F eſſe aſymptotum hyperbolæ C T: hinc dato puncto T almicantarathi 39°, facile eſt, hyperbolam integram, quæ ſit ejus projectio perſpectiva, deſcribere (Elem. 874).

417. OBSERVA I. Hæc methodus commode adhibetur, ſi inclinatio, & declinatio linearum objectivarum 50 vel 60 gradus non excedat: quod ſi enim major ſit, lineas in plano tabulæ admodum producere neceſſe eſt, quod non ſine incommodo fit. Unde in ejusmodi caſu puncto accidentali carere debemus, & quasvis lineas ſingillatim determinare, quærendo trigonometrice, vel graphice (vide methodum N. 518) punctum plani geometrici, in quod cadit perpendiculum ex cujusvis ſupremo puncto demiſſum, nec non ipſam perpendiculi altitudinem; ac punctum illud plani geometrici, una cum perpendiculi altitudine optice deſcribendo.

418. OBSERVA II. Si, quæ adhuc dicta ſunt, rite intelligantur, ipſa figura 59 oſtendit, quam facilis ſit parallelepipedi deſcriptio optica, quam ſuperius (N. 409) expoſuimus.

419. COROLL. II. Ex fig. 58 patet, *a* eſſe tangentem anguli inclinationis parallelarum datarum, qui dicatur I; *y* tangentem anguli obliquitatis, quem faciunt earum plana cum plano verticali tabulæ, qui vocetur O; *b* vero ſinum totum, qui ſit R. Igitur formula $xx = \frac{aabb + aayy}{bb} = (bb + yy) \times \frac{aa}{bb}$ factis his ſubſtitutionibus in hanc abit $xx = (R^2 + tang^2 O) \times \frac{tang^2 I}{R^2}$. Eſt autem ex Trigonometria $ſec^2 = R^2 + tang^2$; quare etiam $xx = ſec^2 O \times \frac{tang^2 I}{R^2}$, & hinc $x = ſec\ O \times \frac{tang\ I}{R}$. Sed ex iisdem regulis trigonometricis eſt $ſec = \frac{R^2}{cof}$: quare $x = \frac{R^2}{cof O} \times \frac{tang\ I}{R} = \frac{R \times tang\ I}{cof\ O}$. Unde obtinetur hæc analogia: *Ut eſt coſinus anguli obliquitatis planorum, in quibus ſunt parallelæ objectivæ ad horizontem inclinatæ, cum plano verticali tabulæ, ad tangentem anguli inclinationis earundem cum horizonte; ita eſt ſinus totus ad diſtantiam puncti accidentalis harum parallelarum a linea horizontali tabulæ.*

420. COROLL. III. Hinc etiam ſequitur, quod ſi ex omnibus gradibus in linea horizontali notatis erigantur perpendiculares, eæ ſint projectio perſpectiva circulorum maximorum horizonti perpendicularium (qui in Aſtronomia dicuntur circuli verticales), quorum gradus metiuntur inclinationem quamvis rectarum ad hori-

zon-

zontem, & planum verticale obliquarum. Ipſa quoque linea verticalis tabulæ ejusmodi circulum exhibet, qui cum meridiano ſphæræ cæleſtis comparari poteſt. Quod ſi quis igitur has projectiones circulorum verticalium in ſuos gradus dividere voluerit, lineæ verticali tabulæ easdem tribuet, quæ fiunt in linea horizontali; reliquarum diviſiones expedito calculo per analogiam præcedentem reperiet.

421. Sed ut diviſio hæc peragatur graphice, ſit O Q (fig. 61) linea horizontalis, S B verticalis, O Y projectio circuli verticalis dividenda. Transferatur radius principalis ex O in Q, & diſtantia O S, verticalis dividendi a puncto viſus S, ex O in M. (ſi linea verticalis tabulæ inſtar meridiani conſideretur, diſtantia hæc O S voce Aſtronomis uſitata dicetur *azimuthum* verticalis dividendi). Conjungantur M & Q recta, & centro Q, radio Q O deſcribatur arcus O N: demittatur ex N ad O Q perpendicularis N L, erit L Q maniſeſte coſinus azimuthi, ejus tangente exiſtente O M, & ſinu N L. Transferatur L Q in partem oppoſitam ex Q in P, & ducatur per P perpendicularis ad horizontalem P R, in quam, velut in *t*, *u*, *x* &c verſus utramque partem puncti P transferantur diviſiones lineæ horizontalis ex S acceptæ. Ducantur per puncta *t*, *u*, *x* &c & Q rectæ, quæ determinabunt puncta diviſionum quæſita T, V, X &c. Cum enim P *t* v. g. ſit tangens 10° radio exiſtente O Q, ex ſimilitudine triangulorum rectangulorum Q O T, Q P *t* habetur Q P : P *t* = Q O : O T. Quæ eſt analogia corollarii præcedentis (419.

422. OBSERVA III. Si fingamus ſphæræ cæleſti, vel terreſtri inſcriptum eſſe cubum, ad cujus duo plana oppoſita axis æquatoris, vel eclipticæ ſit perpendicularis, per præcedentes regulas in quatuor planis reliquis, per quæ axis non tranſit, optice exhiberi poſſunt omnia puncta ſuperficiei ſphæræ, quæ undique ab æquatore vel ecliptica intra 45 gradus continentur. Reliquorum vero projectio eodem modo fieri poſſet, ſi ſupponerentur plana cubi producta. Atque hunc in modum conſtructæ ſunt chartæ cæleſtes Pariſ Pardies.

423. PROBLEMA XII. *Projectionem opticam facere figuræ in plano libellæ a plano geometrico diſtante deſcriptæ.*

RESOLUTIO. In margine inferiore tabulæ A B (fig. 62) accipiatur numerus modulorum, quo planum datum ſupra planum geometricum elevatum eſt, transferaturque in utrumque marginem lateralem ex B in L, & ex A in K: conjungantur L & K recta, quæ jam inſtar marginis ipſius inferioris A B conſideretur, & ſpatium L C D K tanquam totum planum tabulæ, veluti ſi figura, cujus projectio petitur, ſita foret in novo hujus plano geometrico. Un-

de LK easdem habebit diviſiones, quas AB, eundemque uſum reſpectu figuræ delineandæ, quem AB reſpectu objectorum in vero plano geometrico ſitorum. Lineæ porro horizontalis diviſiones immutatæ manent, eademque iis utendi ratio; verum quod ad lineas CL, DK, in quibus diſtantiæ punctorum figuræ delineandæ a plano tabulæ accipi debent, diviſiones non ſunt eædem, ac in CB, DA, attamen proportionales. Unde inveniri poterunt vel ope circini proportionum, vel graphice ſequente methodo.

Ducatur ad DA ſub angulo quovis DF, eique æqualis, atque transferantur in eandem diviſiones marginis DA, quarum correſpondentes in DK petuntur. Jungantur K, F, & ad KF per ſingula diviſionum rectæ DF puncta agantur parallelæ, quæ determinabunt diviſiones quæſitas in DK. Exempli cauſa, ſi oporteat in DK deſignare diſtantiam duorum modulorum a tabula, accipiendi ſunt duo primi moduli decreſcentes ſcalæ DA, atque ex F in G transferendi; tum ducenda eſt GH ad FK parallela; erit KH diſtantia quæſita in plano ſupra geometricum elevato.

Eadem omnino operandi ratio eſt, ſi ponatur planum, in quo figura repræſentanda eſt, ſupra planum horizontale tabulæ, vel infra planum geometricum, uti v. g. in foſſa. Nam in priore caſu LK ſupra CD, in poſteriore infra AB, velut in *lk*, conſtituenda eſt.

424. PROBLEMA XIII. *Dato puncto perſpectivo* B (fig. 63) *centri circuli radii dati, v. g. trium modulorum, exhibere projectionem circuli.*

RESOLUTIO. Per punctum datum B ducatur ex puncto viſus V recta VF, & DC ad horizontalem parallela, fiantque BD, BC trium modulorum optice decreſcentium. Per idem B ducantur quoque PG, OL ad diviſionem 45 graduum utrinque a puncto viſus in linea horizontali. Similiter ex diviſione $22^{\circ}\frac{1}{2}$ ex parte dextra ducantur rectæ per C & D, quæ OL ſecabunt in M & N. Ex eadem diviſione ad partem ſiniſtram $22^{\circ}\frac{1}{2}$ rectæ ad C & D ductæ ſecabunt PG in I & K. Denique per octo puncta inventa C, I, E, N, D, K, F, M, ducatur curva regularis, erit ea projectio perſpectiva circuli petiti.

425. Evidens eſt, *projectionem perſpectivam circuli eſſe ellipſin, quemcumque is ſitum habeat.* Radii enim ex ſingulis circuli peripheriæ punctis ad oculum ducti conum, ſive conoides, efficiunt, cujus vertex eſt in oculo, & ſectio per planum tabulæ neceſſario eſt ellipſis.

426. Deſcriptio ellipſis facilior, & accuratior fit, ſi per E & F ducantur ad lineam horizontalem parallelæ, quæ efficiant trapezium, quod erit projectio quadrati, cui circulus inſcriptus eſt, PLGO. Itaque ellipſis ita erit deſcribenda, ut omnia quatuor la-

tera

tera trapezii in C, D, E, F, tangat. Si ad modum operandi præſcriptum attendatur, patebit, eum adhiberi poſſe ad inveniendos vertices angulorum octogoni circulo inſcripti.

427. OBSERVA. Equidem facile apparet, centrum ellipſeos non eſſe B, nec ejus axem majorem DC. Sed centrum eſt punctum medium S rectæ EF. Nam cum OG, & PL ſint tangentes ellipſeos, & DC eis parallela, hæc biſecatur in B per rectam EF, quæ per puncta contactus tranſit; igitur DC eſt ordinata diametri EF, in cujus medio conſequenter eſt centrum S.

428. Quod poſitionem axium hujus ellipſeos attinet, ea diverſa eſt, pro diverſa ſcilicet circuli objectivi diſtantia tum a plano verticali, tum a plano tabulæ. Et quoniam id ſcire pulchrum magis, quam utile in delineationibus, generatim notaſſe ſufficiat, axem majorem ellipſeos, quæ ſit projectio perſpectiva circuli, non eſſe, niſi projectionem chordæ illius, quæ jungit puncta contactus circuli cum radiis extimis ex oculo ad circulum dictis.

CAPUT III.

Exemplum, & obſervationes generales pro delineationibus Perſpectivis omnis generis.

429. Cum objecti multis partibus conſtantis deſignatio optica facienda eſt, in eo maxime elaboret delineaturi induſtria, oportet, ut ſolerter advertat, quænam lineis ſimiliter ductis comprehendantur, quæ inter parallelas easdem, quæ in iisdem verticalibus, in iisdem diagonalibus &c. conſiſtant, ut ſingulæ in projectione locum debitum ſortiantur, ne errorum numerus, quibus praxis a regularum accuratione deficit, etiam ex hoc capite augeatur.

430. Proponatur exempli cauſa ex regulis Perſpectivæ delineatio ſtylobatæ ordinis Tuſci cum plintho baſeos columnæ facienda, ita, ut trunci planum alterum aſpectabile inclinatum ſit ad planum verticale tabulæ ſub angulo 40° ex ſiniſtra parte, alterum ex parte dextra ſub angulo 50°, ſitque diſtantia anguli quadræ, qui oculo eſt propior, a plano tabulæ unius, & a plano verticali duorum modulorum verſus ſiniſtram. Omnium autem membrorum ſtylobatæ dimenſiones eæ ſint, quas fig. 64 notatas exhibet numeris ſuis, quamvis ipſa deſcriptio illius utcunque rudis eſſe poſſit, quippe cujus nullus uſus alius in præſens eſt, quam ut ſingulorum membrorum nexum & ordinem monſtret.

431. At-

431. Atque ne difficultatum, quæ in delineatione occurrere poſſunt, numerus, ſi ſimul aſpectui objiciantur, tironem abſterreat, eas plurium figurarum deſcriptione partiemur, quo etiam linearum multiplicium confuſioni occurretur. Unde pro aſſumptæ tabulæ magnitudine, ubi marginum ſcalarium conſtructio peracta erit, ducatur ex puncto viſus V (fig. 73) ad diviſionem 2 marginis infimi verſus ſiniſtram lineæ verticalis recta V 2, & per puncta 1, 1 marginum lateralium altera 1 A 1, cujus interſectio exhibet punctum perſpectivum A anguli ſtylobatæ oculo proximi (389).

432. E puncto A ducantur indefinitæ A 40°, A 50°, exhibentes ſitum planorum conſpicuorum; ex puncto viſus V vero ad marginis infimi diviſionem 7 recta V 7, quæ interſectione ſua cum 1 A 1 determinat A C (393) novem modulorum decreſcentium; tot enim ex ſtylobatæ dimenſionibus quadræ longitudini competunt. Jungatur C cum 20° (medietate 40 graduum, qui complementum ſunt ad 50°) ex parte dextra ſumtis, habebitur projectio E anguli quadræ dextimi (394). Hinc jam facile poſitio tota quadræ A D F E abſolvetur, ducta ex A ad 5° (quæ ſcilicet directio diagonalis eſt) recta, & altera E F ex E ad 40°, interſectio F erit angulus viciniori A oppoſitus. Denique ducatur per F & 50° recta occurrens alteri A 40° in D.

433. Et quoniam quadræ latera æqualia in ichnographia quadratum efficiunt, & reliqua omnia ſtylobatæ membra ſingulorum laterum æquales dimenſiones habent; non ſolum diagonalis quadræ per A & F deſcripta, ſed etiam omnium reliquorum membrorum, quæ in eorum planis concipi poſſunt, verſus 5° ex parte dextra lineæ horizontalis tendere debent, quippe quæ diviſio 45 gradibus abeſt a 40° ex ſiniſtra, & 50° ex dextra ſumtis.

434. Præterea manifeſtum, quod ſi concipiatur planum perpendiculariter erectum ſuper diagonali A 5 projectionis ichnographiæ quadræ, omnes reliquorum membrorum diagonales in eodem ſint ſuturæ.

435. Atque hinc I°, ut membrorum projecturæ, & retractiones commodius deſignentur, ejusdem diagonalis portionem oculo propiorem in partes optice æquales dividere conſultum eſt (399). Et ne diverſi generis diviſionibus marginis infimi uſus impeditior fiat, adhibeatur pro novis hiſce linea A C margini parallela; cum porro arbitraria ſit puncti ad hanc diviſionem peragendam in linea horizontali electio (395), aſſumatur hoc in 40°, ducaturque inde per E (fig. 74) recta, donec A C ſecet in G, productam, ſi opus ſit. A G dividatur in 9 partes æquales, quoniam lateri quadræ 9 mo-

moduli tributi ſunt. Primæ duæ partes ad A ſubdividantur in minores, uti hic in dimidias. Ad puncta hæc ducantur ex 40° rectæ occurrentes diagonali in H, K, L, quæ conſtituendis projecturis, & retractionibus ſervient, ideoque iisdem numeris notanda ſunt, ac partes in A G correſpondentes.

436. Illud vero hic probe notandum, partes A H, H K, K L, non eſſe projectiones perſpectivas ſemimodulorum, ſed eſſe eas ad ſemimodulos, ut eſt diagonalis quadrati ad latus ſuum, ſeu ut $\sqrt{2}$ ad 1. Dimidii moduli decreſcentes ſunt partes A *h*, *h k*, *k l*. Diviſiones vero lineæ A F deinceps *ſcalam projecturarum* vocabo.

437. II°. Ut dimenſio altitudinum expeditior ſit, producta diagonali F A, uſque dum occurrat margini inferiori in M, erigatur inde perpendicularis indefinita M T, in quam ex diviſionibus marginis inferioris transferantur omnes dimenſiones altitudinum, quæ in prima ſitus & magnitudinum conſtitutione (fig. 64) ſingulis partibus tributæ ſunt, in N, O, P, Q, R, S, T. Rectam M T in ſequentibus *ſcalam altitudinum* appellabo (fig. 74).

438. His ita conſtitutis, erigantur ex quatuor angulis projectionis quadræ perpendiculares indefinitæ A B, D I, F G, E C, (fig. 75), & jungatur punctum N ſcalæ altitudinum cum puncto 5° lineæ horizontis: interſectio cum A B abſcindit altitudinem perſpectivam anguli quadræ in B. Ex hoc eodem puncto B agatur recta ad 40°, quæ determinabit apicem I altitudinis D I anguli quadræ ex parte ſiniſtra conſpicui; item altera ad 50°, quæ anguli dextri altitudinem C præbet. Ducantur ex C ad 40°, & ex I ad 50° rectæ, habebitur earum interſectione in G altitudo anguli quadræ, qui angulo A opponitur. Quod ſi omnia accurate ex regularum præſcripto hactenus facta ſunt, interſectio modo dicta G non ſolum erit in perpendiculari F G, ſed etiam in diagonali per N & 5° tranſeunte: id quod examinis inſtar eſſe debet, tum ut errores ita deprehenſi corrigantur, tum ut deinceps evitentur.

439. Pro regula O N in (fig. 64) ſitus & magnitudinum conſtitutione prima deſignata, ducantur primum diagonales B G, I C (fig. 76); & quia hæc regula o, 6 moduli retrahi debet, accipiatur in ſcala projecturarum pars A H = o, 6. Dein erigatur ex H normalis, occurrens, diagonali G B in D, erit D angulus inferior regulæ, qui ſi jungatur cum 40° & 50°, interſectiones diagonalis I C exhibent ejuſdem regulæ angulos K & F. Rectæ porro ex K ad 50°, & ex F ad 40° ductæ, ſe in ipſa diagonali B G ſecabunt, atque illic in E habebitur quartus angulus regulæ. Unde quadrilaterum D K E F baſin regulæ exhibet, qua quadræ incumbit. E quatuor repertis modo punctis erigantur perpendicula indefinita;

tum nectatur punctum O ſcalæ altitudinum, quod regulæ altitudinem deſignat, cum 5° recta O 5, quæ occurrens perpendiculari DV in V angulum ſuperiorem regulæ, qui oculo proximus, deſignat; in Y vero (ubi alteram perpendicularem ex E erectam ſecat) huic oppoſitum; rectæ denique ad V ex 40° & 50° ductæ determinant reliquos duos L & X. Et ſiquidem cōnſtructio fuerit exacta, rectæ ex L ad 50°, & ex X ad 40° ductæ ſe in Y interſecare debent, id, quod examinandæ operationi ſerviet. Atque hunc in modum projectio optica regulæ perfecta eſt.

440. Ut jam truncus ſtylobatæ ſuper his erigatur, fiant diagonales LX, VY (fig. 77); & quia ex prima magnitudinum conſtitutione 1, 2 moduli retrahi debet, in ſcala projecturarum ſumatur AC = 1, 2. Erigatur in C perpendicularis indefinita, occurrens diagonali VY in K, in quo erit angulus inferior trunci, ſi eum apophyge carere ſupponamus. Jungantur 40° & 50° cum K, ut in diagonali LX acquirantur B & D, anguli laterales; & ductis ex B ad 50°, & ex D ad 40° rectis obtinebitur etiam quartus I in diagonali VY, eritque quadrilaterum KBID projectio perſpectiva plani trunci, quo regulæ inſidet.

441. E quatuor angulis inventis perpendiculares indefinitæ excitentur KE, BG, DF, IH, & ut ſingularum altitudo debita abſcindatur, ducatur ex 5° ad Q ſcalæ altitudinum (in hoc enim punctum cadere altitudo trunci ſupponitur) recta 5° Q, quæ in E angulum anteriorem determinat. Ex E ducantur porro E 40°, & E 50°, quæ in G & F abſcindunt angulos laterales; rectæ denique ex G ad 50°, & ex F ad 40° ductæ interſectione ſua H in ipſa Q 5° dant angulum poſticum, oculo non conſpicuum.

442. Ut apophygis trunci deſcribatur, jungat recta punctum P ſcalæ altitudinum, quod aſſumtam altitudinem apophygis æquat, cum 5°, quæ in *k*, ubi perpendiculum CK productum ſecat, eandem optice determinat; hinc porro rectæ ad 40° & 50° ductæ, uti ſuperius in projectione regulæ & quadræ factum, apophygis altitudines in reliquis angulis dabunt. Denique deſcribantur curvæ per *b* & L, per *d* & X, per *k* & V tranſeuntes, quarum prima & poſtrema cavitatem parti ſiniſtræ obvertant, cum oculus ad dextram ſtylobatæ ſit conſtitutus.

443. Ventum jam eſt ad coronidem ſtylobatæ, cymatio Lesbio, altitudine RQ (fig. 64) & regula SR conſtantem. Itaque plano ſupremo trunci (fig. 78) rite delineato fiant diagonales GF, EH, paullum ultra truncum excurrentes, cum cymatium projecturam habeat. Planum porro inferius, quo cymatium trunco inſidet, ex prima magnitudinum & ſitus conſtitutione retrahi debet o, 9

modu-

moduli. Unde ex punctо B ſcalæ projecturarum erigatur perpendicularis BC, occurrens diagonali EH productæ in C; erit C angulus anterior hujus plani, ex quo facile reliqui in I & L diagonalis GF, & in K diagonalis EH productæ reperientur.

444. Et quoniam regulæ latera ſunt in iisdem planis cum lateribus quadræ baſeos ſtylobatæ, producantur indefinite perpendicula angulorum V, A, X quadræ, qui ſcilicet videri poſſunt. Ex punctо R ſcalæ altitudinum ducatur R 5°, quæ interſectione in P cum perpendiculo AP, abſcindit angulum inferiorem regulæ; quod ſi altera quoque ex S ad 5° ducatur (eſt autem RS regulæ altitudo) ſupremus quoque angulus ejusdem in *p* habebitur. Ex *p* & P rectæ ad 40°, & 50° ductæ reliquos *n*N, *o*O præbent, ut alias factum.

445. Quia planum ſupremum cymatii intra regulam o, 3 moduli ex aſſumptis magnitudinibus retrahendum eſt, ducta diagonali NO (fig. 79.), atque erecta ex o, 3 ſcalæ projecturarum perpendiculari, quæ R 5° ſecat in *c*, habetur angulus ſupremus cymatii *c*; hinc vero rectæ ad 40°, & 50° ductæ, ubi diagonalem NO in *i* & *l* ſecant, alios quoque determinant. Deſcribantur curvæ *i*I, *c*C, *l*L, eæ cymatii projectionem abſolvent.

Supereſt modo plinthus baſeos columnæ. Et cum eadem quantitate, ac truncus ſtylobatæ, retrahatur, producantur rectæ angulares trunci indefinite. Punctum altitudinis plinthi T in ſcala acceptum jungatur cum 5° recta T 5°, erit interſectio E cum producto angulo trunci, angulus ſupremus plinthi, qui ſi nectatur cum 40°, & 50°, etiam G & F reliquos conſpicuos determinabit.

446. Hisce ſubjungamus obſervationes quasdam in præcedentes operationes.

I°. Si in prima magnitudinum & ſitus conſtitutione ſit projectura quædam ultra angulum infimum baſis, cui totum objectum inſiſtit, excurrens, ea in ſcala projecturarum deſignetur diviſione cis punctum A.

447. II°. Si margo ſupremus tabulæ eodem modo, ac infimus, diviſus ſit, ut N. 372 inſinuatum eſt, facilis erit omnium perpendicularium occurrentium erectio, quippe quæ fiet, ſi regula ita ad punctum, ex quo perpendicularis excitanda eſt, applicetur, ut per easdem utriusque marginis diviſiones tranſeat.

448. III°. In Perſpectiva practica diagonalium inſignis eſt uſus, tum ut angulorum in polygonis ſitus ad examen revocetur, tum etiam ut reperiantur polygonorum centra. Sic in allato exemplo operationum bonitas examinari potuit hunc in modum, obſervando ſcilicet, an omnium diagonalium, quæ ductæ ſunt, interſe-

ctiones ſint in eadem recta, ad lineam verticalem parallela, cum omnes debeant in axe ſtybolatæ, cujus projectio eſt linea perpendicularis, eſſe.

449. IV°. Interſectio diagonalium etiam adhiberi poteſt ad reperiendum in tabula punctum, in quod cadit perpendiculum ex apice alicujus pyramidis, turris campanariæ, alteriusve in cuſpidem coeuntis, aut tentorii militaris &c demiſſum.

450. V°. In diagonalibus commodiſſime etiam projecturæ, & retractiones diverſarum partium objecti determinantur; attamen hic uſus, quem præcedente exemplo oſtendimus, ad quadrata ſolum, & polygona regularia reſtringendus eſt; projecturæ enim & retractiones ad ſingula latera æquales quadrata aut polygona regularia concentrica conſtituunt, ideoque earum anguli ſunt in diagonalibus per centra planorum, quibus inſiſtunt, tranſeuntibus.

451. Quod ſi itaque hæc plana quadrata non ſint, ſed ut plerumque evenit, parallelogramma rectangula, velut A B C D (fig. 72), ubi A B, C D ſunt 3 ½ modulorum, & B C, A D 4 ½ decreſcentium; accipiantur in projectionibus laterum in ſe longiorum partes A E, B F; D G, C H optice æquales lateribus in ſe minoribus, in noſtro exemplo 3 ½ modulorum decreſcentium, ut in plano A B C D deſcribantur duorum quadratorum A B F E, D C H G projectiones, quarum diagonales B E, A F; G C, D H, uti ſuperius, ad angulos projecturarum, & partium retractarum reperiendos adhiberi poterunt. Commodum quoque fuerit, ſi ex his diagonalibus aliqua dividatur, & *ſcalæ projecturarum* vices agat.

452. At ſi planum ſit polygonum irregulare, tum loco rudioris illius partium adumbrationis, quæ veras magnitudines, ac ſitum ſolis notis numericis indicat, accurata, & geometrica conſtructio facienda eſt, projecturis & retractionibus ex veris dimenſionibus conſtitutis, & id quidem ope ſcalæ exactæ, magnique partium numeri, ac tantæ magnitudinis, ut etiam minores partes rite accipi poſſint. Præterea binæ perpendiculares in hoc plano ducendæ ſunt, quarum altera ſitum tabulæ, altera plani ejusdem verticalis habeat, ut ope circini ſingulorum punctorum ab his diſtantia accipi, & in ſcalam transferri poſſit, eorumque projectio perſpectiva juxta Problema V vel XII fieri.

CAPUT

CAPUT IV.

Apparatus neceſſarius, quando magnus objectorum ſitu, & magnitudine datorum numerus optice delineandus eſt.

Frontem ſcenæ appello omnia ea objecta, quæ in tabula ceteris anteriora, & velut in fronte, integra exhibenda ſunt.

453. I°. Cum magnus objectorum numerus eſt, quæ in tabula exhiberi debent, ſive, quod eodem redit, quando objectum repræſentandum ingens eſt, v. g. ædes magnificæ, palatium quodpiam, vel hortus cum ſuis ambulacris &c. diſtantiis partium inter ſe, ſitu, ac magnitudine conſtituta, ſeu rudiori rerum delineandarum adumbrationi adſcriptis numeris dimenſionum, ſeu in tabellam ex ordine relatis, primo indagandum eſt, quantum a tabula frons ſcenæ remota eſſe debeat. Hoc ut rite fiat, ſumenda eſt ex tabella magnitudinum parata objecti ceteris vicinioris, magisque eminentis altitudo, & ſequens analogia facienda:

Ut altitudo tabulæ
Ad radium principalem;
Ita altitudo objecti
Ad diſtantiam ab oculo, in qua conſtituendum eſt objectum, ut integrum in tabula exhiberi poſſit.

Exempli cauſa: ſi ſupponamus, AB (fig. 65) eſſe objectum viciniſſimum, ſimulque altiſſimum, ad 16 modulos aſſurgens; altitudinem tabulæ TR continere 5 modulos; radium principalem OT denique 10 modulis æqualem: erit RT: TO = BA: AO. Subductis calculis reperitur AO = 32 modulis, ideoque AT = 22 modulis. Igitur frons ſcenæ 22 modulis a plano tabulæ diſtare debet, ut objectum ei proximum, & ceteris altius integrum videri poſſit.

454. II°. Ulterius videndum, an ea ſit tabulæ latitudo, ut totam frontis ſcenæ amplitudinem capiat. Quem in finem fiat proportio:

Ut diſtantia objecti ab oculo per præcedentem analogiam reperta
Ad radium principalem;
Ita eſt latitudo frontis ſcenæ
Ad latitudinem, quam tabula habere debet, ut illam capiat.

455. Eſto AB (fig. 67) latitudo frontis ſcenæ = 48 modulis; O locus oculi ob objecto AB 32 modulis diſtantis = OC; DE latitudo tabulæ. Si tabula totam frontis latitudinem exhibet, radii ex oculo ad extrema utrinque latitudinis puncta ducti per ipſos margines tabulæ ad D, & E tranſeunt. Sunt autem triangula AOB, DOE ob parallelas AB, DE ſimilia; itaque perpendiculares OC,

OF ſunt magnitudines homologæ; & hinc OC: OF = AB: DE. Inſtituto calculo invenitur DE = 15 modulis. Ergo latitudo tabulæ 15 modulorum eſſe debet, ut in ea tota frontis ſcenæ latitudo & altitudo repræſentari poſſit. At ſi v. g. tabula non eſſet, niſi 12 modulos lata, frons ſcenæ longius removeri deberet, novaque diſtantia ex ſequente analogia, quæ prioris inverſa eſt, reperiretur:

Ut Latitudo tabulæ
Ad radium principalem;
Ita eſt latitudo frontis ſcenæ
Ad diſtantiam ejusdem ab oculo, ut tota in tabula exhiberi poſſit.

In priore hypotheſi invenietur 40 modulorum, ut adeo a tabula 30 modulis removeri deberet.

456. I P. Ut linea horizontalis, & verticalis tabulæ determinetur, eligendum eſt punctum in fronte ſcenæ, cui oculus ſpectatoris directe opponi debet; erit igitur certa quædam ejus puncti diſtantia a latere alterutro hujus frontis, tum etiam altitudo ſupra planum geometricum: utraque ſi e tabella magnitudinum ab initio conſtitutarum ſumatur, illa dabit diſtantiam lineæ verticalis ab alterutro margine laterali tabulæ; hæc vero diſtantiam lineæ horizontalis a margine inferiore. Hinc duæ, quæ ſequuntur, fiant analogiæ:

Ut diſtantia oculi a puncto in fronte ſcenæ aſſumto
Ad radium principalem;
Ita eſt diſtantia ejusdem puncti ab alterutro latere frontis ſcenæ
Ad diſtantiam lineæ verticalis a margine tabulæ ad eam partem ſumto, ad quam acceptum eſt latus ſcenæ.

Eſt enim CO : FO = CB : FE.
Dein . . . .

Ut diſtantia oculi a puncto in fronte ſcenæ aſſumto
Ad altitudinem ejusdem puncti ſupra planum Geometricum;
Ita eſt radius principalis
Ad diſtantiam lineæ horizontalis a margine inferiore tabulæ.

Etenim ſi CE (fig. 66) repræſentet planum geometricum, CA altitudinem puncti in fronte ſcenæ aſſumti, DF tabulam, patet eſſe OA : AC = OT : DT.

457. Quod ſi altitudo oculi ſupra planum geometricum alia commodior viſa fuerit, quam puncti in fronte ſcenæ aſſumti, ita ut hoc punctum ſolummodo ad ſitum lineæ verticalis determinandum adhibeatur, poſtrema analogia hunc in modum ex iisdem triangulis AOC, ODT conſtituenda erit.

Ut diſtantia oculi a verticali ad planum geometricum, quæ per punctum in fronte ſcenæ aſſumptum tranſit,

Ad

Ad altitudinem oculi ſupra planum geometricum;
Ita eſt radius principalis
Ad diſtantiam lineæ horizontalis a margine inferiore tabulæ.

458. IV°. Si frons ſcenæ AB (fig. 69) non ſit parallela plano tabulæ, ſed quantitate data BAL inclinata; uti ſi frons ædificii oblique oculo objicienda ſit, quæ totam tabulæ latitudinem exæquet; calculi præparatorii non nihil plus difficultatis habent: quæ tamen evitari poteſt, diverſis dimenſionibus tabulæ aſſumtis, dum tentando eæ reperiantur, quæ propoſito faciant ſatis; ſi ſcilicet prius quatuor extrema frontis ſcenæ puncta optice deſignentur, & ex trapezio inde orto tabulæ altitudo, & latitudo conſtituatur. Quod ſi lubeat eas calculo directe invenire, is ſequente ratione ineundus eſt.

459. Ubi punctum F, per quod planum verticale tranſire debeat, conſtitutum eſt (fig. 69), & ſeu ex calculo trigonometrico, ſeu ex conſtructione geometrica ſcalæ accuratæ ſubſidio magnitudo linearum AL, FM, AH, FH tenetur, ſit $OP = r$, $DE = t$, $PE = x$: eſt nempe PE diſtantia lineæ verticalis a tabulæ margine E, qua mox ſubjiciendo calculo reperta, cetera facile invenientur. Sit præterea $BL = b$, $FM = HL = d$, $AH = f$. Ex triangulis BGL, OPE ſimilibus habetur $OP : PE = BL : LG$, ſive $r : x = b : \frac{bx}{r} = LG$. Hinc $HG = d - \frac{bx}{r}$. Dein ob ſimilitudinem triangulorum HGO, PEO, eſt $PE : OP = HG : HO$, vel $x : r = d - \frac{bx}{r} : HO = \frac{dr}{x} - b$. Denique quia ſimilia ſunt triangula AHO, DPO, eſt $DP : PO = AH : HO$, aut $t - x : r = f : HO = \frac{fr}{t-x}$. Ex duplici valore de HO fiet hæc æquatio $\frac{dr}{x} - b = \frac{fr}{t-x}$, & facta reductione $xx - \frac{drx - btx - frx}{b} = -\frac{drt}{b}$; aut ſi brevitatis gratia ponatur $\frac{dr + bt + fr}{b} = a$, erit $xx - ax = -\frac{drt}{b}$. Unde $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa - \frac{drt}{b}\right)} = PE$. Ex PE datur etiam PD; inde $PD : OP = HA : HO$; eſt vero $PF = HO + HF - OP$: igitur habetur quoque diſtantia puncti viſus tabulæ P a puncto F in fronte ſcenæ, per quod planum verticale tranſire debet.

460. V°. Circa ſitum, & altitudinem oculi illud hic advertendum, in tabulis, quæ ornandis cubiculis deſtinantur, aliisque id genus picturis, altitudinem oculi commode 7 vel 8 pedum ſupra planum geometricum aſſumi, niſi quando magnus objectorum numerus

merus in eadem tabella repræſentandus eſt, v. g. integer hortus. Tunc enim major tribuenda eſt oculo altitudo, ne partes remotiores nimium contrahi debeant, & confuſe appareant. Id genus delineationes opticas Galli ad *viſum volucris* factas dicunt, quod tanta aſſumatur oculi altitudo, quaſi ex ſublimi cum avibus objectum intueri liceret.

461. Non igitur altitudo oculi ad communem hominis ſtaturam exigenda eſt, ut 5 vel $5\frac{1}{2}$ pedum ſit, niſi tabula ex magna diſtantia ſpectari debeat, ac intuentibus illudere, ut planum in ea depictum, cum ſolo, in quo conſiſtunt, in directum jacere, ac ultra tabulam excurrere arbitrentur. Hujusmodi ſunt tabulæ, quæ in fine ambulacri vel horti conſtitutæ, eorum limites longe ultra protenſos exhibent. In theatrorum ornatu oculi locus prope medium amphitheatri ſumitur, atque ad altitudinem trium, quatuorve pedum ſupra libellam illius, ut ſuggeſtum theatri directe excurrere, & plano perſpectivo continuum videatur.

462. Quod univerſim hac in re dici poteſt, illud eſt, talem ſemper oculi altitudinem eligendam eſſe, ut quam diſtinctiſſime videantur objecta, quorum projectio tabulæ maximam pulchritudinem conciliat. Hoc autem non aliter determinari poteſt, quam ſi prius tota ſcena diverſis modis adumbretur rudius, ut oculo diverſimode collocato apparitura eſt. Etenim certiſſimum eſt *ideo delineationem fieri ex legibus Perſpectivæ, ut imagines pulchræ ſint; at vero non ideo omnes imagines eſſe pulchras, quod earum delineatio ad leges exacta ſit.* Eſt hæc ſors omnium quidem artium, maxime tamen earum, quarum principia ex arbitratu noſtro non pendent.

463. VI°. Longitudo radii principalis diſtantiæ objectorum a tabula proportionata eſſe debet, ne rerum delineandarum partes aut contrahantur nimium, aut a figura ſua naturali diſſideant. Et ſi quidem tabula nec nimium procul ſpectari debeat, nec uni affigi loco, ſequens teneri poteſt regula: *radius principalis nec minor eſto dimidia, nec longior integra diagonali tabulæ, ſi objecta præcipua integra exhibenda ſunt.*

464. Nam experientia nos docet, uno obtutu, & oculo immoto, non poſſe objectum videri integrum, ſi angulus a radiis ab objecti extremis ad oculum ductis comprehenſus ſit obtuſus, nec ſatis diſtincte partes ejus cerni poſſe, ſi idem 60 gradibus minor ſit. Hinc vero facile patet, quod ſi oculus F (fig. 68) a medio tabulæ D diſtet quantitate D F æquali diagonali B C, radii ex oculo ad angulos tabulæ B, & C ducti, F B & F C, excedant diagonalem B C (cum hypotenuſa F C major ſit catheto F D = B C): atque ideo crura trianguli B F C paullo longiora ſunt, quam in triangulo æquilatero; igitur angulus

lus ad oculum minor eſt 60 gradibus. (Reperitur facili calculo 53°, 8′).

465. At ſi oculus E diſtet dimidia diagonali BC = ED, triangula EBD, ECD ſunt rectangula, & iſoſcelia; igitur anguli BED, CED ſunt ſinguli 45 graduum, & totus BEC 90 graduum.

466. In majoribus projectionibus, ut ſunt picturæ theatrales, hortenſes, ambulacrorum &c, quæ procul ſpectandæ ſunt, nec ſubtiliore elaborandæ penicillo, nec etiam objecta integra exhibere debent, diſtantia oculi ex ſitu loci determinanda eſt.

CAPUT V.

De Perſpectiva Umbrarum.

467. Regulis umbras optice exhibendi ars Pictoria nequaquam carere poteſt, maxime quando imagines referre debent corpora a ſole, aliove vicino lumine colluſtrata, ut umbrarum nigriorum limites non poſſint non in ſpectatoris oculos incurrere.

468. Punctum lucidum (ſive a quo corpus opacum illuſtratum umbram in partem directe oppoſitam projicit) poteſt eſſe vel trans tabulam, vel in ejusdem plano, vel cis iſtud.

469. Quando punctum lucidum eſt trans tabulam, fieri poteſt, ut vel ſit ante corpus opacum, vel poſt iſtud; ſi primum, umbra ita exhibenda eſt, ut intelligatur recedere a tabula, ideoque ejus projectio verſus lineam horizontalem dirigetur; ſi hoc, ſitque ſimul lucidum opaco altius, umbra verſus ſpectatorem cadet, & ejus delineatio verſus marginem inferiorem tabulæ verget: at ſi punctum luminoſum ſit depreſſius corpore illuminato, hujus umbra quidem rurſus ita exhibenda eſt, ut appareat verſus ſpectatorem projici, attamen in plano tabulæ verſus marginem ſuperiorem delineanda eſt.

470. Si punctum lucidum ſit cis tabulam, aut inter oculum, & tabulam exiſtere intelligitur, aut a tergo ſpectatoris. In utroque caſu umbræ recedunt a tabula, & projectio earum versus lineam horizontalem dirigitur.

471. Si punctum lucidum ſit Sol aut Luna, hoc ſupponi nequit, niſi vel ſit trans tabulam poſt objecta, vel in plano tabulæ, vel cis tabulam a tergo ſpectatoris: neque enim fieri poteſt, ut ſit trans tabulam, & ante corpus delineandum, aut intra tabulam & oculum, niſi ſimul ſit in ipſo zenith alicujus puncti inter tabulam & corpus opacum, vel inter oculum & tabulam ſiti; at quia diſtan-

tia horum ſiderum fere immenſa eſt, hi caſus locum non habent, niſi quando ſimul ſunt in zenith corporum delineandorum, tabulæ, & oculi, ideoque in plano tabulæ.

472. Ex his apparet, umbras corporum a ſole vel luna illuminatorum facilius determinari, quam quæ ex vicina alia luce, v. g. lampadis, vel cerei ardentis, oriuntur.

ARTICULUS I.

De proprietatibus umbrarum, quarum ratio in Perſpectiva habetur.

473. Quoniam proprietates umbrarum generales jam Parte I demonſtravimus, ſatis eſt, ſi modo eas hic afferamus, quæ ad Perſpectivam attinent.

474. THEOREMA I. *Umbræ corporum a ſole oriente vel occidente illuminatorum in planum horizontale projectæ, ſeu univerſim umbræ corporum, quando ſol aut punctum lucidum eſt in eodem plano, cui illæ inſiſtunt, indefinitæ ſunt.*

Nam longitudines umbrarum ſunt (37) ut cotangentes altitudinum corporis lucidi ſupra planum illuminatum; igitur quando hæc altitudo nulla eſt, hoc eſt, quando lucidum eſt in plano, in quo ſupponitur corpus opacum, cotangens altitudinis eſt infinita.

475. THEOREMA II. *Umbræ corporum ex luce ſolari intercepta ſunt ejusdem longitudinis, ac corpora, ſole elevato ad 45°.*

Umbræ ſunt longitudinis corporum dimidiæ, partes tertiæ, quartæ &c, ut altitudo ſolis fuerit 63°, 26′, vel 71°, 34′, aut 75°, 58′ &c. Vel vero ſunt duplæ, triplæ, quadruplæ &c ſole elevato ad 26°, 34′, ad 18°, 26′, ad 14°, 2′ &c, quæ omnia manifeſta ſunt ex tabulis tangentium.

476. THEOREMA III. *Umbra rectæ objectivæ cadens in planum quodcunque, eſt etiam optice recta.*

Nam punctum lucidum eſt vertex, & radii per extrema rectæ objectivæ tranſeuntes, ſunt latera trianguli, cujus baſis eſt recta objectiva: umbra porro hujus rectæ eſt planum trianguli ultra baſin productum: atqui hoc planum nequit per alterum planum occurrens ſecari, niſi linea recta (Elem. 629.): & hæc ſectio eſt projectio perſpectiva umbræ a linea objectiva in planum occurrens triangulo cadentis; igitur &c.

477. COROLL. *Datis itaque duobus punctis, per quæ umbra a linea recta projecta tranſit, datur ſitus umbræ* Et viciſſim *ut inveniatur ſitus umbræ*

bræ in planum quodpiam cadentis, reperienda ſunt duo puncta illius plani, per quæ umbra tranſit.

478. THEOREMA IV. *Umbra corporis opaci a puncto lucido illuminati eſt truncus pyramidis, quem complet pyramis verticem punctum lucidum, & baſin partem illuminatam corporis opaci habens. Extenditur indefinite in plagam oppoſitam puncto lucido, donec alterius corporis ſuperficie intercipiatur; & ſpatium, quod in hac ſuperficie occupat, eſt umbra projecta a priore corpore illuminato.*

Theorematis evidentia demonſtratione non eget.

479. COROLL. I. *Umbra corporis a puncto lucido illuminati eo latior eſt, quo lucidum illuminato propius, & ſuperficies umbram excipiens ab opaco remotior eſt.*

480. COROLL. II. *Umbra corporis illuminati a lucido infinite diſtante, ut a ſole vel luna, eſt prisma indefinite longum, cujus baſis altera eſt ſuperficies illuminata corporis, altera ſuperficiei umbram excipientis illud ſpatium, quod in eadem umbra occupat.* Hoc enim in caſu radii a lucido venientes ſunt inter ſe paralleli.

481. COROLL. III. *Si ad penumbram non attendatur, umbræ linearum rectarum exceptæ plano iis parallelo, ſunt rectæ, & lineis, a quibus projiciuntur, æquales.* Duo enim radii per extrema ejusmodi lineæ tranſeuntes ſunt inter ſe paralleli, ideoque cum linea & ejus umbra parallelogrammum conſtituunt. Ex hoc vero deducitur *primo, umbras corporum a ſole illuminatorum habere eandem latitudinem cum objectis ſuis directe ſoli expoſitis. Secundo: Projectiones perſpectivas umbrarum ſuis rectis objectivis parallelarum debere* (363) *ad eadem puncta accidentalia concurrere, ad quæ convergunt projectiones ipſarum linearum lumen intercipientium.*

482. COROLL. IV. Perimeter umbræ nil aliud eſt, quam projectio quædam Perſpectiva, pro qua locus oculi eſt punctum lucidum, objectum perimeter ſuperficiei illuminatæ, tabula illa ſuperficies, quæ umbram excipit.

483. THEOREMA V. *Umbra a linea verticali in planum quodvis projecta, ſi producatur, tranſit per illud punctum plani, in quod cadit perpendiculum a puncto lucido demiſſum.*

Sit (fig. 70 & 71) L punctum lucidum; P vel *p* punctum in plano ſeu inclinato, ſeu ad libellam poſito, infra aut ſupra lucidum, in quod cadit perpendiculum; verticales in hoc plano poſitæ ſint AB, vel CD; dico earum umbras FB, ED productas per P vel *p* tranſire. Cum enim rectæ AB vel CD ſint verticales, plana quoque triangulorum umbræ FAB, EDC erunt verticalia; atqui hæc ſi producantur, per L tranſire debent, ideoque ſeſe in verticali LP interſecant: ergo etiam latera FB, ED producta tranſeunt per P vel *p*.

484. COROLLARIUM I. *Si lucidum* L *ſit ſol vel luna, puncti, in quod cadit perpendiculum in planum Geometricum inde demiſſum, projectio eſt in linea horizontali.* Non enim, niſi ad diſtantiam infinitam a tabula, perpendicularis ex ſole ad planum horizontale demiſſum huic plano occurrere poteſt.

485. COROLLARIUM II. *Si plura lucida eandem lineam verticalem illuminant, tot fiunt umbræ, quot ſunt lucida, quæ ſingulæ, ſi producantur in plano, in quo excipiuntur, tranſeunt per puncta, in quæ cadunt perpendicula a lucidis oppoſitis demiſſa.*

ARTICULUS II.

De umbris corporum, quando ſol vel luna eſt in eodem plano cum tabula.

486. I°. Dum ſol in plano tabulæ & ſimul in horizonte verſatur, uti dum oritur vel occidit, omnes corporum umbræ in planum Geometricum projectæ, ob debilitatem lucis, ſunt dilutiores, ſimulque infinitæ (474). Quare earum projectiones opticæ lineæ horizontali tabulæ parallelæ protenduntur; & ſiquidem occurrat ſuperficies quædam ſupra horizontem erecta, in ea ad altitudinem corporibus lumen intercipientibus æqualem aſſurgunt. Cetera ex figura hic annexa facile intelliguntur. Vide fig. 80.

487. II°. Quando ſol angulo dato ſupra horizontem elevatus eſt, ſitus umbræ determinatur parallela ad lineam horizontalem ex pede corporis illuminati ducta, v. g. (fig. 81) ex *a*; dein ad apicem ſupremum *c* conſtruatur cum perpendiculo *c a* angulus æqualis complemento altitudinis ſolis; recta *c b* terminabit umbram *a b*, angulo *c b a* altitudini ſoli æquali; niſi forte obſtaculum opponatur, velut ſolidum A, vel murus *hm*. Hoc ſi fiat, umbra ex *d* perpendiculariter aſcendet in ſolidi plano *de* (planum enim trianguli umbræ *cab* verticale a plano occurrentis ſolidi itidem verticali non poteſt aliter, quam linea perpendiculari ſecari); inde in ſuperiore plano ſolidi parallele ad horizontem procurret ex *e* in *f*; tum rurſus in *g* priorem ſitum reſumet usque ad *i*. Hinc in muro verticali *hm*, usque dum in *k* pertingat ad lineam *c b*, aſſurget. Umbra ſolidi A eodem modo definitur, quem attulimus pro corpore *c a*, dum nullum obſtaculum occurrit.

488. OBSERVA. Quando altitudo ſolis arbitraria aſſumi poteſt, opus non eſt angulo ad *c*, ſed definitur longitudo umbræ ex ratione, quam ad corporum altitudinem habere ſupponi poteſt.

ARTI-

ARTICULUS III.

De umbris corporum, quando ſol vel luna eſt poſt planum tabulæ.

489. Si ſol oriens vel occidens ſit in ipſo horizonte, ſcire oportet (aut ſi arbitrarium eſt, aſſumere) quantum planum verticale per oculum & centrum ſolis tranſiens a plano verticali tabulæ declinet, hoc eſt, quonam diviſionis lineæ horizontalis puncto centrum ſolis ſit conſtituendum. (Id vero punctum *azimuthum ſolis* vocare licet). Hoc ubi in linea horizontali, etiam producta, ſi neceſſe ſit, habetur, ipſe ſol delineari poteſt dimidio diſco ſupra lineam horizontalem eminens, 24 vel 25 minutis ex illis diviſionibus utrinque a centro pro radio ſumtis: apparet enim ſol major in ortu ſuo, vel occaſu, quam dum ſupra horizontem elevatus eſt.

490. Punctum lineæ horizontalis, in quo eſt centrum ſolis, eſt punctum accidentale umbrarum a lineis verticalibus projectarum (483). Umbræ vero iſtæ debiles ſunt, & verſus marginem inferiorem tabulæ indefinite extenduntur, niſi quando illis planum aliquod verticale, aut aliud inclinatum, v. g. murus quispiam, aut corpus quodvis opponitur.

491. Sit exempli cauſa azimuthum ſolis occidentis 40°. Umbra corporis A (fig. 83) terminatur utrinque linea recta ad punctum 40° tendente, ac in plagam huic oppoſitam indefinite producta. Umbra item cylindri B comprehenditur duabus rectis verſus 40° convergentibus, verum ubi ad gradum infimum obſtaculi pertingit, verticaliter per *e i* aſcendit; tum in plano ſuperiore horizonti parallelo directione *i o* ad 40° vergente extenditur; ex *o* rurſus uſque in *l* perpendiculariter erigitur; ex *l* in *u* ſitum verſus 40° iterum acquirit; tandem ex *u* in *r* in plano verticali aſſurgit, ibique terminatur, linea *r n* optice altitudini cylindri æquali.

492. II°. Si ſol ſit ſupra horizontem, ſumendum eſt ejus azimuthum in linea horizontali, ut habeatur punctum accidentale umbrarum a lineis verticalibus projectarum. Tum vero ſeu ex data, ſeu ex aſſumta (ſi arbitrio noſtro permittitur) ſolis altitudine ratio longitudinis umbrarum ad altitudinem corporum determinanda eſt, quæ eadem eſt (474), ac ſinus totius ad cotangentem anguli altitudinis ſolis. Uti ſi ſol ponatur 20° ſupra horizontem, & verſus ſiniſtram a plano verticali declinet 40°, reperitur cotangens 20° ad ſinum totum, ut 2,75 ad 1, ſeu longitudo umbræ in plano horizontali æqualis 2¾ altitudinis corporis. Eſto itaque A C (fig. 82) corpus verticaliter erectum: ducatur ex ejus

baſi A recta A B per punctum Z 40 graduum tranſiens, fiatque perſpective æqualis $2\frac{1}{4}$ A C: ſi nullum objiceretur impedimentum, umbra foret A B. At quia iſthic interponitur priſma *pk*, umbra ex A ad O producta, ex baſi priſmatis perpendiculariter per O E attollitur: dein directione E I ad 40° ſervata ſuperius priſmatis planum emenſa rurſus in F comparet trans umbram a priſmate projectam, atque ad B usque, ſitu eodem procurrit, quem primo habuit.

493. Ex figura hac intelligitur, umbram priſmatis determinari, ductis primo *p* G, Q N, R M ex puncto accidentali 40°, & indefinitis; tum facta una earum, v. g. Q N, $2\frac{1}{4}$ altitudinis Q T optice æquali, & ducta M N ad punctum viſus S, quod nempe latus priſmatis *k* T ad idem dirigatur (481); tandem facta N G ad lineam horizontalem parallela, cum latus T D ſitum eundem habeat.

494. OBSERVA I. Si quis locum ſolis in tabula, producta, ſi neceſſe ſit, exhibeat, velut in M, terminus umbræ B corporis A C obtinetur, ſi regula ad M & C applicata ſecetur recta per 40° & pedem corporis tranſiens Z B in B. Eodem modo punctum N umbræ ſolidi *pk* reperitur.

495. OBSERVA II. Hæc methodus commodiſſima eſt, quando altitudo ſolis noſtro arbitrio relinquitur; at ſi hæc determinata ſit, quæri prius debet M Z modo ſuperius (411) expoſito, & demonſtrato.

ARTICULUS IV.

De umbris, quando ſol eſt a tergo ſpectatoris.

496. Cum ſol a tergo ſpectatoris eſt, umbræ eodem modo determinari poſſunt, ac in ſuperiore articulo, ſi concipiatur eſſe in puncto diametraliter oppoſito infra horizontem. Unde notari debet gradus azimuthi ſolis in linea horizontali in parte oppoſita illi, in qua reipſa verſatur reſpectu plani verticalis. Tum ſi res poſcat, inito calculo eruitur, ſeu, ſi nihil determinetur, aſſumitur ratio longitudinis umbræ ad altitudinem corporum; indeque longitudo umbrarum optice ex ſcala decreſcente ſumitur, ſitu earum a pede corporum lumen intercipientium ſemper verſus punctum azimuthi directo.

497. Poteſt quoque locus ſolis in tabula exhiberi, altitudine arbitraria, ſi nihil præſcribatur, aut Geometrice determinata, ſi data ſit, ut limites umbrarum reperiantur. Sit exempli cauſa ſol

a ter-

a tergo ſpectatoris ad partem ſiniſtram 40° a plano verticali, & 20° ſupra horizontem: oporteat invenire umbram perticæ verticaliter erectæ A C (fig. 84). Ex A ducatur ad Z (40° verſus dextram in linea horizontali) recta A Z. In Z M, ad horizontalem S Z normali, accipiatur locus M centro ſolis oppoſitus, ita ut Z M ſit projectio perſpectiva arcus cæleſtis verticalis 20 graduum: jungantur M & C: erit terminus umbræ in B.

498. Etenim umbra ex luce ſolari a quocunque puncto intercepta, ſi nullum interponeretur obſtaculum, directe projiceretur in punctum ſoli diametraliter oppoſitum in cælo: ergo punctum hoc ſoli oppoſitum, punctum plani umbram intercipientis, & punctum, in quo exiſtit ſol, ſunt in eadem recta.

ARTICULUS V.

De umbris corporum, quando lucidum vicinum eſt, uti candela ardens.

499. I°. *Quando lucidum eſt poſt tabulæ planum.*

Ut umbræ expedite inveniantur, in ipſa tabula, producta, ſi opus eſt, exhibeatur lucidum ex regulis perſpectivæ, una cum projectione puncti in plano Geometrico, in quod perpendiculum a lucido demiſſum cadit, quod *pedem lucidi* deinceps vocabimus: eſt enim hoc punctum accidentale omnium umbrarum, quæ ex intercepta luce hujus corporis oriuntur. Ceterum methodus umbras hujusmodi exhibendi eadem omnino eſt, ac Art. III deſcripta; illud modo advertendum, quod ſi lucidum ſit humilius, quam corpus opacum, umbra hujus in lacunar (ſi quod in tabula repræſentetur) projecta dirigatur verſus punctum, in quod verticalis ex pede lucidi erecta incidit.

500. II°. *Quando lucidum eſt in plano tabulæ.*

Rurſus lucidum in tabula deſignandum, quod facile admodum eſt; quoniam enim nullam a tabula diſtantiam habet, ejus projectio tantundem a linea verticali, & horizontali diſtat, quantum ipſum a plano horizontali & verticali. Pes porro lucidi erit in ipſo inferiore margine tabulæ, ideoque umbræ eodem prorſus modo, ac prius, determinantur.

501. III°. *Quando lucidum eſt intra oculum, & planum tabulæ.*

Eadem hic quoque adhibenda methodus, lucido ejusque pede in tabula deſignatis. Quare in analogia ſolutionis generalis (351) ponendum eſt: *ut radius principalis minus diſtantia puncti lucidi a tabula* &c loco *plus diſtantia* &c. Quod ſi enim ſumatur planum A S D I

(fig.

(fig. 46) pro tabula, & *asdi* pro plano tabulæ parallelo, in cujus puncto *d* ſit lucidum, liquet, A O eſſe radium principalem; A *a* diſtantiam lucidi a tabula; *as*, ſeu *id*, ejusdem diſtantiam a plano horizontali; *ai* ſive *sd* denique ejus diſtantiam a plano verticali: unde erit O *a* (vel O A — *aA*.): O A = *ai* (vel *sd*): A I (vel S D) = *as* (vel *id*): A S (vel D I). Obſervandum vero, lucidum nec debere eſſe multum ſupra planum horizontale, nec multum a plano verticali remotum, nec etiam nimis vicinum plano tabulæ parallelo, quod per oculum tranſit; alias illius projectio longe extra tabulæ margines erit: & pedis quidem lucidi projectio ſemper infra marginem infimum tabulæ cadit.

502. OBSERVA. Quoniam lux hunc in modum incidens non parum decoris imaginibus adfert, ſi arbitraria ſit lucidi collocatio, ea aſſumatur tum ab horizontali, tum a verticali plano diſtantia, ut ejus projectio paullo extra alterutrum marginem lateralem tabulæ, ac non nihil ſupra lineam horizontalem cadat.

503. *Quando lucidum eſt a tergo ſpectatoris.*

Situs hic lucidi commodiſſimus quidem eſt, ut objecta aliquantum remota diſtincte videantur: verum determinatio umbrarum difficillima evadit, quod neque lucidi, neque ejus pedis projectio in tabula fieri poſſit, ideoque non habeatur punctum accidentale concurſus umbrarum. Quare alia quævis lucidi collocatio eligenda. Ne quid tamen hac in materia deſideretur, regulas pro umbrarum determinatione ſubdimus.

504. I°. Itaque quærenda eſt per calculum diſtantia puncti viſus ab illo puncto lineæ horizontalis, ad quod umbra cujusvis objecti verticalis dirigitur. Si igitur punctum illuminatum & punctum lucidum ſint ad eandem partem plani verticalis, inferatur: *ut ſumma diſtantiarum puncti illuminati & lucidi a plano tabulæ, eſt ad differentiam diſtantiarum eorundem punctorum a plano verticali; ita eſt radius principalis ad diſtantiam quæſitam*, quæ verſus eandem partem in linea horizontali accipienda eſt, ad quam eſt punctum illuminatum, ſi hujus diſtantia a plano verticali major ſit, quam diſtantia lucidi ab eodem; at ſi minor ſit, ad partem oppoſitam.

505. Ex hoc patet, quod ſi punctum illuminatum, & punctum lucidum habeant eandem diſtantiam a plano verticali, ſintque ad eandem ejus partem, ſitus umbrarum dirigatur ad punctum viſus.

506. Verum ſi punctum illuminatum, & punctum lucidum ſint ad diverſas partes plani verticalis, fiat ſequens analogia: *ut ſumma diſtantiarum horum punctorum a plano tabulæ, eſt ad ſummam diſtantiarum eorundem a plano verticali; ita radius principalis eſt ad diſtantiam puncti viſus ab illo puncto lineæ horizontalis, ad quod umbra dirigitur.* Et hæc quidem

di-

diſtantia ſemper ex ea parte ſumitur, ad quam eſt punctum illuminatum.

507. Calculo modo expoſito id egimus, ut inveniretur inclinatio baſis trianguli umbræ ad planum verticale. Nam ſit L (fig. 85) pes puncti lucidi in plano geometrico; GE ſit ſitus plani verticalis; IK tabulæ; B punctum plani geometrici, in quod cadit perpendiculum e puncto illuminato demiſſum. Sit LD plano verticali parallela; & jungatur BL; patet, BL eſſe directionem umbræ in plano geometrico, ad planum verticale angulo DLB inclinatam. Jam vero in triangulo DLB eſt DL (ſeu DF+FL): BD (vel EL—GB)=R: *tang* DLB; & quia diviſiones lineæ horizontalis ſunt tangentes, radio principali ſumto pro ſinu toto (370): habetur DF+FL ad EL—GB, ut radius principalis ad diſtantiam puncti viſus ab eo puncto lineæ horizontalis, ad quod umbra tendere debet. Quoniam autem B propius eſt plano verticali, quam L, ſitus umbræ inclinatus ad planum verticale vergit in partem oppoſitam puncti illuminati. Idem ratiocinium facile punctis illuminatis A & C pro caſibus reliquis applicatur.

508. II°. Calculanda eſt longitudo umbræ in plano geometrico inde a pede corporis illuminati accepta, ut ejusdem perſpectiva projectio fiat. En vero methodum: diſtantia puncti viſus ab altero puncto lineæ horizontalis præcedente calculo reperta transferatur ex puncto viſus in lineam verticalem, nec refert, quam in partem hoc fiat. Menſuretur, quantum punctum lineæ verticalis, in quod translata cadit, diſtet a gradu 45^to^ lineæ horizontalis, & inferatur: *ut factum ex radio principali in differentiam altitudinum puncti illuminati & puncti lucidi ſupra planum geometricum, eſt ad factum diſtantiæ ultimo repertæ in ſummam diſtantiarum puncti illuminati & puncti lucidi a plano tabulæ; ita eſt altitudo puncti illuminati ſupra planum geometricum ad diſtantiam umbræ a pede hujus puncti in plano geometrico acceptam.*

509. Supponit hæc analogia, punctum lucidum eſſe altius illuminato; ſi ſit infra illuminatum, reperietur diſtantia umbræ accepta in plano parallelo ad planum geometricum, velut in lacunari, a puncto, in quo huic plano occurrit verticalis per punctum illuminatum tranſiens.

510. Pro demonſtratione allatæ analogiæ, advertendum eſt, quod ſi in lineam verticalem transferatur recta æqualis tangenti anguli inclinationis lineæ LB, atque ejus extremum jungatur cum

gradu 45° lineæ horizontalis, oriatur triangulum ſimile triangulo BLD. Unde habetur (Elem. 556): ut radius principalis (qui dicatur r) ad hypotenuſam hujus trianguli novi (quæ d vocetur); ita eſt in triangulo BLD latus LD (ſive FL+FD) ad BL: igitur $BL = \frac{(LF+FD)\times d}{r}$.

511. Exhibeat porro LN (fig. 86) planum geometricum; LH altitudinem puncti lucidi H; BM ſit altitudo puncti illuminati M; ducatur MO parallela ad LN, erit HO differentia altitudinum puncti illuminati, & puncti lucidi; & ſi recta HM producatur in N, eſt BN diſtantia umbræ N a pede B puncti illuminati. Eſt vero ob triangula HOM, MBN ſimilia, MB: BN = HO (ſeu HL—MB): OM (vel LB); quare $BL = \frac{(HL-MB)\times BN}{MB}$. Si jam fiat æquatio ex duplici valore de BL, deducetur analogia: $r\times(HL-MB) : d\times(LF+FD) = MB : BN$. Q. E. D.

Quod ſi ſitus figuræ inverſus exhibeatur, ita ut LN repræſentet planum aliquod plano geometrico parallelum, H punctum lucidum illuminato M depreſſius, obtinebitur idem punctum umbræ N, manetque adeo idem calculus.

512. OBSERVA I. Si idem objectum a pluribus lucidis diverſimode collocatis illuminetur, ſingulæ umbræ ex luce ſingulorum lucidorum intercepta eodem modo calculandæ ſunt, ac ſi quodvis lucidum ſolum eſſet. Umbræ porro ejusmodi prope pedem corporis illuminati inter ſe confunduntur, fitque ea pars tanto nigrior, quanto umbrarum major eſt numerus. Inde autem ſingulæ fiunt dilutiores, quo magis inter ſe ſeparantur, quo a pede longius recedunt, quo ſuperficies eas excipiens ab alio lucido vivacius illuſtratur. Hæc omnia facile intelligentur, ſi umbræ a corpore a pluribus candelis diverſum ſitum obtinentibus colluſtrato projectæ delineentur, ut neceſſe non ſit ſingula minutim diſcutere.

513. OBSERVA II. Si duæ umbræ, quarum utraque in ſe admodum diluta, & vix perceptibilis, ſeſe interſecant alicubi, id ſpatium jam longe nigrius eſt, ut umbra facile diſtinguatur; & ſi plures adhuc umbræ illic ſe ſecarent, ſane multo magis nigreſceret.

ARTI-

ARTICULUS VI.

Varia Problemata de Umbris.

514. PROBLEMA I. *Determinare umbram veram corporis a penumbra diſcretam.*

RESOLUTIO. Facta projectione perſpectiva corporis luminoſi ED ſecundum omnes ejus dimenſiones, determinetur ut ſupra (494) umbra unius lateris corporis opaci ex radiis e centro venientibus interceptis AG; tum etiam umbræ ex luce ab extremis limbis emiſſa, & ab eodem latere intercepta, AF, & AG. Eodem modo quærantur limites *f*, *g*, *h*, umbrarum ab altero opaci latere *ab* projectarum, & ducatur *f*F, in qua ſumantur puncta I & *i* ita, ut FI ſit perſpective æqualis cum FG, & *if* = *fg*. Junctis AI, *ai*, erit trapezium A*ai*I umbra vera: A*ah*H vero exhibet limites penumbræ.

515. OBSERVA. Si corpus lucidum non ſit ſphæra, velut ſi ſumatur fax ardens, cujus flammæ latitudo ſit ad altitudinem, ut *p* ad *q*; ſumendum eſt FI ad FG, & *fi* ad *fg*, ut *p* ad *q*.

516. PROBLEMA II. *Determinare umbram rectæ* AB (fig. 87) *ad ſolum inclinatæ, quando poſitione & magnitudine datur.*

RESOLUTIO. Quæratur trigonometrice vel graphice punctum D plani geometrici, in quod cadit perpendiculum a ſupremo puncto B lineæ inclinatæ demiſſum, ut quantum a plano verticali, & tabulæ diſtet, ſciatur. Tum jungantur B & D, & quæratur hujus perpendiculi BD umbra DE (499). Ducatur ex A recta AE; erit hæc umbra lineæ AB. Quod ſi intercipiatur plano aliquo verticali FG, liquet, umbram fore AIK, puncto nempe K exiſtente termino umbræ a perpendiculo BD projectæ.

517. Ut trigonometrice reperiatur punctum D, in triangulo BAD ad D rectangulo, notum eſt AB, & angulus inclinationis BAD; igitur inveniri poteſt AD. Si porro ducatur AN parallela plano verticali, & ad hanc ex puncto D perpendicularis DN, in triangulo ADN datur AD (ex priore triangulo repertum), & angulus NAD, ob datam declinationem lineæ AB a plano verticali: quare reperitur AN & ND, quibus habitis ſcitur poſitio puncti D, reſpectu puncti A poſitione dati.

518. Graphice res ſic peragitur. Ad A *d*, (fig. 88) parallelam plano tabulæ, conſtituatur angulus *d* A B æqualis inclinationi datæ lineæ objectivæ, cui etiam ſumatur A B æqualis. Demittatur perpendiculum B *d*, & erigatur A N ad A *d* normalis, quæ erit parallela plano verticali. Fiat N A F æqualis declinationi datæ lineæ objectivæ a plano verticali, & accipiatur in A F recta A D = A *d*, ducaturque D N ad A N perpendicularis: rectæ D N, A N præbebunt in ſcala diſcrimen ſitus puncti D inter punctum datum A.

519. OBSERVA. Si extremum B rectæ inclinatæ A B ſit ſupra lucidum C elevatum (fig. 90), ut punctum E (fig. 87) nequeat in plano geometrico haberi, accipiendum aliud quodvis ejusdem lineæ punctum L (fig. 90) infra lucidum C, indeque demiſſi perpendiculi L M umbra M O determinanda. Ducta ex A per O indefinita A O erit umbra quæſita, nuſpiam terminata, niſi incidat in aliquod planum ſupra geometricum elevatum.

520. RESOLUTIO ALTERA. *Quando datur rectæ inclinatæ projectio perſpectiva in tabula.* Sit ejusmodi projectio A B (fig. 91). Ex duobus quibusvis ejus punctis A, D demittantur perpendicula A C, D E in projectionem plani geometrici, & ducantur ex pede lucidi P per C & E indefinitæ P F, P G. Concipiatur planum ad horizontem perpendiculare (parallelum, ſi lubet, plano verticali, vel tabulæ, modo ne nimium ad rectas P F, P G ſit obliquum), cujus interſectio cum plano Geometrico repræſentetur optice per F K. Ex F, G, ubi rectæ P F, P G occurrunt interſectioni F K, erigantur perpendiculares indefinitæ F H, G I: & ex puncto lucidi L ducantur per A & D rectæ L A H, L D I, quæ in H & I plani aſſumti determinant umbras punctorum A & D: jungantur H & I recta, quæ ſecet F K in O: erit O in directione umbræ, cujus adeo ſitus eſt B O Q.

521. PROBLEMA III. *Determinare directionem umbræ a linea recta inclinata* A B *in plana lucido altiora projectæ.*

RESOLUTIO. Ex pede P lucidi L (fig. 96) ducatur per C, in quod cadit perpendicularis ab extremo B rectæ A B demiſſa, recta P C M, occurrens interſectionibus planorum perpendicularium graduum cum plano terræ, in punctis H, I, K, M, e quibus erigantur perpendiculares indefinitæ H N, I O, K Q, M R. Ducatur etiam ex puncto lucidi L per B recta L R, quæ exhi-

exhibebit umbras puncti B in ſingula plana verticalia graduum producta cadentes, ſcilicet N, O, Q, R. Quæratur per problema præcedens ſitus umbræ *Am* in plano terræ, quæ occurrit interſectionibus planorum verticalium (productis etiam) in *h*, *i*, *k*, *m*. Ducantur *h*N, *i*O, *k*Q, *m*R, quæ determinant ſitum umbræ in planis iisdem verticalibus graduum. Et ſi etiam umbræ ipſorum graduum S T, V X, Y Z declinentur, facile erit rectæ A B totam umbram A*hnostux*R, qua videri poteſt, exhibere.

522. PROBLEMA IV. *Invenire punctum, ad quod umbræ linearum verticalium in planum inclinatum incidentes dirigi debent.*

RESOLUTIO. Ex pede lucidi P (fig. 92) ducatur (388) ad interſectionem plani inclinati cum plano terræ perpendicularis; aut ſi planum inclinatum A B C non pertingat uſque ad planum terræ, ducatur ex Q tantundem ſupra terram elevato, quantum latus C B, ad idem C B perpendiculum Q R, cujus quantitas modo mox exponendo quæratur. Tum fiat: ut ſinus totus eſt ad tangentem anguli inclinationis plani, in quod umbræ cadunt, cum plano terræ; ita eſt Q R ad Q T; erit T punctum accidentale omnium umbrarum projectarum a lineis verticalibus ex luce L intercepta: etenim in hoc puncto planum inclinatum A B C productum ſecat perpendicularem Q L ex lucidi puncto demiſſam.

523. Ut jam graphice inveniatur Q T, collocetur in plano figuræ hunc in finem ſeparatim conſtruendæ (vide fig. 93) punctum Q (cujus eadem ſupra planum terræ altitudo, ac lateris C B) ac recta B C, quæ idem latus plani exhibeat, ita ut figura hæc in plano exprimat verum ſitum tam lateris B C, quam puncti Q, reſpectu plani verticalis F G, & plani tabulæ G H. Demittatur ex Q perpendicularis Q R ad B C, & ducatur ad eandem B C parallela Q V. Fiat B R S æqualis angulo inclinationis plani dati cum plano terræ, & producatur S R, donec occurrat parallelæ Q V in T; tum accipiatur menſura de Q T in ſcala, & deſcribatur optice in tabula.

524. SCHOLIUM. Ex dictis apparet, quod determinatis punctis T & *t* (fig. 95), in quibus plana inclinata A B C, A C D, ſi producantur, ſecant perpendicularem L T ex puncto lucidi L demiſſam, facile ſit ductum umbræ N E F G H I K a verticali M N projectæ exhibere, ut figura indicat.

525. RESOLUTIO altera, *quando umbra ſit ex intercepta luce ſolis.* Producatur latus plani inclinati D C (fig. 94) uſque ad lineam horizontalem in I. Ex I ducatur per planum inclinatum quævis recta I L, ut pars K L ſit in eo optice parallela cum latere D C. In plano terræ (vel generalius, in plano ad libellam poſito, in quo eſt latus D C) quæratur punctum A, in quod cadit perpendiculum ab alterutro extremo K vel L demiſſum; & ducatur per I recta indefinita I N ſecans perpendicularem K A; item altera ex F, azimutho ſolis, tranſiens per quodvis punctum, v. g. D, lateris D C, & occurrens priori I N in O. Erigatur ex O perpendicularis, uſque dum rectam I L ſecet in Q, jungantur Q & D recta, quæ producta concurrat in T cum perpendiculo e ſole S demiſſo: erit T punctum concurſus umbrarum a lineis verticalibus in planum inclinatum E D C projectarum.

Etenim manifeſtum eſt, triangulum D Q O rectangulum ad O, & cujus angulus Q D O æqualis eſt inclinationi plani D C E, eſſe in plano verticali O Q S F per ſolem S, & perpendiculum ex eo demiſſum S T, tranſeunte: igitur producta Q D determinat punctum T, in quo planum inclinatum D C E occurrit eidem perpendiculo S T.

526. OBSERVA. Non hic agimus de umbris in ſuperficies corporum alias, quam planas, projectis; quemadmodum nec de ejusmodi projectionibus perſpectivis tractavimus, quæ in alia, quam plana ſuperficie delineari poſſent, uti in cylindrica, conica, ſphærica &c, cum rarum admodum ſit, ut id neceſſitas exigat, & res a brevitate nobis propoſita ſit aliena. Quod ſi tamen evitari id genus delineatio nequeat, principiorum, quæ attulimus, accurata notitia, & exercitatione firmata, Geometriæ quidam uſus, loci, ſuperficierum, corporum delineandorum conditiones, ſemper peculiares ſuppeditabunt regulas, quibus id præſtari poſſit.

AUCTA-

AUCTARIUM.

THEORIA MICROMETRI OBJECTIVI.

* *
*

CAROLO BENVENUTI Soc. JESU.
ROGERIUS JOSEPHUS BOSCOVICH ejusd. Soc. S. P. D.

In meo ex urbe discessu Martio mense postulasti a me brevem aliquam theoriam præclarissimi instrumenti, quod objectivum micrometrum appellant, quod quidem in Anglia accuratissime elaboratum, ac telescopio catadioptrico sane egregio aptatum Pezenas noster, celeberrimus Massiliensis Mathematicus Regius, pro Barberinis Principibus, cultioris litteraturæ amantissimis, ad nos Romam transmiserat, una cum susiore dissertatione sua impressa, qua theoriam omnem instrumenti, & usum est persecutus, quam ego quidem, in ipso nimirum discessu meo advectam, uti nosti, videre omnino non potui, uti nec Transactionum Philosophicarum locum Tomo 48 pertinente ad annum 1753, in quo de instrumento agitur, quibus nimirum Romæ cum summo nostrorum studiorum damno carebamus.

Ex ipso itinere theoriam, quam ex instrumenti semel visi consideratione erueram, non valde illam quidem complicatam, sed nec omnino simplicem, ad te transmisi, qua alia longe simplicior, & vero etiam elegantior, ac perbrevis mihi nuper in mentem venit, quanquam aliis nunc ego quidem molestioribus sane, & a meorum studiorum ratione, maxima ex parte, alienissimis, & contentiosis hic curis distineor, ac penitus a contemplationibus Mathematicis avertor. Sed occasionem mihi præbuit ea iterum de re meditandi præclarissimus Societatis itidem nostræ Astronomus P. Liesganig, hujus domesticæ Viennensis speculæ præfectus, in qua cum alia instrumenta sane multa partim de novo curat, partim corrigit, atque, ut dicimus, rectificat, tum in primis sectorem

rem pro verticalibus obſervandis ſtellis, meo in *Expeditione Litteraria* deſcripto ſimilem, ſed multo præſtantiorem, adjectis aliis, aliis multo ſimpliciore ratione præſtitis, per hoſce dies abſolvit, ac hujus ipſius generis objectivum micrometrum eodem tempore confici curat, Newtoniano aptandum teleſcopio, egregio ſane, quo utitur ad obſervationes plerasque.

Ejusmodi theoriam igitur ita, ut ſe mihi ſponte obtulit (eam enim nusquam alibi mihi adhuc videre licuit), ad te transmitto, in qua ipſam rei ſummam perſequor tantummodo, rationem vero aptandi inſtrumentum ipſum teleſcopiis, quæ multiplex eſſe poteſt, & eſt admodum arbitraria, ac inveſtigationem primi ejus inventoris, quæ ad uſum nequaquam pertinet, prorſus omitto. Quoniam vero eandem a me petiit tibi ſat cognitus P. Scherffer, qui noſtros hic in Mathematicis diſciplinis inſtituit, apud quos hæc ſtudia tam Viennæ & domi noſtræ, & per noſtros in publica Academia, & in Nobiliſſimo Thereſiano Collegio, quam Tyrnaviæ, Græcii, ac per univerſam hanc Auſtriacam Provinciam, fervent nunc plurimum maximo cum ſucceſſu; quique poſteaquam Aſtronomiam Caillii, ſcriptoris diligentiſſimi, e Gallico in Latinum translatam in uſum ſtudioſæ juventutis hic edidit, ac ejusdem Opticam Latine pariter redditam nunc edit; ut nimirum utiliſſimi Optici inſtrumenti theoriam perbrevem eidem Opticæ adjungat, in eorum gratiam, qui ceteris fontibus, ex quibus ejus notitiam haurire poſſent, deſti uuntur in hiſce locis; concedendam omnino cenſui, ſi tu, cujus judicium noſti ſane, quanti ego faciam, non improbes, & hanc ipſam epiſtolam ad te datam permittas imprimi ſimul, ſine qua eandem theoriam prodire non ſinam, ne occaſionem hanc elabi mihi patiar, publicam aliquam exhibendi mei animi ſignificationem erga homines, quorum & diligentiæ, & doctrinæ ſpecimina in dies habeo quam plurima ob oculos, & quorum incredibilem in me humanitatem experior, cui parem ego quidem gratiam nec referre unquam potero, nec habere. Vale.

Dabam Viennæ 1. Aug.
1757.

DE MICROMETRO OBJECTIVO.

Sint in fig. 1 (Tab. XIII) binæ ſemi-lentes L′L, *l l′*, derivatæ e ſectione lentis facta per axem ſuum, & conſtitutæ in ſummo teleſcopio quocunque, quarum ipſam ſectionem per axem refert hæc figura; & fig. 2 ſectionem perpendicularem axi, vel ipſam utramvis ſuperficiem curvam. Sint autem earum centra Q, *q*, & foci radiorum parallelorum rectæ A D ſint M, *m*, ac poſſint promoveri altera reſpectu alterius motu parallelo, & determinari diſtantia centrorum Q, *q*, quæ erit æqualis diſtantiæ quorumlibet punctorum thecæ, cui ſingulæ includuntur, quæ puncta congruant congruentibus Q, *q*, & ſimul cum ſemilentibus moveantur.

Quoniam radiorum H Q, H′ L′, parallelorum A D, focus eſt M reſpectu primæ ſemilentis, ſi ducatur M *q* I, cui ſit parallelus radius I′ *l′*, ſatis patet, omnium radiorum hujusmodi parallelorum I *q*, incidentium in ſecundam lentem, focum debere eſſe ad ſenſum itidem in M, cum radius I *q* M tranſire debeat ad ſenſum irreſractus, & diſtantia a lente foci radiorum, parum inclinatorum ad axem, in data quavis directione debeat eſſe ad ſenſum eadem, ac radiorum axi parallelorum.

Hinc binæ quidem fient in M, *m* imagines objectorum ſingulorum in magna diſtantia poſitorum ultra L′ l′, ſed exiſtente Q *q* intervallo, quo lens altera ultra alteram eſt promota, coincident imagines binorum punctorum objecti, quæ jaceant in directione M H & M I, ſive quæ habeant diſtantiam opticam definitam ab angulo Q M *q*, & jaceant in directione Q *q*.

Si jam addantur aliæ quotcunque lentes, aut ſpecula, quæ radios quacunque ratione detorqueant, ſemper radii paralleli H Q, & radii paralleli I *q*, qui nimirum convergebant omnes ad idem punctum M, ſimul paralleli evadent, vel ſimul ad eadem puncta convergent, vel ab iisdem divergent; & ubi demum in oculi fundo imago fiet, conjungentur itidem in eadem imagine radii venientes directione H Q M per primam ſemi-lentem cum radiis venientibus directione I *q* M per ſecundam. Quam ob rem ſi innoteſcat angulus Q M *q* per diſtantiam Q *q*, & hujusmodi inſtrumentum aptetur teleſcopio cuicunque, ac ſecunda imago primi puncti objecti congruat cum prima ſecundi; diſtantia Q *q* exhibebit angulum viſualem, quo illa bina puncta a ſe invicem diſtant, & proinde inſtrumentum ipſum ſubibit vices micrometri.

Id fiet, ſi vel citra M *m* collocetur lens convexa, vel ultra lens concava, & fiat vel teleſcopium dioptricum ſimplex commu-

ne, vel Galilæanum; vel prætera infra L′ l′ ſit objectiva alia lens ſoci cujusvis cum toto reliquo teleſcopio dioptrico: ſed in hoc poſtremo caſu focus hujus alterius lentis objectivæ accedet ad ipſam propius, cum nimirum radii inter ſe paralleli ad ſenſum profecti ex eodem puncto objecti jam per ipſas ſemi-lentes convergant ad M, adeoque ocularis lens objectivæ debebit admoveri. Sic ſi centro C ſit ſpeculum cavum N′ O′, quod rectis M L′, M Q, M C, D C, M *q*, M *l*′, occurrat in N′, N, P, B, O, O′, tam radii H′ L′ N′, H Q N, quam I *q* O, I′ *l*′ O′ abibunt ad idem punctum F, quod tamen erit infra punctum G, bifariam ſecans radium C P. Ac ſi inde vel circa F adhibeatur ſpeculum planum in angulo 45 graduum, quod ad latus deflectat radios ad efformandum teleſcopium Newtonianum, ſive ultra F ſpeculum cavum eodem axe ad Gregorianum; ſive citra F ſpeculum convexum ad recentius teleſcopium catadioptricum Gregoriano ſimile, ſed objecta invertens; ſemper intra oculum duplicabuntur objecti imagines, & imagines punctorum in ea poſitione, & diſtantia poſitorum congruent.

Porro facile eſt, data diſtantia foci Q M radiorum parallelorum lentis biſectæ ab ipſa, & data diſtantia Q *q*, invenire angulum Q M *q*, nimirum diſtantiam viſualem punctorum congruentium. Eſt enim M Q ad Q *q*, ſive diſtantia illa foci ad intervallum diſtractionis ſemilentium, ut radius ad tangentem, vel ſinum, ejus anguli. Cum nimirum angulus M Q *q* ſit accurate, & M *q* Q quam proxime rectus. Pro lente pedum 40 infertur, angulum unius gradus exhiberi a pollicibus $8\frac{378}{1000}$, unde fit, ut ſingula ſecunda requirant plus quam $\frac{2}{1000}$-digiti, ſive proxime $\frac{1}{36}$ lineæ, quæ eſt admodum ſenſibilis.

Adhibitis autem diverſis lentibus, quo minor fuerit convexitas, ut nimirum focus longius debeat recedere, eo major ſemi-lentium diſtractio requiretur ad eundem angulum exhibendum; & vice verſa in magis convexis major angulus reſpondet diſtractioni eidem. Hinc ut micrometrum ſenſibilitatem habeat ſatis magnam, adhiberi debent lentes admodum parum convexæ, & lens objectiva pedum 40 eſt admodum ad rem idonea.

Facile patet, ſcalam valoris diſtantiæ viſualis punctorum congruentium objecti pro intervallo diſtractionis ſemi-lentium fore eandem, cuicunque teleſcopio aptetur idem micrometrum earundem binarum ſemilentium, & ſive pro myopibus admoveatur lens ocularis objectivæ, vel ſpeculo plano, aut ſpeculum minus majori, ſive pro presbytis removeatur. Pendet enim a ratione ejusdem Q M ad eandem Q *q*.

At

At ſi teleſcopium adhibeatur pro objectis non ita remotis, tum vero focus M recedit a lente Q. Quare creſcit QM, & angulus ad M decreſcit. Hinc idem diſtractionis intervallum indicat minorem diſtantiam viſualem punctorum congruentium, atque id in ratione reciproca diſtantiæ foci radiorum venientium ab objecto. Si diſtantia objecti a lente objectiva ſit $= d$, radius curvaturæ lentis biſectæ $= r$, diſtantia foci reſpondentis ei objecto $= x$, ratio ſinus incidentiæ ex aere in vitrum ad ſinum refractionis $= p : q$, ex formula generali (181) facto $e = 0$, $R = r$, erit $x = \frac{q\,d\,r}{2(p-q)d-qr}$. Quare menſura diſtantiæ viſualis exhibita a data diſtractione pro objecto habente diſtantiam $= d$, ad menſuram pro objecto remotiſſimo (inquo evaneſcente r reſpectu d evadit $x = \frac{q\,r}{2(p-q)}$) erit ut $\frac{q\,r}{2(p-q)}$ ad $\frac{q\,d\,r}{2(p-q)d-qr}$, ſive ut $2(p-q)d-qr$ ad $2(p-q)d$. Invenitur autem r ex ipſo foco facile inveniendo per obſervationem, datis p, q, d, x, cum debeat eſſe ex formula ſuperiore $r = \frac{2(p-q)dx}{q(d+x)}$. Sunt autem in vitris quam proxime $p = 31$, $q = 20$, adeoque $r = \frac{11dx}{10(d+x)}$, & ratio illa ſuperior, ut $11d - 10r$ ad $11d$.

Si per ejusmodi micrometrum aptatum cuivis teleſcopio determinetur diſtractio debita, ut imagines duorum punctorum dati objecti, collocati ad perpendiculum in data diſtantia a ſemilentibus congruant, facile computabitur angulus reſpondens iis binis punctis, faciendo: *ut diſtantia data objecti a ſemilentibus ad diſtantiam veram illorum punctorum objecti; ita radius ad ſinum vel tangentem ejus anguli.* Hinc pro quavis alia diſtantia objecti, etiam pro immenſa, invenietur angulus ex ſuperiore formula & proportione.

Ut res illuſtretur exemplo, ſit objectivum vitrum bifariam ſectum ejusmodi, ut focum radiorum parallelorum habeat in diſtantia pedum 40. Adhibita formula $r = \frac{11dx}{10(d+x)}$, quæ pro radiis parallelis evadit $\frac{11x}{10}$, ob d infinitam, & facto $x = 40$, erit $r = 44$. Diſtet objectum aſſumtum pro anguli determinatione a lente ipſa pedibus 1000, & inveniatur quædam determinata diſtractio reſpondens minutis 30, reducetur ea menſura ad uſum Aſtronomicum operationis $11d - 10r$ ad $11d$, ſive poſitis pro d & r numeris 1000 & 44,

ope rationis 10560 ad 11000 nimirum facto: ut 10560 ad 11000, ita 30′ (= 1800″) ad 1875″; illa eadem ſemi-lentium diſtractio pro objectis remotiſſimis, nimirum pro omni Aſtronomia, ſubtendet 1875″, accedentibus 75″ ad priorem illam menſuram. Unde patet, ubi ſcala per ejusmodi obſervationes definitur, habendam maxime in hiſce inſtrumentis rationem diſtantiæ objecti, ut ea determinatio ad Aſtronomiam traduci poſſit.

Quoniam autem in objectis non ita multum diſtantibus mutatio diſtantiæ objecti ab illa lente objectiva mutat diſtantiam foci præcedentis lentem ocularem, vel ſpeculum minus, & hæc mutatio datur per illam ex Dioptricis, & Catoptricis focorum formulis, facile eſt etiam pro ejusmodi mutatione lentis ocularis, vel ſpeculi minoris ſcalam valorum computare adhibendam pro diſtantiis minoribus, quæ tamen in maximis, adeoque in omni Aſtronomia, conſtans erit, atque id pro quovis oculorum genere.

Si aptetur ejusmodi micrometrum cum lente biſecta foci dati teleſcopio catadioptrico datæ curvaturæ, facile determinabitur, quantum debeat admoveri ipſi ſpeculo ſpeculum planum obliquum cum lente oculari, vel ſpeculum minus, ſive concavum, ſive convexum. Id intervallum erit quam proxime æquale FG, nimirum æquale acceſſui ſui foci ad ſpeculum, inducto a convergentia radiorum, quam præſtat lens objectivi micrometri: quod quidem ex Catoptricis formulis facile invenitur. Nam ſi radius ſphæricitatis ſpeculi ſit = r, diſtantia puncti radiantis = d, erit diſtantia foci a lente (133) = $\frac{dr}{2d-r}$. Si autem hic dicatur BD = a, BG = b, erit ob convergentiam radiorum $d = -a$, eritque $r = 2b$, adeoque BF = $\frac{-2ab}{-2b-2a} = \frac{ab}{a+b}$. Quare acceſſus ille GF erit = $a - \frac{ab}{a+b} = \frac{aa}{a+b}$. Nimirum ſi collocetur lens biſecta prope focum ſpeculi cavi N′O′, ut ſit $a+b$ proxime æqualis diſtantiæ QM foci radiorum parallelorum lentis ipſius biſectæ, erit ille acceſſus proxime tertius continue proportionalis poſt diſtantiam foci radiorum parallelorum ipſius lentis biſectæ, & ſpeculi.

Pro teleſcopio Newtoniano, cujus ſpeculum diſtet a foco pedibus $3\frac{1}{2}$, diſtantia micrometri a ſpeculo ſit pedum 4, diſtantia foci lentis biſectæ ab ipſa pedum 40, erit ille acceſſus $\frac{3\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2}}{40} = \frac{49}{160}$, ſive digitorum $\frac{49 \times 12}{160} = 3\frac{3}{4}$. In aliis teleſcopiis catadioptricis ob $a+b$

pro-

proxime conſtantem, erit ut quadratum r, ſive proxime ut quadratum longitudinis teleſcopii, & accuratius ut quadratum radii curvaturæ ſpeculi majoris.

Quoniam lens objectiva non colligit radios omnes accurate in M, ſed alios propius, ob diverſam refrangibilitatem, alios remotius; terminatio in teleſcopio erit minus accurata, quam eſſet ſine ejusmodi micrometro: verum diſcrimen erit exiguum, quia ingens etiam mutatio diſtantiæ foci MG ingentis, exiguam mutationem inducit in GF. Cum enim ſit ipſa GF tertia poſt MG & PG, erit GF ad ſui mutationem, ut MG ad mutationem ſui.

In caſu propoſito ſeries focorum pertinentium ad radios heterogeneos in M, quæ eſt pars $\frac{1}{27}$ totius QM, eſt pedem $\frac{40}{27}$, ſeu proxime $1\frac{1}{2}$; & cum fuerit FG digitorum fere 4, erit ſuperior ratio mutationum ut 40×12 ad 4, ſive ut 120 ad 1. Reducetur igitur ejus ſeriei longitudo ad $\frac{1\frac{1}{2}}{120}$, ſive ad $\frac{3}{240}$, ad $\frac{1}{80}$ digiti, vel ad $\frac{3}{20}$ lineæ, ſpatium perquam exiguum.

Eo inſtrumento ita collocato, ut circa axem teleſcopii libere moveri poſſit, facile erit, aſſumere diametros apparentes in quavis directione. Collocata ſectione ſemilentium in directione quæſita, ſatis erit, ipſas diſtrahere ita, ut binæ imagines aſtri ſe contingant, & habebitur diameter apparens, ut patet, congruentibus ejus extremis punctis, quorum imagines pertinent ad dimidias ſemilentes.

Si eodem nihil mutato teleſcopio myopes, & presbytæ utantur, alteri videri poterit major apparens diameter, alteri minor, ob inæqualem terminationem, quæ per radios ſpurios imaginem auget. Id incommodum evitatur plurimum, ſi quisque teleſcopium ita diſponat, ut terminatio ſibi ſit, quantum fieri poteſt, exacta.

Si alterius oculi plures radios violaceos, alterius plures rubeos ad retinam transmittunt, poterit alteri QM eſſe brevior, alteri longior. Si id fiat etiam triente intervalli occupati a ſerie focorum, nimirum in caſu propoſito ſemipede, mutabitur angulus ad M octogeſima ſui parte, nimirum ſcala diſtantiæ viſualis mutabitur in dimidio gradu per ſecunda $\frac{1800}{80} = 22\frac{1}{2}$. Quamobrem exiguum etiam in eo diſcrimen pariet diſcrimen aliquot ſecundorum. Hinc unusquisque ſibi ſua obſervatione ſcalam debet efformare, vel ſi alter ſemel ſibi efformavit, debet alter videre,

dere, quod diſcrimen determinationis ſibi obveniat in una obſervatione quacunque ab illius determinatione, & manente eadem oculorum conſtitutione, ſemper omnes reliquæ determinationes erunt in ratione data, adeoque facile admodum ex illius ſcala inveniet ſuam.

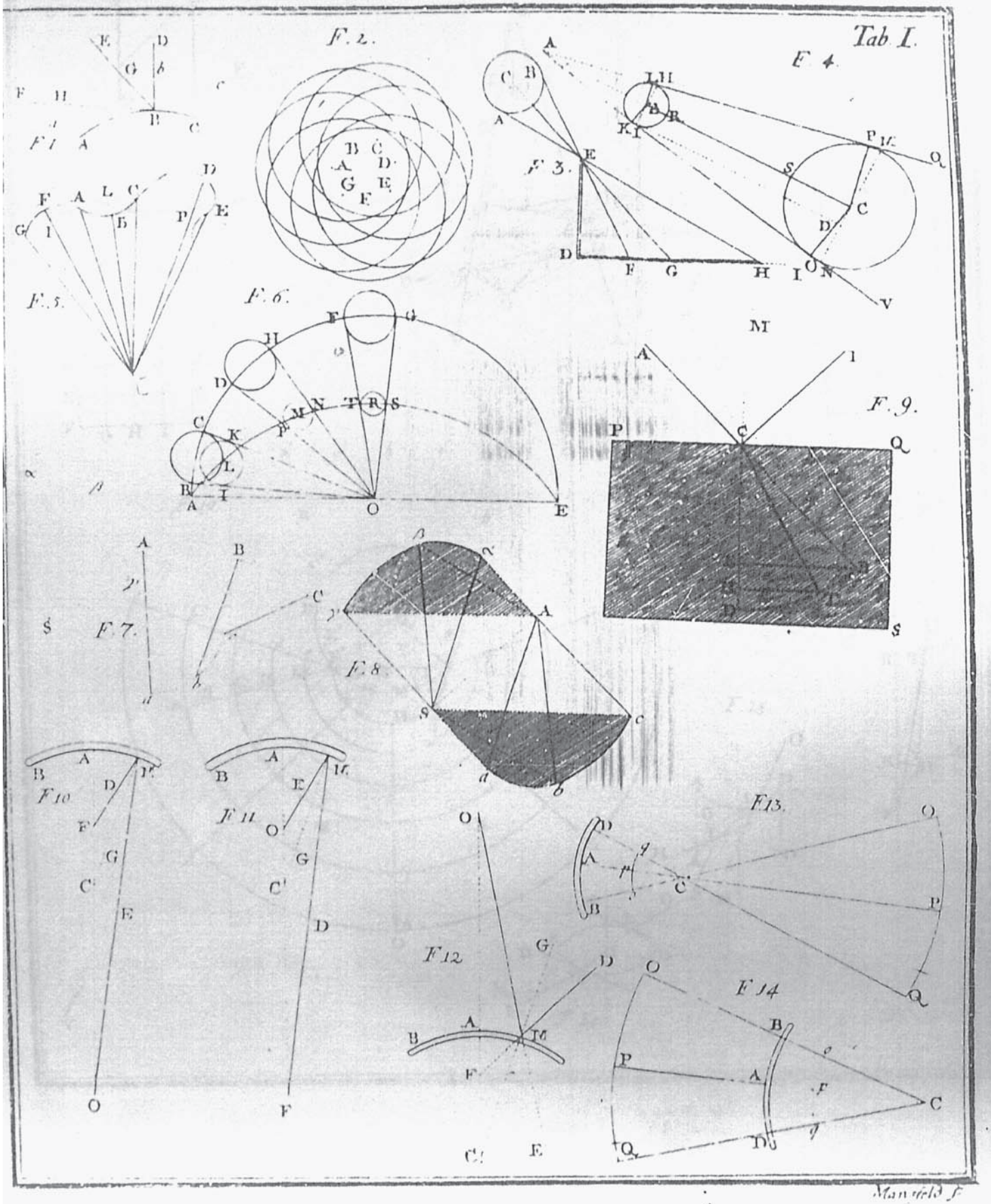
Idem diſcrimen habebitur, ſi aſpiciatur eo inſtrumento jam objectum violaceum, jam rubeum. Quoniam rubeorum radiorum focus eſt remotior, eadem diſtractio ſemi-lentium minorem in iis ſubtendet angulum. Hinc cavendum, ubi ſcala per obſervationem objecti terreſtris definitur, ut objectum accipiatur album potius, quam ullius alterius coloris. Præterea ſi objectum cæleſte ſit admodum rubeum, ut ſolet eſſe luna, vel ſol prope horizontem, obtinebitur hoc inſtrumento diameter vera major, cum ea diſtantia, quæ pro luce integra exhibet angulum quemdam, exhibeat minorem pro radiis rubeis.

Idem incommodum haberi poteſt in diametro ſolis determinanda hoc inſtrumento per vitra, quæ ſolem admodum rubicundum exhibeant; cum adhibeantur ii radii, quorum focus ab objectiva lente recedit plurimum, reliquis interceptis; quamobrem vel adhibenda ſunt vitra viridia, vel combinatio quæcunque vitrorum, quæ album potius ſolem exhibeat, quod quidem probe notandum videtur omnino, cum aliter facile admodum ſit in errores incidere non contemnendos.

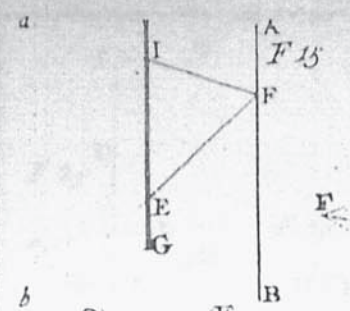
FINIS.

ERRA.

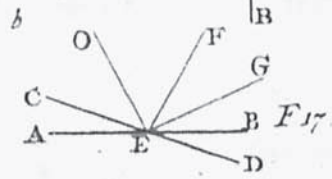
			ERRATA	CORRIGE
Pag.	1	Lin. 22	ſimile - - - -	ſimilis
	3	34	pyramydis - - -	pyramidis
	6	4 a fine	dimanentes - - -	dimanantes
	47	11	$+eqqR$ - - -	$+eqqRr$
	49	ultim.	MC - - - -	MO
	53	13	non eſt - - - -	eſt
		22	eam - - - -	eum
		25	expenſio - - -	expanſio
	59	19	auctior - - -	acutior
		25	Oq - - - -	Qq
	80	27	tangentia - - -	tegentia
	81	28	*pars* - - - -	*pars videatur*
	119	16	dictis - - - -	ductis
	132	26	ſoli - - - -	ſolis


Tab. I.
F. 1.
F. 2.
F. 3.
F. 4.
F. 5.
F. 6.
F. 7.
F. 8.
F. 9.
F. 10.
F. 11.
F. 12.
F. 13.
F. 14.
M
Manskeld f.

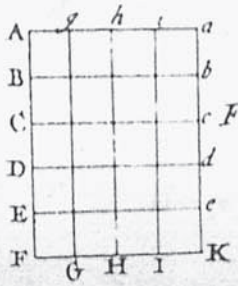
Tab. II.



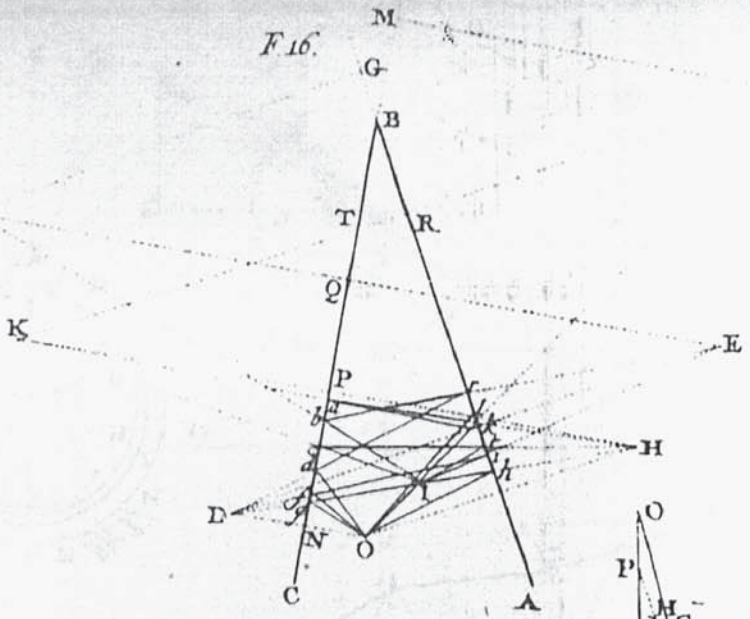
F. 15.



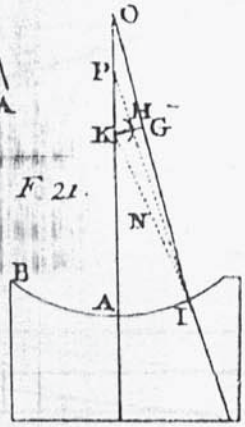
F. 17.



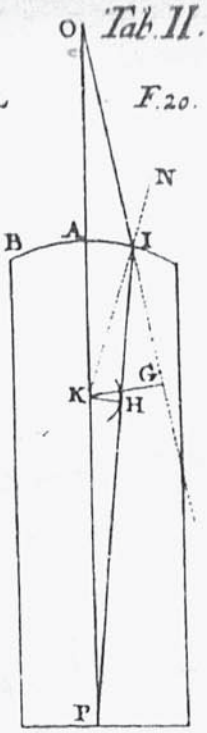
F. 18.



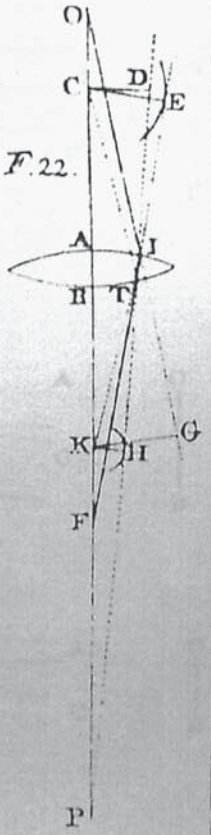
F. 16.



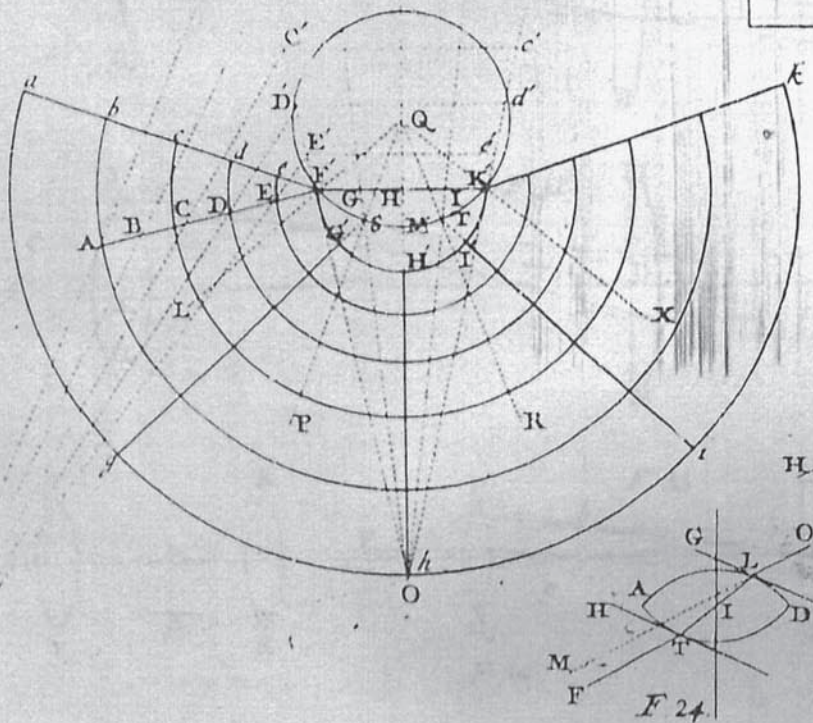
F. 21.



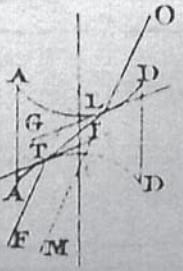
F. 20.



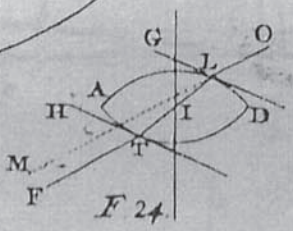
F. 22.



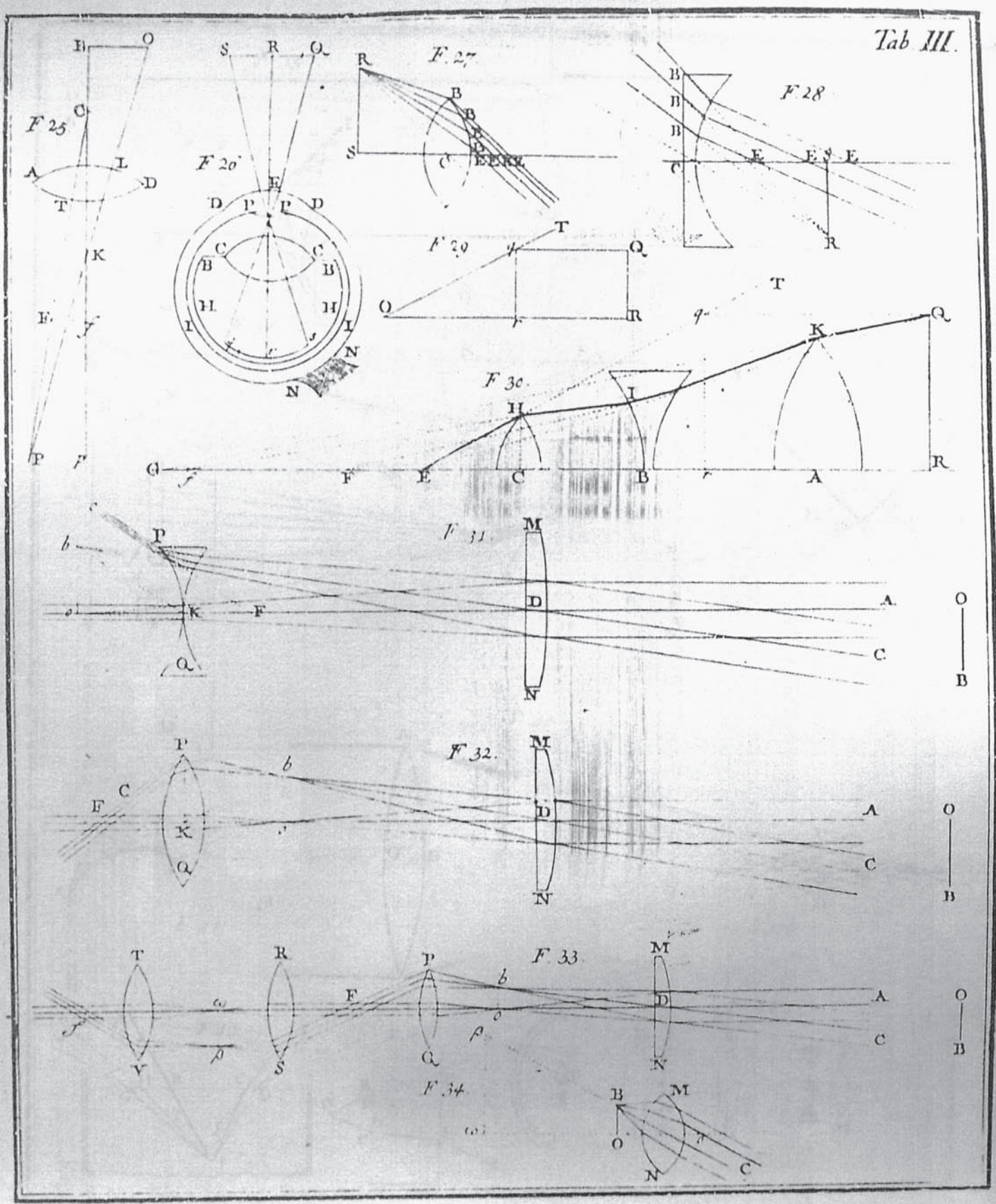
F. 19.

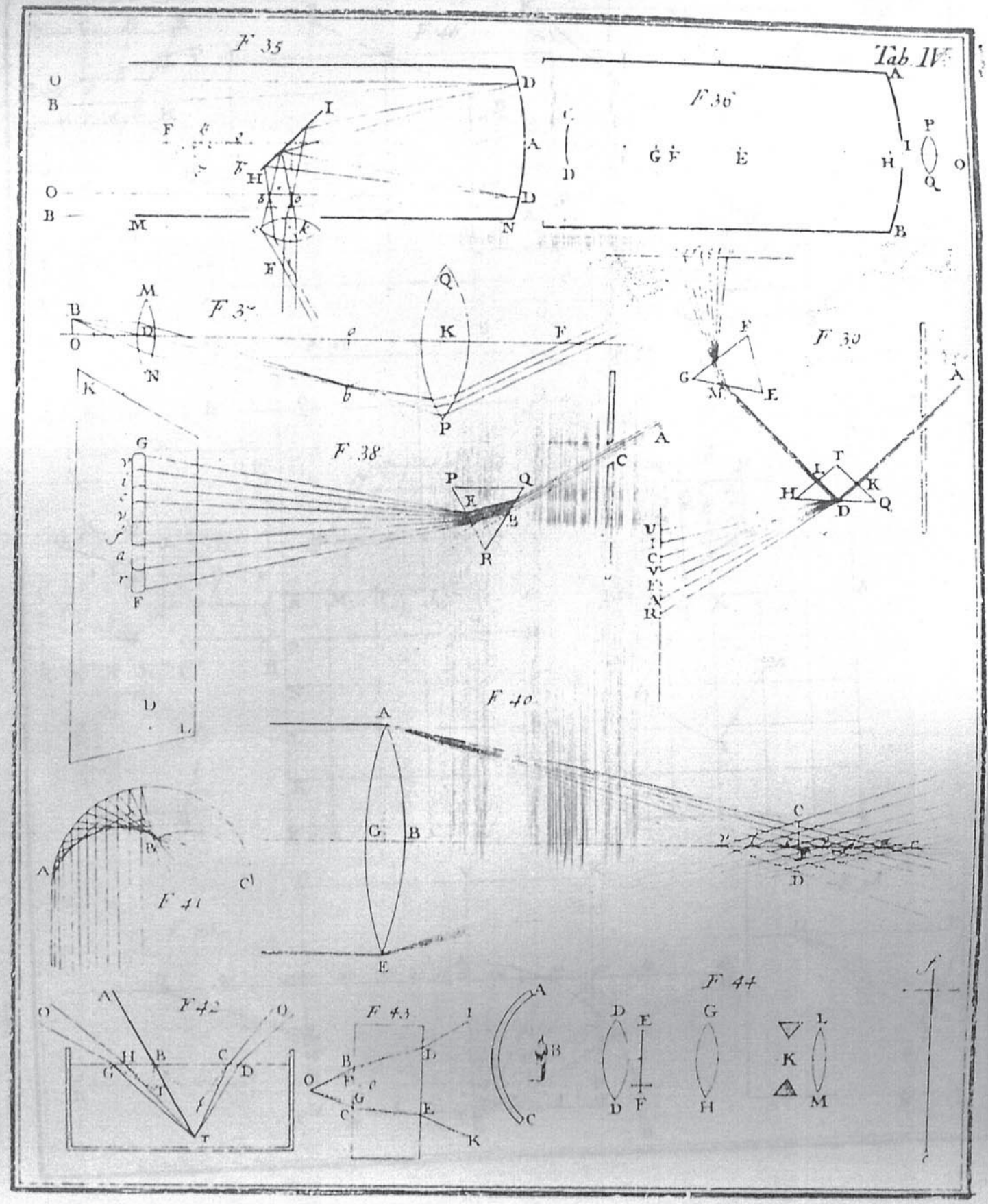


F. 23.

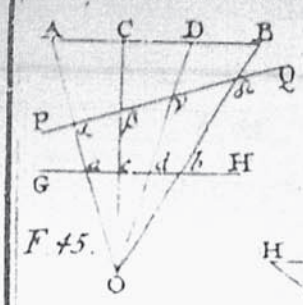


F. 24.

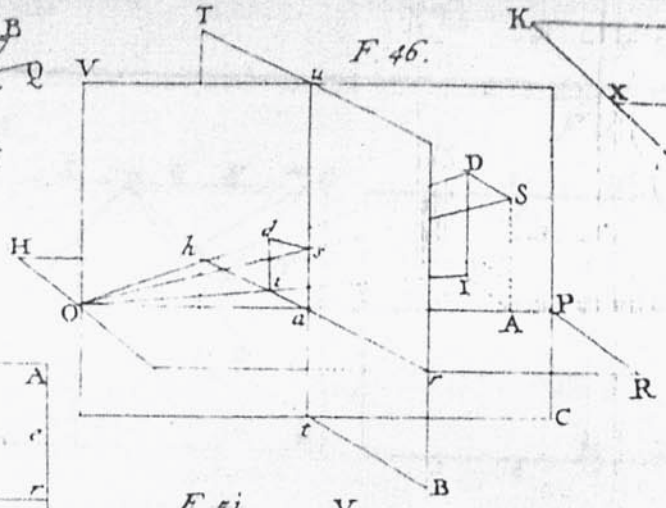

Tab III.
F 25
F 26
F 27
F 28
F 29
F 30
F 31
F 32
F 33
F 34


Tab. IV
F 35
F 36
F 37
F 38
F 39
F 40
F 41
F 42
F 43
F 44

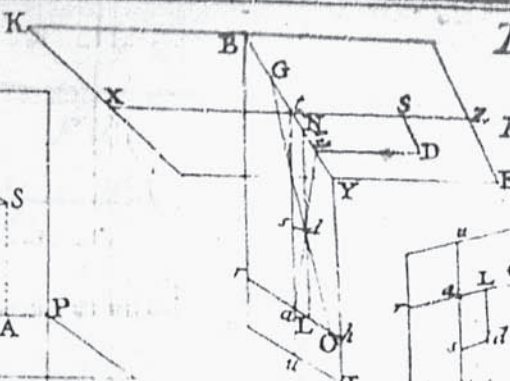
Tab. V.



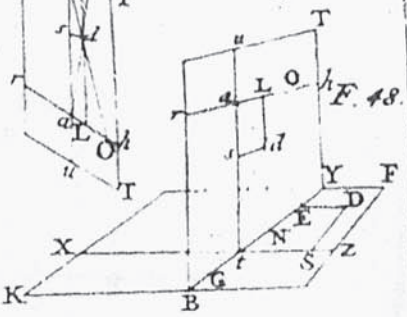
F. 45.



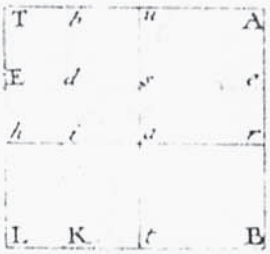
F. 46.



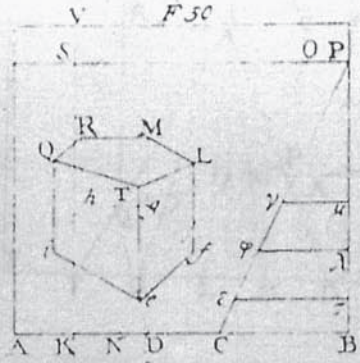
F. 47.



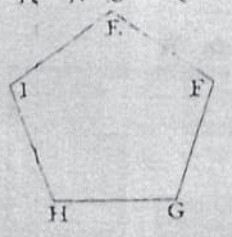
F. 48.

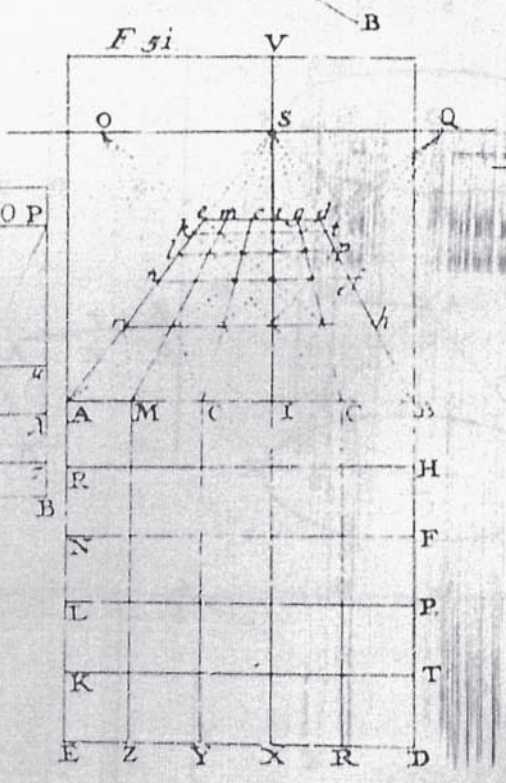


F. 49.

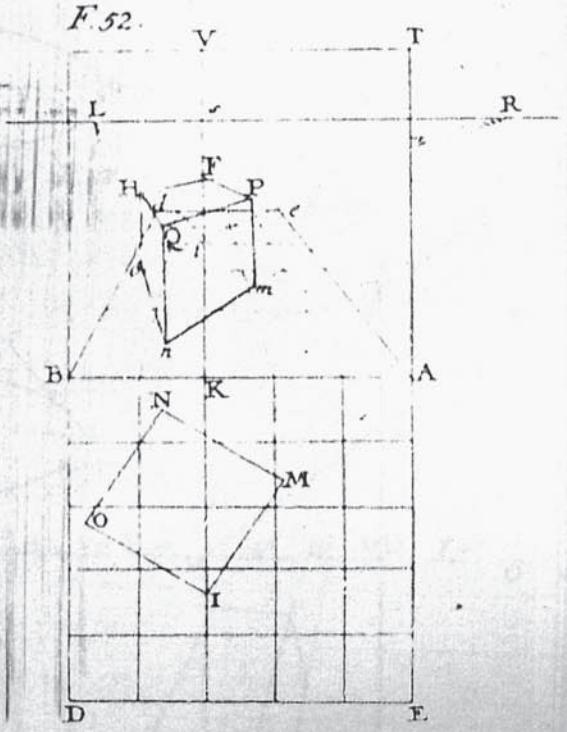


F. 50.

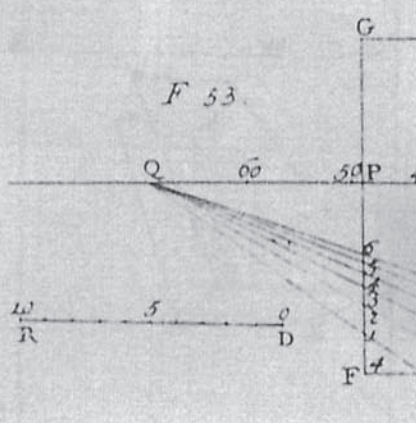




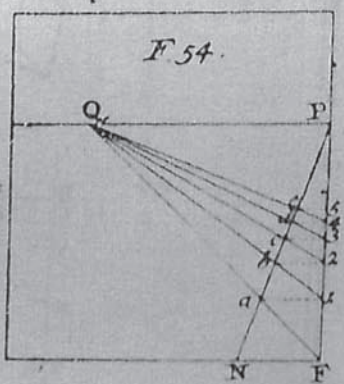
F. 51.



F. 52.



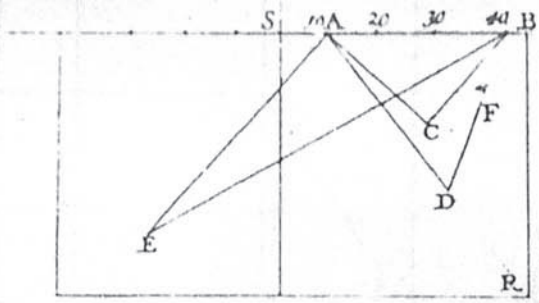
F. 53.



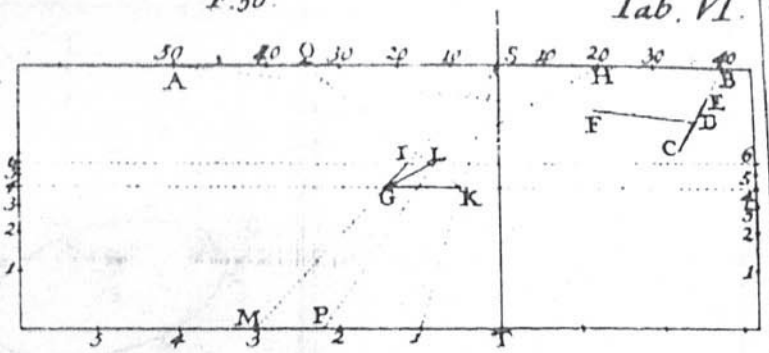
F. 54.

Tab. VI.

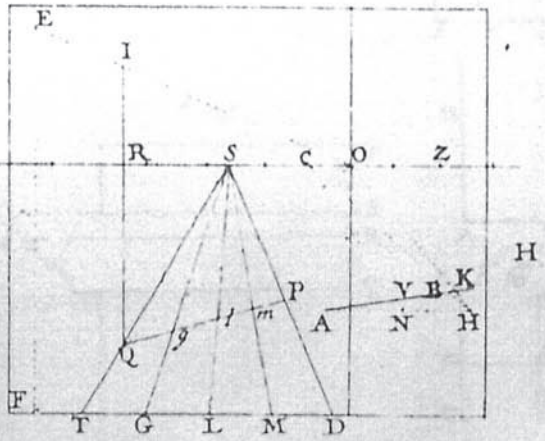
F. 55



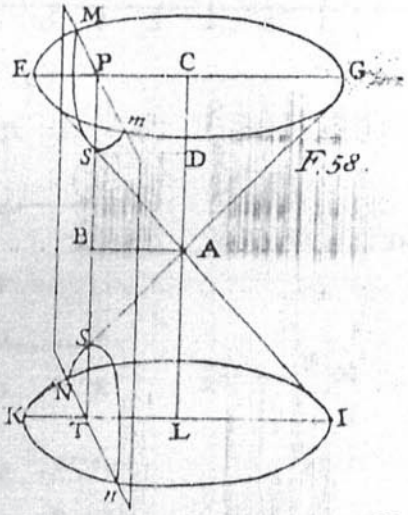
F. 56.



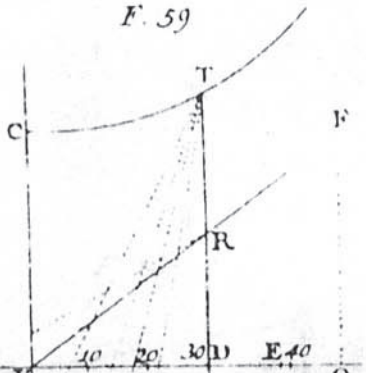
F 57.



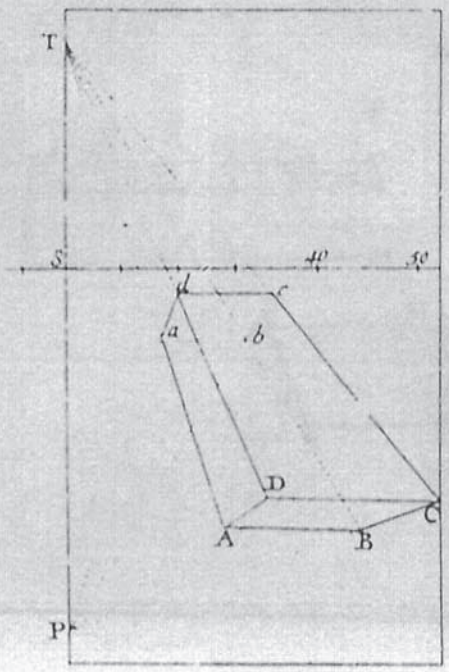
F. 58.

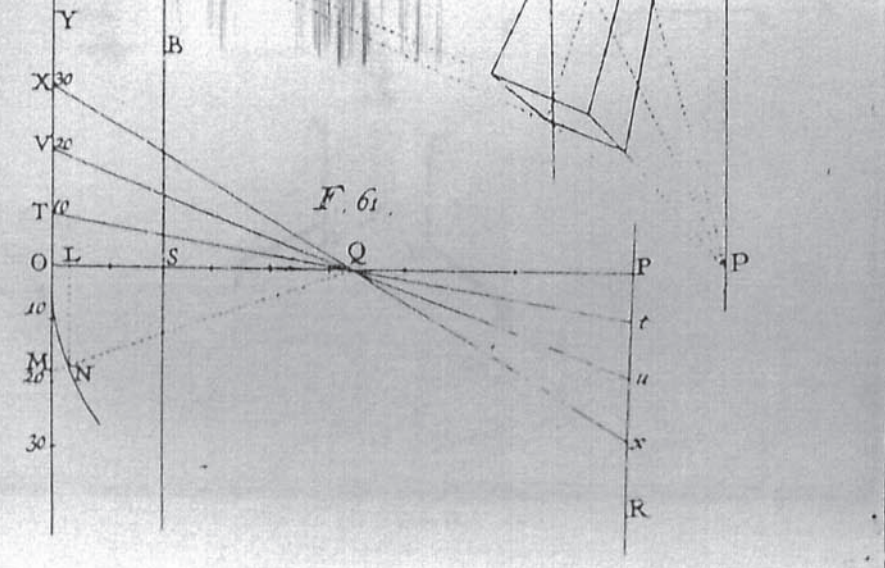


F. 59



F 60

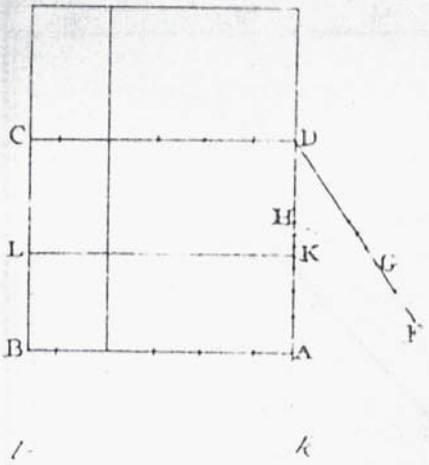




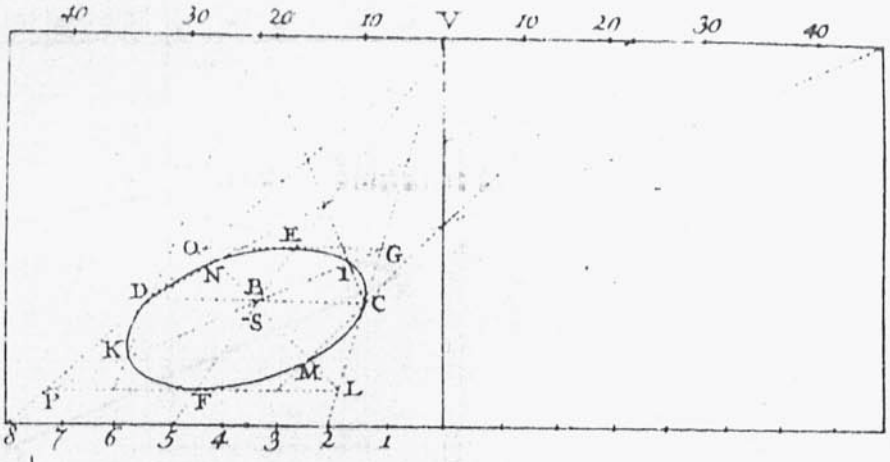
F. 61.

Tab. VII.

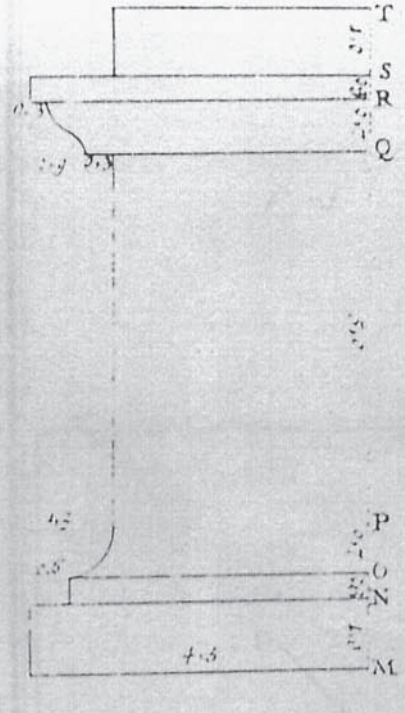
F. 62



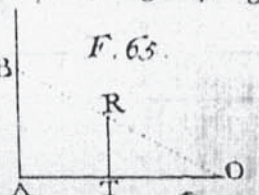
F. 63



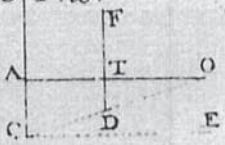
F. 64.



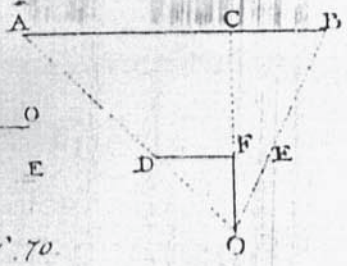
F. 65.



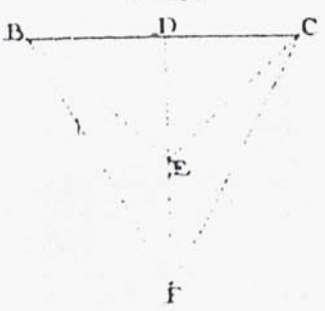
F. 66.



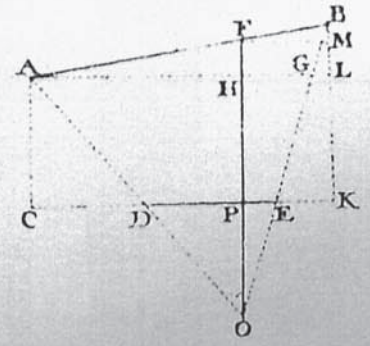
F. 67.



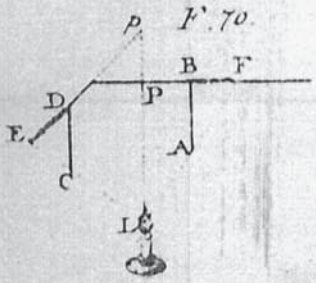
F. 68.



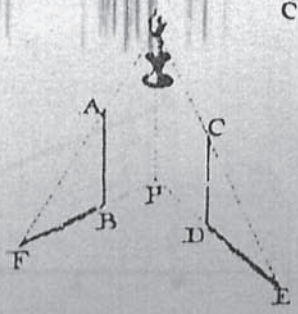
F. 69.



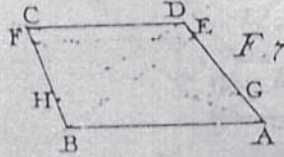
F. 70.



F. 71.



F. 72.



Tab VIII.

Fig 3

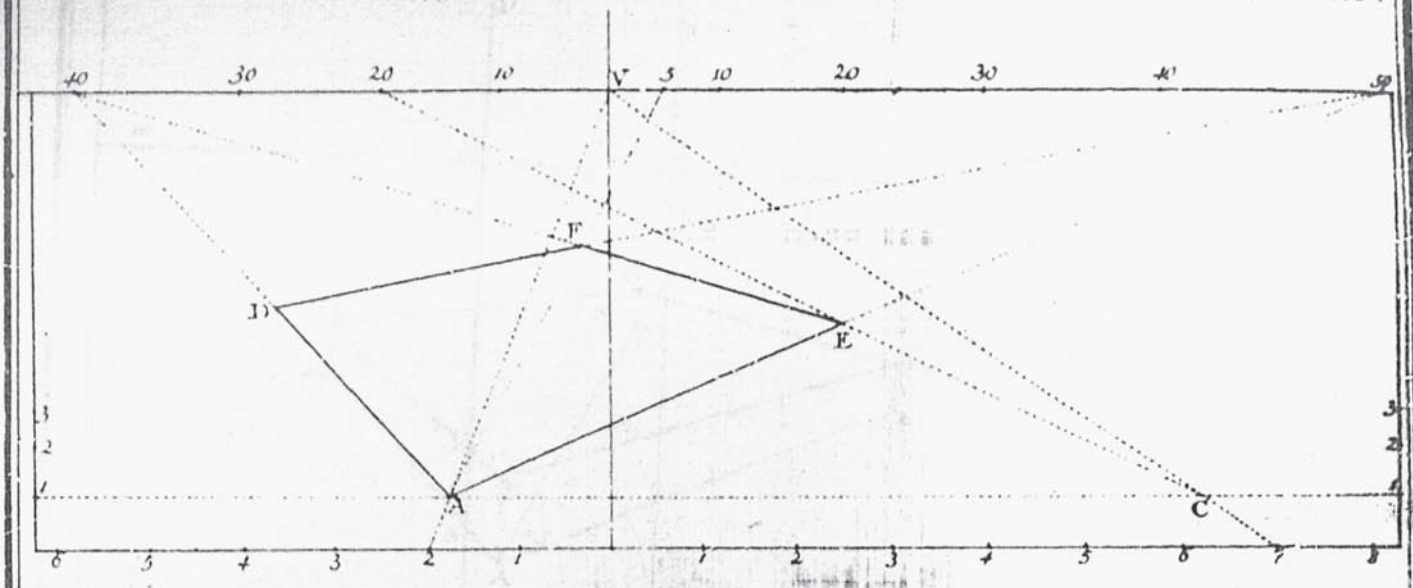
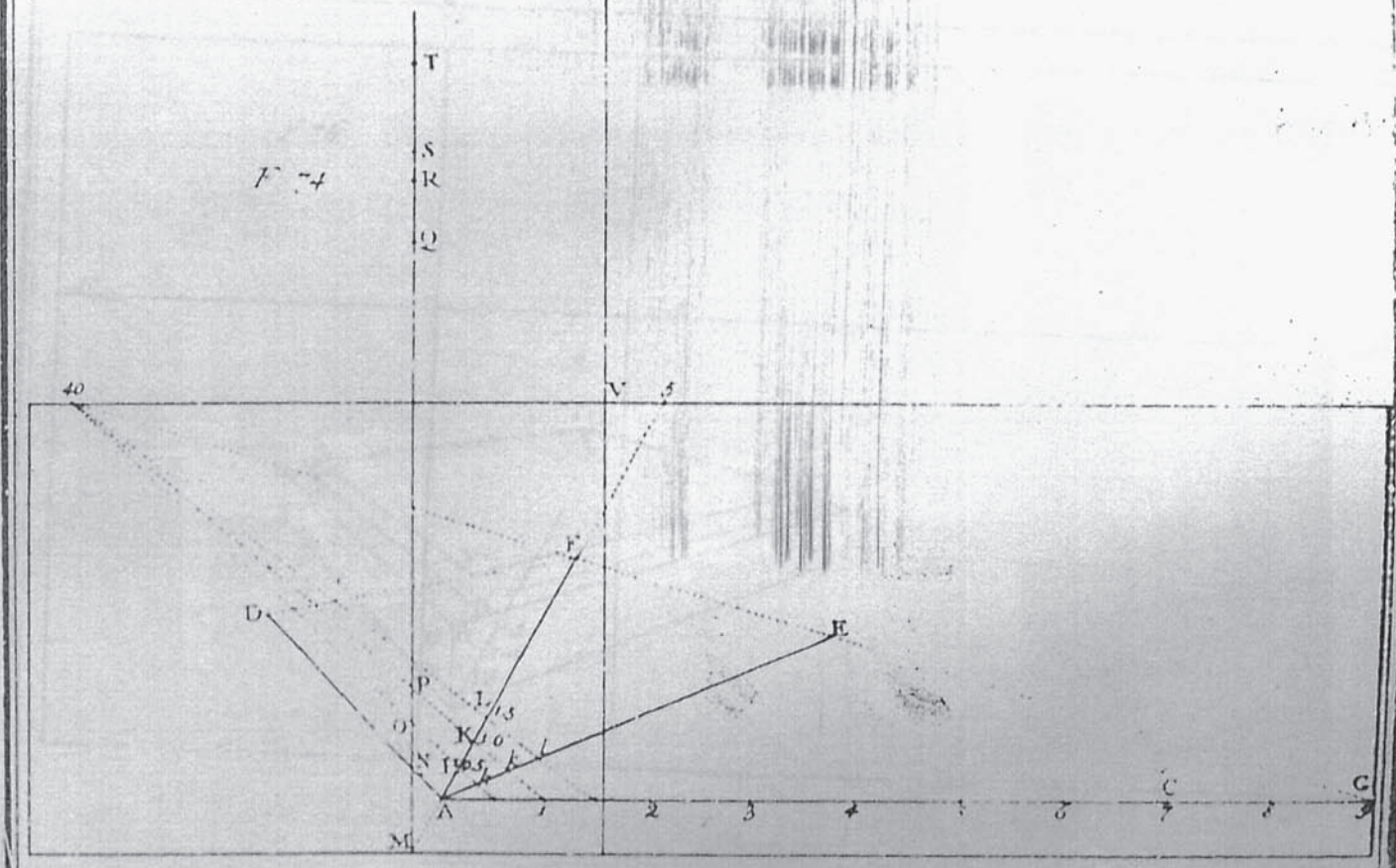
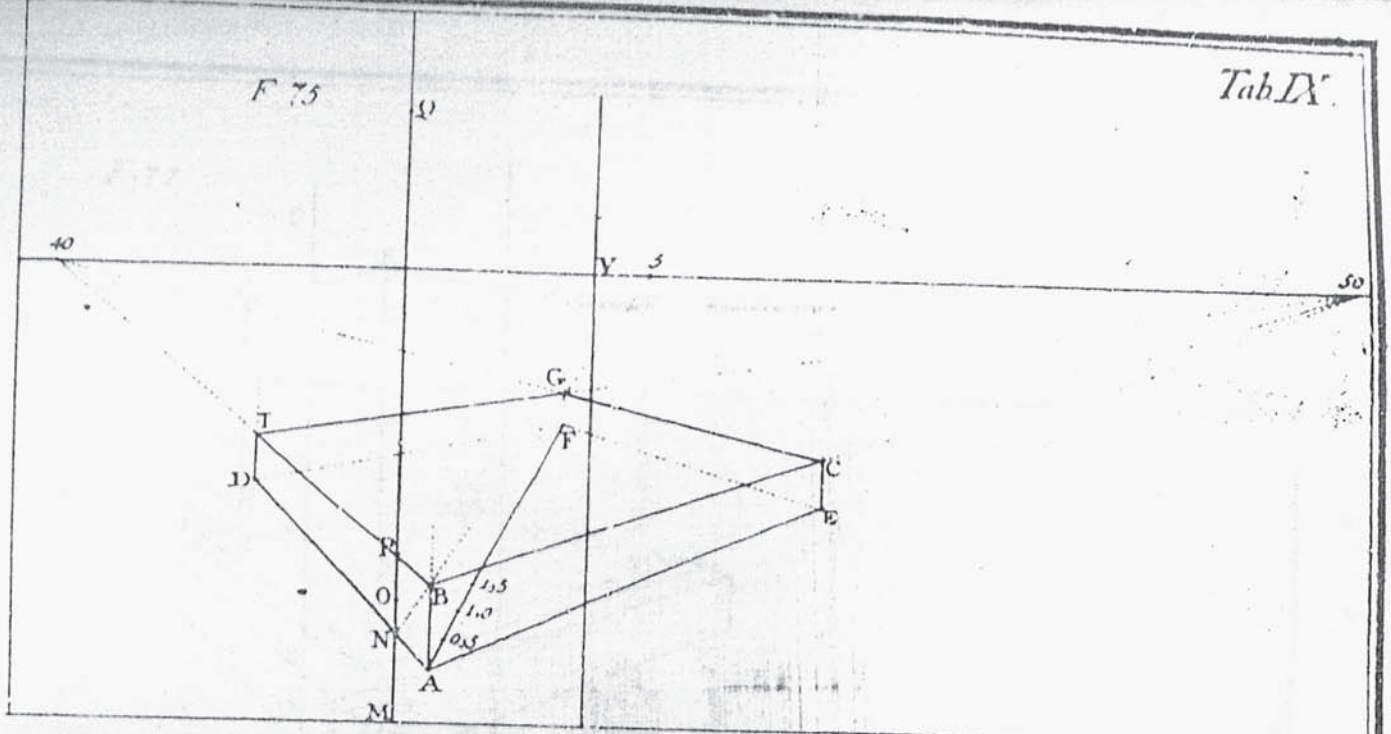


Fig 4

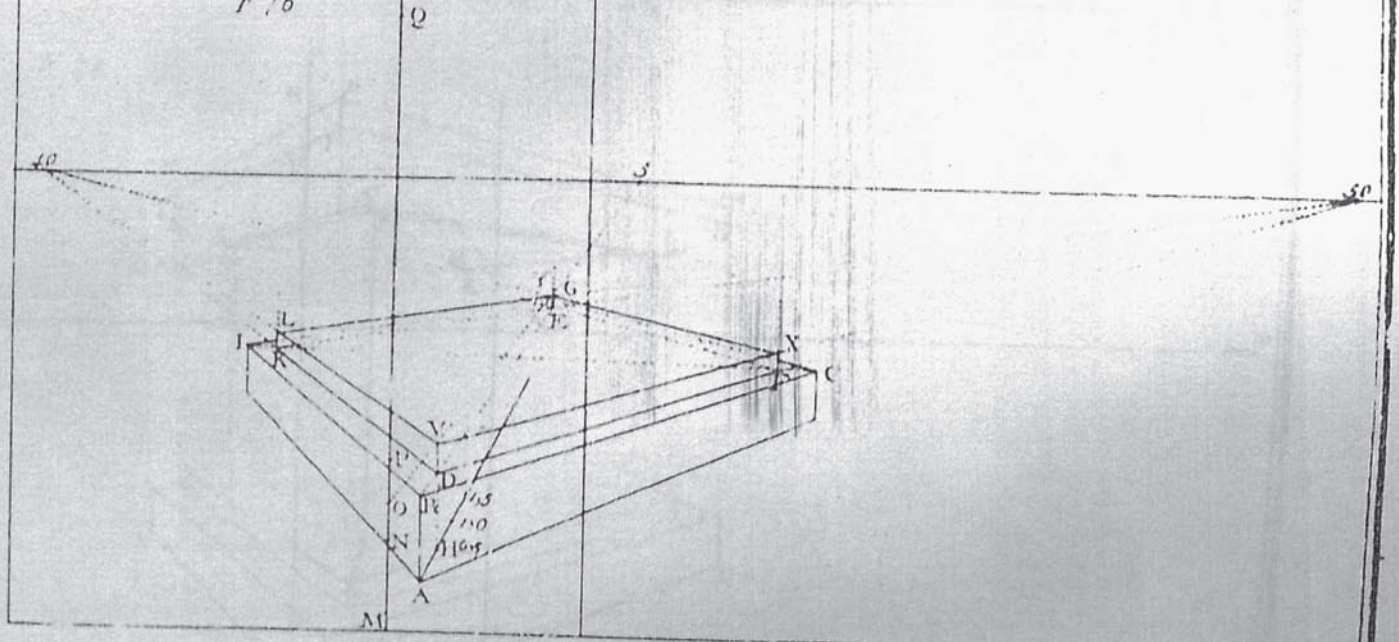


Tab IX.

F 75

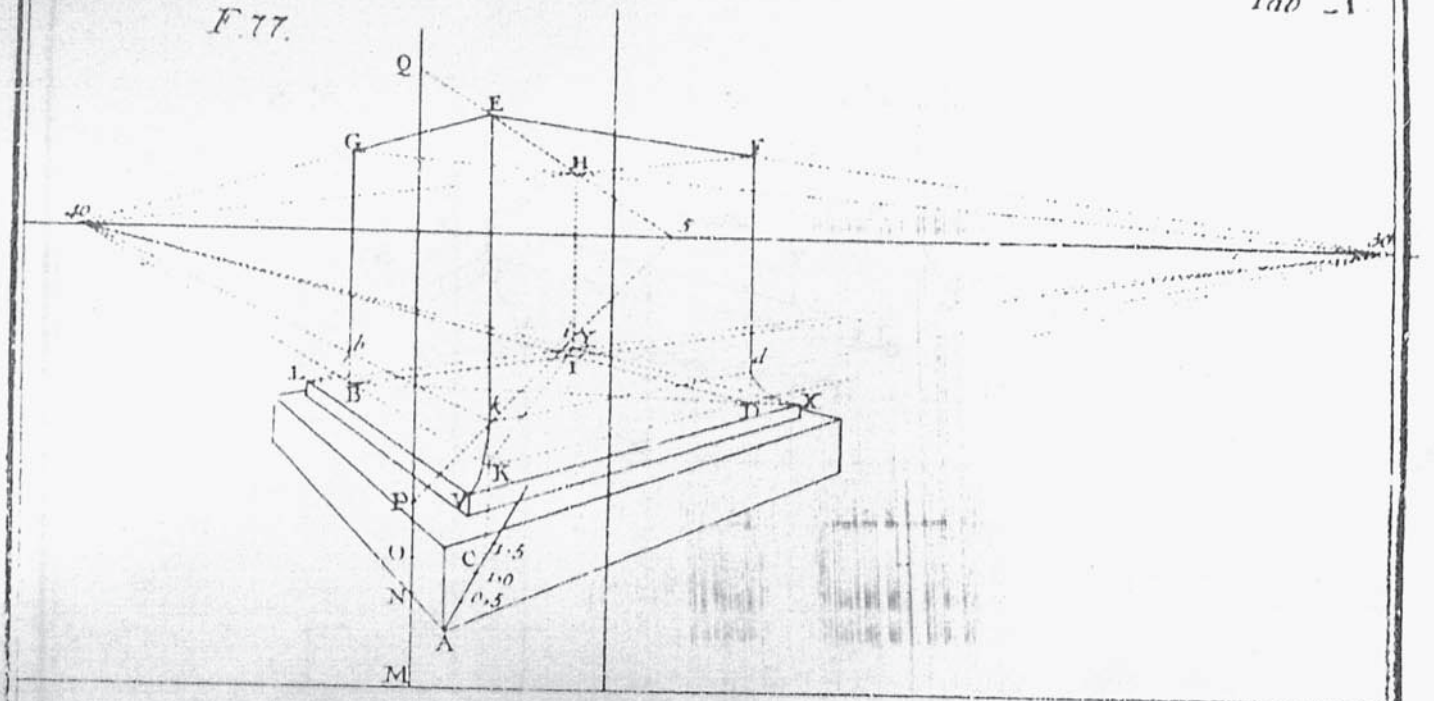


F 76

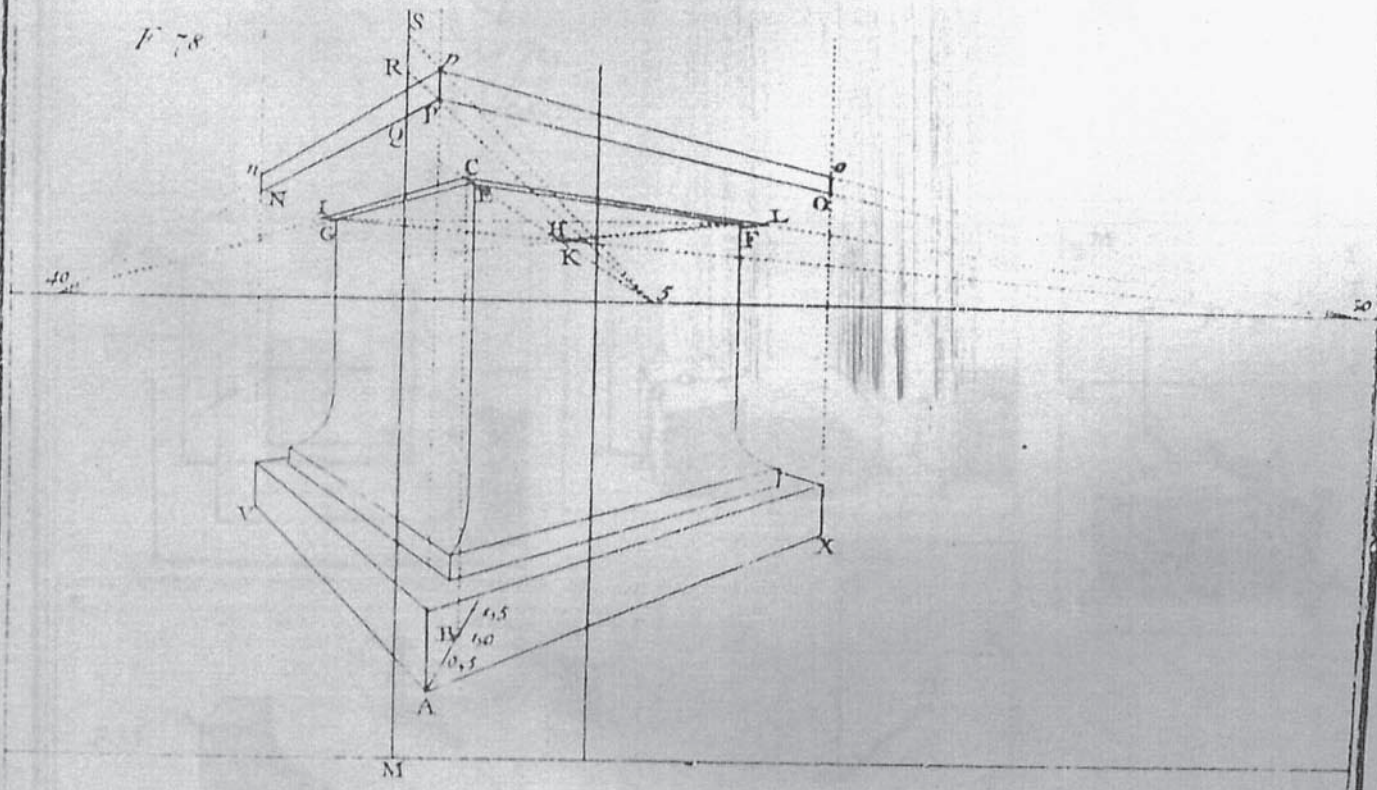


Tab V

F. 77.

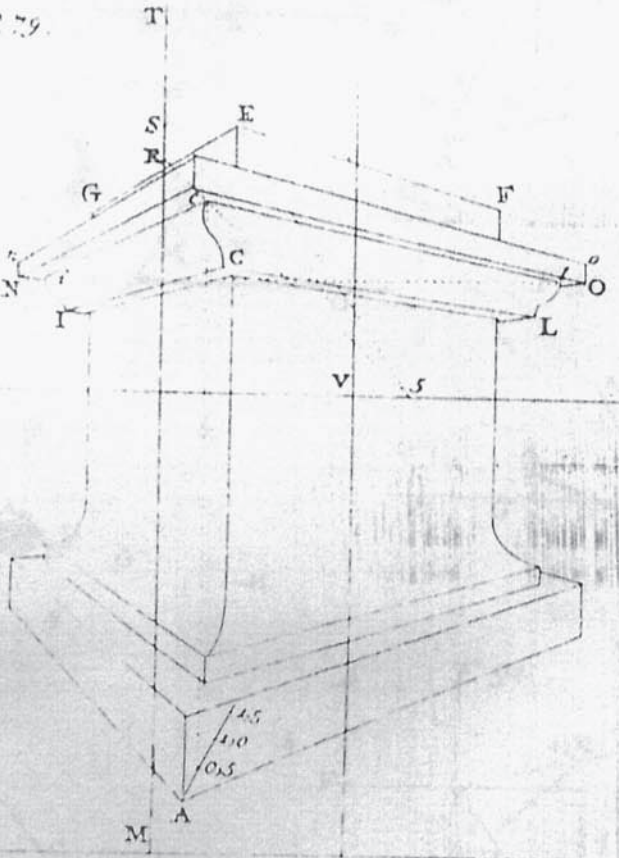

Q
E
G
H
F
40
5
30
b
I
d
L
B
K
X
P
O
C
1,5
1,0
0,5
N
A
M

F. 78

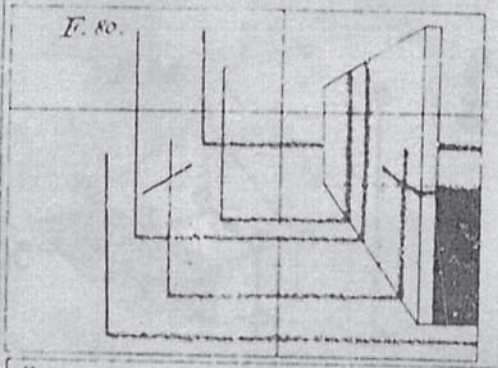

S
R
P
Q
n
N
C
o
I
L
G
H
K
F
40
5
20
V
X
1,5
B
1,0
0,5
A
M

Tab. XI.

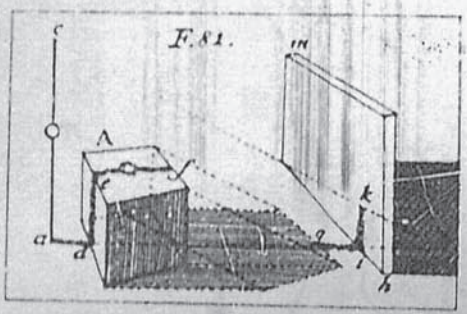
F. 79.



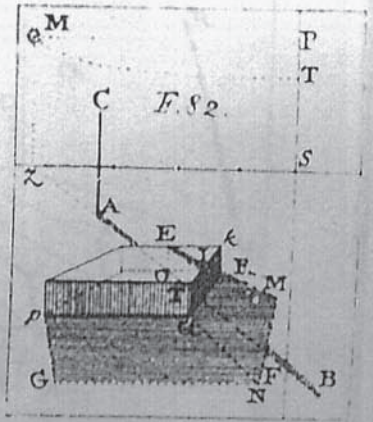
F. 80.



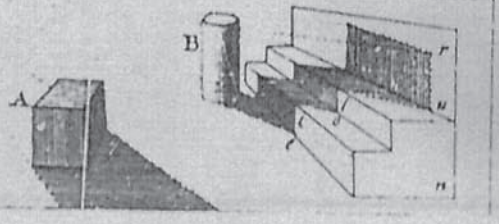
F. 81.



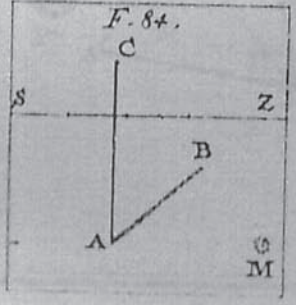
F. 82.



F. 83.

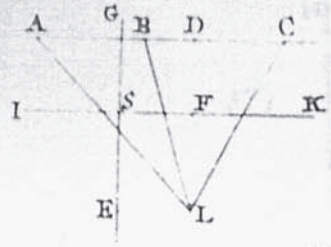


F. 84.

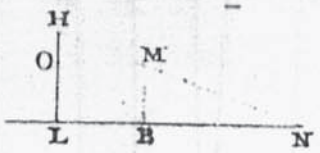


Tab XII.

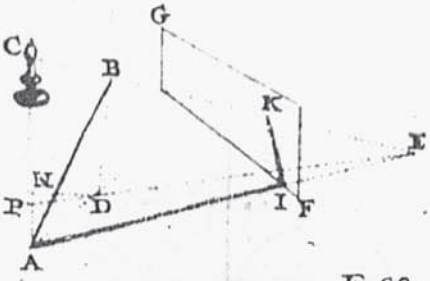
F. 85



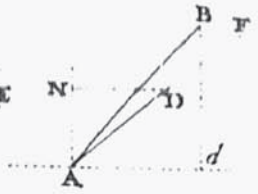
F. 86.



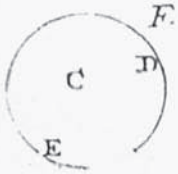
F. 87.



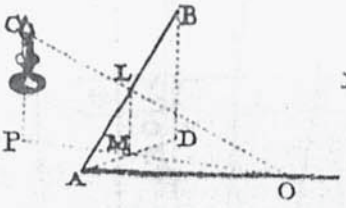
F. 88.



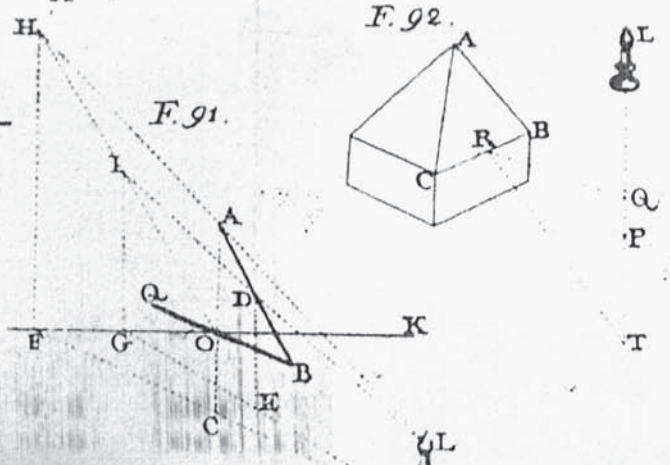
F. 89.



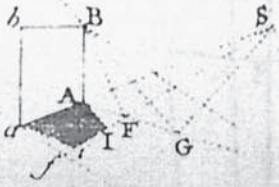
F. 90.



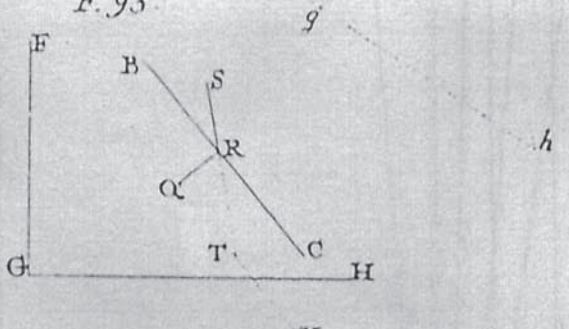
F. 91.



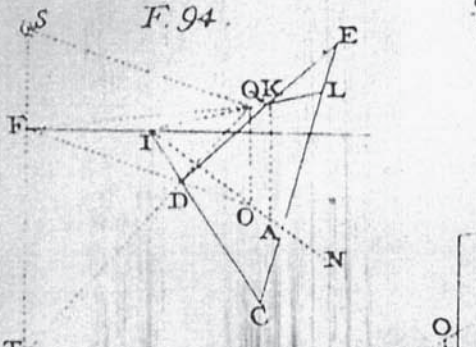
F. 92.



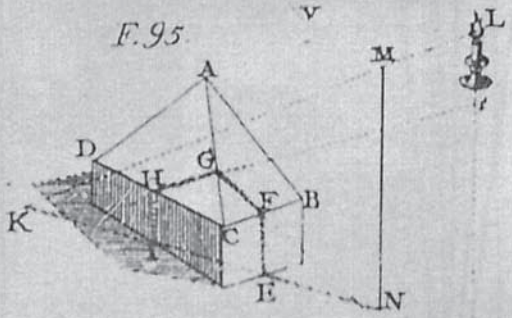
F. 93.



F. 94.



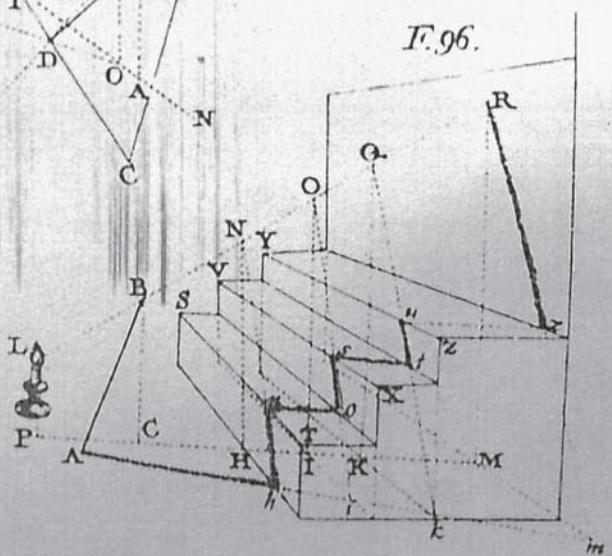
F. 95.



P

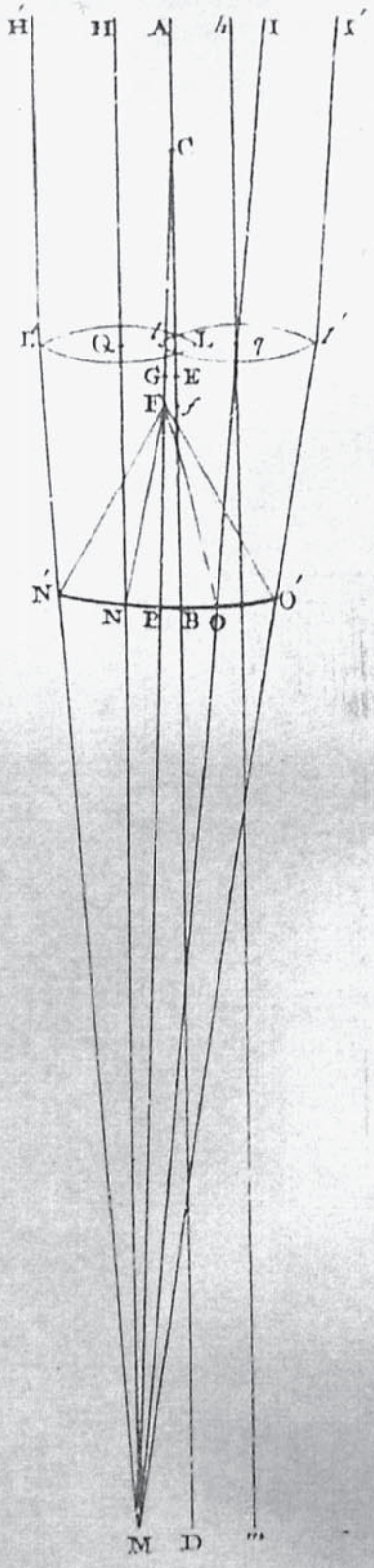
T

F. 96.

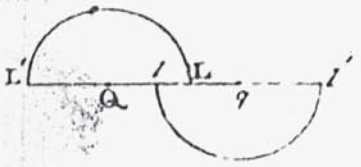


Tab XIII.

F. 1



F. 2.



1.**75**

Extrait d'une lettre du P. Boscovich a M. Clairaut. Il y propose une solution d'un problème concernant le perfectionnement des lunettes dioptriques, "Journal de Scavans", Paris, aout 1763, pp. 50-58

beau de la Phyſique, nous ne pouvons pas être long temps ſans voir combler les vœux que depuis pluſieurs ſiécles les Médecins font conſtamment ſur bien des objets rélatifs à la ſanté. Le zéle, les lumières, l'activité de la Magiſtrature ſe portent ſans relâche ſur tout ce qui a trait au bien-être. Nous en venons de voir tout récemment une preuve au ſujet des Cimetières dans l'intérieur des Villes, contre leſquels les Médecins ſe ſont conſtamment & ſans relâche élevé. On nous fait eſpérer qu'inceſſamment les demeures infectes des morts ceſſeront d'être au milieu des habitations des vivans. Quand ceſſeront auſſi de l'être ces endroits, le ſéjour de la douleur & de la miſere, où ſe trouvent renfermés des milliers d'hommes qui répandent une exhalaiſon capable de porter le principe de la mort chez les perſonnes les plus ſaines? Quand le ſeront de même ces Arts & ces métiers qui corrompant l'air, abrégent néceſſairement la vie de bien des Citoyens, &c.

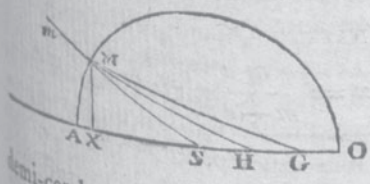
EXTRAIT D'UNE LETTRE DU P. BOSCOVICH A M. CLAIRAUT.

DEPUIS quelque tems, j'ai entre les mains le volume des Mémoires de l'Académie de 1756 & celui de 1757, dans leſquels j'ai vu avec un plaiſir infini vos deux beaux Mémoires ſur la manière de perfectionner les Lunettes dioptriques, où vous avez réſolu avec tant d'élégance tous les Problêmes qui appartiennent à cette ſorte des Lunettes, lorſqu'il s'agit des aberrations dans l'axe, & vous conduiſez dans le ſecond Mémoire le Lecteur aux deux équations du ſecond degré, deſquelles doit réſulter l'équation du quatriéme degré qui détruit toutes les aberrations cauſées par la différente réfrangibilité, & toutes celles qui ſont cauſées par la figure, tant dans les rayons rouges que dans les rayons violets, promettant des réfléxions ſur cette Solution, & de traiter dans un autre Mémoire des aberrations hors de l'axe.

En conſidérant la ſolution du premier & du ſecond Problême tirée du Lemme élémentaire, qui donne la comparaiſon du ſinus de la ſomme avec la ſomme des ſinus; j'en ai trouvé une autre ſolution, qui, ſi je ne me trompe, donne les mêmes formules plus immédiatement & avec un moindre appareil de calcul par le moyen d'un Lemme encore plus élémentaire. Je vous l'envoie, elle vous eſt dûe, car elle vient de vos recherches, je la ſoumets à votre jugement.

LEMME. Dans un triangle rectangle, dont un côté eſt très-petit, la différence de l'autre côté à l'hypoténuſe eſt très-approchante d'être égale au quarré de ce petit côté diviſé par le double de l'autre côté, ou de l'hypoténuſe.

Car ſi le triangle SXM eſt rectangle en X, & ſi AMO eſt un



demi-cercle, dont le centre eſt S, AX ſera $= \frac{MX^2}{XO}$; & SX étant très-approchante d'être égale à SA, SM, SO, quand MX eſt très-petit, on peut conſidérer XO comme égale à $2SX$ ou bien à $2SM$.

PROBLÊME. *Suppoſant que les noyons Mm, qui tendent au point G de l'axe ASG de l'arc circulaire AM dont le centre eſt en S, ſe rompent en M, de manière que le ſinus d'incidence SMG ſoit au ſinus de réfraction SMH comme m à 1, on demande AH diſtance du foyer H à A.*

On aura $MH : HS$: ſin MSH : ſin SMH, ou, en prenant ſin SMG pour terme moyen d'une raiſon compoſée,

$$\left.\begin{array}{l}\text{ſin } MSH : \text{ſin } SMG :: MG : GS \\ \text{ſin } SMG : \text{ſin } SMH :: m : 1\end{array}\right\}$$

$$MH : HS :: m \times MG : GS.$$

Si on ſuppoſe maintenant $AS = a$, $AH = x$, $AG = p$, $MX = e$, on aura $HS = x - a$; ou bien en faiſant $K = \frac{1}{a} - \frac{1}{p} = \frac{p-a}{ap}$, GS ſera $= apK$.

Par le Lemme, on aura $AX = \frac{e^2}{2a}$, & partant $HX = x - \frac{e^2}{2a}$; $GX = p - \frac{e^2}{2a}$, auxquelles ajoûtant leur différence d'avec HM, GM, qui par le Lemme ſera $\frac{e^2}{2HX}$, $\frac{e^2}{2GX}$, ou à-peu-près $\frac{e^2}{2x}$, $\frac{e^2}{2p}$, on aura $HM = x - \frac{e^2}{2a} + \frac{e^2}{2x}$; $GM = p - \frac{e^2}{2a} + \frac{e^2}{2p} = p - \frac{1}{2}Ke^2$.

Mettant ces valeurs dans la proportion $MH : HS :: m \times MG : GS$, on aura $x - \frac{e^2}{2a} + \frac{e^2}{2x} ; x - a :: mp - \frac{1}{2}mKe^2 : apK$, laquelle proportion étant bien maniée, donnera la valeur cherchée x.

Il en viendroit une équation du ſecond degré, qu'on évitera facilement en cherchant premierement la valeur de x très-approchante du

vrai, & la ſubſtituant enſuite dans la petite fraction $\frac{e^2}{2x}$. Cette valeur très-approchante du vrai ſera celle qui convient aux rayons principaux qui ont lieu lorſque l'arc AM s'évanouit. Qu'on appelle q la valeur de x qui convient à ces rayons, & tous les termes qui contiennent e diſparoiſſant, on aura $q : q - a :: m : aK$. D'où on tire $mq - ma = aKq$; $mq - aKq = ma$; $\frac{1}{q} = \frac{1}{a} - \frac{K}{m}$; $q = \frac{ma}{m - aK}$.

Mettant cette valeur dans la fraction $\frac{e^2}{2a}$ de la proportion trouvée, elle deviendra $x - \frac{e^2}{2a} + \frac{e^2}{2a} - \frac{Ke^2}{2m}$, & on aura $x - \frac{Ke^2}{2m} : x - a :: mp - \frac{1}{2}mKe^2 : apK$; d'où on aura $mpx - \frac{1}{2}mKe^2x - mpa + \frac{1}{2}mKae^2 = mKae^2 - apKx - \frac{apK^2e^2}{2m}$, & de là $x = \frac{mpa - \frac{1}{2}maKe^2 - \frac{apKe^2}{2m}}{mp - apK - \frac{1}{2}mKe^2}$.

Les deux derniers termes du numérateur & le dernier du dénominateur étant extrêmement petits, on aura

$$x = \frac{ma}{m - aK} + \frac{ma\left(\frac{1}{2}mK\right)e^2}{p(m - aK)^2} - \frac{(m - aK)\left(\frac{1}{2}mKa + \frac{apK^2}{2m}\right)e^2}{p(m - aK)^2}$$

Ici le premier terme eſt $= q$, le ſecond terme après la multiplication actuelle, & après avoir effacé $+\frac{1}{2}m^2Kae^2$ dans ſon numérateur, devient

$$\frac{\frac{1}{2}ma^2K^2e^2 - \frac{1}{2}apKe^2 + \frac{apK^2e^2}{2m}}{p(m - aK)^2} = \frac{m^2a^2\left(\frac{K^2}{mp} - \frac{K^2}{m^2a} + \frac{K^3}{m^3}\right)\frac{1}{2}e^2}{(m - aK)^2} = q^2\left(\frac{K}{mp} - \frac{K^2}{m^2a} + \frac{K^3}{m^3}\right)\frac{1}{2}e^2$$

Cette formule ſe réduit facilement à la vôtre. Pour cela, il faut après le ſecond terme du coëfficient, ajoûter ou ôter $\frac{K^2}{m^2p}$, & au lieu de $-\frac{K^2}{m^2a} + \frac{K^3}{m^2p} = -\frac{K^2}{m^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{p}\right)$ mettre $-\frac{K^2}{m^2}$

Par

Par ce moyen, on aura $\frac{K^2}{mp} - \frac{K^3}{m^2} - \frac{K^2}{m^2 p} + \frac{K^3}{m^3} = \frac{m-1}{m^3}\left(K^3 - \frac{mK^2}{p}\right)$, & pour la formule entiere $x = q - q^2 \times \frac{m-1}{m^3}\left(K^3 - \frac{mK^2}{p}\right)\frac{1}{2}e^2$. Ayant trouvé l'aberration de figure dans les deux ſuperficies terminées par le même milieu par une voie très-peu différente de la vôtre $= r^2 \rho$, où en ſuppoſant que a & b ſoient les deux raiſons des deux ſphéricités, on a pris $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r} = \frac{m-1}{f} + \frac{1}{p}$ & $\rho = \frac{m-1}{m}\left(\frac{m^3}{f^3} - \frac{2m^2+m}{af^2} + \frac{m+2}{a^2 f} + \frac{3m^2+m}{pf^2} - \frac{4m+4}{apf} + \frac{3m+2}{p^2 f}\right)\frac{1}{2}e^2$; j'ai cherché les cas où on peut corriger totalement l'aberration de la figure avec une ſeule lentille de verre commun.

J'ai fait $\frac{1}{p} = \frac{n}{f}$ & ayant fait pour le coëfficient renfermé dans la parenthèſe $= 0$, il m'eſt venu l'équation

$$f^2 - \frac{2m^2+m+4mn+4n}{m+2}af + \frac{m^3+3m^2n+mn+3mn^2+2n^2}{m+2}a^2 = 0$$

qui donne $\frac{f}{a} = \frac{2m^2+m+4mn+n}{2m+4} \pm \frac{\sqrt{(-4m^3+m^2+4m^3n-4m^2n+4m^2n^2)}}{2m+4}$

Afin que la correction demandée ſoit poſſible, il faut que la valeur renfermée ſous le ſigne radical ſoit poſitive. On voit donc qu'elle ne peut pas avoir lieu, quand ces rayons arrivent parallèles à la lentille, parce qu'alors p devient infini, & que n s'évanouit, & qu'il ne reſte plus que $-4m^3 + m^2$; or pour que cette valeur fût poſitive, il faudroit que m ne fût pas plus de $\frac{1}{4}$, ce qui eſt impoſſible. Lorſque les rayons paſſent d'un milieu auſſi rare que l'air dans un autre milieu quelconque, m eſt plus de 1 ; quand même le rayon paſſeroit de l'air dans le vuide, m ſeroit peu moindre que l'unité.

Pour déterminer les valeurs de n & par conſéquent celles de p (diſtance à laquelle les rayons ſont convergens) qui rendent le Problême poſſible, il faut chercher les cas dans leſquels l'expreſſion qui eſt ſous le radical eſt poſitive, ce qui ſe trouve en la faiſant d'abord égale à zéro. Par ce moyen on a l'équation

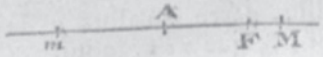
$$n^2 + (m-1)n - \frac{4m-1}{4} = 0,$$

& partant

$$n = -\frac{(m-1) \pm \sqrt{(m^2+2m)}}{2}$$

pour les limites cherchées des valeurs de n qui permettent de remplir le but en queſtion. Si on ſuppoſe $n = \frac{3}{2}$, on a à-peu-près les valeurs $+\frac{7}{8}$ & $-\frac{11}{8}$ pour n, & par conſéquent pour celles de p, $\frac{8}{7} f$ & $-\frac{8}{11} f$ ou $\frac{4}{7} r$ & $-\frac{4}{11} r$.

Soit la lentille en A, & ſoit $AF = f$, les rayons venant dans la direction AF. Prenez dans la



même direction $AM = \frac{8}{7} AF$ & dans la direction oppoſée $Am = \frac{8}{11} AF$, ſuivant la formule précédente, toutes les fois que les rayons viendront ou divergens d'un point quelconque ſitué entre A & m, ou convergens à un point quelconque ſitué entre A & M, on pourra corriger l'aberration, en prenant $\frac{f}{a}$ de la valeur trouvée ci-deſſus, pourvu toutefois que l'ouverture e ſoit petite par rapport aux quantités à l'égard deſquelles elle a été conſidérée telle dans la Solution du Problême, & que l'épaiſſeur de la lentille ne nuiſe pas. Mais la correction ſera impoſſible quand les rayons viendront de plus loin, ou quand ils ſeront convergens à un point plus éloigné.

Le cas de la divergence ne ſervira jamais pour les lentilles des lunettes; parce que ſi la diſtance de la divergence n'eſt pas double de AF, les rayons ne deviendront pas convergens après la réfraction, & même ſi cettte diſtance n'eſt pas quadruple, ou plus que quadruple, les rayons ne ſeront convergens qu'à un point plus éloigné de celui dont il viennent divergens. Le cas de la convergence pourroit ſervir quand une lentille recevra les rayons rendus déja convergens par les lentilles précédentes.

Pour le cas, dans lequel il eſt impoſſible de détruire l'aberration, on pourra trouver la forme de la lentille, qui rende cette erreur la moindre qu'il eſt poſſible, en différenciant la valeur de r, où l'on ſuppoſera m, r, f, p, conſtans & a ſeul variable: on trouve alors

$$\frac{(2m^2+m)da}{a^2 f^2} - \frac{2(m+2)da}{a^3 f} + \frac{(4m+4)da}{a^2 pf} = 0, \text{ \& } \frac{1}{a} = \frac{2m^2+m}{(2m+4)f} + \frac{2m+2}{(m+2)p}.$$

Lorſque p eſt infini, & $m = \frac{3}{2}$, il vient $\frac{a}{f} = \frac{7}{6} = 1 - \frac{a}{b}$, & partant $b = -6a$. Il faut donc pour la moindre aberration poſſible que

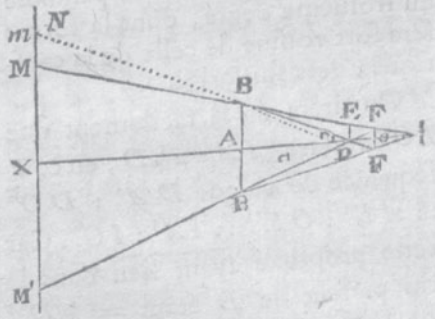
les deux ſuperficies ſoient convexes, & que la ſeconde ſoit ſix fois moins courbe que la première. Au reſte, on gagneroit peu à cette conſtruction, car je trouve que cette forme de lentille ôteroit à peine un tiers de l'aberration qu'il y a dans la lentille iſoſcele convexe de deux côtés.

Comme les quatre ſuperficies peuvent détruire cette aberration, & celle de la différente réfrangibilité des rayons, il vaudra mieux faire auſſi les oculaires de deux verres, ayant égard à la convergence & à la divergence des rayons, c'eſt-à-dire, à la valeur de p.

D'ailleurs m'étant amuſé à conſidérer l'aberration qui naît de la figure, j'ai cherché le diamètre du cercle qui eſt le moindre de tous ceux dans leſquels on peut recevoir les rayons homogènes, qui paſſent par toute l'ouverture; la détermination de ce petit cercle eſt néceſſaire pour comparer l'erreur qui vient de la différente refrangibilité des rayons, car la confuſion de l'image dépend de la grandeur de ce petit cercle.

Si I eſt le foyer des rayons principaux, & MD les rayons qui viennent de la diſtance XM; XI ſera $= r$, $DI = r^2 \rho$, & chaque rayon touchera la cauſtique IFB dans quelque point B, après lequel étant prolongé, il la coupera de nouveau en F, de même que $M'B'$ en F. FO ſera le diamètre du plus petit des cercles qui puiſſent recevoir tous les rayons qui rencontrent l'ouverture MXM', le centre de ce petit cercle ſera dans l'axe en O. Il s'agit de trouver OF.

Puiſque ρ eſt égal à une quantité conſtante multipliée par e^2, prenons δe^2 pour ſa valeur, & ID ſera $= r^2 \delta e^2$. S'il y a un rayon md



infiniment voiſin du premier, leur dernière interſection ſera dans le contact B, & Dd ſera $= 2r^2 \delta e\, de$. Si dC, AB ſont perpendiculaires à l'axe, & ſi dC coupe MD en C; on aura cette analogie, XD qui eſt à très-peu près r, eſt à $XM = e$, comme $Dd = 2r^2 \delta e\, de$, à $dC = 2r\delta e^2\, de$. Pareillement $Mm = de$ eſt à $dC = 2r\delta e^2\, de$, comme MB qui eſt ſenſiblement $= r$, eſt à BC très-approchant de $AD = 2r^2 \delta e^2$. ID étant $= r^2 \delta e^2$, AD ſera double de ID, & AI triple. On aura enſuite comme $DX = r$, ou très-approchant, eſt à $XM = e$, ainſi $DA = 2r^2 \delta e^2$, eſt à $AB = 2r\delta e^3$.

Faites $IA = z$, $AB = y$, puiſque $z = 3 r^2 \delta e^2$, $y = 2 r \delta e^3$, on aura $e^6 = \frac{z^3}{27 r^6 \delta^3} = \frac{y^2}{4 r^2 \delta^2}$, & par conſéquent $y^2 = \frac{4 z^3}{27 r^4 \delta^3}$, qui eſt une équation à la parabole du troiſième degré, dont la forme ſera fort voiſine de celle de la cauſtique, vers ſon origine.

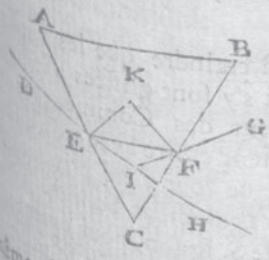
On tirera de-là facilement que IO doit être $\frac{1}{4} IA = \frac{1}{4} D$, en conſéquence de ce que $DA^2 : DO^2 :: AB^2 : OF^2 :: IA^3 : IO^3$. Car cette propriété ayant lieu dans le cas préſent ou D étant $= \frac{1}{4} DI = \frac{1}{8} DA$, on aura $DA^2 : DO^2 :: 64 : 1$, & IO étant $\frac{1}{4} IA$, on aura auſſi $IA^3 : IO^3 :: 64 : 1$.

Si on cherchoit directement IO, il viendroit une équation du troiſième degré, dont les trois racines ſeroient rationelles, parce que ſuppoſant $IO = h z$, DO ſeroit $= \frac{1}{3} z - h z = z \left(\frac{1 - 3h}{3} \right)$ & de là $\frac{4}{9} z^2 : z^2 \left(\frac{1 - 6h + h^2}{9} \right) :: DA^2 : DO^2 :: AB^2 : OF^2 :: AI^3 : OI^3 :: 1 : h^3 = \frac{h^2 - 6h + 9}{4}$; c'eſt à dire $h^3 - \frac{1}{4} h^2 + \frac{3}{2} h - \frac{9}{4} = 0$ laquelle équation a les trois racines 1, 1, $\frac{1}{4}$; les deux premières donnent le contact D qui équivaut à deux interſections $h z$ devenant $= z$; & la troiſième donne l'interſection F qu'on ne peut pas trouver directement, ſans trouver en même-temps les deux autres.

Or ayant reconnu que $IO = \frac{1}{4} IA$, on trouvera facilement OF, avec le ſecours de $AB = 2 r \delta e^3$; puiſque on aura $8 : 1 :: IA^{\frac{3}{2}} : IO^{\frac{3}{2}} :: AB = 2 r \delta e^3 : OF = \frac{1}{4} r \delta e^3 = \frac{1}{4} r \rho e$. On voit en premier lieu que cette aberration croit comme les cubes des ouvertures; enſuite l'aberration dans l'axe DI étant $- r^2 \rho$, cette aberration ſeroit $\frac{1}{4}$ de celle dans l'axe multipliée par $\frac{e}{r}$, c'eſt-à-dire que le rayon de ce petit cercle eſt la quatrième partie de l'aberration, qu'on eſtimeroit par l'angle DMI; puiſque ſi BI eſt rencontrée en E par la droite DI perpendiculaire à l'axe, on a $IX = r : XM = e :: ID = r^2 \rho : DE = r \rho e = 4\, OF$. Enfin puiſque les variations de $\frac{1}{4} r \rho e$ dépendent de la valeur de ρ quand r & e ſont conſtantes, on voit que cette aberration ſera nulle ou très-petite lorſque l'aberration ou l'erreur rectiligne ID l'étoit auſſi.

Quant aux priſmes que vous avez traités ſi généralement & avec tant d'élégance, je trouve qu'on peut

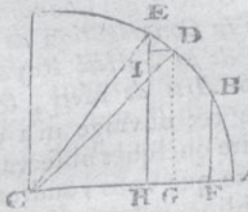
avoir par une ſinthèſe facile élémentaire ce qui appartient au cas le plus ſimple & le plus uſuel dans lequel le rayon parcourt une ligne droite parallèle à la baſe. Si le rayon entré par DE ſort par PG, que DE & FG ſe rencontrent en I, & les perpendiculaires EK, FK en K, que l'on prolonge EI en H, l'angle FIH réfraction totale qu'on détermine facilement par obſervation ſera $= 2IEF$; ſi on appelle cet angle r, IEF ſera $= \frac{1}{2}r$. De



même, ſi on appelle c l'angle ACB; KEF ſera $= \frac{1}{2}c$, puiſque dans ce cas les angles KEF, KFE doivent être égaux entr'eux, & que les deux pris enſemble doivent être toujours égaux à c. On aura donc $m. 1 ::$ ſin. KEI : ſin $KEF ::$ ſin $\left(\frac{r+c}{2}\right)$: ſin $\frac{c}{2}$. De-là $m = \text{ſin.}\left(\frac{r+c}{2}\right) : \text{ſin.}\frac{1}{2}c$

Comme vous l'avez trouvé, vous qui avez $\frac{r+c}{2} = g$, puiſqu'il en réſulte que $m = \frac{\text{ſin } g}{\text{ſin.}\frac{1}{2}c}$.

De-là on tire $dm = \frac{dr \text{ coſ.}\left(\frac{r+c}{2}\right)}{2 \text{ ſin.}\frac{1}{2}c}$ avec cette ſinthèſe facile. Soit $AB = \frac{1}{2}c$, $BD = \frac{1}{2}r$, & on aura $m : 1 :: DG : BF$. Si $\frac{1}{2}r$ croit par $DE = \frac{1}{2}dr$ dans les rayons violets; on aura $m + dm : 1 :: EH : BF$ & $dm : 1 :: EI : BF$. Or à cauſe de l'angle droit EDC, les triangles CGD, EDI ſont ſemblables, & donnent CD



$= 1 : CG = \text{coſ.}\left(\frac{r+c}{2}\right) :: DE = \frac{dr}{2} : EI = dr \text{ coſ.}\left(\frac{r+c}{2}\right)$

d'où $BF = \text{ſin } \frac{1}{2}c : EI = \frac{dr}{2} \text{ coſ.}\left(\frac{r+c}{2}\right) :: 1 : dm = \frac{dr \text{ coſ}\left(\frac{r+c}{2}\right)}{2 \text{ ſin } \frac{1}{2}c}$.

Que ſi les angles $\frac{1}{2}r$, $\frac{1}{2}c$ ſont aſſez petits, pour qu'on puiſſe les prendre pour leurs ſinus, & leur coſinus pour le rayon, on aura

$$m = \frac{r+c}{c}\,;\ m-1 = \frac{r}{c}\,;\ dm = \frac{dr}{c}\,,$$

les formules ſe ſimplifiant ainſi pour ces petits priſmes. On voit donc que la ſyntheſe donne ſouvent des ſolutions plus courtes que l'analyſe, quoique celle-ci ſoit beaucoup plus univerſelle, & qu'elle s'étende à mille cas, auxquels la Géométrie ne peut attendre; l'eſprit humain ne pouvoit pas ſans l'uſage des ſignes qui réveillent les idées & aident l'imagination, retenir préſentes toutes les vérités démontrées.

*LETTRE DE M***, A MESSIEURS LES AUTEURS Du Journal des Sçavans.*

MESSIEURS,

IL paroît depuis peu un ouvrage en ſix volumes, qui a pour titre: *Traité abrégé de Phyſique à l'uſage des Ecoles; par M. de S. Ignon, Procureur Général des Chanoines Réguliers de la Congrégation de Notre Sauveur, de la Société Royale des Sciences & Arts de Metz, &c.* La lecture de cet ouvrage m'a donné lieu de faire quelques obſervations, que j'eſpére que vous voudrez bien rendre publiques, en inſérant cette Lettre dans votre Journal. Mes remarques ont pour objet de prévénir les Lecteurs auxquels ce Livre eſt deſtiné, contre des inadvertences qui ont échappé à l'Auteur: l'intérêt que vous prenez au progrès des Sciences, vous fera ſans doute regarder ces réflexions comme d'autant plus utiles, que M. de S. Ignon ayant puiſé, comme il le dit lui-même, la plus grande partie des vérités que renferme ſon Livre, dans des ouvrages eſtimés, il eſt à craindre que les négligences qui s'y ſont gliſſées n'induiſent en erreur des Commençans qui pourroient croire avec trop de confiance que tout a été pris dans des ſources également bonnes.

M. de S. Ignon, pour épargner la dépenſe, a cru pouvoir ſe paſſer de figures gravées, comme on en trouve dans tous les Livres de cette eſpéce; je loue très-ſincérement le motif qui l'a porté à prendre ce parti; mais je crois que l'épreuve qu'il a faite à cet égard, lui apprendra, & encore plus à ſes Lecteurs, que le mal qu'il a voulu éviter, ſi c'en eſt un, eſt un mal néceſſaire:

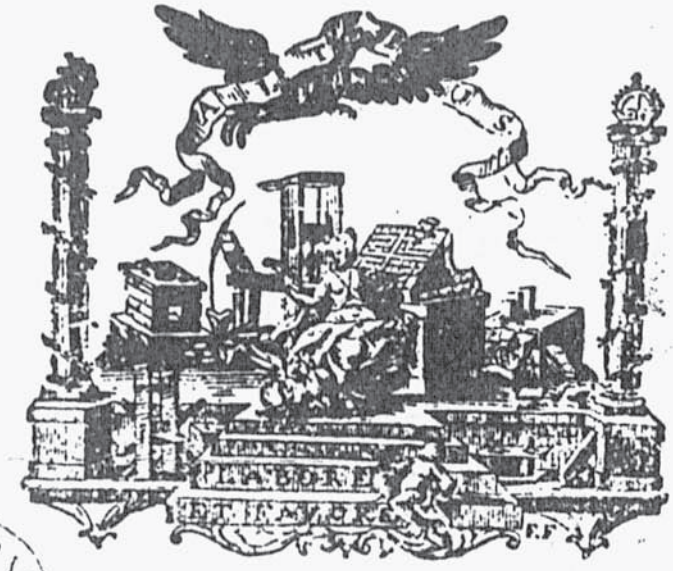
Dans l'ouvrage dont il s'agit, l'Auteur a toujours fait marcher à côté de l'expérience un ſyſtême général qui pût ſuppléer aux explications auxquelles la Phyſique purement expérimentale n'a pu atteindre juſqu'à préſent; on doit applaudir, ce me ſemble, à un tel

1.**82**

Dissertationes quinque ad Dioptricam pertinenses,
P. Rugerii Josephi Boscovich S.J., […], Vindobonae, 1767

DISSERTATIONES
QUINQUE
AD
DIOPTRICAM
PERTINENTES

P. ROGERII JOSEPHI BOSCOVICH S. J.
PUBL. MATHESEOS PROFESSORIS
IN
REGIA TICINENSI ACADEMIA.



NEW-YORK

VINDOBONÆ,
TYPIS JOANNIS THOMÆ NOB. DE TRATTNERN,
SAC. CÆS. REG. AULÆ TYPOGR. ET BIBL.

M. DCC. LXVII.

LECTORI BENEVOLO.

HAbes, amice Lector, Diſſertationes quinque, quarum ſingulæ novi aliquid continent, quo Dioptrica ſemper magis excoli, & promoveri poſſit. Priores duas Auctor inſeruit Bononienſibus Actis, & continentur ſingulis partibus tomi noviſſimi, qui jam a tribus annis ſub prælo eſt, & dum hæc imprimimus, nondum prodiit, proditurus brevi: at jam aliquot earum exemplaria ſeorſum impreſſa, ac ab ipſo Auctore & ad amicos transmiſſa, & ad Academias plures haberi poſſunt pro editis: prima quidem etiamgermanice reddita, & impreſſa ante hoſce duos annos hic itidem Viennæ, jam publici juris eſt facta. Verum in hac nova editione continentur multa additamenta, & adnotationes multæ Auctoris ipſius, potiſſimum pertinentes ad ipſam priorem. Reliquæ tres nusquam alibi impreſſæ nunc primum hic prodeunt.

Prima ex hiſce quinque Diſſertationibus continet demonſtrationem admodum ſimplicem, & petitam a theoremate admodum elementari formularum, quas Clairautius propoſuit in Commentariis Acad. Pariſ. pro focis unius, vel binarum lentium, cum determinatione errorum figuræ ſphæricæ, craſſitudinis lentis, & diverſæ refrangibilitatis:

extenduntur autem ipſæ formulæ, & applicantur ad plures uſus theorematis pluribus inde deductis: expolitur ratio corrigendi ejusmodi errores ope binarum lentium e diverſæ ſpeciei ſubſtantiis: proponuntur plures methodi determinandæ qualitatis refractivæ, & diſtractivæ diverſarum ſubſtantiarum tam ope lentium, quam ope priſmatum, quorum ſimplex theoria traditur: docetur autem ratio determinandi pro quavis lente per obſervationes curvaturam utriusque ſuperficiei, & qualitatem refractivam, potiſſimum ope focorum, ubi occurrit ſimplex admodum, & elegans, ac ad eam perquiſitionem utiliſſima theoria foci habiti per duplicem refractionem, & unicam reflexionem, potiſſimum ubi imago pingitur prope ipſum objectum radians. In fine diſſertationis deſcribitur novum Auctoris ipſius inſtrumentum, quod is *Vitrometrum* appellat; cujus ope admodum facile explorantur qualitates & refractivæ, & diſtractivæ diverſorum radiorum. In una ex adnotationibus hic adjectis, evolvitur præcipuus fons colorum exhibitorum in teleſcopiis dioptricis ab oculari lente, cujus conſideratio paſſim negligitur, & eorum correctio indicatur.

Secunda Diſſertatio verſatur circa ſucceſſivam unionem colorum per duas ſubſtantias, & multo majorem per tres. Oſtenditur per binas lentes ex binis ſubſtantiis non poſſe uniri, niſi binos tantum colores: proferuntur experimenta inſtituta ope vitrometri, quæ rem demonſtrant, & evolvitur tota theoria radiorum transmiſſorum trans bina priſmata, habentia ſuperficiem unam congruentem, & ingredientium ad perpendiculum in primam ſuperficiem prioris: ejus ope oſtenditur, qui, in quibus angulis radii uniri

de-

debeant, & quo ordine inverti ſolare ſpectrum, dum alter e binis priſmatum angulis mutatur perpetuo: exhibetur itidem methodus determinandi per obſervationes relationem qualitatum diſtractivarum alterius ſubſtantiæ pro diverſis colorum binariis ad reſpondentes alterius qualitates diſtractivas: iis detectis, exhibetur methodus uniendi colores extremos cum medio per tres ſubſtantias, ut per lentes tres, quarum media poſſit etiam eſſe aquea incluſa binis vitreis, ut idcirco binas tantummodo elaborare ſit ſatis: ejusmodi lentium formulæ exhibentur itidem ſimplices, quæ determinent ſuperficierum curvaturas corrigentes ſimul etiam errorem figuræ ſphæricæ.

Diſſertatio tertia verſatur circa diſtributionem lumi nis per circellum, qui continet errorem figuræ ſphæricæ, collatam cum diſtributione jam olim a Newtono inventa, & ſine demonſtratione propoſita in ſua Optica per circellum erroris diverſæ refrangibilitatis. Habetur ſimplex, & elegans determinatio cauſticæ per refractionem in lente factam: ejus ope ſolvitur problema, quo quæritur, e quot, & quibus lentis punctis deveniant radii ad quodvis punctum ejus circelli, quæ inveniuntur tria, & determinantur admodum expedite a ſimpliciſſima circularis arcus triſectione, quæ ſimul exhibet denſitatem totius luminis in locis ſingulis ejusdem circelli, & ejus quantitatem usque ad quamvis diſtantiam a centro, ac in additamento profertur demonſtratio illius alterius progreſſus denſitatis propoſiti a Newtono. Porro invenitur in errore figuræ ſphæricæ, denſitatem in centro auctam in infinitum decreſcere verſus medium, donec evadat minima, tum creſcat itidem, atque in acceſſu ad marginem extremum abeat iterum

in infinitum; dum in circello erroris diverſæ refrangibilitatis denſitas in centro in infinitum aucta decreſcit perpetuo verſus margines, ibique evaneſcit. Inde vero inſtituitur comparatio inter eos ipſos errores, quorum prior reſpectu poſterioris debet idcirco eſſe multo major, quam pro ratione magnitudinis circellorum: habentur plures conſiderationes circa incrementum illud denſitatis in infinitum, conſiderantur alia genera denſitatum, nimirum linearium, & punctualium, ac fuſe evolvitur, per quot admodum implexas ambages Auctor demum delapſus ſit ad theoriam usque adeo ſimplicem, quam propoſuit, quod prodeſt plurimum ad percipiendam inveſtigandi rationem, in qua poſtrema fere ſemper in mentem veniunt, quæ ſunt ſimpliciſſima.

Quarta Diſſertatio proponit methodum determinandi focos ſuperficierum quotcumque, habita ratione & erroris figuræ ſphæricæ, & diſtantiæ ſuperficierum, cum formulis generalibus eo pertinentibns: tum eas ipſas formulas applicat ad focum ſpeculi vitrei ex reflexione facta in ſecunda ſuperficie media inter binas refractiones in prima. Comparatur imago inde orta, cum imagine ex reflexione primæ ſuperficiei, & ſimul conſideratur error, qui oritur a figura ſphærica, qui a craſſitudine vitri, qui a diverſa refrangibilitate radiorum: ſolvuntur problemata, quibus quæruntur curvaturæ, quæ deſtruant eorum ſingulos, & reſiduæ reliquorum quantitates ad ſeligendam formam maxime idoneam ſpeculo vitreo aptando teleſcopiis catadioptricis. Ibi occaſione arrepta inquiritur in eorundem errorum comparationes, ac oſtenduntur multi alii fontes confuſionis imaginis tam efformatæ in oculo, quam transmiſſæ ad cerebrum, qui turbant geometricas eorundem

er-

errorum comparationes, & ſcalas aperturarum, ac virium amplificandi objecta, quæ inde pro teleſcopiis eruuntur diverſæ ab iis, quas experientia exhibet certior magiſtra.

Poſtrema diſſertatio agit potiſſimum de focis ex duplici reflexione in una, vel binis lentibus, quæ cum in hoc poſteriore caſu cum pluribus refractionibus conjungi poſſit, exhibetur regula mirum in modum expedita inveniendi focum radii appellentis ad ſuperficies proximas quotcumque, ſive per ipſas transeat refractus, ſive in iis reflectatur retro reſiliens. Determinantur autem ejusmodi foci in lente duplici conjuncta Dollondiano more, quorum aliquis aliquando poſſet imaginem primariam turbare involutam lumine ſpurio confuſo. Determinantur caſus omnes, qui exhibere poſſent 4 reflexiones binarum lentium, qui tamen ob luminis tenuitatem nulli ſunt uſui: in fine proponuntur formulæ omnes focorum pertinentes ad lentem unicam, vel binas: accedit demum breve additamentum de ſecundariis imaginibus lucidorum objectorum viſis trans lentem, ubi de optica illuſione, ex qua fortaſſe poſſet apparere ſatelles quidam Veneris in teleſcopiis, innuuntur nonnulla, quæ ſunt principia fuſioris perquiſitionis eodem pertinentis alibi vulgandæ.

Hæc eſt quædam rerum hoc volumine contentarum ſynopſis breviſſima, ex qua patet contineri ibi omnino non ita pauca ad Catoptricam promovendam utiliſſima, quæ in communibus Opticæ elementis haberi non ſolent. Occurrit autem ubique calculo ſimplici permixta linearis etiam Geometria, ſimplex admodum, qua ſimplicitate Auctor plurimum delectatur.

INDEX.

Pag.

Diſſertatio I. DE recentibus compertis pertinentibus ad perficiendam Dioptricam..... 1.

II. De unione colorum aliorum poſt alios per binas ſubſtantias, ac unione multo majore per tres. 90.

III. De diſtributione luminis refracti a lentibus per circellum exprimentem errorem figuræ ſphæricæ..... 187.

Additamentum de diſtributione luminis per circellum erroris diverſæ refrangibilitatis..... 229.

IV. De focis trium ſuperficierum cum conſideratione errorum, & applicatione ad ſpecula vitrea.. 232.

V. De focis ſuperficierum quotcumque cum applicatione ad focos unius lentis, vel binarum potiſſimum ex reflexione duplici in binis..... 259.

Additamentum de ſecundariis imaginibus viſis translentes, & apparenti ſatellite Veneris.... 285.

DISSERTATIO I.

De recentibus compertis pertinentibus ad perficiendam Dioptricam.

I

Quantum Dioptricam ſuperiore ſæculo Newtonus promoverit, norunt jam dudum ipſi etiam Tyrones Phyſicæ: at illud nuper innotuit, nihilo minus tanti viri auctoritatem præclariſſimæ facultati obfuiſſe. Agit Dioptrica de radiis medium mutantibus, refractionem in primis conſiderans, quæ habetur, ubi radius oblique tranſiens per ſuperficiem dirimentem bina media diverſæ naturæ in ordine ad vim, qua in lumen agunt, mutat directionem itineris ſui. Ab ipſa refractione plurima pendent in Phyſica, ut omne halonum, & iridum genus, colorata priſmatum ſpectra, atque alia ſexcenta, in primis vero viſionis natura, & omnis ratio corrigendi ocu-

lorum vitia ope ſpecillorum, eorumque vim acuendi per microſcopia, longiſſime protendendi per teleſcopia. Et quidem ſpecilla, ac teleſcopia caſu inventa ſunt etiam ante detectas, atque excultas refractionis ipſius leges. Carteſius inventa e Snellianis obſervationibus conſtanti ratione ſinuum earum partem deprehendit, Newtonus vero inventa diverſa coloratorum filorum refrangibilitate viſus eſt quidquid ſupererat aſſecutus ita, ut nihil ulterius addi poſſe videretur. Carteſius eam partem, quam invenerat, applicavit ad perficienda teleſcopia ſine ullo ſucceſſu: Newtonus ex reſiduo illo ſuo de dioptricorum teleſcopiorum perfectione deſperandum omnino eſſe credidit, quam ob cauſam catadioptrica ſubſtituit dioptricis. Tanti viri auctoritate permoti Optici omnes uſque ad poſtremos hoſce annos nihil eo pertinens aggreſſi ſunt. At inventa nuper in diverſis vitris diverſa ratione qualitatis diſtractivæ coloratorum radiorum ad refractivam repente patuit poſſe dioptrica teleſcopia perfici plurimum, & fortaſſe etiam ita ut catopricis fere nihil concedant. Quid ſint ejuſmodi comperta, & quantus ad perficiendam Dioptricam eorum uſus, exponam hic primo quidem ſine geometria, & calculo, quantum licebit, tum iis etiam in ſubſidium vocatis diligenter demonſtrando ſingula, & præcipua quæque, quæ ad theoriam pertinent, ſatis accurate evolvendo.

2. Præcipua teleſcopii dioptrici pars eſt illa lens vitrea, quæ in ſummo tubi vertice objecto obvertitur, & appellatur objectivum. Illa prope fundum effingit imaginem objecti, quam oculus intuetur vel inverſo ſitu poſitam trans unicam lentem ſibi proximam, & idcirco ocularis nomine deſignatam, in ſimplicibus aſtronomicis teleſcopiis, vel trans plures in aliis reſtitutam, ac in omnibus auctam. Imaginem efformant radii, qui a ſingulis objecti punctis digreſſi, ac incidentes in totam objectivi ſuperficiem, & reſra-

refracti tam in ingreſſu, quam in egreſſu colliguntur in totidem punctis, ſeu potius exiguis circellis.

3. Ad habendam imaginem penitus diſtinctam requireretur illud, ut radii omnes, qui pertinent ad unicum quodvis objecti punctum, colligerentur itidem accurate in unico puncto. Statim ac deprehendit Carteſius, ſinum anguli incidentiæ ad ſinum anguli refracti habere in tranſitu ex eodem medio in idem aliud rationem conſtantem, vidit illud, lentem efformatam e binis ſuperficiebus ſphæricis non poſſe colligere radios omnes in unicum punctum, cum ii, qui incidunt propiores axi ipſius lentis, coeant ſerius, quam remotiores. Idcirco inquiſivit in eam figuram, quæ radios omnes digreſſos ex unico objecti puncto, & ea conſtanti prædito ratione ſinuum, debeat colligere in puncto unico: eam methodo admodum operoſa, ſed tamen penitus accurata definivit; nec defuerunt Optici, qui omni ſtudio conati ſint eas ipſas figuras vitris inducere, quamquam conatu irrito, cum ipſæ formæ in tornandis vitris omnino corrumpantur, niſi id habeant, quod habet figura ſphærica, ut pars quælibet congruat cum quavis alia æquali.

4. Newtonus inventa diverſa radiorum refrangibilitate ſtatim animadvertit, hanc etiam obeſſe diſtinctæ imagini, cum ii radii, qui magis refringuntur, ut violacei, debeant coire citius, quam ii, qui refringuntur minus, ut rubei. Calculo adhibito invenit illud, hunc ſecundum errorem ortum a diverſa refrangibilitate radiorum in ea lente, quam pro exemplo aſſumpſerat, eſſe multis vicium millibus majorem illo primo orto a figura ſphærica: cenſuit autem ex obſervationibus ſuis deduci evidenter, hunc poſteriorem errorem corrigi nequaquam poſſe; unde intulit, ne de illo quidem priore laborandum, quo etiam correcto fere omnis confuſionis magnitudo manſura eſſet neceſſario, & idcirco lentibus, quæ radios refringant, ſub-

ſtituit ſpecula, quæ ipſos reflectant, cum conſtet, in reflexione omnia radiorum genera in eodem angulo incidentia reflecti ad eundem angulum ſimul ſine ulla heterogeneorum ſeparatione a ſe invicem. Ejus auctoritate permoti Optici de perficiendis dioptricis teleſcopiis penitus deſperarunt ad catadioptrica converſi, quæ quidem breviſſima longiſſimis dioptricis præſtiterunt.

5. Ratio cur diverſæ refrangibilitatis errorem corrigi in lentibus omnino non poſſe credidit, & affirmavit, fuit ea, quod ex ſuis experimentis viſus ſibi ſit illud deducere, quotiescumque radius per quotcunque media traductus prodeat demum cum eadem illa directione, cum qua eſt allapſus, tum in receſſu nullam haberi ſeparationem filorum heterogeneorum a ſe invicem, eam autem haberi ſemper quotiescumque egrediatur cum directione diverſa; ſive, quod eodem redit, quotiescumque refractio aliqua demum remaneat, debere remanere etiam refractionis differentiam in filis heterogeneis, quæ differentia corrigi non poſſit, niſi corrigatur penitus in flexionibus contrariis ipſa refractio. Affirmavit autem, ſe id ipſum deprehendiſſe traductis radiis per priſmata vitrea immerſa intra priſmata aquea. Et ſane ſi res ita ſe habeat; facile patet, errorem diverſæ refrangibilitatis non poſſe corrigi in imagine per lentes efformata; cum nimirum debeant radii ab eodem aliquo objecti puncto digreſſi detorqueri introrſum verſus axem, ut coeant, nimirum refringi, quæ refractio ſi haberi non poſſit ſine differentia refractionis in filis heterogeneis; nec omnium heterogeneorum unio haberi poterit in unico puncto, coeuntibus neceſſario citius iis, quæ majore refractione magis intorquentur introrſum in punctis lentium iisdem.

6. Ex eadem obſervatione illud etiam is deduxit, exceſſum ſupra unitatem valoris exprimentis rationem ſinus incidentiæ radii ingredientis ex aere in ſubſtantiam quampiam ad ſinum anguli re-

refracti pro uno radiorum genere, ad ſimilem exceſſum pro alio (*a*) eſſe in omnibus ſubſtantiis in eadem ratione, quam rationem determinans affirmavit, eſſe in violaceis, & rubeis extremis ut 28 ad 27 ita, ut una vigeſima ſeptima ſui parte is exceſſus ſit minor in filis rubeis, quam in violaceis.

7. Hanc legem conſtantis rationis in ejus valoris exceſſibus pro omnibus ſubſtantiis ita amplexi ſunt Optici poſt Newtonum communiter, ut nemo rem in dubium revocaverit, ac repetito ubique & in publicis Academiis, & in muſæis privatis omni genere obſervationum pertinentium ad colores innatos, & innatum refrangibilitatis diſcrimen in radiis heterogeneis, nemo, quod ſciam, in conſtantem illam ejus exceſſus rationem inquiſierit per tot annos; donec Eulerus in commentariis Acad. Berolin. ad annum 1747 eam in dubium revocaverit primus.

8. Is quidem ei legi ſubſtituit aliam, quam non ab experimentis deduxerat, ſed a mera quadam algebraici calculi analogia, & ex ea deduxerat illud, poſſe fieri objectivas lentes conſtantes binis vitris includentibus aquam, per quas omnes radii heterogenei pertinentes ad idem objecti punctum coirent ſimul, correcta omni refractionum differentia, ac exhibuerat formulas, & ex iis combinationes ſphæricitatum ad eam rem requiſitarum.

9. Res tentata nequaquam ſucceſſit, & Dollondus Anglus tam geometra, quam teleſcopiorum artifex & doctus, & diligens diu obſtitit Eulero objiciens illud, rationem conſtantem eorum exceſſuum a Newtono inventam eſſe per obſervationes, contra quas illa calculi analogia ſimplex nihil poſſet. Applicata autem ad formulas Eulerianas Newtoniana lege, proveniebat ejusmodi

(*a*) In editione Bononienſi hunc exceſſum appellaveram decurtationem ſinus, vocabulo minus proprio, vel ſaltem æquivoco.

di vitrorum combinatio, quæ longitudinem teleſcopii exhiberet infinitam.

10. Interea Klingeſtierna egregius, & admodum celebris Upſalenſis mathematicus brevi ſchediaſmate demonſtravit, obſervationes, quas Newtonus affirmaverat a ſe inſtitutas de radiorum heterogeneorum ſeparatione habenda ſemper, & tantummodo, ubi radii prodeant in directione diverſa ab ea, in qua advenerant, pugnare cum illa conſtanti ratione eorum exceſſuum in omnibus refringentibus ſuperficiebus, quam is inde deduxerat, & ea duo cohærere ad ſenſum tantummodo, ubi anguli ſint exigui, ubi nimirum ſinus ſint ad ſenſum proportionales ipſis angulis: monebat autem, idcirco oportere in eam rem omnem inquirere per experimenta aliquanto diligentius.

11. Ubi id ſchediaſma ad Dollondum devenit; is re altius conſiderata cœpit ipſa inſtituere experimenta, quorum ope deprehendit illud, nec Newtonianam, nec Eulerianam legem veras eſſe. Invenit nimirum exceſſum ejus valoris pro radiis rubeis ad exceſſum pro violaceis aliam habere rationem in aliis ſubſtantiis ita, ut differentia exceſſuum in aliis eſſet totius exceſſus pars multo major, quam in aliis; unde fiebat, ut pari etiam refractione mediorum radiorum, differentia refractionis, ſive diſtractio radiorum heterogeneorum eſſet multo major in aliis ſubſtantiis, quam in aliis.

12. In eo nimirum fortuna eſt uſus, quod cum hæc diſtractiva qualitas in communibus per Europam vitris ſit fere ubique eadem, ipſe incidit in bina vitrorum genera, quorum alterum appellatur *flint-glaſs*, alterum *crown-glaſs*, quorum primum ejuſmodi qualitatem diſtractivam haberet majorem, quam ſecundum in ratione 3 ad 2. Inde ſtatim illud vidit, rite conjungendo ea vitra poſſe haberi in exiguis etiam angulis priſinatum, & in lentibus refractio-

fractionem ſine differentia refractionis radiorum heterogeneorum ita, ut tam radii rubei, quam violacei ſimul delati prodeant in directione diverſa ab ea, cum qua advenerant, & tamen prodeant ſimul omnes directione communi ſine ulla ſeparatione contra id, quod Newtonus cenſuerat: poſſe autem idcirco ita combinari binas lentes ex iis binis vitris efformatas, ut objectivum ex iis conjunctis compoſitum radios heterogeneos omnes ſimul colligat, correcto penitus diverſæ refrangibilitatis errore, ac teleſcopia ex ejuſmodi theoria conſtruxit, quæ ſucceſſum habuerunt optimum, ut nimirum teleſcopia dioptrica pedum trium tantummodo aperturam objectivi vitri tulerint linearum 15, ac teleſcopium 12 pedum ipſe viderim in Anglia communibus egregiis æquivalens pedum 50.

13. Ut autem rem totam ſiſteret oculis ipſis contemplandam efformavit priſmatula cum exiguis angulis unum quidem e *flint-glaſs*, bina vero e *crown-glaſs*, quorum alterum haberet angulum prioris angulo fere æqualem, alterum fere dimidium ejuſdem. Tum vero ſi objectum lucidum tranſpiciatur per quodvis unicum ex iis priſmatis; apparet extra ſuum locum, & coloratum in margine: ſi tranſpiciatur trans priora duo conjuncta cum angulis oppoſitis; apparet quidem in ipſo ſuo loco, ſed adhuc coloratum nonnihil: ſi demum tranſpiciatur trans omnia tria ita poſita, ut poſtremorum anguli in eandem plagam ſint obverſi, angulus primi in oppoſitam; tum vero objectum & extra locum ſuum apparet, & ſine coloribus, quod oſtendit, correctam eſſe refractionum differentiam, refractione manente; quod nimirum requiritur ad hoc, ut radii per lentes tranſmiſſi refringantur quidem ad axem, ſed in eodem omnes angulo ſine diſtractione colorum (*b*). 14. Ut

(*b*) Ubi objecta tranſpiciuntur trans illa priſmata conjuncta, nullus quidem apparet color, tanquam ſi omnes heterogenei radii eandem proſus refractionem pate-

14. Ut id ipſum perſpiciatur evidentius, notandum primo illud, quod facile demonſtratur, in priſmatis angulum exiguum habentibus, refractionem, ſive angulum, quo a ſua directione detorquetur quivis radius, eſſe æqualem producto ex multiplicatione ipſius anguli priſmatis per illum exceſſum ſupra unitatem valoris exprimentis rationem illam ſinuum pro ejusmodi radio in illa ſubſtantia. Quamobrem ubi diverſa ſit in diverſis ſubſtantiis ratio eorum exceſſuum pro iisdem binis coloribus, erit etiam diverſa ratio refractionum pro iisdem. Sit igitur unum vitri genus, quod ſingulis gradibus, quibus detorquet radios rubeos a ſua directione, addat pro violaceis duo minuta, & alterum, quod addat tria. Fiat autem e priore angulus priſmatis refringens major, qui detorqueat radium rubeum deorſum per gradus ſex, & e poſteriore angulus minor, qui ordine contrario poſitus eumdem detorqueat ſurſum per gradus quatuor. Primus, cum addat ſingulis ex iis ſex gradibus minuta duo pro violaceis, detorquebit violaceos ipſos deorſum per gradus ſex, & minuta 12, ſecundus cum addat ſingulis ex illis quatuor minuta tria, detorquebit eos ſurſum per gradus 4, & minuta itidem 12. Demendo 4 a 6 pro rubeis, remanent 2, ac a 6, & 12 pro violaceis 4, & 12, remanent itidem 2. Prodibunt igitur tam rubei, quam violacei depreſſi per eosdem gradus duos, adeoqne a ſe invicem non diſcedent, correcta refractionum differentia, quin corrigantur refractiones.

15. Nimirum ſi differentia refractionis ſit proportionalis refractioni rubei ubique; nunquam poterit ipſa differentia corrigi, quin cor-

---

paterentur: at ſi tenuis radius trans ipſa traducatur ad parietem, apparet ſtatim in ejus margine altero color purpureus vinaceus, qui oritur ex unione rubei & violacei, in altero viridis; unde patet non omnes ſimul conjungi. Ea de re fuſe in Diſſertatione 2, ubi patebit, binos tantum uniri colores per binas ſubſtantias, & binis tantum ſequentes numeri aptati ſunt.

corrigatur refractio, quæ ſi manſerit demum poſt contorſiones quotcumque; manebit utique & differentia ipſi proportionalis, ſecus ſi differentia proportionalis non ſit. Ubi ipſa cæteris paribus eſt major in una ſubſtantia, quam in alia, minor refractio facta per illam, quæ non poteſt corrigere majorem factam per hanc, poterit habere differentiam æqualem differentiæ hujus, quam idcirco corriget, remanente refractione ſine refractionum differentia.

16. Binæ illæ lentes altera convexa, altera concava in ſingulis locis, in quibus ſinguli radii transmittuntur, conſiderari poſſunt ut bina priſmata ſitu contrario poſita, habendo nimirum arcus perquam exiguos pro rectilineis, adeoque in iis idem accidet, ut refractio remaneat, deſtructa penitus refractionum differentia, ſi convexitas, & concavitas, rite combinentur. Si lentes fiant iſoſceliæ, ut vocant, ſive cum binis ſuperficiebus contrariis, & ſphæricitatis ejuſdem; debet fieri lens utrinque convexa ex *crown-glaſs*, & concava utrinque ex *flint-glaſs* ita, ut convexitatis illius ſemidiameter ad ſemidiametrum hujus concavitatis ſit in ratione ipſa qualitatum diſtractivarum, nimirum hic ut 2 ad 3: nam eo pacto anguli conceptorum priſmatum, quos continerent tangentes arcuum productæ, eſſent, ut 3 ad 2, cum ſint, ut curvaturæ, quæ ſunt ſemidiametrorum reciprocæ. Si autem lentes ſingulæ habeant ſuperficies inæquales, quæ lentes dicuntur ſcalenæ; quoniam ex dioptrica communi conſtat, haberi ſemper lentem iſoſceliam æquivalentem (*c*) cuivis ſcalenæ; oportebit ejuſmodi ſint eæ lentes,

(*c*) Aequivalentem in ordine ad diſtantiam foci, quæ habetur neglecto errore, qui provenit a craſſitudine vitri, & ab apertura figuræ ſphæricæ: nam hoſce errores diverſos eſſe etiam in iis lentibus, quæ appellantur æquivalentes, facile deduci poteſt e formulis, quæ eruentur inferius: porro Numero 46 determinabitur lens æquivalens ſecluſis iis erroribus.

lentes, ut iſoſceliæ earum æquivalentes ſint altera convexa altera concava cum ſemidiametris in illa ratione directa qualitatum diſtractivarum.

17. Hæc pertinent (*d*) ad correctionem erroris orti a diverſa refrangibilitate; ſed Dollondus ulterius progreſſus invenit formulam pro corrigendo ſimul etiam errore figuræ ſphæricæ, uti habetur in Transactionibus Anglicanis anni 1760. impreſſis anno 1761, quod & Maskelynium præſtitiſſe per ſeſe ibidem conſtat. Eandem correctionem ſimul faciendam aggreſſus eſt etiam Geometra ſummus Clairautius, eamque aſſecutus exhibuit in Commentariis Acad. Pariſ. annorum 1756, & 1757 impreſſis 1762. Invenit nimirum formulas ſane elegantiſſimas, quæ errorem a figura ſphærica provenientem continent expreſſione generali, qua æquata nihilo proveniunt æquationes exhibentes ſphæricitatum relationes ejusmodi, ut ſimul omnes radii homogenei in totam primam ſuperficiem incidentes colligantur in unico eodem puncto, & ſimul in eodem tam rubei, & violacei extremi, quam intermedii omnes ſaltem quam proxime. Tradidit itidem plures egregias ſane methodos inquirendi in ipſam qualitatem refractivam, & diſtractivam vitrorum, & inſtitutis experimentis in Anglicano *flint-glaſs*, & in vitro communi Gallico, quod invenit æquivalere Anglico *crown-glaſs*, combinationes elicuit, ac teleſcopia curavit fieri, quæ uni ex artificibus Pariſienſibus ſucceſſerunt mirum in modum. Obſervavi ego Viennæ uno ex iis habente objectivum pedum quatuor (pertinebat autem ad Sereniſſimum Principem Regnantem DE LIECHTENSTEIN) emerſionem ſecundi ſatellitis Jovis uno minuto prius, quam videre potuerim teleſcopio Diviniano pedum

(*d*) In editione Bononienſi rem aliter narraveram, cum nondum vidiſſem eum Transactionum tomum.

dum 11, quod æquivalebat communibus pedum 18: eodem & Jovis diſcum videbam admodum auctum, ac terminatum, & ipſas Jovis faſcias ſatis diſtinctas.

18. Communicavit autem mecum per litteras poſtea Clairautius, ſe in aliud vitri genus incidiſſe, quod appellant in Gallia *Straſs*, & ex Germania acquirunt, in quo qualitas diſtractiva ſit duplo major, quam in vitro communi, quod ſimpliciſſimam ſane combinationem ſuperficierum requirit pro utraque ſimul correctione præſtanda.

19. Ego quidem eaſdem ipſius formulas, quibus nihil ſane elegantius deſiderari poteſt, demonſtravi aliquanto breviore, & ſimpliciore methodo, quam ipſi communicatam per litteras is impreſſit in Diario Gallico *Journal des Sçavans*, alias autem perquiſitiones nonnullas habui vel ſimul tum, vel poſtea, & inſtrumentum quoddam curavi conſtrui ſimplex admodum, & perquam idoneum ad deprehendendas, & inter ſe comparandas qualitates refractivam, & diſtractivam vitrorum, quod vocabulo mixto quidem e vocibus latina, & græca, ſed notiſſimis, & in Phyſica uſitatiſſimis, ad rem vero exprimendam aptiſſimis cenſeo appellari poſſe *vitrometrum*. Ea proponam hic diligenter evolvens præcipua quæque, & maxime notatu digna, ex quibus nova quædam dioptricæ pertractandæ eruatur ratio expeditiſſima ſane, & elegantiſſima, quam ipſi Clairautio debebit Litteraria Reſpublica, homini profecto ſingulari, ac de omnibus Matheſeos partibus ſublimioribus benemerentiſſimo.

20. Ante tamen illud monendum duco, me huc uſque (*e*) hoc in genere nihil vidiſſe aliud, niſi ea, quæ Clairautius iis binis

(*e*) Nimirum uſque ad autumnum anni 1763, quo hæc ſcribebam, quæ quidem tum ad Academiam Bononienſem tranſmiſſa, & ibi paulo poſt impreſſa. ſed ne per

Acàdemiæ tomis inſeruit, & alias binas diſſertatiunculas ſuperius laudati Clingeſtiernæ, quas ipſe Clairautius edidit in eodem diario, quas tamen poſteriores nonniſi curſim videre potui in ipſo meo reditu Romam tempore ad eas ſatis perpendendas neceſſario deſtitutus. Ea, quæ ab Academia Petropolitana præmio donata ſunt, & alia nonnulla eodem pertinentia, quæ novi eſſe edita, nondum ad meas manus delata ſunt. Præmittam autem lemma penitus elementare, cui tamquam fundamento cuidam cætera ſuperſtruantur, tum ad reliqua deducenda progrediar, & ſingula geometrico rigore evolvam ſequenti paragrapho.

§. II.

De formulis pertinentibus ad lentium focos, & errores ortos a craſſitudine, & figura ſphærica.

21. *Lemma. In triangulo rectangulo, in quo unum latus eſt perquam exiguum, differentia hypothenuſæ, & alterius lateris eſt quam proxime quadratum illius diviſum per duplum utriuslibet horum.*

22. Si enim (*Fig.* 1.) ſit AMO ſemicirculus, S centrum, M X perpendicularis ad AO; erit A X differentia S M, S X æqualis quadrato M X diviſo per X O, ſive per S X + S M, nimirum ſi M X fuerit exigua, adeoque SM, SX quam proxime æquales, per duplum utriuslibet SM, SX.

23. *Prop.* 1. Si radii *m* M tendentes ad punctum G axis ASO arcus circularis A M habentis centrum in S refringantur in M ita,

---

per totum quidem annum 1766 vulgata ibidem, tranſmiſi ad amicos plures: porro hanc ipſam primam Diſſertationem germanice redditam ſequenti anno edidit, vulgavitque Scherfferus noſter Viennæ cum pluribus tam ſuis, quam meis additamentis.

ita, ut ſinus incidentiæ SMG ad ſinum anguli refracti SMH ſit, ut m ad 1; quæritur AH diſtantia foci H ab A.

24. Erit MH ad HS, ut ſin MSH ad ſin. SMH, vel aſſumpto pro termino medio rationis componendæ ſin. SMG, conjunctim ut ſin. MSH ad ſin. SMG, & ſin. SMG ad ſin. SMH. Prima ex hiſce rationibus eſt MG ad GS, ſecunda m ad 1. Habetur igitur MH. HS:: $m \times$ MG. GS.

25. Ponatur jam $AS = SM = a$, $AH = x$, $AG = p$, $MX = e$. Erunt $HS = x - a$, $GS = p - a$: tum per lemma $AX = \frac{e^2}{2a}$, adeoque $HX = x - \frac{e^2}{2a}$, $GX = p - \frac{e^2}{2a}$, quibus addita eorum differentia ab HM, GM, nimirum per lemma, $\frac{e^2}{2HX}$, $\frac{e^2}{2GX}$, ſive quamproxime $\frac{e^2}{2x}$, $\frac{e^2}{2p}$, erit $HM = x - \frac{e^2}{2a} + \frac{e^2}{2x}$, $GM = p - \frac{e^2}{2a} + \frac{e^2}{2p}$, vel facto $k = \frac{1}{a} - \frac{1}{p}$, $GM = p - \frac{1}{2} k e^2$.

26. Subſtitutis hiſce valoribus in proportione MH. HS:: $m \times$ MG. GS, habebitur $x - \frac{e^2}{2a} + \frac{e^2}{2x}$. $x - a$:: $mp - \frac{1}{2} mke^2$. $p - a$, quod ob $k = \frac{1}{a} - \frac{1}{p} = \frac{p-a}{ap}$ evadit apk. Ejusmodi æquatio rite tractata dabit valorem quæſitum x.

27. *Schol.* 1. Erueretur inde æquatio ſecundi gradus; ſed ea facile evitabitur, ſi quæratur primo valor x vero proximus, tum is ſubſtituatur in exigua fractione $\frac{e^2}{2x}$. Id autem obtinebitur inveniendo valorem debitum radiis infinite proximis axi.

28. *Coroll.* 1. Si ſit q valor ipſius x pro radiis infinite proximis axi, evaneſcente arcu $AM = e$, adeoque evaneſcentibus omnibus terminis multiplicatis per e^2, habebitur q. $q - a$:: mp. apk:

$a\,p\,k :: m.\,a\,k$. Quare $m\,q - m\,a = a\,k\,q$, & $m\,a = m\,q - a\,k\,q$, ſive $\frac{1}{q} = \frac{1}{a} - \frac{k}{m}$, vel $q = \frac{a\,m}{m - a\,k}$.

29. *Coroll.* 2. Si hic valor $\frac{1}{q}$ ponatur in tertia parte primi termini proportionis inventæ num. 26 pro $\frac{1}{x}$, primus terminus evadet $x - \frac{e^2}{2\,a} + \frac{e^2}{2\,a} - \frac{k\,e^2}{2\,m} = x - \frac{k\,e^2}{2\,m}$. Quare fiet $x - \frac{k\,e^2}{2\,m}\,x - a :: m\,p - \frac{1}{2}\,m\,k\,e^2.\,a\,p\,k$; unde eruitur $m\,p\,x - \frac{1}{2}\,m\,k\,e^2\,x - m\,p\,a + \frac{1}{2}\,m\,k\,a\,e^2 = a\,p\,k\,x - \frac{a\,p\,k^2\,e^2}{2\,m}$; inde vero $x = \frac{m\,p\,a - \frac{1}{2}\,m\,a\,k\,e^2 - \frac{a\,p\,k^2\,e^2}{2\,m}}{m\,p - a\,p\,k - \frac{1}{2}\,m\,k\,e^2}$.

30. *Schol.* 2. Ea fractio reducitur ad multo ſimpliciorem, ſi notetur in numeratore poſteriores duos terminos eſſe perquam exiguos reſpectu primi, & in denominatore poſtremum reſpectu priorum duorum. Nam habetur hujusmodi lemma prorſus elementare, & uſitatum: ſi ſint $A + y$, & $B + z$, ac y, & z ſint admodum parvæ reſpectu A, & B; neglectis terminis, in quibus eæ aſſurgunt ad plures dimenſiones; erit, $\frac{A+y}{B+z} = \frac{A}{B} + \frac{-Az+By}{B^2}$, quod quidem lemma facile patebit facta actuali diviſione tum A, tum y per $B + z$.

31. *Corol.* 3. Fractio corollarii ſecundi huc redit: $x = \frac{m\,p\,a}{m\,p - a\,p\,k} + \frac{(m\,p\,a)\,\frac{1}{2}\,m\,k\,e^2 - (m\,p - a\,p\,k)\left(\frac{1}{2}\,m\,k\,a\,e^2 + \frac{a\,p\,k^2\,e^2}{2\,m}\right)}{p^2\,(m - a\,k)^2}$.

Primus terminus evadit $\frac{m\,a}{m - a\,k} = q$. Secundus terminus facta actuali multiplicatione ſecundæ partis in denominatore acquirit hanc for-

formam $\frac{m^2 a^2 \left(\frac{k^2}{mp} - \frac{k^2}{m^2 a} + \frac{k^3}{m^3}\right) \frac{1}{2} e^2}{(m - ak)^2} = q^2 \left(\frac{k^2}{mp} - \frac{k^2}{m^2 a} + \frac{k^3}{m^3}\right) \frac{1}{2} e^2$.

Ibi vero poſt ſecundum coefficientis terminum addito, & demptо $\frac{k^2}{m^2 p}$, ac pro $-\frac{k^2}{m^2 a} + \frac{k^2}{m^2 p} = \frac{k^2}{m^2}\left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{p}\right)$ ſcripto $-\frac{k^3}{m^3}$, habebitur $\frac{k^2}{mp} - \frac{k^3}{m^2} - \frac{k^2}{m^2 p} + \frac{k^3}{m^3} = -\frac{m-1}{m^3}\left(k^3 - \frac{mk^2}{p}\right)$. Quare demum fiet $x = q - q^2 \times \frac{m-1}{m^3}\left(k^3 - \frac{mk^2}{p}\right) \frac{1}{2} e^2$, & facto $\varphi = \frac{m-1}{m^3}\left(k^3 - \frac{mk^2}{p}\right) \frac{1}{2} e^2$, habitur $x = q - q^2 \varphi$. (*)

32. *Schol.* 3. Hæc formula eſt eadem, ac illa, quam Clairautius invenit in fine problematis 2 diſſertationis inſertæ Commentariis Acad. Pariſ. ad ann. 1756: is tantum pro $\frac{m-1}{m^3}\left(k^3 - \frac{mk^2}{p}\right)$ ſcribit $\frac{1}{m}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{m} k^3 - \frac{k^2}{p}\right)$ quod eodem redit. Sed ejus calculus derivatus ex lemmate aliquanto minus elementari pendente a natura ſinuum eſt paullo operoſior, ſi totus evolvatur.

33. In hac formula primus terminus q exhibet diſtantiam foci radiorum infinite proximorum axi, & eſt $\frac{1}{q} = \frac{1}{a} - \frac{k}{m} = \frac{1}{a} - \frac{1}{ma} + \frac{1}{mp} = \frac{m-1}{ma} + \frac{1}{mp} = \frac{1}{m}\left(\frac{m-1}{a} + \frac{1}{p}\right)$, (**) ſecundus

(*) Dividendo autem 1 per $q - q^2 \varphi$, & omittendo terminos, in quibus φ aſcendit ad poteſtates ſuperiores, habetur $\frac{1}{x} = \frac{1}{q} + \varphi$, qui valor ſæpe uſui eſſe poteſt.

(**) Formula $\frac{1}{q} = \frac{m-1}{ma} + \frac{1}{mp}$ applicari poteſt etiam ſpeculis reflectentibus. In iis angulus reflexionis jacet ad partes oppoſitas radii, & eſt æqua-

lis

dus autem terminus — $q^2 \varphi$ exhibet correctionem debitam figuræ ſphæricæ pendentem ab apertura, cujus radius e. Quod ſi radii veniant paralleli, vel ex immani diſtantia; termini diviſi per p evaneſcent, ac fiet $k = \frac{1}{a}$, adeoque $\frac{1}{q} = \frac{m-1}{ma}$, & $q = \frac{ma}{m-1}$, ac $q^2 \varphi = \frac{m^2 a^2}{(m-1)^2} \times \frac{m-1}{m^3} \times \frac{1}{a^3} \times \frac{1}{2} e^2 = \frac{e^2}{2(m-1)ma}$.

34. Eruemus jam ex formula generali valoris $\frac{1}{q}$ aliud corollarium, quod erit uſui in proſequendo calculo pro binis ſuperficiebus, ſive pro lentibus.

35. *Coroll.* 4. Si mutetur A G mutatione exigua; mutabitur A H mutatione, quæ ad eam mutationem erit, ut $A H^2$ ad $m \times A G^2$.

36. Cum enim ſit $\frac{1}{q} = \frac{m-1}{ma} + \frac{1}{mp}$, & terminus $\frac{m-1}{ma}$ non mutetur, mutato $AG = p$; erit mutatio termini $\frac{1}{q}$ æqualis mutationi termini $\frac{1}{mp}$, ſive $\frac{dq}{q^2} = \frac{dp}{mp^2}$, adeoque $dq. dp :: q^2. mp^2 ::$ $A H^2. m \times A G^2$.

37. *Prop.* 2 Si (*Fig.* 2.) radios m M, qui tendebant ad G, & a prima ſuperficie A M detorti ſunt ad H, ſecunda ſuperficies B N detorqueat ad I ita, ut ratio ſinus incidentiæ ad ſinum anguli refracti ſit 1 ad m; quæritur B I diſtantia foci I a B.

38. Pa-

---

lis angulo incidentiæ, adeoque $m = -1$, inducente oppoſitione ſignum negativum, & æqualitate angulorum unitatem reſpondentem æqualitati ſinuum. Fit inde $\frac{1}{q} = \frac{2}{a} - \frac{1}{p}$.

Eodem pacto & in valore φ poſito — 1 pro m, obtinetur error figuræ ſphæricæ pro ſpeculis, quod in ipſa Diſſertatione præſtatur infra num. 111.

38. Patet, B I determinari eodem pacto per B H, $\frac{1}{m}$, radium circuli, cujus arcus B N, & aperturam B N, quo A H determinata eſt per A G, m, radium circuli, cujus arcus A M, & valorem ejus aperturæ.

39. Dicatur b radius arcus B N, pro B N ponatur ipſe valor e ob tantam propinquitatem punctorum M, N, ac cariſſitudo lentis A B dicatur α, & ſi eſſet B H $= q$, ad habendam B I oporteret primo quidem loco $k = \frac{1}{a} - \frac{1}{p}$ facere $l = \frac{1}{b} - \frac{1}{q}$, tum loco $\frac{1}{q} = \frac{1}{a} - \frac{k}{m}$ facere $\frac{1}{r} = \frac{1}{b} - ml$, & loco $\varphi = \frac{m-1}{m^3}\left(k^3 - \frac{mk^2}{p}\right)\frac{1}{2}e^2$ facere $\pi = \left(\frac{1}{m} - 1\right)m^3\left(l^3 - \frac{b}{mq}\right)\frac{1}{2}e^2 = -\frac{m-1}{m}\left(m^3 l^3 - \frac{m^2 l^2}{q}\right)\frac{1}{2}e^2$, ac haberetur B I $= r - r^2\pi$.

40. Cum vero B H non ſit q, ſed $q - q^2\varphi - \alpha$, etiam valor B I evadet diverſus ab invento $r - r^2\pi$. Diſcriminis fons erit duplex: primo quidem, quia in valore $\frac{1}{b} - \frac{1}{q}$ oportet ponere pro q totum valorem $q - q^2\varphi - \alpha$, ut & in termino $\frac{l^2}{q}$ valoris π; deinde quia imminuto valore rectæ B H ſuppoſitæ $= q$ per $q^2\varphi + \alpha$, etiam valor B I minuitur juxta num. 35.

41. Primum diſcrimen negligi poteſt ob exiguitatem valoris π, qui nimirum habet pro coefficiente e^2, & mutatur mutatione exigua reſpectu ſui poſito valore q pro valore, qui ab ipſo modiciſſimum differt: ſecundum autem diſcrimen compenſatur juxta ipſum num. 35, ſi a valore rectæ B I auferatur differentia ipſius B H ducta in $\frac{m \times BI^2}{BH^3}$, ſive quamproxime in $\frac{mr^2}{q^2}$, nimirum $mr^2\varphi - \frac{mr^2\alpha}{q^2}$. Erit igitur B I $= r - \frac{r^2 m\alpha}{q^2} - r^2$

$(m\varphi + \pi)$, ubi r erit diſtantia foci pro radiis infinite proximis axi neglecta α craſſitudine lentis, $\frac{r^2 m\alpha}{q^2}$ decurtatio nata ab ipſa craſſitudine, & $r^2(m\varphi + \pi)$ error natus ab apertura e.

42. *Coroll.* 1. Haud difficulter eliminabuntur e ſuperiore formula valores k, q, l. Erat $k = \frac{1}{a} - \frac{1}{p}$; $\frac{1}{q} = \frac{1}{a} - \frac{1}{ma} + \frac{1}{mp}$; $l = \frac{1}{b} - \frac{1}{q} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} + \frac{1}{ma} - \frac{1}{mp}$, ubi ob $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ fiet $l = \frac{1}{ma} - \frac{1}{mp} - \frac{1}{f}$, adeoque $\frac{1}{r} = \frac{1}{b} - ml$ fiet $= \frac{1}{b} - \frac{1}{a} + \frac{1}{p} + \frac{m}{f} = -\frac{1}{f} + \frac{1}{p} + \frac{m}{f} = \frac{m-1}{f} + \frac{1}{p}$, qui eſt valor diſtantiæ foci radiorum infinite proximorum axi neglecta craſſitudine lentis. Ibi, ſi radii adveniant paralleli, evaneſcente $\frac{1}{p}$ remanebit $\frac{m-1}{f}$, adeoque ſi diſtantia foci radiorum parallelorum infinite proximorum axi, neglecta craſſitudine dicatur h, erit $\frac{1}{h} = \frac{m-1}{f}$, & $\frac{1}{r} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$, quæ formula exhibet expeditiſſimam determinationem valoris r per h, & viceverſa dato p. (*f*)

43. Fiet

(*f*) Ex formula $\frac{1}{r} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$ eruitur $\frac{1}{h} = \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$. Sive $h = \frac{rp}{p-r}$, quæ ſi radii potius divergant, & dicatur p diſtantia puncti radiantis a lente, fiet $h = \frac{rp}{r+p}$. Inde hujusmodi theorema admodum utile pro inveniendo foco radiorum parallelorum ex datis diſtantiis a lente puncti radiantis, & foco reali radiorum ab eo divergentium: *Ut ſumm: diſtantiarum a lente puncti radiantis, & foci radiorum ab eo divergentium, ad alteram ex iis diſtantiis, ita altera ad diſtantiam foci radiorum parallelorum.*

Ex eadem eruitur alterum itidem utile ad inveniendam diſtantiam foci radiorum convergentium, vel divergentium a foco parallelorum. Cum ſit

43. Fiet autem $m\phi = \frac{m-1}{m}\left(\frac{1}{m}k^3 - \frac{k}{p}\right)\frac{1}{2}e^2$, & $\pi = \frac{m-1}{m}\left(-m^3 l^3 + \frac{m^2 l^2}{q}\right)\frac{1}{2}e^2$, ubi peractis multiplicationibus, & ordinatis valoribus ita, ut in unam ſummam computentur termini continentes idem productum ex a, p, f, obtinebuntur pro parentheſi valoris $m\phi$ termini quatuor, & pro parentheſi valoris π termini decem, quorum primis quatuor eliſis a totidem pertinentibus ad $m\varphi$, relinquetur valor $m\varphi + \pi$, qui ſi fiat $= \varrho$ erit $\varrho = \frac{m-1}{m}\left(\frac{m^3}{f^2} - \frac{2m^2+m}{af^2} + \frac{m+2}{a^2 f} + \frac{3m^2+m}{pf^2} - \frac{4m+4}{apf} + \frac{3m+2}{p^2 f}\right)\frac{1}{2}e^2$.

44. Diſtantia vero foci a ſuperficie ſibi proxima integra, & correcta erit $r - \frac{r^2 m\alpha}{q^2} - r^2\varrho$.

ſit $\frac{1}{r} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$, erit $r = \frac{ph}{p+h}$, adeoque $h - r = \frac{ph+hh-ph}{p+h} = \frac{hh}{p+h}$. Sit in figura 6 A locus lentis, cujus negligitur craſſitudo, P punctum, ad quod convergunt radii (huic figuræ ad alium uſum delineatæ pro hac diſſertatione impreſſa Bononiæ adduntur hic binæ literæ F′, P), F focus radiorum parallelorum ejus lentis, M focus convergentium ad P, capiaturque AF′ æqualis, & contraria AF: erit AP $= p$, AF′ $= h$, AM $= r$, adeoque F′P $= h + p$, FM $= p - r$, adeoque erit F′P. AF :: AF. FM. Porro ſi lens fuerit utrinque convexa, vel magis convexa, quam concava, jacebit F ultra lentem reſpectu radiorum advenientium, & F′ citra; contrarium autem accidet, ſi ſit concavo-concava, vel magis concava, quam convexa. Quare ſi concipiantur bina puncta hinc, & inde a lente in diſtantia foci radiorum parallelorum, quorum alterum dicatur focus radiorum parallelorum citerior, alterum ulterior, habebitur hujusmodi theorema: *diſtantia foci radiorum parallelorum a lente eſt media geometrice proportionalis inter diſtantiam puncti vel convergentiæ vel divergentiæ a foco parallelorum citeriore in lentibus convexis, ulteriore in concavis, & diſtantiam foci radiorum vel convergentium vel divergentium ab ulteriore in illis, citeriore in his.*

Hoc

45. *Scholium.* Plura theoremata pro lentibus inde facile deduci poſſunt nota in dioptrica; ſed hic indicabimus illa tantummodo. Inverſa lente manet valor r, ſive diſtantia foci radiorum infinite proximorum axi; ſed mutatur error tam ortus ex apertura, quam ex craſſitudine lentis; ſi binæ ſuperficies non ſint æqualis ſphæricitatis, qui itidem manent; ſi ſuperficies ſint ſphæricitatis ejuſdem.

46. Quævis lens ſphæricitatum utcumque inæqualium, contempto errore tam craſſitudinis, quam aperturæ, habet lentem iſoſceliam ſibi prorſus æquivalentem, cujus nimirum radius ſit medius harmonice proportionalis inter illius radios, ſive cujus radio facto $= a'$, & illius radiis in ſua directione oppoſita factis a, b ſit $\frac{2}{a'} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

47.

Hoc idem theorema evadit multo elegantius in ſpeculis. Si diſtantia foci radiorum parallelorum in iis dicatur itidem h, & diſtantia foci convergentium dicatur r, pro formula adnotationis ad num. 31 $\frac{1}{q} = \frac{2}{a} - \frac{1}{p}$ habebitur $\frac{1}{r} = \frac{1}{h} - \frac{1}{p}$, adeoque $r = \frac{ph}{p-h}$, & $h - r = \frac{-hh}{p-h}$. Hinc in eadem figura 6 erit $AF = h$ media inter $FM = h - r$, & $FP = p - h$, ac theorema erit hujusmodi: *Diſtantia foci radiorum parallelorum a ſpeculo eſt media geometrice proportionalis inter ejuſdem binas diſtantias a puncto convergentiæ, & a foco radiorum convergentium.* Et quidem hæc eadem manebit theorematis expreſſio, ſive ſpeculum ſit convexum cum foco virtuali parallelorum jacente ultra ipſum, ſive concavum cum reali jacente citra, & ſive radii convergentes adveniant, ſive divergentes, ſubſtituto tantum vocabulo *divergentium*, & *divergentiæ* vocabulis *convergentium*, & *convergentiæ*: ipſa enunciatio ducet hic per omnes caſus, ut formula algebrica, & figura Geometrica omnes ubique exhibet, ſi rite in hac leges transformationis locorum gemetricorum, & in utraque leges poſitivorum ac negativorum tam Algebræ, quam Geometriæ communes obſerventur,

47. Ea profluunt ex valoribus q, ϱ, & formula $\frac{1}{r} = \frac{m-1}{f} + \frac{1}{p}$: (g) inde & ſequens corollarium dimanat, quod ſternit viam ad lentes duas conjunctas ſimul.

48. *Coroll.* 2. Si mutetur mutatione exigua diſtantia AG; mutabitur BI mutatione, quæ erit ad ipſam in ratione duplicata directa ipſius BI ad AG.

49. Nam in formula $\frac{1}{r} = \frac{m-1}{f} + \frac{1}{p}$ ſtante $\frac{m-1}{f}$, erit $-\frac{dr}{r^2} = -\frac{dp}{p^2}$, adeoque $dr . dp :: r^2 . p^2$. Eſt autem BI quamproxime æqualis primo termino r ſui valoris, & ejus mutatio hujus mutationi.

50. *Prop.* 3. Si poſt primam lentem terminatam binis ſuperficiebus AM, BN ſit alia (*Fig.* 3.) ex alia maſſa, ſed in eo-

(g) Si enim radius 2^{dae} ſphæricitatis vocetur b, non $-b$, utrumque cum directione contraria; erit $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, & ſi bini radii in altera lente iſoſcelia fuerint a' & a', erit ſuum $\frac{1}{f} = \frac{1}{a'} + \frac{1}{a'} = \frac{2}{a'}$. Quare in illa erit $\frac{1}{r} = (m-1)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) + \frac{1}{p}$, & in hac $= (m-1)(\frac{2}{a'} + \frac{1}{p})$. Erit igitur valor r utrobique idem, ſi fuerit $\frac{2}{a'} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Tum autem erunt $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{b}$ termini arithmetice proportionales, cum ſumma extremorum æquetur duplo medio, adeoque a, a', b erunt in continua proportione harmonica; cum proportio harmonica ſit inverſa arithmeticæ: unde profluit hujusmodi theorema: *Radius lentis æquivalentis lenti cuivis eſt medius harmonice proportionalis inter binos ejus radios.*

Res facile conſtabit adhibitis numeris, & patebit facilis ratio inveniendi radium lentis æquivalentis. Sit in quadam lente radius alter $= 2$, alter $=$

6 :

dem medio, ut in aere, terminata ſuperficiebus CO, DP; oportet invenire diſtantiam DL foci L a ſuperficie ſibi proxima.

51. Dicatur β intervallum BC binarum lentium, γ craſſitudo CD Secundæ, c radius primæ ſuperficiei CO ſecundæ lentis, d radius ſecundæ DP, M: 1 ratio ſinus incidentiæ ad ſinum anguli refracti in ingreſſu ex aere in materiam ſecundæ lentis, H diſtantia foci radiorum parallelorum infinite proximorum axi ſecundæ lentis. Debet inveniri DL per radios c, d, per M, H, per aperturam e, & per diſtantiam CI puncti, ad quod convergunt radii, a prima ſuperficie CO prorſus, ut eſt inventa BI per a, b, m, h, e, & diſtantiam AG $= p$.

52. Valor BI eſt $r - \frac{r^2 m \alpha}{q^2} - r^2 \rho$, adeoque CI $= r - \frac{r^2 m \alpha}{q^2} - \beta - r^2 \rho$. Sed ſi is valor eſſet r, ac formarentur Q, R, S

6: capiatur $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$; hujus dimidium $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ exhibebit radium lentis æquivalentis, qui erit $= 3$. Nam in illa prima lente $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; & in hac poſteriore $\frac{1}{a'} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, adeoque utrobique idem valor $\frac{1}{f}$, & proinde etiam $\frac{1}{r}$, & r.

Cum ſit $\frac{2}{a'} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$, erit $a' = \frac{2ab}{a+b}$. Quare habebitur hujusmodi theorema: *ut ſumma radiorum ad duplum alterum radium, ita alter ad radium lentis æquivalentis.*

Si altera ſuperficies fuerit convexa, & altera concava, pro ſumma oportebit capere differentiam. Facile etiam eruitur theorema vulgare pro lentibus iſoſceliis e vitro, in quo ſinus incidentiæ ad ſinum anguli refracti eſt proxime ut 3 ad 2, adeoque proxime $m = 1\frac{1}{2}$, & $m - 1 = \frac{1}{2}$. Ibi pro radiis,

σ per c, d, M, g, r, prorſus, ut formatæ ſunt q, r, ρ per a, b, m, f, p; eſſet $DL = R - \frac{R^3 M\gamma}{Q^3} - R^2\sigma$. Sed quoniam CI eſt minor, quam r per $\frac{r^2 m\alpha}{q^3} + \beta + r^2\varrho$; oportebit per num. 48 adhuc demere hunc valorem ductum in $\frac{DL^2}{BI^2}$, ſive proxime in $\frac{R^2}{r^2}$. Eo pacto eſt diſtantia quæſita $DL = R - R^3\left(\frac{m\alpha}{q^2} + \frac{\beta}{r^2} + \frac{M\gamma}{Q^2}\right) - R^3(\varrho + \sigma)$.

53. Exprimet autem primus terminus diſtantiam foci radiorum infinite proximorum axi contempta craſſitudine, & diſtantia lentium, ſecundus terminus correctionem his debitam, tertius correctionem debitam figuræ ſphæricæ.

54. *Schol.* 1. Sequentibus binis corollariis proponam valores omnes inventos primo quidem pro radiis utcumque convergentibus, vel divergentibus, tum pro parallelis. Valores radiorum ſphæricitatis cenſentur poſitivi, ubi centrum jacet ultra ſuperficiem reſpectu radiorum venientium ad lentes, qui evadunt

---

radiis, qui adveniunt paralleli, fit $\frac{1}{p} = o$, & $\frac{1}{r} = \frac{m-1}{f} = \frac{2}{a'} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{a'}$, adeoque $r = a'$. Nimirum *in lentibus æque utrinque convexis e vitro habente rationem ſinus incidentiæ ad ſinum anguli refracti ut* 3 *ad* 2, *radii, qui incidunt paralleli, colliguntur in centro primæ ſuperficiei.*

Id quidem generaliter in vitris habebitur non accurate, ſed proxime: nam imprimis negligitur ibi craſſitudo lentis, & error figuræ ſphæricæ: deinde fere omnia vitra habent rationem m paullo majorem $\frac{1}{2}$, & quidem alia aliam; unde fit, ut radii coeant aliquanto citius, & licet ad easdem formas tornata ſint diverſa vitra; adhuc tamen alia propiorem, alia remotiorem focum habeant.

dunt infiniti pro planis, & negativi pro centro jacente citra. Valor p cenſendus eſt poſitivus, infinitus, vel negativus, prout radii adveniunt convergentes, paralleli, vel divergentes.

55. *Coroll.* 1. Formulæ ſuperius inventæ in prop. 1, & 2, ac inveniendæ ope hujus propoſitionis ſunt, quæ ſequuntur.

Radii quatuor ſphæricitatum..... a, b, c, d.
Aperturæ ſemidiameter..... e.
Craſſitudo primæ lentis, intervallum lentium, craſſitudo ſecundæ..... α, β, γ.
Rationes refractionum pro binis maſſis..... $m : 1$, $M : 1$.
Diſtantia puncti convergentiæ radiorum incidentium..... p.
Diſtantiæ foci radiorum infinite proximorum axi neglectis ſuperficierum intervallis poſt ſuperficies 1, 2, 3, 4..... q, r, Q, R.
Diſtantiæ foci radiorum parallelorum infinite proximorum axi, neglectis ſuperficierum intervallis pro lentibns prima, & ſecunda ſeorſim.. h, H.
Valores ſubſidiarii..... $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$, $\frac{1}{g} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d}$.

$$\frac{1}{q} = \frac{m-1}{ma} + \frac{1}{mp}.$$

$$\frac{1}{r} = \frac{m-1}{f} + \frac{1}{p} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}.$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{M-1}{Mc} + \frac{1}{Mr} = \frac{M-1}{Mc} + \frac{m-1}{Mf} + \frac{1}{Mp}.$$

$$\frac{1}{R} = \frac{M-1}{g} + \frac{1}{r} = \frac{M-1}{g} + \frac{m-1}{f} + \frac{1}{p} = \frac{1}{H} + \frac{1}{h} + \frac{1}{p}.$$

$$\varsigma = \frac{m-1}{m}\left(\frac{m^3}{f^3} = \frac{2m^2+m}{af^2} + \frac{m+2}{a^2f} + \frac{3m^2+m}{pf^2} - \frac{4m+4}{apf} + \frac{3m+2}{p^2f}\right) \cdot \frac{1}{2}e^2.$$

$\sigma =$

$$\sigma = \frac{M-1}{M}\left(\frac{M^3}{g^3} - \frac{2M^2+M}{cg^2} + \frac{M+2}{c^2g} + \frac{3M^2+M}{rg^2} - \frac{4M+4}{crg} + \frac{3M+2}{rg}\right)\frac{1}{2}e^2.$$

Distantia foci primæ lentis. . . $r - r^2 \times \frac{m\alpha}{q^2} - r^2\varrho$.

Distantia foci ambarum simul.. $R - R^2\left(\frac{m\alpha}{q^2} + \frac{\beta}{r^2} + \frac{M\gamma}{Q^2}\right) - R^2(\varrho+\sigma)$.

56. *Coroll.* 2. Pro radiis parallelis, vel ex satis magna distantia advenientibus, satis est omittere omnes terminos divisos per p, & pro $\frac{1}{r}$ scribere $\frac{m-1}{f}$. Tum reliquis manentibus habebitur:

$$\sigma = \frac{M-1}{M}\left(\frac{M^3}{g^3} - \frac{2M^2+M}{cg^2} + \frac{M+2}{c^2g} + \frac{(m-1)(3M^2+M)}{fg^2} - \frac{(m-1)(4M+4)}{cfg} + \frac{(m-1)^2(3M+2)}{f^2g}\right)\frac{1}{2}e^2.$$

57. *Schol.* 2. Ex ipsa methodo, qua ad superiores formulas deventum est, & ex diligenti consideratione formularum earumdem facile deducuntur plurima theoremata, ut hæc, quæ sequuntur.

58. Si sint quotcumque lentes contiguæ, & negligatur earum crassitudo (quod tamen, si nimis multæ sint, & foci non satis remoti, non licet), & quod in prima est m, f, h sit in reliquis m', m'' &c., f', f'' &c., h', h'' &c., distantia autem foci omnium simul dicatur R; erit $\frac{1}{R} = \frac{m-1}{f} + \frac{m'-1}{f'} + \frac{m''-1}{f''}$ &c. $+ \frac{1}{p} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''}$ &c. $+ \frac{1}{p}$. (*)

59.

(*) Theorma, quod num. 42 erutum est pro unica lente, habet locum in systemate quotcunque lentium, neglectis earum crassitudinibus, & intervallis. Si enim

59. Si fuerint quotcumque lentes, & quæcumque, quocumque ordine ponantur, & utralibet ſuperficie ſingulæ obvertantur radiis venientibus; neglecta ipſarum craſſitudine, focus radiorum infinite proximorum axi manebit ſemper eodem loco.

60. *Schol.* 3. Ad theoriam trium lentium facile reducitur etiam caſus, quo binis meniſcis vitreis includatur aqua, quæ haberi poterit pro lente aquea interpoſita binis lentibus vitreis: nam via radii tranſeuntis immediate e vitro in aquam, vel viceverſa, eſt eadem, quæ eſſet, ſi tenuiſſimum aeris velum intercederet.

61. Si radii quatuor ſphæricitatum ſint a, b, c, d conſiderati ut poſitivi centro jacente ultra ſuperficiem, & ratio ſinuum in vitro ſit m, in aqua M; erit $\frac{1}{R} = \frac{m-1}{f} + \frac{M-1}{f'} + \frac{m-1}{f''} + \frac{1}{p}$. Erit autem $\frac{m-1}{f} + \frac{m-1}{f''} = (m-1)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{d}\right) = (m-1)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{d}\right) - (m-1)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$, cui termino ſi uniatur $\frac{M-1}{f'} = (M-1)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$, fiet $(M-m)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$. Quare ſi fiat $\frac{1}{a} - \frac{1}{d} = \frac{1}{g}$, & $\frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{1}{g'}$; fiet $\frac{1}{R} = \frac{m-1}{g} + \frac{M-m}{g'} + \frac{1}{p}$.

62. Porro eodem devenit Clairautius ex generaliore theoria quatuor ſuperficierum diverſa media dirimentium, & hæc poſtrema formula uſum habet in lentibus, quas Eulerus propoſuerat, ut ſuperiores in lentibus Dollondianis, & Clairautianis.

§. III.

---

enim fiat $\frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''}$ &c. $= \frac{1}{H}$, erit $\frac{1}{R} = \frac{1}{H} + \frac{1}{p}$, & inde eodem pacto, ut ibi, habebitur $H - R = \frac{HH}{p+H}$.

§. III.

De errore orto a diverſa refrangibilitate, & ejus comparatione cum errore figuræ ſphæricæ.

63. Ex ipſis formulis numeri 55 ſatis patet diſtantiam foci ita pendere a valore m, ut eo mutato mutari debeat: is autem in diverſis coloratis radiis diverſus eſt; unde oritur error, & imaginis confuſio. Eum errorem hic conſiderabimus, comparando ipſum cum errore figuræ ſphæricæ.

64. Si fila radii (*Fig.* 4.) progreſſi ex G refringantur a lente M A M′; magis refrangibilia colligentur citius in B, minus refrangibilia ſerius in I, & error diſtantiæ foci erit B I. Cum is ſit exiguus reſpectu totius; negligi poterit in eo conſiderando illa ejus pars, quæ mutat errores figuræ ſphæricæ, & craſſitudinis lentis jam exiguos, parte ſui exigua. Remanebit igitur error formulæ $\frac{1}{r} = \frac{m-1}{f} + \frac{1}{p}$.

65. Si dicatur dm differentia valorum m pertinentium ad bina illa radiorum genera; differentiando habebitur $-\frac{dr}{rr} = \frac{dm}{f}$, cum p ſit conſtans, adeoque erit $\frac{dr}{r} = \frac{r}{f} \times dm$. Ibi autem ſi radii adveniant paralleli, ut evaneſcente $\frac{1}{p}$, ſit $\frac{1}{r} = \frac{m-1}{f}$, adeoque $\frac{r}{f} = \frac{1}{m-1}$; fiet $\frac{dr}{r} = \frac{dm}{m-1}$, nimirum $r.\, dr :: m-1.\, dm$. Si notetur $m-1$ eſſe exceſſum ſupra unitatem valoris exprimentis illam rationem ſinuum, cui exceſſui diximus num. 14 proportionalem eſſe refractionem; habebitur hujusmodi theorema: *Diſtantia foci eſt ad errorem rectilineum, ut refractio ad differen-*

ferentiam refractionis, ſed ubi refractio eſt major, diſtantia eſt minor.

66. Idem & geometria exhibet: ſi enim MG, AG habeantur pro parallelis; poſito A in media MM′; erit tota refractio rubeorum MIA, violaceorum MBA, adeoque differentia BMI: erit autem MB, vel MI ad BI, ut ſinus MIA, vel MBA ad ſinum BMI, nimirum ut ipſi anguli, quæ demonſtratio eſt generalis etiam pro lentibus quotcumque ſimul conjunctis.

67. Si rectæ M′B, MI occurrant ſibi invicem in C′, & MB, MI in C, ac recta C′C axi AI in O; erit, ut facile patet, CC′ diameter circelli minimi eorum omnium, qui excipiunt omnes radios tranſmiſſos per lentem; cumque ſit MM′ ad C′C, tam ut AI ad IO, quam ut AB ad BO, adeoque ut AI + AB ad BI = BO + OI; aſſumpta AI + AB, ut dupla diſtantia foci radiorum mediorum, erit, ut ipſa dupla diſtantia foci radiorum mediorum ad errorem rectilineum, ita diameter aperturæ lentis ad diametrum erroris circularis, appellando eo nomine eum circellum, qui nimirum in imagine confuſionem gignit. Aſſumendo autem poſteriorum terminorum dimidia, obtinebitur ejus valor analyticus, factis $2r \cdot dr = \frac{r\,dm}{m-1} :: e.$ $\frac{dm}{m-1} \times \frac{1}{2} e$, qui erit valor ſemidiametri OC, in quo tamen oportebit ad majorem accurationem aſſumere in $m - 1$, ut & in r, valorem debitum radiis mediis.

68. Porro patet ex ipſis formulis, errorem rectilineum eſſe conſtantem in quavis apertura, & erroris circularis diametrum eſſe in ratione aperturæ lentis. Juxta Newtonum aſſumpto m pro radiis intermediis eſt $\frac{dm}{m-1} = \frac{1}{27 \cdot \frac{1}{2}}$, adeoque eſſet diame-

ter

ter erroris circularis $\frac{1}{55}$ diametri aperturæ lentis, ut ipſe cenſuit. Sed ex novis compertis ea ratio eſt in aliis vitris alia, uti diximus §. 1, & videbimns infra.

69. Errorem figuræ ſphæricæ rectilineum definivimus num. 55. pro unica lente $r^2 \varrho$, pro duabus conjunctis $R^2 (\varrho + \sigma)$. Determinatio erroris circularis eſt ibi paullo operoſior. Radii tranſeuntes (*Fig.* 5.) per puncta F aperturæ M′ M ita ſecant axem A I in B, ut exiſtente I foco radiorum infinite proximorum axi, ſit $IB = r^2 \varrho$; valor autem ϱ componitur num. 55 ex pluribus terminis datis per m, f, a, qui non mutantur, mutata ſemidiametro aperturæ $AF = e$, ductis in $\frac{1}{2} e^2$. Quare ſi ii omnes termini ſimul dicantur 2δ, erit $IB = r^2 \delta e^2$, qui valor cum mutetur, mutàta $AF = e$, patet radios etiam homogeneos tranſeuntes per diverſa puncta F aperturæ non convergere ad unicum axis punctum, ſed perpetuo tangere curvam quandam I C′D, quæ appellatur cauſtica, cujus erunt bini arcus I C′D, I C D′ hinc, & inde ab axe A I. Radii F D, F′D′ poſt ejus curvæ contactum in D, D′ incurrentes in axem in B iterum occurrent curvæ in C, C′, eritque C′ O C diameter circelli minimi omnium excipientium omnes radios tranſeuntes per omnia puncta aperturæ F F′. Oportebit ipſam determinare.

70. Primo quidem definienda erit natura curvæ D C′ I. Id autem brevitatis cauſa ſic expediam ope calculi infiniteſimalis, (*h*)

(*h*) Habebitur hoc ipſo volumine loco tertio Diſſertatio de diſtributione luminis per hunc circellum erroris figuræ ſphæricæ: in ea a num. 7. hæc ipſa natura determinabitur expeditiſſime ſine ullo calculo integrali per ſolam infiniteſimalem Geometriam linearem, quam libentius adhibeo, ubicunque poſſum, tum quia pluribus captui eſt accommodata & pauciora elementa requirit, tum quia habetur in lineari geometria elegantia quædam, & evidentia ſingularis, re oculis ipſis quodammodo expoſita.

ſed admodum elementaris, & ſimplicis. Sit IE $= z$, ED $= y$: erit ex formulis ſubtangentium EB $= \frac{y\,dz}{dy}$. Porro eſt AF $= e$. AB, ſive AI $= r$:: DE $= y$. EB $= \frac{r\,y}{e} = \frac{y\,dz}{dy}$, undé fit $dz = \frac{r\,dy}{e}$. Sed ob EI $=$ EB $+$ BI, eſt $z = \frac{r\,y}{e} + r^2\delta e^2$, adeoque $dz = \frac{r\,dy}{e} - \frac{r\,y\,de}{e^2} + 2\,r^2\delta\,e\,de$, quod cum ſit itidem $= \frac{r\,dy}{e}$, erit $-\frac{r\,y\,de}{e^2} + 2\,r^2\delta\,e\,de = 0$, ſive $y = 2\,r\delta e^3$. Hinc $dy = 6\,r\delta e^2 de$, adeoque ob $dz = \frac{r\,dy}{e}$; erit $dz = 6\,r^2\delta\,e\,de$, & $z = 3\,r^2\delta e^2$, nulla addita conſtante, cum z, & e ſimul evaneſcant, abeuntibus punctis F, B ſimul in A, I.

71. Ex iis valoribus y, & z ſatis conſtat eſſe tam y^3, quam z^3, ut e^6, adeoque y^2, ut z^3, ſive y, ut $z^{\frac{3}{2}}$, quod oſtendit, eam curvam circa initium I accedere in infinitum ad formam parabolæ gradus tertii. In ea debet eſſe EI ad EB, ut 3 ad 2, quod facile eruitur etiam ex valore EB $= \frac{r\,y}{e}$, in quo ſi ſubſtituatur pro y valor inventus $2\,r\delta e^3$, habetur $2\,r^2\delta e^2$, dum eſt EI $= z = 3\,r^2\delta e^2$.

72. Supereſt determinanda interſectio C tangentis DB cum curva. Debebit eſſe BO^2. BE^2:: OC^2. ED^2, ſive ex natura curvæ:: IO^3. IE^3. Id autem obtinebitur, ſi ſit IO pars quarta IE; nam diviſa EI in partes 12, erit IO $= 3$, & ex numero præcedente BE $= 8$, adeoque BI $= 4$, BO $= 1$. Hinc BO. BE:: 1. 8, & IO. IE:: 1. 4: adeoque tam BO^2 ad BE^2, quam IO^3 ad IE^3, ut 1 ad 64.

73. Idem exhibet calculus directe posita $IO = hz$. Erit enim $BE = \frac{2}{3}z$, $BI = \frac{1}{3}z$, $BO = (\frac{1}{3} - h)z$; unde fit $(\frac{1}{9} - \frac{2}{3}h + h^2)\, z^2 . \frac{4}{9} z^2 :: h^3 z^3 . z^3 :: h^3 . 1$; adeoque $\frac{4}{9} h^3 = \frac{1}{9} - \frac{2}{3} h + h^3$, sive $h^3 - \frac{9}{4} h^2 + \frac{3}{2} h - \frac{1}{4} = o$. Ejus æquationis radices sunt 1, 1, $\frac{1}{4}$, quarum priores duæ pertinent ad contactum in D, ubi coeunt binæ intersectiones, existente $hz = z$, quod quidem statim patet, & binis radicibus indicatis tertiam prodidit sine molestiore solutione æquationis gradus tertii: tertia autem ipsa exhibet $IO = \frac{1}{4} IE$.

74. Jam vero cum sit $IB = r^2 \delta e^2$, erit $IE = 3 r^2 \delta e^2$, adeoque $BO = \frac{1}{12} IE$ erit $= \frac{1}{4} r^2 \delta e^2$, $AB = r . BO = \frac{1}{4} r^2 \delta e^2 :: AF = e . OC = \frac{1}{4} r \delta e^3$, quæ ob $\varrho = \delta e^2$ juxta num. 69, erit $= \frac{1}{4} r \varrho e$, & ea est semidiameter erroris circularis orti a figura sphærica. Patet autem eandem methodum habere locum etiam in errore duarum lentium, dummodo fiat $\delta e^2 = (\varrho + \sigma) e^2$; obveniret enim demum semidiameter ipsa $= \frac{1}{4} R (\varrho + \sigma) e$.

75. Cum valor ϱ, & σ jam decrescant ut e^2; patet, hujus erroris semidiametrum decrescere ut e^3, adeoque imminuta in infinitum apertura, hic error minuitur infinities magis infinitate secundi ordinis respectu erroris orti a diversa radiorum refrangibilitate, qui per num. 68 decrescit ut e. Hinc in exiguis aperturis adhuc est in immensum major hic error illo, ut Newtonus animadvertit juxta num. 4; sed in aperturis paullo majoribus idem crescit multo minus, quam alter, cujus idcirco non est negligenda correctio in novis hisce telescopiis habentibus objectivi aperturam ingentem.

76. Facile eſt ejusmodi relationem generaliter exprimere. Inventa eſt num. 67 ſemidiameter erroris orti ex refrangibilitate diverſa radiorum $= \frac{d\,m}{m-1} \times \frac{1}{2}\,e$. Quare cum hic error ortus a figura ſphærica ſit $= \frac{1}{4}\,r\,\varrho\,e$, erit ille ad hunc ut $\frac{d\,m}{m-1}$ ad $\frac{1}{2}\,r\,\varrho$.

77. Newtonus in Optica *lib.* I. *parte* I. *experim.* 8. proponit primo formulam pro errore circulari figuræ ſphæricæ hoc pacto. *Si vitrum objectivum teleſcopii ſit plano-convexum, & plana ipſius facies ad rem objectam obvertatur, diameter autem ſphæræ, cujus id vitrum ſegmentum ſit, appelletur* D, *item ſemidiameter aperturæ vitri vocetur* S, *& ſinus incidentiæ e vitro in aerem ſit ad ſinum refractionis ut* I *ad* R; *radii, qui incidunt paralleli ad axem vitri, diffuſi erunt in eo loco, ubi objecti imago diſtinctiſſima exhibetur, in parvum circulum, cujus diameter erit* $\frac{\text{R}\,q.}{\text{I}\,q.} \times \frac{\text{S}\,cub.}{\text{D}\,quadr.}$. Ea ex noſtra generaliore formula facile deducitur. Nam in eo caſu in valore ϱ num. 55 fit p infinitum ob radios parallelos, a infinitum ob primam ſuperficiem planam. Quare tota formula incluſa parentheſi reducitur ad ſolum primum terminum, in quo ipſo $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ evadit $\frac{1}{b}$ evaneſcente primo termino, & mutante ſignum ſecundo ob convexitatem ſecundæ ſuperficiei; adeoque evadit $\frac{1}{4}\,r\,\varrho\,e = r \times \frac{m-1}{8} \times \frac{m^2}{b^3} \times e^3$, vel ob $\frac{1}{r} = \frac{m-1}{f} = \frac{m-1}{b}$, adeoque $r \times (m-1) = b$, $\frac{1}{4}\,r\,\varrho\,e = \frac{m^2 e^3}{8\,b^2}$, cujus duplum, ſeu $\frac{m^2 e^3}{4\,b^2}$ exhibet diametrum eamdem: eſt autem hic m, quod ipſi $\frac{\text{R}}{\text{I}}$, & hic $2b$, quod ipſi D; unde patet, Newtonum, conſiderata cauſticæ natura, rite determinaſſe ipſum minimum circellum.

78.

78. Progreditur ipſe, & rationem errorum rite itidem determinat in hypotheſi, quod error diverſæ refrangibilitatis ſit $\frac{1}{55}$ pars diametri aperturæ. Ratio $\frac{dm}{m-1}$ ad $\frac{1}{2} r \varrho$ in eo caſu evadit $\frac{dm}{m-1}$ ad $\frac{m^2 e^2}{4 b^2}$. Eſt ipſi $\frac{dm}{m-1} = \frac{2}{55}$, $m = \frac{31}{20}$, $\frac{e}{2b} = \frac{1}{600}$, aſſumit enim $2b$ pedum 100, & diametrum aperturæ unciarum 4, adeoquo c unciarum 2, ſive $\frac{1}{6}$ unius pedis. Hinc ratio quæſita evadit $\frac{2}{55}$ ad $\frac{1 \times 31 \times 31}{360000 \times 400}$, ſive $\frac{288000000}{55 \times 31 \times 31} = 5449$ ad 1, prorſus ut ipſi.

79. Sed ſi apertura ſit major, ea ratio multum decreſcit manentibus cæteris, nimirum in ratione reciproca duplicata diametri ipſius aperturæ, in qua creſcit ſecundus rationis terminus $\frac{m^2 e^2}{4 b^2}$. Quamobrem, ut innuimus numero 75, cogitandum eſt de correctione erroris utriuſque, quod jam præſtabimus ſequenti paragrapho. (*i*).

§. IV.

(*i*) Eſt & aliud diſcrimen ſane ingens inter eos errores, nimirum quod in circello, qui determinat errorem diverſæ refrangibilitatis, denſitas luminis in centro eſt infinita, & procedendo a centro ad peripheriam perpetuo minuitur, uti Newtonus affirmavit in Optica, & ego demonſtravi in mea Diſſertatione de lumine: ut in circello, qui determinat errorem figuræ ſphæricæ, denſitas in centro infinita decreſcit perpetuo uſque ad certum limitem, tum creſcit, & in margine eſt iterum infinita, quod plurimum confert ad vim perceptionis, & minus contemptibilem reddit eum errorem, uti facile demonſtro in ea Diſſertatione, quæ habetur hic inferius tertio loco, & cujus mentionem feci ſuperius in adnot. ad num. 70.

§. IV.

De correctione errorum.

80. Tria errorum genera conſideravimus, eos, qui proveniunt a craſſitudine, & intervallo lentium, qui a figura ſphærica, & qui a diverſa radiorum refrangibilitate. Primus error non turbat ſaltem ad ſenſum diſtinctionem imaginis, quam tantummodo admovet lenti paullo plus, quam requirat primus terminus valoris exprimentis diſtantiam foci, adeoque is omitti poteſt. Acturi de reliquis binis, agemus primo de priore, quem Dollondus correxit, & quem diximus tanto majorem.

81. In primis ſatis patet ex num. 65 non poſſe eum errorem corrigi per unicam lentem, cum ibi exhibeatur ejus magnitudo pro quavis lente per valores, qui non poſſunt evaneſcere: ut corrigatur per duas, oportet valor diſtantiæ foci numeri 55 obveniat idem, poſitis pro M, & *m* numeris pertinentibus ad quodvis radiorum genus. Quoniam exigua mutatio eorum numerorum inducit mutationem perquam exiguam in exiguis terminis ejus formulæ exprimentibus errorem craſſitudinum, & figuræ ſphæricæ; ſatis erit ea neglecta efficere illud, ut valor R remaneat idem, qui manebit idem, ſi maneat $\frac{1}{R} = \frac{M-1}{g} + \frac{m-1}{f} + \frac{1}{p}$.

82. Ut is valor maneat idem in duobus radiorum coloratorum generibus, id præſtabitur facile, ſi in altero pro valore M, & *m* ponatur $M + dM$, & $m + dm$. Tum enim ſatis erit facere $\frac{dM}{g} + \frac{dm}{f} = 0$; unde habebitur $\frac{dM}{g} = -\frac{dm}{f}$; & inde $g. -f :: dM. dm$. Quod ſi deſignet $M - 1$, & $m - 1$ qualitatem refractivam, & dM, dm qualitatem diſtractivam (nam priores termini deſignant exceſſum ſupra unitatem valoris exprimentis ratio-

nem

nem ſinuum, & in exiguis priſmatum angulis poteſt exprimere ſibi proportionalem quantitatem anguli, quo radius detorquetur, ſive refractionem, poſteriores earumdem refractionum differentiam, ex qua pendet ſeparatio unius coloris ab alio), & lentes ſint iſoſceliæ, in quibus ob $b = -a$, & $d = -c$, eſt $\frac{1}{f} = \frac{2}{a}$, & $\frac{1}{g} = \frac{2}{c}$, adeoque $g. f :: c. a$, habebitur hujusmodi theorema. *Error diverſæ refrangibilitatis duorum generum radiorum corrigetur, ſi e lentibus iſoſceliis æquivalentibus altera ſit convexa, altera concava; ſint autem radii ſphæricitatum in ratione directa qualitatum diſtractivarum.*

83. Ex eadem ſuperiore æquatione patet fore $\frac{1}{g} = -\frac{dm}{dM} \times \frac{1}{f}$. Eo valore ſubſtituto in formula $\frac{1}{R} = \frac{M-1}{g} + \frac{m-1}{f} = \frac{1}{p}$, habebitur $((m-1) - \frac{dm}{dM} \times (M-1))\frac{1}{f} + \frac{1}{p}$, ſive $\frac{dm}{f} \times (\frac{m-1}{dm} - \frac{M-1}{dM}) + \frac{1}{p}$. Porro inde manifeſto deducitur illud; ſi ſit $\frac{m-1}{dm} = \frac{M-1}{dM}$, quod Newtonus cenſuerat accidere in omnibus ſubſtantiis, ſecundum æquationis terminum reduci ad $\frac{1}{p}$, evaneſcente prima parte, adeoque correctionem haberi non poſſe niſi omni refractione deſtructa, facto nimirum $R = p$, & in radiis parallelis infinito. Sed ſi in diverſis ſubſtantiis inveniatur valor $\frac{m-1}{dm}$ diverſus, ſive diverſa ratio decurtationis ſinus ad differentiam decurtationum, poſſe corrigi eum errorem per theorema numeri præcedentis.

84. Id autem ita ſe habere invenit Dollondus in *flint-glaſs*, & *crown-glaſs*, in quibus M, & m invenit parum diſcrepantes,

at dM. $d\,m$:: 3. 2, uti diximus num. 12, adeoque in iis juxta num. 16 corrigitur error efficiendo, ut radius primæ ad radium ſecundæ ſit in eadem ratione 3 ad 2.

85. Ut R ſit valor poſitivus, adeoque habeatur focus realis, quod eſt utique neceſſarium pro teleſcopii objectivo, debebit exiſtente f poſitivo eſſe $\frac{m-1}{d\,m}$ majus, quam $\frac{M-1}{d\,M}$, contra vero minus eo exiſtente negativo. Quamobrem ſi prima lens ſit convexa; debebit ea fieri ex materia habente rationem majorem $\frac{m-1}{d\,m}$; ſi concava, minorem, adeoque in primo caſu debebit eſſe concava ſecunda, in ſecundo convexa: nimirum in Dollondianis vitris convexa debet eſſe ex *crown-glaſs*, & concava ex *flint-glaſs*, ac utralibet obvertatur radiis venientibus, æque hic primus error corrigitur, ſi ſphæricitatum radii ſint ut 2 ad 3 in ipſis lentibus utrinque, vel ſi iſoſceliæ non ſint, in radiis iſoſcelium æquivalentium.

86. Facile eſt genuinam formulam eruere etiam pro correctione erroris ejuſdem per lentes vitreas binas continentes aquam. Eſt in iis per num. 61, $\frac{1}{R} = \frac{m-1}{g} + \frac{M-m}{g'} + \frac{1}{p}$. Debebit igitur eſſe $\frac{d\,m}{g} + \frac{d\,M}{g'} - \frac{d\,m}{g'} = 0$, ſive $\frac{1}{g} = \frac{1}{g'} \times \left(1 - \frac{d\,M}{d\,m}\right)$, ubi habetur ratio valorum g, & g', qui ſunt iidem, ac eſſent f, & g in binis lentibus, altera ob $\frac{1}{g} = \frac{1}{a} - \frac{1}{d}$ vitrea non conſiderata aqua, altera ob $\frac{1}{g'} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$ aquea incluſa. Verum & ibi, acæpto valore $\frac{1}{R}$, obtinetur illud idem, quod num. 83. Habetur enim $\frac{m-1}{g'} - \frac{d\,M}{d\,m} \times \frac{m-1}{g'} - \frac{M-m}{g'} + \frac{1}{p} = \frac{d\,M}{d\,m} \times \frac{m-1}{g'}$

$-\frac{M-1}{g'}+\frac{1}{p}=\frac{dM}{g'}\times\left(\frac{m-1}{dm}-\frac{M-1}{dM}\right)+\frac{1}{p}$, cujus primus terminus itidem evaneſcit, ſi ſit $\frac{m-1}{dm}=\frac{M-1}{dM}$, ut ſane debuit; nam generaliter oſtendimus num. 15 in caſu, ad quem is reducitur in exiguis prismatum angulis, non poſſe corrigi refractionum diſcrimen, manente refractione ipſa.

87. Supereſt monendum illud circa hanc hujus erroris correctionem, ſi in omnibus radiorum heterogeneorum binariis in ingreſſu in eadem bina media ex aere ſit eadem ratio $\frac{dM}{dm}$; correcto errore pertinente ad bina radiorum genera, corrigi errorem pertinentem ad omnia reliqua: ſecus, ſi in aliis ſit alia. Id patet ex ipſa formula, in qua res omnis reducitur ad valorem ejus fractionis. An res ita ſe habeat, inquirendum eſt per experimenta methodis, de quibus infra. Ex obſervationibus huc uſque inſtitutis videtur res ita ſe habere, ſi minus accurate, ſaltem proxime. (*k*)

88. Hactenus de errore diverſæ refrangibilitatis: nunc ad errorem figuræ ſphæricæ faciendus eſt gradus. Primo quidem quæri poteſt, an is error corrigi poſſit in unica lente per combinationem idoneam binarum ſphæricitatum.

89. Ad id præſtandum oportet, valor ς numeri 55 evaneſcat. Cum is non poſſit evaneſcere per hoc, quod evaneſcat $m-1$ (nam facto $m=1$ nulla haberetur refractio), nec debeat per hoc, quod evaneſcat c, nimirum apertura, cujus manentis error debet deſtrui; oportet evaneſcat quidquid continetur ejus parentheſi. Ponatur ibi $\frac{n}{f}$ pro $\frac{1}{p}$, & diviſis omnibus terminis per

(*k*) In ſecunda Diſſertatione conſtabit ex experimentis ſatis accurate inſtitutis, rem non ita ſe habere nec accurate, nec ſatis proxime.

$\frac{1}{f}$. habebitur $\frac{m^3}{f^2} - \frac{2m^2+m}{af} + \frac{m+2}{a^2} + \frac{(3m^2+m)n}{f^2} - \frac{(4m+4)n}{af}$ $+ \frac{(3m+2)n^2}{f^2} = 0$, adeoque $f^2 - \frac{2m^2+m+4mn+4n}{m+2} \times af$ $+ \frac{m^3+3m^2n+mn+3mn^2+2n^2}{m+2} \times a^2 = 0$. Inde eruitur $f = a\left(\frac{2m^2+m+4mn+4n \pm \sqrt{(-4m^3+m^2+4m^2n-4mn+4mn^2)}}{2m+4}\right)$.

90. Ex ejuſmodi æquatione obtinetur relatio inter f, & a, adeoque etiam inter a, & b, cum ſit $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$. Patet autem ſtatim, rem eſſe impoſſibilem in caſu, in quo radii adveniant paralleli, quo caſu facto infinito p, evaneſcit $\frac{1}{p} = \frac{n}{f}$, adeoque etiam n, & habetur illa radix $\sqrt{(-4m^3+m^2)}$, quæ non poteſt eſſe realis, cum debeat in ingreſſu ex aere in quamvis ſubſtantiam ipſo magis activam in radios eſſe m majus unitate, adeoque $4m$ multo majus, quam 1, & $4m^3$ majus, quam m^2. Adhuc tamen in eo caſu obtinebitur error minimus, ubi illa radice neglecta fuerit $f = \frac{2m^2+m}{2m+4} \times a$. Id facile deducitur differentiando valorem ϱ, qui eo caſu reducitur ad $\frac{m-1}{m}\left(\frac{m^3}{f^3} - \frac{2m^2+m}{af^2} + \frac{m+2}{a^2f}\right)\frac{1}{2}e^2$, ſive differentiando $\frac{m^3}{f^3} - \frac{2m^2+m}{af^2} + \frac{m+2}{a^2f}$, ubi etiam f haberi poterit pro conſtanti, variato ſolo a, cum quæſita ſola ratione a ad b haberi poſſit pro conſtanti $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$. Habebitur $\frac{(2m^2+m)da}{a^2f^2} - \frac{(2m+4)da}{a^3f} = 0$, ſive $f = \frac{2m^2+m}{2m+4} \times a$. Erit nimirum error minimus ubi $\frac{1}{f}$, ſive $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{2m+4}{2m^2+m} \times \frac{1}{a}$, adeoque $\frac{1}{b} = \frac{2m^2-m-4}{2m^2+m} \times \frac{1}{a}$. Poſito autem cum Newtono

$m =$

$m = \frac{31}{20}$, evadit $\frac{1}{b} = \frac{-298}{2548}$, ſive quamproxime $b = -(8.\frac{1}{2})$ a, ſuperficiem habens parum convexam, ut adeo lentes utrimque convexæ, in quibus radius ſecundæ ſuperficiei ſit ad radium primæ in eâ refractiva qualitate ut $8.\frac{1}{2}$ ad 1, obverſa radiis e longinquo venientibus curvatura majore; omnium maxime evitent errorem figuræ ſphæricæ pro radiis parallelis.

91. In caſu, in quo p ſit aliquid, poteſt corrigi error, ubi nimirum valor ille radicali incluſus in formula numeri 89 evadat poſitivus. Limites valoris poſitivi erunt valores n, qui reddant eum valorem $= o$. Dividendo omnes terminos per $4m^2$ fit $n^2 + (m-1)$ $n - \frac{4m-1}{4} = o$; unde eruitur $n = \frac{-(m-1) \pm \sqrt{(m^2+2m)}}{2}$.

92. Sit (*Fig. 6.*) lens in A, $AF = f$, quæ, ex formula num. 55. exhibente $\frac{m-1}{f} = \frac{1}{b}$, ad diſtantiam foci radiorum parallelorum ſit, ut $m-1$ ad 1, & aſſumpta citra lentem Am, quæ ad AF ſit, ut 2 ad $-m+1-\sqrt{(m^2+2m)}$, vel AM ultra, ut 2 ad $-m+1+\sqrt{(m^2+2m)}$, ſi radii divergant ex quovis puncto rectæ Am vel convergant ad quodvis punctum rectæ AM; error figuræ ſphæricæ corrigi poterit; ſecus ſi cadat punctum divergentiæ, vel convergentiæ extra illos limites. Facto $m = \frac{31}{20}$, evadit proxime $Am = \frac{29}{20}$, & $AM = \frac{18}{20}$. Sed pro radiis divergentibus facile poteſt oſtendi, rem nulli uſui eſſe poſſe pro imagine per lentem efformata; cum radii divergentes a puncto tam proximo in vitreis lentibus non convergant, ſed habeant focum virtualem.

93. Ope duarum lentium res multo commodius ſuccedit. Si in formulis ipſis numeri 55 fiat $\rho + \sigma = o$, ubi ob quatuor valores f, g, a, c, ſive a, b, c, d; problema evadit indeter-

mina-

minatum duplici indeterminatione, quæ facilem admittit liberationem ab imaginarietate. Sed ut eam perquisitionem faciamus cum utilitate majore pro telescopiis, unam determinationem addemus a destructione erroris pertinentis ad diversam refrangibilitatem, substituendo in valore σ pro $\frac{v}{g}$ valorem $-\frac{d\,m}{d\,\mathrm{M}} \times \frac{1}{f}$ inventum num. 83. Cum autem ad usum telescopiorum excipientium radios digressos a punctis ita remotis, ut haberi possint pro parallelis, satis sint formulæ simpliciores, quæ habentur, omissis num. 55 terminis divisis per p; utemur potius iis in præsenti perquisitione.

94. Quoniam vero licet unum ex valoribus, ad quem cæteri referri debent, appellare unitatem; ponatur $f = 1$, quod contractiores reddet formulas, & divisores quidem m, ac M applicentur singulis terminis positis intra parentheses, ac utraque formula dividatur per $(\mathrm{M}-1)\frac{1}{2}e^2$. Hoc pacto fiet $\frac{1}{g} = -\frac{d\,m}{d\,\mathrm{M}}$, & habebitur æquatio $\frac{m-1}{\mathrm{M}-1} \times \left(m^2 - \frac{2m+1}{a} + \frac{1+\frac{2}{m}}{a^2}\right) - \frac{d\,m^3}{d\,\mathrm{M}^3} \times \mathrm{M}^2 - \frac{d\,m^2}{d\,\mathrm{M}^2} \times \frac{2\,\mathrm{M}+1}{c} - \frac{d\,m}{d\,\mathrm{M}} \times \frac{1+\frac{2}{\mathrm{M}}}{c^2} + \frac{d\,m^2}{d\,\mathrm{M}^2} \times (m-1)(3\,\mathrm{M}+1) + \frac{d\,m}{d\,\mathrm{M}} \times \frac{(m-1)\left(4+\frac{4}{\mathrm{M}}\right)}{c} - \frac{d\,m}{d\,\mathrm{M}} \times (m-1)^2\left(3+\frac{2}{\mathrm{M}}\right) = 0$, quæ mihi quidem visa est habere formam omnium commodissimam pro substitutione numerorum, & rite ordinata habebit unum terminum cum $\frac{1}{a^2}$, unum cum $\frac{1}{a}$, unum cum $\frac{1}{c^2}$, duos cum $\frac{1}{c}$, & reliquos quatuor datos. (*l*).

95. Si

(*l*) Forma ad plures usus habebitur admodum commoda, & logarithmorum usui maxime accommodata, si fiat $\frac{(m-1)\,m^2}{\mathrm{M}-1} = \mathrm{A}$, $\frac{(m-1)\,(2m+1)}{\mathrm{M}-1} = \mathrm{B}$,

$(m-1)$

95. Si in ea æquatione ſubſtituantur numeri pro $\frac{d\,m}{d\,M}$, dati per qualitatem diſtractivam, qui Dollondo ſunt $\frac{2}{3}$, & pro m, ac M numeri debiti uni cuipiam radiorum generi, ut radiis mediis; obtinebitur æquatio indeterminata pro a, & c, quorum valorum determinato altero ad arbitrium, æquatio remanebit ſecundi gradus, & deſtruet errores provenientes a ſphæricitate pro illis radiis. Quod ſi ponantur pro m, & M valores debiti binis radiorum generibus, ut extremis rubeis, & extremis violaceis; obtinentur binæ æquationes, ex quibus eliminata altera a, vel c, devenietur ad unicam gradus quarti determinatam.

96. Eo

$\frac{(m-1)\,(m+2)}{(M-1)\,m} = C$, $\frac{d\,m^3}{d\,M^3} \times M^2 = D$, $\frac{d\,m^2}{d\,M^2} \times (2M+1) = E$, $\frac{d\,m}{d\,M} \times \frac{M+2}{M} = F$, $\frac{d\,m^2}{d\,M^2} \times (m-1)\,(2M+1) = G$, $4 \times \frac{d\,m}{d\,M} \times (m-1) \times \frac{M+1}{M} = H$, $\frac{d\,m}{d\,M} \times (m-1)^2 \times \frac{3M+2}{M} = I$. Factis hiſce poſitionibus æquatio rite ordinata erit: $\frac{C}{a^2} - \frac{B}{a} - \frac{F}{c^2} - \frac{E-H}{C} + A - D + G - I = o$.

Et hæc quidem eſt generalis æquatio, ſi primam lentem velimus convexam, nimirum ex materia minus diſtrahente, cujus valor f cum ſit poſitivus, potuit fieri $= 1$. Sed ſi quis velit primam lentem ex materia magis diſtrahente, adeoque concavam, cum ejus f debeat eſſe valoris negativi, ponendum erit $f = -1$, quo poſito fiet poſitivus valor G; nam $\frac{1}{g} = -\frac{d\,m}{d\,M} \times \frac{1}{f}$ per num. 83 fiet $= \frac{d\,m}{d\,M}$. Fiet autem negativus valor $\frac{1}{r}$ numeri 55, qui cum ibi evaneſcente $\frac{1}{p}$ evadat $= \frac{m-1}{f}$, erit $= -(m-1)$. Ibidem in valore p mutabit ſignum primus, & tertius terminus, qui habent f^3, & f: itidem in valore σ primus, & tertius, qui habent g^3, & g, quartus, qui

96. Eo pacto corrigetur ſaltem proxime in radiis tranſeuntibus per duplex objectivum tam is error, qui provenit a diverſa refrangibilitate, quam qui e figura ſphærica ita, ut omnes radii provenientes ab unico objecti puncto, qui ad diverſa petinent colorum genera, & incidunt in totam aperturam, colligantur ad ſenſum in unico puncto foci, quorum utrumque Dollondus, & Clairautius præſtiterat. Verum ſi oculares lentes ſingulæ ſint ex ſingulis maſſis, inducitur ab iis uterque error; & is quidem, qui provenit a figura ſphærica, debet eſſe perquam exiguus; nam radii egreſſi ex unico objecti puncto, & incidentes in totam aperturam vitri objectivi, poſteaquam coierunt in foco ipſius objectivi,

---

qui habet r cum g^2, & ſextus, qui habet g cum r^2, manente ſigno reliquorum trium tantummodo habentium f^2, g^2, rg. Quamobrem retentis iisdem valoribus litterarum A, B *l* ſatis erit ad æquationem huic uſui adaptandam mutare ſigna præfixa valoribus A, C, D, F, G, I; retentis ſignis B, E, H, vel quod eodem redit in æquatione, mutare hæc tantummodo retentis illis. Eo pacto habebitur ſequens æquatio generalis pro caſu primæ lentis concavæ: $\frac{C}{a^2} + \frac{B}{a} - \frac{F}{c^2} + \frac{E-H}{c} + A - D + G - I = o$

Porro cum ſit $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$, $\frac{1}{g} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d}$, $\frac{1}{R} = \frac{m-1}{f} + \frac{M-1}{g}$, & in primo caſu $\frac{1}{f} = 1$, $\frac{1}{g} = -\frac{d\,m}{d\,M}$, in ſecundo $\frac{1}{f} = -1$, $\frac{1}{g} = \frac{d\,m}{d\,M}$, erit in primo caſu $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - 1$, $\frac{1}{d} = \frac{1}{c} + \frac{d\,m}{d\,M}$, $\frac{1}{R} = m - 1 - \frac{d\,m}{d\,M} \times (M-1)$, & in ſecundo $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} + 1$, $\frac{1}{d} = \frac{1}{c} - \frac{d\,m}{d\,M}$, $\frac{1}{R} = -(m-1) + \frac{d\,m}{d\,M} \times (M-1)$. Ii valores facile invenientur inventis a, & c per æquationes ſuperiores, & poſitionem arbitrariam, quæ alterum e valoribus a, c determinet vel per ſe, vel per alterum.

vi, & ſe ibi interſecuerunt, incurrunt in ocularem ad diſtantiam tanto minorem, quanto eſt minor diſtantia foci radiorum parallelorum lentis ocularis, quam objectivi, quarum diſtantiarum ratio inverſa eſt ipſum augmentum diametri objecti per teleſcopium, ubi unica adhibetur lens convexa. Idcirco occupant perquam exiguam particulam aperturæ ipſius ocularis, & cum juxta num. 75 error figuræ ſphæricæ etiam rectilineus decreſcat in ratione duplicata diametri aperturæ occupatæ a radiis ingredientibus; debet is error remanere perquam exiguus. At cum error rectilineus proveniens a diverſa refrangibilitate radiorum non pendeat ab apertura juxta num. 68, is in exigua illa apertura remanet ejusdem magnitudinis, ac in magna; licet inde error circularis ab apertura itidem pendens minuatur plurimum, ex quo fit, ut correctis erroribus objectivi, & relicto errore ocularium, tanto majorem perfectionem hæc nova teleſcopia habuerint potiſſimum in diſtinctione prope axem nihil læſa a majore vi luminis, & incremento imaginis.

97. Ad corrigendum errorem omnem provenientem a diverſa refrangibilitate radiorum pro radiis egreſſis a puncto objecti jacente in axe, ſatis eſt, ut ita dicam, plusquam corrigere errorem eundem in objectivo, reddendo ipſum negativum, & æqualem errori, quem radii incurrentes paralleli in ocularem oculo proximam in tranſitu per totum ocularium ſyſtema deberent habere ibi, ubi deberent coire in focum realem congruentem cum foco reali objectivi. Radii delati paralleli ad primam ocularem ita coirent in foco totius ocularium ſyſtematis, ut violaceorum concurſus eſſet propior oculari ſpectanti objectivum, quam concurſus rubeorum, & per formulam numeri 65, quæ habet $-\frac{dr}{rr} = \frac{dm}{f}$, ſive $dr = \frac{-rr\,dm}{f}$ rite applicatam ſingulis lentibus, habita ra-

tione erroris præcedentium, dum ad ſubſequentes ſit tranſitus, haud difficulter obtineretur differentia punctorum, in quibus coirent rubei, & violacei, ſive error rectilineus totius ſyſtematis. Si igitur id efficiatur, ut ope objectivi duplicis radii rubei incidentes in ipſum objectivum coeant tanto citius, quam violacei, colligentur rubei in puncto remotiore ab ocularibus, violacei in propiore ita, ut ſinguli digreſſi e ſuis focis ſyſtematis ocularium egrediantur omnes paralleli ex oculari oculo proxima, & paralleli in oculum incurrant, quod requiritur ad hoc, ut in fundo oculi nullo vitio laborantis coeant in punctum unicum, & diſtinctionem exhibeant. Dicatur illa diſtantia y, & cum ſit $\frac{1}{R} = \frac{m-1}{f} + \frac{M-1}{g}$ per num. 55, adeoque $-\frac{dR}{RR} = \frac{dm}{f} + \frac{dM}{g}$, & $dR = -RR\left(\frac{dm}{f} + \frac{dM}{g}\right)$; oportebit ponere $RR\left(\frac{dm}{f} + \frac{dM}{g}\right) = -y$, ſive $\frac{dm}{f} + \frac{dM}{g} = -y\left(\frac{m-1}{f} + \frac{M-1}{g}\right)^2$, ubi ope æquationis ſecundi gradus obtinebitur g per f datis m, M, dm, dM, & y; quin immo cum etiam valor y determinetur per valorem dm pertinentem ad oculares, facile res eo reducitur, ut ſatis ſit valor $\frac{dM}{dm}$, ſine ipſis dM, dm abſolutis.

98. Sit ex. gr. unica lens ocularis ex materia, cui debetur m, & ejus f ſit f', ac diſtantia ejus foci r'. Erit ex num. 65 pro ipſa $\frac{dm}{m-1} = -\frac{dr'}{r'} = -\frac{(m-1)dr'}{f'}$. Quare $dr' = -\frac{f'dm}{(m-1)^2}$, quo poſito $= RR\left(\frac{dm}{f} + \frac{dM}{g}\right)$, fiet $-\frac{f'dm}{(m-1)^2R^2} = \frac{dm}{f} + \frac{dM}{g}$, ſive $\frac{f'}{(m-1)^2R^2} + \frac{1}{f} = -\frac{dM}{dm} \times \frac{1}{g}$. Subſtituto autem pro $\frac{1}{R^2}$ ſuo valore, habebuntur termini dati per $\frac{1}{g^2}$, per $\frac{1}{g}$,

&

& ſine g, quod exhibebit æquationem ſecundi gradus pro ipſo $\frac{1}{g}$ datam per f', f, M, m, & $\frac{dM}{dm}$. Verum cum hæc correctio ſit ſatis exigua; poterit poni pro $\frac{1}{R}$ ejus valor, qui provenit ex totali deſtructione errorum, quem num. 81 invenimus $= \frac{dm}{f} \times (\frac{m-1}{dm} - \frac{M-1}{dM})$; unde fit $\frac{1}{(m-1)R} = \frac{1}{f} \times (1 - \frac{M-1}{m-1} \times \frac{dm}{dM})$, & proinde æquatio $\frac{f'}{(m-1)^2 R^2} + \frac{1}{f} = -\frac{dM}{dm} \times \frac{1}{g}$ evadet $\frac{f'}{f^2}(1 - \frac{M-1}{m-1} \times \frac{dm}{dM})^2 + \frac{1}{f} = -\frac{dM}{dm} \times \frac{1}{g}$, ſive $\frac{1}{g} = -\frac{1}{f} \times \frac{dm}{dM}(\frac{f'}{f}(1 - \frac{M-1}{m-1} \times \frac{dm}{dM})^2 + 1)$. Et hæc quidem poſitio exhiberet novum valorem $\frac{1}{g}$ corrigentem errorem diverſæ refrangibilitatis tam objectivi, quam datæ ocularis pro puncto objecti exiſtente in axe, quæ quidem correctio erit ita exigua, ut fere contemni poſſit. Eo autem adhuc adhibito nihilominus remaneret error diverſæ refrangibilitatis, & quidem pro extremis campi punctis ſatis magnus, qui colores inducit in ipſis Dollondianis teleſcopiis. Ejus conſiderationem alibi exhibebimus: (*m*) interea ſatis erit monere illud, hunc etiam erro-

(*m*) Ad exponendam ejuſmodi theoriam addetur figuris, quæ ad hanc diſſertationem pertinebant, figura 26. Referant in ea rectæ C A, G B ſemidiametros aperturæ, vitri objectivi ſimplicis, & vitri ocularis, neglectis eorum craſſitudinibus. Axis communis eorum vitrorum ſit D C G H: veniant autem a puncto axis ſatis remoto radii D C, E A ad ſenſum paralleli inter ſe.

Fila rubea pertinentia ad radios D C, E A convergent ad quoddam punctum axis F, fila violacea ad aliud propius *f*. Poſt incurſum in G, I, *i* in ocularem ita poſitam, ut F ſit itidem ejus focus radiorum rubeorum parallelorum, radius quidem F G procurret recta per G H, radius F I abibit per I H ipſi

rem corrigi, ſi per duplex objectivum corrigatur prorſus error diverſæ refrangibilitatis, non reddatur negativus, & adhibeatur ocularis itidem duplex eodem modo combinata, quo objectivum.

99. Quoniam error figuræ ſphæricæ eſt multo minor, quam error diverſæ refrangibilitatis, non erit neceſſaria æquatio illa quarti gradus, de qua num. 95. Satis erit deſtruere per æquationem gradus ſecundi errorem figuræ ſphæricæ pro radiis mediis, quo deſtructo jam remanet reliquorum radiorum error multo minor, & reſervare determinationem valoris c per a ad alios uſus, qui

---

ipſi GH parallelam, at radius fi converget per iH ad quoddam axis punctum H: nam focus radiorum violaceorum parallelorum vitri ocularis jacebit in quodam puncto ϕ ipſi lenti propiore, quam ſit F, adeoque radii violacei divergentes a puncto f remotiore ab ipſo vitro, convergent; prodirent enim paralleli, ſi divergerent a ϕ.

Eodem pacto totus radius D′C perget tanquam irrefractus uſque ad ocularem in G′, radii vero E′A filum rubeum converget ad quoddam ejus punctum F′, quod erit quamproxime in eadem diſtantia ſui foci radiorum rubeorum parallelorum ab ipſa oculari, & filum violaceum ad f'. Aſt ubi ipſe ille radius centralis CF′ delatus fuerit ad vitrum oculare in G′, dividetur utique, & ejus filum rubeum converget ad quoddam punctum axis L aliquanto remotius, filum autem violaceum ad quoddam aliud propius I, quæ puncta jacebunt paullo ultra locum focorum pertinentium ad radios parallelos eorum colorum, cum CG, CG′ divergant a puncto ſatis remote reſpectu exiguæ curvaturæ vitri ocularis; filum autem F′I′ abibit per I′K′ parallelam G′H′, radius vero $f'i'$ converget ad quoddam punctum H′ ejuſdem G′L.

Pro radiis devenientibus a puncto objecti ſito in axe habetur tantummodo unicum incommodum, quod nimirum fila rubea deveniant ad oculum poſitum circa Ll parallela, violacea vero convergentia, quod impedit, ne uniantur utraque in unico puncto fundi oculi. At pro delatis a puncto objecti ſito extra axem habetur duplex incommodum. Primo quidem, quod itidem dum fila rubea adveniunt inter ſe parallela ad oculum, fila violacea adveniant convergentia: deinde vero, quod ipſi axes rubeorum, & violaceorum pertinentium ad eos radios veniant cum directione diverſa, alter cum directione NG′L, alter cum directione nG′l, exiſtente angulo NG′n non ita exiguo in ſatis magna diſtantia a centro campi: eſt enim in plerisque vitris communibus pars

qui exhibeant commodius ſyſtema quatuor ſuperficierum, & lentium conſtructionem magis idoneam, in quibus illud in primis cavendum eſt, ne quis proveniat radius ſphæricitatis nimis exiguus, quo caſu non poteſt ingens apertura adhiberi cum conditione adhibita in lemmate numeri 21, quod nimirum in fig. 1 ſit latus MX exiguum reſpectu SX.

100. Plures ejuſmodi poſitiones adhiberi poſſunt, ut ſupponendo unam e quatuor ſuperficiebus planam, quo caſu ejus radius evadit infinitus, vel ſupponendo alteram e lentibus datam, cui

---

$\frac{1}{27}$ totius refractionis CG′N, quæ eſt ſumma angulorum GCG′, GLG′, quorum primus eſt æqualis diſtantiæ DCD′ puncti objecti a centro campi, qualis nudo oculo videretur ex C, ſecundus eſt eadem aucta per teleſcopium in ratione G′C ad G′L. Eam ob cauſam, ubi campus eſt ſatis magnus, & augmentum ingens, objecta ſatis lucida remotiora a centro campi contigua objecto obſcuriori jacenti verſus marginem habent fimbriam violaceam extantem verſus marginem ipſum proximum ejuſdem campi.

Dollondianum teleſcopium id efficit, ut coeant foci *f*, F violaceorum, & rubeorum, quod fere penitus amovet primum incommodum, fere quidem non accurate, niſi plusquam corrigatur error diverſæ refrangibilitatis methodo hic expoſita in hac diſſertatione: ejus methodi ope fiet, ut *f*, *f*′ violaceorum abeant ultra focos rubeorum F, F′ in Φ, Φ': cum nimirum & rubea fila divergent a ſuis parallelorum focis F, F′ vitri ocularis, & violacea a ſuis Φ, Φ', adeoque tam hæc, quam illa exibunt inter ſe parallela, & conſtituent quosdam velut funiculos, quorum ſinguli habebunt ſua fila inter ſe parallela. Idcirco ab oculo, in quo arbitror diverſos humores, & diverſa chryſtallini ſtrata diverſæ refrangibilitatis effectum corrigere, uniuntur in eodem fundi puncto. At ſecundum illud malum adhuc manebit integrum in radiis provenientibus a puncto objecti ſito extra axem. Funiculus totus rubeorum adveniet directione NG′L, & funiculus violaceorum directione *n*G′*l*: apparebit id objecti punctum, diſtans a centro campi per radios rubeos angulo CLN, per violaceos angulo C*l*n, qui illum ſuperat angulo NG′*n*. Sit diſtantia DCD′ = GCG′ ejus puncti objecti nudo oculo viſa a campi centro = 20′, augmentum vero = 40. Erit angulus G′LG = 800′, adeoque CG′N = 820′, quo diviſo per 27, erit NG′*n* = 30′. Procurrent in eo caſu violacei radii ultra rubeos per dimidium gradum apparentem ad eam diſtantiam a margine

obje-

cui altera adjungi debeat, quæ rem præſtet, vel alteram iſoſcelíam, vel ſecundam ſuperficiem lentis primæ congruentem cum prima ſecundæ, cum qua quodammodo velut unicam lentem conſtituat. Pro ſingulis ejuſmodi poſitionibus ſunt ſuæ methodi, & pro ſingulis Clairautius deſtructo penitus errore ſolius duplicis objectivi in diſſertatione anni 1756 exhibuit ſolutiones pro utroque Anglicano vitro deveniendo ſemper ad æquationes habentes radices reales, quod eſt quædam feliciſſima ſors ejus methodi.

101.

---

objecti expreſſo per radios rubeos, quam ab eo introrſum habent puncta, quæ nudo oculo apparent diſtantia per $\frac{1}{4}''$. ſive per $\frac{1}{4}$ unius minuti.

Quod ſi apparens amplitudo ejus objecti lucidi fuerit exigua ita, ut & margo oppoſitus jaceat verſus centrum campi ſatis ab eo remotus, uti eſt diameter apparens planetæ cujusvis dempto ſole, & luna, vel in his parte diſci extra teleſcopium ſita, relinquatur verſus centrum campi ejus margo ſatis ab eodem centro diſtans, apparebit fimbria rubea verſus centrum ipſum, radiis rubeis relictis ſolis ex ea parte a violaceis procurrentibus verſus marginem.

Hoc malum Dollondiana teleſcopia non tollunt, & idcirco in iis, quotiescunque cum ingenti augmento vidi conjunctum campum ſatis amplum, quod fere ſemper habere ſolent, inveni ſemper haſce coloratas fimbrias, quam ipſam etiam ob cauſam (alteram cauſam ſecunda Diſſertatio exhibebit) puto iis non ſatis merito tribui nomen, quod jam invaluit, *achromaticum*. Mederetur ei malo, ut hic innui in hac Diſſertatione, lens ocularis duplex, quæ tam rubea, quam violacea fila detorqueret per eandem directionem G L; nec ego quidem ullum aliud video ejus mali remedium: verum ibi etiam occurrit aliud grave incommodum curvaturæ nimis magnæ in lente convexa, ut conjuncta cum concava, quæ focum removet plurimum, adhuc habeat focum ipſum ſatis proximum, quod ad ſatis magnum augmentum omnino requiritur.

Totam hanc theoriam ego quidem habebam perſpectam jam tum, cum anno 1763 hanc Diſſertationem conſcripſi, & ad Academiam Bononienſem transmiſi, in qua eam ipſam innui, cum viderem id ab Auctoribus etiam magni nominis nequaquam animadverti, cenſerique, correcto errore, qui pendet a diſtantia focorum F, *f*, omnia corrigi, quæ pertinent ad teleſcopiorum dioptricorum colores ſaltem ſenſibiles.

101. Is quidem poſuit primo pro m, & M valorem $1.\frac{1}{2}$, ad quem in vitris accceditur, & qui brevem calculum poſcit; tum correctionem toti formulæ debitam adjecit differentiando valores, conſideratis m, & M, ut variabilibus. Sed ego maluerim ſubſtituere ſemper immediate valores integros m, & M; nam nec numericus calculus complicatior evadit eo pacto, quin immo plerumque ſimplicior, & evadit idem omnino ſemper multo accuratior, cum per eam differentialem methodum negligantur plures termini, qui ſane non ſunt ita exigui, ſi valor m, & M recedat aliquanto magis a valore $1.\frac{1}{2}$, uti recedit in vitris pluribus, in quibus invenitur etiam $\frac{33}{20}$, pro $\frac{30}{20}$, nimirum pluſquam ſeptima ſui parte major. Ego hic præterea aſſumo $f = 1$, quod calculum numericum dum contrahit, immutat nonnihil.

102. Si prima, vel tertia ſuperficies fiat plana; evaneſcunt omnes termini diviſi per a, vel c. Si fiat plana ſecunda; tum etiam $\frac{1}{a}$ fit $= 1$, cum ſit $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{f} = 1$, & $\frac{1}{b}$ eo caſu evaneſcat. Si ponatur plana poſtrema; evadit $\frac{1}{c} = -\frac{dm}{dM}$ valor datus, cum ſit $\frac{1}{c} - \frac{1}{d} = \frac{1}{g} = \frac{dm}{dM}$, & $\frac{1}{d}$ evaneſcat. Si prima lens ſit data; habebuntur a, & b in numeris, quorum unitas erit diverſa ab unitate aſſumpta $= f$. Reducentur ad eam, ſi fiat, ut $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ in iis numeris ad 1, ita in iis numeris a, vel b ad numeros harum unitatum eos exprimentes, cum numeri unitatum in eadem magnitudine ſint in ratione reciproca unitatum ipſarum. Porro is numerus a ſubſtitui poterit in formula, & obtinebitur c. Similis eſt methodus, ſi detur lens ſecunda, habita ratione valoris $-\frac{dm}{dM} = \frac{1}{g} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d}$ pro

determinando valore c, & per ipſum valore a. Si ſit iſoſcelia lens prima; evadit $\frac{1}{a} = -\frac{1}{b}$ & $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{2}{a} = 1$, adeoque $a = 2$: ſi vero ſit iſoſcelia lens ſecunda; erit pariter $\frac{2}{c} = \frac{-dm}{dM}$, & c valor datus.

103. Iis caſibus omiſſis evolvam eum, in quo ſecunda ſuperficies congruat cum tertia concava, qui exhibet in vitris huc uſque cognitis proportiones admodum ſimplices, & elegantes. In eo caſu eſt $c = b$, cumque ſit $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 1$; erit $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - 1 = \frac{1}{c}$. Quare ſubſtituto eo valore in æquatione numeri 94, orientur bini termini e ſingulis habentibus $\frac{1}{c}$, tres vero ex eo, qui habet $\frac{1}{c^2}$, adeoque evadent termini 13, duo continentes $\frac{1}{a^2}$, quatuor $\frac{1}{a}$, ſeptem ſine a. (*). Facta numerorum additione, vel ſub-

(*) Habetur hic in præcedentibus editionibus forma æquationis complicatior ex conjunctione valorum generalium datorum per M. m, $\frac{d\,m}{d\,M}$. Eam hic ſupprimendam duxi, ſubſtituta ſumma numerorum pertinentium ad ſingulos terminos. Expreſſio generalis pro hoc caſu habebitur facile per adhibitas in adnot. ad num. 94. Ibi pro $\frac{F}{c^2}$ habebitur $\frac{F}{a^2} - \frac{2F}{a} + F$, & pro $\frac{E-H}{c} -$ habebitur $\frac{E-H}{a} - E + H$. Quare æquatio prima huc reducetur $\frac{C-F}{a^2} - \frac{B+E-2F-H}{a} + A - D + E - F + G - H - I = 0$; æquatio autem ſecunda huc $\frac{C-F}{a^2} + \frac{B+E+2F-H}{a} + A - D - E - F + G + H - I = 0$.

Porro

ſubtractione, prout ſigna requirent, habebuntur tres termini tantummodo conſtituentes æquationem ſecundi gradus.

104. Eruto ex ea æquatione valore $\frac{1}{a}$, erit $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - 1 = \frac{1}{c}$, tum $\frac{1}{d} = -\frac{1}{c} - \frac{dm}{dM}$: demum $\frac{1}{R} = \frac{M-1}{g} + \frac{m-1}{f} = -\frac{dm}{dM} \times (M-1) + (m-1)$ juxta num. 83, facto ibi $\frac{1}{f} = 1$, & evaneſcente $\frac{1}{p}$. Quod ſi quæratur lens, quæ habeat datam hanc ipſam diſtantiam foci R; inventis a, b, c, d, R in unitatibus communibus aſſumptis, facile invenientur præcedentes quatuor in unitatibus poſtremi per regulam trium, vel ſi aſſumatur R, ut nova unitas, invenientur reliqui, dividendo eorum valores inventos per valorem inventum R. (*n*).

Porro hic ſequenti num. 104 exhibentur valores reliqui $\frac{1}{b} = \frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \frac{1}{R}$, qui quidem aptati ſunt caſui primæ lentis convexæ: ii pro utroque caſu habentur in eadem adnotatione ad num. 94, in qua invento a pro caſu utrolibet, invenitur $b = c$ & per hunc d.

(*n*) Invenientur facile valores a, b, c, d in unitatibus, quarum una contineat totam diſtantiam foci R, licet prius erutæ non fuerint in unitatibus pro æquatione adhibitis, quarum una exhibeat f. Inventis nimirum valoribus $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \frac{1}{R}$, quos formulæ immediate exhibent in unitatibus $= f$, ſatis erit poſtremum valorem dividere per præcedentes, ut habeantur pro a, b, c, d numeri reſpondentes valori R = 1. Cum enim ſit ut valor R in prioribus unitatibus ad valorem a in iisdem; ita valor ejus novus in nova unitate ipſi æquali, ad novum valorem a; erit e contrario ut prior valor $\frac{1}{a}$ ad priorem $\frac{1}{R}$, ita 1 ad novum valorem quæſitum, qui proinde habebitur diviſo priore $\frac{1}{R}$ per priorem $\frac{1}{a}$, & eodem pacto res ſe habet in reliquis.

105. Et hæc quidem pertinent ad haſce determinationes pro caſu extinctionis errorum objectivi lentis duplicis; nec erit difficile determinationes eaſdem adhibere, ubi iidem mutandi ſint in negativos juxta num. 97, ut deinde elidantur ab unica oculari, vel ab ocularium ſyſtemate.

§. V.

De inveniendis valoribus neceſſariis ad eamdem correctionem ope lentium, ubi de radiis ſphæricitatum determinandis per obſervationes.

106. Valores neceſſarii in ſuperioribus formulis ſunt m, M, dm, dM, vel ratio horum poſtremorum $\frac{dm}{d\mathrm{M}}$. quæ ſi habeatur etiam ſine abſolutis dm, dM, ſatis eſt pro caſu, in quo errores objectivi efformati a duabus lentibus debeant eſſe $= o$; cum in eo caſu ea ſola ingrediatur formulas, quibus numeri ſubſtituendi ſunt. Quod autem dicetur de valore m, & dm, idem locum habet pro M, & dM, quæ ſunt m & dm alterius ſubſtantiæ.

107. Si in aliqua lente innoteſcant radii ſphæricitatum, & obſervetur diligenter diſtantia foci radiorum, vel parallelorum, vel divergentium a data diſtantia; facile obtinetur valor m per num. 55 ex formula $\frac{1}{r} = \frac{m-1}{f} + \frac{1}{p}$, datis ex obſervatione r, & p, ac dato f ob $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$.

108. Tota igitur difficultas eo redit, ut determinentur valores a, & b. Ii non ſatis tuto, & accurate cognoſcuntur ex patinis, ad quas formantur ſuperficies lentium, quæ nimirum inter atterendum mutantur plurimum in curvatura exigua ſemidiametro-

trorum paullo majorum, & in lentibus itidem majoris curvaturæ mutantur mutatione tali reſpectu radii curvaturæ ipſius, ut valor inde erutus non poſſit inſervire pro ſatis tuta, & accurata determinatione valoris *m*.

109. Dati circularis ſegmenti radius facile definitur data chorda arcus, & ſagitta, quæ videtur poſſe definiri applicando ſupra ſuperficiem cavam planum, ut obtineatur cavitas, quæ habetur in medio, vel ponendo convexam ſupra planum ita, ut ipſum contingat in medio, ut obtineatur diſtantia marginis ab ipſo plano; ſed ſagitta ipſa ita exigua eſt in lentibus, ut ejus methodi nullus ad determinationem etiam utcumque non accuratam, ſed proximam uſus eſſe poſſit.

110. Supereſt, ut in ipſos ſphæricitatis radios inquiratur per radios luminis reflexos, vel reflexos ſimul, & refractos. Et quidem ſi ſuperficies ſit concava, res facile obtinetur, & formulæ ipſæ, quas pro refractione adhibuimus, pro reflexione itidem adhiberi poſſunt, ſi rite applicentur. Satis eſt notare illud in fig. 1. Si radius incidat directione *m* M G, radium reflexum non debere regredi per M *h* jacentem ad eamdem partem radii *s* M S, ſed ad oppoſitam, & ad angulum æqualem angulo incidentiæ, adeoque ponendum eſſe $m = -1$.

111. Facta hac ſubſtitutione in formula numeri 31, ubi diſtantia $AH = q - q^2\varphi$, & ex num. 33 $\frac{1}{q} = \frac{1}{m}\left(\frac{m-1}{a} + \frac{1}{p}\right)$ fit $= \frac{2}{a} - \frac{1}{p}$, ac pro radiis parallelis $q^2\varphi = \frac{e^2}{2(m-1)ma}$, pro quo ſolo caſu eo indigebimus, fit $\frac{e^2}{4a}$, habetur generaliter $\frac{1}{q} = \frac{2}{a} - \frac{1}{p}$ pro diſtantia foci radiorum infinite proximorum axi, qui radii, ſi præterea ſint paralleli, erit $\frac{1}{q} = \frac{2}{a}$, ſive $q = \frac{1}{2}a$:

& id quidem conſtat etiam ex communi catoptrica exhibente dimidium radii pro foco arcus circularis radiorum parallelorum infinite proximorum axi. Valor autem diſtantiæ foci eorum, qui incurrunt in marginem aperturæ, erit $\frac{1}{2}a - \frac{e^2}{4a}$, quod admodum facili etiam ſynthetica demonſtratione immediate colligitur, ſi libeat. (*o*).

112. Hinc autem facile eſt definire radium ſphæricitatis, ubi ſuperficies ſit concava. Satis eſt excipere radios Solis ea ſuperficie, & reflexos dirigere cum obliquitate perquam exigua, ne in directos incurrant, plano collocato prope incurrentes ad latus, & ut evitetur etiam penitus error ſenſibilis ortus a figura ſphærica, poteſt tegi ſuperficies ipſa, relicta perquam exigua apertura. Is error erit multo minor, quam ambiguitas orta ex ipſa obſervatione foci, qui definiri debet, ubi radii Solis collecti fuerint in ſpatium omnium anguſtiſſimum; nam ea poſitio non ita diſtincta,

---

(*o*) Id facile deducitur ex primo Lemmate numeri 21. In fig. 9 radius mM parallelus axi BAS reflectatur per Mh, ducaturque radius circuli SMs, & producatur hM uſque ad axem in H, ut ibi determinet focum radii reflexi Mh virtualem pro ſpeculo convexo AM. Angulus MSH erit æqualis angulo incidentiæ mMs externo, adeoque & angulo reflexionis sMh, nimirum HMS ſibi ad verticem oppoſito. Quare triangulum SHM erit iſoſceles, & $SH = HM$. Porro exceſſus binarum SH, HM ſupra SX eſt idem, ac exceſſus ſolius HM ſupra HX, qui per demonſtrationem ejus lemmatis eſt accurate $\frac{MX^2}{HM + MX} = \frac{MX^2}{SX}$, ſive quam proxime $= \frac{MX^2}{SA}$, adeoque earum exceſſus ſupra $SA = \frac{MX^2}{SA} - \frac{MX^2}{2SA} = \frac{MX^2}{2SA}$. Erit igitur ea ſumma $= a + \frac{e^2}{2a}$, adeoque $SH = \frac{1}{a} + \frac{e^2}{4a}$, quo valore dempto ab $SA = a$, relinquetur $AH = \frac{1}{2}a - \frac{e^2}{4a}$.

cta, & determinata eſſe ſolet, ut non aliquem ambiguitati locum relinquat.

113. Quod ſi etiam ejus erroris rationem habere libeat; ſatis erit adhibere inventum valorem $-\frac{e^2}{4a}$. Verum duo notanda erunt: primo quidem illud, ſi ejuſmodi errorculorum ratio ſit habenda, oportere excipere radios parallelos axi lentis, tranſmiſſos nimirum per chartam craſſiorem ejus formæ, quam exprimit fig. 7., in qua radii tranſeant per foramen ABC amplius ipſa ſuperficie cava, quæ radios Solis colligat in circello poſito in ipſo centro foraminis ſupra B, & ſuſtentato ab excurrente brachiolo. Deinde illud, eo valore exprimi in fig. 5. totum errorem rectilineum IB, dum imago omnium arctiſſima pingitur in C′OC, & continet ex partibus totius IE per num. 72 pars IO tres, IB quatuor, ut idcirco ſit $IO=\frac{3}{4}IB=\frac{3e^2}{16a}$, adeoque erit $\frac{1}{2}a-\frac{3e^2}{16a}$ diſtantia foci correcta, quæ ſi fiat $=q'$, erit $a=2q'+\frac{3e^2}{8a}$, ubi invento a per ſolum primum terminum, & eo ſubſtituto in ſecundo adeo exiguo, habebitur correctio: ſed ea erit ita exigua, ut nulla ipſius ratio habenda ſit.

114. Si loco imaginis Solis non ita certæ, & definitæ ſubſtituere libeat aliam methodum multo certiorem, quæ mihi quidem egregie ſuccedit; fiat in feneſtra occluſa tenebricoſi cubiculi exiguum foramen diametri duarum, vel trium linearum, ſupra quod applicetur charta alba cum tenui capillo tranſverſo ſupra locum foraminis ducto, & lens concava applicata regulæ perpendiculari ad ipſam feneſtram obliquata nonnihil, depinget ſuper ipſa charta ad latus foraminis ejus imaginem: ea, ubi fuerit diſtincta, exhibebit imaginem capilli, quæ vel tantillum admota, vel re-

mota

mota lente evaneſcet (*p*). Eſt E (*Fig.* 8.) foramen cum charta ſuperinducta, & capillo tranſverſo, DC regula, AB lens concava verſus E, F imago foraminis, & fili: eritque diſtantia lentis a charta æqualis ipſi radio ſphæricitatis quæſito; nam radii digreſſi e centro reflectuntur in ipſum centrum in ſphæra. Id autem conſtat etiam ex formula $\frac{1}{q} = \frac{2}{a} + \frac{1}{p}$. Erit enim hic $l = -q$, & proinde $\frac{2}{q} = \frac{2}{a}$, ac $a = q$.

115. Quin immo in omnibus ſuperioribus formulis pertinentibus tam ad dioptricam pro lentibus, quam ad catoptricam pro ſpeculis facile perſpicitur eodem pacto, diſtantiam foci radiorum divergentium, neglectis erroribus craſſitudinis, & aperturæ in caſu, in quo ea ſit æqualis diſtantiæ puncti divergentiæ, fore ſemper duplam ejus, quæ habetur, ſi radii incidant paralleli, quod occurret paullo inferius etiam in foco, qui ex duplici refractione, & unica reflexione exhibetur per lentes convexas a ſuperficie convexa extrorſum, ſed concava verſus ſuperficiem oppoſitam.

116. Porro in eo caſu error figuræ ſphæricæ ad ſenſum evaneſcet, qui prorſus evaneſceret, ſi radii reflecterentur ad E, quod cum debeat eſſe centrum ſphæricitatis, habet relationem eamdem ad omnes ſpeculi partes.

117. Diffi-

(*p*) Si capillus tendatur ante foramen ſine charta, imago ejus & citius invenietur, & evidentior erit, ac multo major ipſo capillo, ob radios directos, qui in aliqua ab eo diſtantia prætereuntes detorquentur per illam, quam Grimaldus invenit, & quæ appellatur inflexio, ſive diſtractio: at idcirco minus idonea eſt ejusmodi imago ad determinandam accurate diſtantiam foci diſtincti: multum enim admota, vel remota ſuperficie reflectente, adhuc ſatis vivida, & diſtincta imago apparet, ut locum maximæ diſtinctionis ſatis accurate deſinire non liceat, quod quidem accuratiſſime fit, ubi tenuis charta foramini prætenditur.

117. Difficultas eſt aliquanto major pro ſuperficiebus convexis, quæ focum habent virtualem tantummodo, adeoque radios non colligunt, ſed diſpergunt. Poteſt quidem ope formulæ ſuperioris ad catoptricam translatæ etiam in eo caſu haberi radius ſphæricitatis obſervata ipſa diſperſionis quantitate; ſed adhuc ſupereſt non exigua difficultas pro accurata determinatione. Utrumque evolvam quam breviſſime potero.

118. Sit AM arcus circularis (*Fig. 9.*), ut in fig. 1, AS axis occurrens rectæ MX ſibi perpendiculari in X, & cuivis alteri BD itidem perpendiculari citra A & B, centrum S, radius e centro Solis parallelus axi *m*M, reflexus per M *h* poſitam in directum cum HM, & faciens cum M*s* continuatione ſemidiametri SM angulum *h*M*s* = *m*M*s*, & occurrens BD in *h*. Recta demum CM continens cum *m*M verſus axem angulum æqualem ſemidiametro Solis exprimat radium provenientem ab extremo Solis limbo jacente ultra axem in plano MSA, qui reflectatur per MD continuationem rectæ EM, occurrentis axi in E ad angulum DM*h* = CM*m*. Patet fore B*h* radium circuli colligentis omnes radios provenientes a centro Solis; ſed radios a toto diſco delatos debere adhuc diffundi per zonulam *h*D, quæ non debet eſſe ita exigua, cum angulus *h*MD æqualis ſemidiametro apparenti Solis ſit major dimidio gradu, & angulus ipſe ad S exiguus eſſe debeat. Additamentum illud *h*D multo complicatiorem reddit perquiſitionem, in qua involvemus ſimul & ipſum, & AX, & errorem ortum ab apertura.

119. Erit per num. 111 $AH = \frac{1}{2}a - \frac{e^2}{4a}$, ubi AS = *a*, MX = *e*. Erit igitur $HS = \frac{1}{2}a + \frac{e^2}{4a}$, quæ æquatur MH ob angulum HMS = *h*m*s* = *m* M *s* = HSM. Eſt autem angulus MEA = EMH + EHM, quorum uterque eſt exiguus, pri-

mus quidem ſemidiameter Solis, cum ſit = DM h = CM m, ſecundus duplus exigui HSM, adeoque omnes ut ſui ſinus. Hinc poſito ſinu ſemidiametri Solis = t; erit hic ſinus primi, & cum ſinus ASM ſit = $\frac{MX}{MS} = \frac{e}{a}$, poterit pro ſinu MEA aſſumi $t + \frac{2e}{a}$, eritque $t + \frac{2e}{a}. t :: MH = SH = \frac{1}{2}a + \frac{e^2}{4a}. EH = \frac{2a^2t + e^2t}{4a^2t + 8e}$. Quare fiet $EX = AH - EH - AX = \frac{1}{2}a - \frac{e^2}{4a} - \frac{2a^2t + e^2t}{4at + 8e} - \frac{e^2}{2a}$ (qui poſtremus eſt valor AX ex num. 21) $= \frac{2a^2e - 2ae^2t - 3e^3}{2a^2t + 4ae}$: fiat is = z, & poſita diſtantia AB = c, erit $EX = z. EB = AB + EX + AX = c + z + \frac{e^2}{2a} :: MX = e. BD = \frac{ce}{z} + e + \frac{e^3}{2az}$. Ponatur is valor = r, eritque $z = \frac{ce + \frac{e^3}{2a}}{r - e} = \frac{4a^2e - 4ae^2t - 6e^3}{4a^2t + 8ae}$, ſive $\frac{c + \frac{e^2}{2a}}{r - e} = \frac{a - et - \frac{3e^2}{2a}}{at + 2e}$, in qua æquatione obtinebitur valor quæſitus a, ſi omnes reliqui dentur ex obſervatione, nimirum c, e, r, ſive AB, BD, MX (quæ poſtrema eſt ſemidiameter aperturæ) & t ſinus ſemidiametri apparentis Solis ad radium = 1, quæ cum ſit ſemper proxime minutorum $15\frac{1}{2}$, poteſt etiam ſumi conſtanter pro $\frac{1}{222}$.

120. Ea æquatio evaderet gradus ſecundi; ſed ſi notetur terminos $\frac{e^2}{2a}$ reſpectu c, & et, ac $\frac{3e^2}{2a}$ reſpectu a debere eſſe exiguos, potiſſimum aſſumpta diſtantia c paullo majore, & in lentibus longioris foci; poterit primo determinari a' per æquationem $\frac{e}{r - e} = \frac{a'}{a't + 2e}$; unde fit $a' = \frac{2ce}{r - e - et}$, tum a per æquationem $\frac{e + \frac{e^2}{2a'}}{r - e} = \frac{a - et - \frac{3e^2}{2a'}}{at + 2e}$.

121.

121. Difficultas potiſſima hujuſce methodi ſita eſt in accurata determinatione ſemidiametri B D, cum poſtrema penumbra in D tenuiſſima determinetur admodum difficulter. Mihi quidem methodus omnium optima videtur ea, quam exhibet fig. 10., & 11. Foramini occluſæ feneſtræ A B ſit agglutinatus tubus A C B D fixus, intra quem ſit alius F E G H mobilis circa proprium axem, ultra cujus margines procurrant fulcra E, G ſuſtinentia binos cylindros, qui habeant ſpeculum metallicum planum I ita adnexum, ut axis ipſorum tranſeat per ipſam ſuperficiem politam medii ſpeculi. Cylindro E ſit adnexa trochlea K cum filo ipſi circumvoluto, quod cylindrulo L M bis itidem advolvatur, cujus manubrio L circumacto revolvetur lente ſpeculum I, & per hunc motum, ac per motum tubi intra tubum acquiret poſitionem quamcumque. Orificio interno tubi F H applicetur tabella habens in medio foramen N paullo majus apertura lentis cum circulis in charta alba pluribus eodem centro circa foramen deſcriptis, & regula P Q paullo infra ipſum adnexa ad perpendiculum, ſupra quam poſſit excurrere alia regula R S ferens ſibi perpendicularem lentem, cujus centrum reſpondeat centro foraminis N. Lens ope ſuæ regulæ promovenda erit, donec lux Solis immiſſa per ſpeculum, & reflexa ab anteriore lentis ſuperficie congruat cum uno e circulis foramini circumſcriptis, vel lente ad arbitrariam diſtantiam collocata accipienda erit circino diameter lucidi circuli efformati a radiis e prima ſuperficie reflexis. Tubus excludet omne aliud lumen ita, ut in cubiculo aliunde tenebricoſo ſatis diſtincte videri poſſit totum lumen receptum in charta alba. Diſtantia a foramine facile determinabitur in regula inferiore P Q, & exhibebit valorem c: circuli ſemidiameter exhibebit valorem r, & dimidia amplitudo lentis valorem e. Congruentia cum pluribus

circulis ſucceſſive accepta exhibebit plures determinationes, quarum conſenſus confirmabit valorem radii ſphæricitatis quæſitum.

122. Ea ratio aptandi ſpeculum erit perquam idonea etiam pro obſervationibus priſmatum poſito exiguo foramine prope ſpeculum in AB, nam ſufficiet ſpeculum perquam exiguum ob centrum ipſius ſemper immotum.

123. At methodum habeo minus operoſam, & multo accuratiorem determinandi in lentibus utrimque convexis radios ſphæricitatum ſimul cum valore m, qui eruitur etiam radiis nondum inventis, per formulam elegantiſſimam, & ſimpliciſſimam, ſi negligantur correctiunculæ, & non nimis operoſam, ſi eæ etiam ſint adhibendæ. Tres foci reales in ejuſmodi lentibus habentur ſemper: unus directus poſt duplicem refractionem in binis ſuperficiebus factam, & bini reflexi poſt binas refractiones factas in ſuperficie objecta radiis venientibus, & unicam reflexionem intermediam factam in ſuperficie oppoſita. Ii tres rite accepti per obſervationem determinant eos tres valores quæſitos, ſed oportet applicare formulas generales, quas invenimus, ad ſecundum focorum genus. Et quidem haud difficulter res perficitur ope formularum pertinentium ad refractionem, & reflexionem: prima occurrit pro refractione in tranſitu ex aere per primam ſuperficiem lentis num. 33, ſecunda num. 111 deducta ex ipſa pro reflexione in ſecunda ſuperficie faciendo $m = -1$, tertia pro regreſſu e lente in aerem per primam ſuperficiem, ponendo in prima $\frac{1}{m}$ pro m.

124. Verum multo facilius eruitur id foci genus ex theoria, multo facilius, & accuratius definitur per obſervationem, & multo utilius adhibetur ad perquiſitionem, quam hic perſequimur, ſi adhibeatur focus hoc pacto reflexus ad ipſum divergen-

tiæ

tiæ locum. Sit (*Fig.* 12.) ſuperficies bis refringens ADB, ſemel reflectens AEB, & radii digreſſi a puncto axis F debeant redire ad ipſum punctum: quæritur diſtantia DF. Patet radium rediturum ad idem punctum, ſi intra lentem percurrat viam perpendicularem ſuperficiei reflectenti; tum enim delatus per FIG regredietur per eamdem viam intra lentem, & egredietur etiam per eamdem viam, per quam venerat. Directio GI tendet ad centrum C ſuperficiei reflectentis, cui eſt perpendicularis. Quare ad inveniendam diſtantiam DF ſatis eſt invenire focum ſuperficiei ADB pro radiis GI convergentibus ad ipſum C. Porro ſi ponatur radius ſphæricitatis ADB$=a$, AEB$=b$, DE$=\alpha$, DF$=u'$, ratio ſinus incidentiæ ex aere in materiam lentis $m:1$, manentibus reliquis valoribus numeri 55 in formula $\frac{1}{q}=\frac{m-1}{m\alpha}+\frac{1}{mp}$ (quæ locum habet in radiis infinite proximis axi, quos hic ſolos adhibebimus, cum facile ſit evitare ſenſibilem errorem figuræ ſphæricæ imminuta quantumlibet apertura lentis), evadit $q=u'$, $p=DC=b-\alpha$, adeoque $\frac{1}{p}=\frac{1}{b}+\frac{\alpha}{b^2}$, α mutat ſignum ob cavitatem obverſam radiis venientibus, & evadit $m=\frac{1}{m}$, cum radius debeat egredi e materia lentis, non ingredi in ipſam, adeoque $\frac{m-1}{m}=1-\frac{1}{m}$ fit $=1-m$, & $\frac{m-1}{m\alpha}=\frac{-(m-1)}{-\alpha}=\frac{m-1}{\alpha}$. Subſtitutis hiſce valoribus in ea formula $\frac{1}{q}=\frac{m-1}{m\alpha}+\frac{1}{mp}$, habetur $\frac{1}{u'}=\frac{m-1}{\alpha}+\frac{m}{b}+\frac{m\alpha}{b^2}$, exiſtente foco reali citra lentem reſpectu radiorum advenientium ad ipſam, ubi ſit valor u' poſitivus.

125. Inde poſito hic $\frac{1}{f}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, fit $\frac{1}{u'}=\frac{m-1}{f}+\frac{1}{b}+\frac{m\alpha}{b^2}$, cum ſit $\frac{m-1}{f}+\frac{1}{b}=\frac{m-1}{a}+\frac{m}{b}-\frac{1}{b}+\frac{1}{b}=\frac{m-1}{a}+\frac{m}{b}$:

ſi vero obverſa radiis venientibus altera ſuperficie, cujus radius b, diſtantia hujusmodi foci dicatur u'', erit pariter $\frac{1}{u''} = \frac{m-1}{b} + \frac{m}{a} + \frac{m\alpha}{a^2} = \frac{m-1}{f} + \frac{1}{a} + \frac{m\alpha}{a^2}$: tum enim manentibus cæteris mutant ſedem a, & b altero ſuccedente in locum alterius.

126. Facile eſt ex hiſce formulis definire omnes caſus, in quibus habebitur hujus generis focus realis, vel recedens in infinitum, adeoque nullus, vel abiens ad partes oppoſitas adeoque virtualis. Satis erit conſiderare illud m eſſe majus, quam 1, adeoque terminos $\frac{m-1}{a}$, $\frac{m-1}{b}$, $\frac{m}{a}$, $\frac{m}{b}$ fore poſitivos, vel negativos, prout fuerint a, & b poſitivi, vel negativi. In lente utrinque convexa erit uterque valor poſitivus, in utrinque concava uterque negativus, in plano convexa, & plano concava alter infinitus evaneſcente termino per ipſum diviſo, alter vero ibi poſitivus, hic negativus.

127. Pro concavo-convexis ſunt quinque caſus: ſi ponatur radius convexitatis $= a$, & concavitatis $= b$, vel ratio a ad b eſt minor, quam $m-1$ ad m, vel æqualis, vel major, ſed adhuc minor, quam m ad $m-1$, vel æqualis huic, vel major etiam hac. In primo caſu eſt $\frac{m-1}{a}$, majus quam $\frac{m}{b}$, & $\frac{m}{a}$ majus quam $\frac{m-1}{b}$, adeoque tam u', quam u'' ſunt poſitivi. In ſecundo fit $\frac{m-1}{a} = \frac{m}{b}$, ſed $\frac{m}{a}$ adhuc remanet majus, quam $\frac{m-1}{b}$, adeoque neglecta correctiuncula, quæ continet α, fit $\frac{1}{u'} = 0$, & u' infinitum, ſed $\frac{1}{u''}$, & u'' adhuc remanet poſitivum. In tertio fit $\frac{m-1}{a}$ majus, quam $\frac{m}{b}$, ſed $\frac{m}{a}$ minus, quam $\frac{m-1}{b}$: hinc u' negativum,

vum, & u'' adhuc positivum. In quarto remanente $\frac{m-1}{a}$ minore, quam $\frac{m}{b}$, evadit $\frac{m}{a}$ æquale $\frac{m-1}{b}$, adeoque $\frac{1}{u'}$ manente negativo, fit $\frac{1}{u''}=0$, & u'' infinitum. Demum in quinto est & $\frac{m-1}{a}$ minus, quam $\frac{m}{b}$, & $\frac{m}{a}$ minus, quam $\frac{m-1}{b}$, adeoque tam u', quam u'' negativum.

128. Hinc habetur sequens theorema. Uterque focus est realis in lentibus utrinque convexis, plano-convexis, concavo-convexis ita, ut radius convexitatis habeat ad radium concavitatis rationem minorem ratione $m-1$ ad m. Uterque est virtualis in lentibus utrinque concavis, plano-concavis, concavo-convexis ita, ut radius convexitatis ad radium concavitatis habeat rationem majorem ratione m ad $m-1$. Si radius convexitatis ad radium concavitatis sit, ut $m-1$ ad m; abit in infinitum is, qui habetur obversa radiis venientibus convexitate, altero remanente reali, & si sit, ut m ad $m-1$, abit in infinitum hic secundus, illo priore facto virtuali. Si ratio a ad b fuerit major ratione $m-1$ ad m, sed minor ratione m ad $m-1$; erit realis is, qui habetur obversa radiis venientibus concavitate, virtualis, qui habetur obversa convexitate.

129. Si lens sit isoscelia, facto $a=b$, erit $\frac{1}{u'}=\frac{1}{u''}=\frac{2m-1}{a}+\frac{m\alpha}{a^2}$, adeoque neglecta correctiuncula $u' . a :: 1. 2m-1$. Est autem ex num. 55, & 56 pro radiis parallelis $\frac{1}{r}=\frac{m-1}{f}$, nimirum in casu isoscelismi $=\frac{2m-2}{a}$, existente r distantia foci directi pro radiis parallelis, adeoque $\frac{1}{u'} . \frac{1}{r} :: 2m-1. 2m-2$, & u'.

$u' . r :: 2m - 2 . 2m - 1$, ubi ſi ſit $m = \frac{3}{2}$, ut eſt in communibus vitris ſaltem proxime, & ut aſſumitur a communibus Opticis, evadit $2m - 2 = 1$, $2m - 1 = 2$. Hinc illud. In lentibus vitreis iſoſceliis eſt vel accurate, vel proxime diſtantia foci reflexi ad locum puncti radiantis dimidia diſtantiæ foci directi radiorum parallelorum, ſive dimidia radii ſphæricitatis.

130. Si focus reflexus non debeat excipi in eadem diſtantia puncti radiantis; invenitur methodo indicata num. 123 ſequens expreſſio generalis ejus diſtantiæ. Poſita diſtantia puncti radiantis $= p$, diſtantia foci $= z$, $\frac{1}{n} = \frac{m-1}{ma} - \frac{1}{mp}$, $\frac{1}{r} = -\frac{2}{b} - \frac{m-1}{ma} + \frac{1}{mp} - \frac{\alpha}{n^2}$, fit $\frac{1}{z} = \frac{2m}{f} - \frac{2}{a} - \frac{1}{p} + m\alpha\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{r^2}\right)$, * ubi ſi ra-

(*) Is valor eruitur ope formulæ inventæ num. 23, in qua exiſtente a radio ſphæricitatis, p diſtantia puncti, ad quod radii convergunt, q diſtantia foci radiorum axi proximorum, eſt $\frac{1}{q} = \frac{m-1}{ma} + \frac{1}{mp}$.

Ea generalis expreſſio applicanda eſt primo quidem refractioni factæ in prima ſuperficie, tum reflexioni in ſecunda, ac demum iterum refractioni in prima.

Radii binarum ſphæricitatum ſunt a, & $-b$, diſtantia puncti radiantis a prima ſuperficie p, diſtantia ſuperficierum, ſive craſſitudo vitri, α: dicatur autem n diſtantia foci a prima ſuperficie e ſua refractione, r diſtantia a ſecunda foci e ſua reflexione, z diſtantia a tertia foci e ſua refractione.

In applicatione ad primam ſuperficiem erit in formula generali ponendum n pro q, retinendum m, retinendum a, & ponendum $-p$ pro p ob divergentiam a puncto radiante; hinc erit primo $\frac{1}{n} = \frac{m-1}{ma} - \frac{1}{mp}$.

In applicatione ad ſecundam ponendum erit r pro q, $-b$ pro a, -1 pro m, adeoque 2 pro $\frac{m-1}{m} = \frac{-2}{-1} = 2$, $n - \alpha$ pro p; cum enim diſtantia primi foci a prima ſuperficie ſit n, qui focus pro ſecunda evadit punctum convergentiæ, & ſuperficies ſecunda ſit promota ſecundum directionem poſi-

radii veniant paralleli, & omittatur correctiuncula; fit $\frac{1}{z} = \frac{2m}{f} - \frac{2}{a} = \frac{2m-2}{f} + \frac{2}{b}$, valor duplus valoris $\frac{1}{u'} = \frac{m-1}{f} + \frac{1}{b}$; unde fit $u' = 2z$. Nimirum hic etiam habebit locum illud, quod in foco directo: distantia foci, quæ sit æqualis distantiæ puncti radiantis, est dupla distantiæ foci radiorum parallelorum. Inde autem pro casu rationis sinuum 3 : 2 pro lente isoscelia focus directus

---

positivorum (quæ est directio viæ radiorum advenientium ad lentem) per α, distantia puncti convergentiæ substituenda pro p jam erit $n - \alpha$, adeoque pro $\frac{1}{p}$ ponendum erit $\frac{1}{n} + \frac{\alpha}{n^2}$, omissis nimirum in divisione terminis, qui continent potestates superiores ipsius α, & $\frac{1}{mp}$ fiet $\frac{1}{mn} + \frac{\alpha}{n^2}$. His ita substitutis in formula generali, erit $\frac{1}{v} = -\frac{2}{b} - \frac{1}{n} - \frac{\alpha}{n^2} = -\frac{2}{b} - \frac{m-1}{ma} + \frac{1}{mp} - \frac{\alpha}{n^2}$.

In applicatione ad tertiam ponendum erit z pro q, retinendum a, ponendum $\frac{1}{m}$ pro m, & vice versa, unde $\frac{m-1}{m}$, sive $1 - \frac{1}{m}$, fit $1 - m$, sive $-(m-1)$: ponendum demum $r + \alpha$ pro p, ob superficiem tertiam retractam respectu secundæ, adeoque $\frac{1}{r} - \frac{\alpha}{r^2}$ pro $\frac{1}{p}$. His valoribus substitutis fiet $\frac{1}{z} = -\frac{m-1}{a} + \frac{m}{r} - \frac{m\alpha}{r^2} = -\frac{m-1}{a} - \frac{2m}{b} - \frac{m-1}{\alpha} + \frac{1}{p} - \frac{m\alpha}{n^2} - \frac{m\alpha}{r^2}$, qui valor ob $-\frac{2m-1}{a} - \frac{2m}{b} = -\frac{2m}{a} + \frac{2}{a} - \frac{2m}{b}$, & $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ evadit $-\frac{2m}{f} + \frac{2}{a} + \frac{1}{p} - m\alpha\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{r^2}\right)$.

Porro hic postremus valor sit idem, ac is, qui habetur hic in dissertatione, si consideretur cum directione opposita, nimirum, ut ibi, cum ea quæ respi-

ctus erit quadruplus foci reflexi eorundem: nam ille per num. 129 eſt duplus foci reflexi ad locum divergentiæ, & hic ejuſdem dimidius.

131. Sed ut hiſce omiſſis perſequamur id, quod num. 123 propoſuimus, pro ejuſmodi inveſtigatione occurrunt tres formulæ exhibentes eas diſtantias focorum per valores quæſitos: binæ hic inventæ pertinent ad focos reflexos, quibus addenda eſt formula foci

---

reſpicit punctum radians: mutatis enim omnibus ſignis evadit $\frac{2m}{f} - \frac{2}{a} - \frac{1}{p} + m\alpha\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right)$, ut habetur ibidem; valores itidem $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{\gamma}$ inventi hic, ſunt illi ipſi, qui ibi proferuntur tanquam aſſumpti ex arbitraria denominatione.

Ex hoc ipſo valore $\frac{1}{z}$ facile deducitur is, qui methodo usque adeo breviore inventus eſt num. 124 pro caſu, in quo focus congruat cum puncto divergentiæ: nam in eo caſu fit $p = z$, adeoque æquatio $\frac{1}{z} = \frac{2m}{f} - \frac{2}{a} - \frac{1}{p} + m\alpha\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right)$ evadit $\frac{2}{z} = \frac{2m}{f} - \frac{2}{a} + m\alpha\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right)$: hinc $\frac{1}{z} = \frac{m}{f} - \frac{1}{a} + \frac{1}{2} m\alpha\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right)$, qui eſt itidem valor $\frac{1}{p}$.

Quod ſi omiſſo ultimo termino tam exiguo, hic valor ſubſtituatur pro $\frac{1}{p}$ in valore $\frac{1}{n}$, & $\frac{1}{\gamma}$, invenietur uterque $= -\frac{1}{b}$. Nam pro primo fiet $\frac{m-1}{ma} - \frac{1}{mp} = \frac{m-1}{ma} - \frac{1}{f} + \frac{1}{ma} = \frac{1}{a} - \frac{1}{ma} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{ma} = -\frac{1}{b}$: pro ſecundo autem erit $-\frac{2}{b} - \frac{m-1}{ma} + \frac{1}{mp} = -\frac{2}{b} - \frac{m-1}{ma} + \frac{1}{f} - \frac{1}{ma} = -\frac{2}{b} - \frac{1}{a} + \frac{1}{ma} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{ma} = -\frac{1}{b}$.

Quare $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{2}{b^2}$, & proinde valor integer $\frac{1}{z} = \frac{m}{f} - \frac{1}{a} + \frac{m\alpha}{b^2}$ ni-

mirum

foci directi assumpta ex num. 55, & 56. Si in ea dicatur u distantia foci radiorum parallelorum infinite proximorum axi habebitur $u = r - \frac{r^2 m\alpha}{q^2}$, adeoque $\frac{1}{u} = \frac{1}{r} + \frac{m\alpha}{q^2} = \frac{m-1}{f} + \frac{m\alpha}{q^2}$, & $\frac{1}{q} = \frac{m-1}{ma} = \frac{1}{a} - \frac{1}{ma}$.

---

mirum $\frac{m}{a} + \frac{m}{b} - \frac{1}{a} + \frac{m\alpha}{b^2} = \frac{m-1}{a} + \frac{m}{b} + \frac{m\alpha}{b^2}$: is valor eo numero 124 inventus est pro $\frac{1}{u'}$, quod est idem ac hic $\frac{1}{z}$.

Hac longiore via ego quidem deveneram ad eum valorem simplicem $\frac{1}{u'}$; quæsita nimirum prius, ut rei ordo videbatur requirere, expressione generali foci lentis pro radiis a puncto radiante egressis, & passis unam reflexionem a secunda superficie inter duas refractiones in prima : tum facta ejus distantia a lente æquali distantiæ puncti radiantis ab eadem, quam cum post varias substitutiones inveniissem usque adeo simplicem, & reliquæ perquisitioni, ad quam in ea dissertatione sum usus, aptissimam, viderem autem distantiam primi, & secundi foci, nimirum tam n, quam r, æquari radio b secundæ superficiei; in ejus rei causam inquirens vidi illud, quod ipso num. 24 expressi, *radium rediturum ad idem punctum* (quod nimirum ferebat hypothesis foci congruentis cum puncto radiante), *si intra lentem percurrat viam perpendicularem superficiei reflectenti:* id autem requirit, ut illi radii in eam incidant post primam refractionem, tanquam si ex ejus centro exeuntes advenissent irrefracti, & regrediantur post reflexionem cum convergentia ad idem centrum. Inde vero statim patuit, satis esse considerare radios, qui adveniant ad primam superficiem per vitrum cum directione respiciente centrum superficiei secundæ, quod cum requireret considerationem unius tantummodo refractionis, determinationem admisit usque adeo breviorem, & elegantiorem.

Adhuc tamen hic longiorem hunc ambitum proponendum censui, tum ut haberetur rite demonstrata generalis determinatio foci ex reflexione intermedia inter duas refractiones, cujus formulam sine demonstratione proposueram, tum ut pateret quam longo itinere devenerim eo, quod ibidem adeo breviore via demonstro: quod quidem sæpe accidit, & plerumque simplicitas, & brevitas, ac nitor quidam in Geometria non acquiritur, nisi per longum la-

bo-

132. Habentur igitur ſequentes tres formulæ, prima pro foco directo, & reliquæ pro reflexis.

$$\frac{1}{u} = \frac{m-1}{f} + \frac{m\alpha}{q^2} : \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{a} - \frac{1}{m\,a}$$

$$\frac{1}{u'} = \frac{m-1}{f} + \frac{1}{b} + \frac{m\alpha}{b^2}$$

$$\frac{1}{u''} = \frac{m-1}{f} + \frac{1}{a} + \frac{m\alpha}{a^2}$$

Pertinet autem in prima a ad ſuperficiem obverſam radiis venientibus, in reliquis a ad ſuperficiem reflectentem, ubi habetur u'', b ad reflectentem, ubi habetur u'.

133. Demendo primam a ſecunda, & deinde a tertia, & tranſponendo obtinetur $\frac{1}{b} = \frac{1}{u'} - \frac{1}{u} - m\alpha\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{q^2}\right)$, $\frac{1}{a} = \frac{1}{u''} - \frac{1}{u} - m\alpha\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{q^2}.\right)$ Ope harum, & præcedentium prima ſic res facile abſolvitur.

134. Dicantur a', b', f', m', q' eædem quantitates nondum correctæ, & habebuntur ſequentes æquationes.

$\frac{1}{a'}$

---

borem, quem qui legit prorſus ignorat. Patebit id multo luculentius in tertia diſſertatione de diſtributione luminis per circellum erroris figuræ ſphæricæ, cujus mentionem feci in adnotatione ad num. 70, & ad num. 79

Et hic quidem hunc focum determinavi pro radiis infinite proximis axi, nulla habita ratione radiorum ab eo remotiorum, habita ſola ratione erroris inducti a craſſitudine lentis, & neglecto errore figuræ ſphæricæ. Qualem determinabo in alia diſſertatione, quæ in hoc volumine erit ordine quarta, in qua in ejusmodi foco ex reflexione unica inter duas refractiones conſiderabo etiam errorem figuræ ſphæricæ, & errorem diverſæ refrangibilitatis, quæ perquiſitio pertinet ad theoriam ſpeculi vitrei pro teleſcopiis catadioptricis adhibendi, quam ibidem ad trutinam revocabo.

$\frac{1}{a'} = \frac{1}{u''} - \frac{1}{u}$
$\frac{1}{b'} = \frac{1}{u'} - \frac{1}{u}$
} Ex numero præcedente omiſſa correctiuncula.

$\frac{1}{f'} = \frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} = \frac{1}{u'} + \frac{1}{u''} - \frac{2}{u}$. Ex præcedentium ſumma.

$\frac{1}{m'-1} = \frac{u}{f'} = \frac{u}{u'} + \frac{u}{u''} - 2$. Ex prima numeri 132 omiſſa correctiuncula.

135. Inventis per haſce formulas valoribus $\frac{1}{a'}, \frac{1}{b'}, \frac{1}{f'}, \frac{1}{m'-1}$, adeoque & m', ac $\frac{1}{q'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{m'a'}$ invenientur valores correcti per formulas ſequentes.

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a'} - m'\alpha\left(\frac{1}{a'^2} - \frac{1}{q'^2}\right)$$
$$\frac{1}{b} = \frac{1}{b'} - m'\alpha\left(\frac{1}{b'^2} - \frac{1}{q'^2}\right)$$
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$
$$m-1 = \frac{f}{u} - \frac{m'\alpha f}{q'^2} = \left(\frac{1}{u} - \frac{m'\alpha}{q'^2}\right) : \frac{1}{f}.$$

136. Valores u', & u'' admodum facile, & accurate obtineri poſſunt per obſervationem methodo numeri 114, quæ nihil aliud requirit niſi foramen exiguum cum charta alba, & capillo tranſverſo. Ope ejuſdem obtineri poteſt itidem facile, & accurate valor u foci directi. Notandæ ſunt binæ diſtantiæ lentis altera a foramine, altera ab ejus imagine exhibente capillum diſtinctum, & earum productum dividendo per earumdem ſummam, obtinetur diſtantia u debita foco radiorum parallelorum.

137. Id patet ex formula numeri 55, in qua ſi ſit z diſtantia foci radiorum infinite proximorum axi utcumque divergentium, erit $z = r - \frac{r^2 m\alpha}{q^2}$, adeoque $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} + \frac{m\alpha}{q^2}$, ubi $\frac{1}{r} = \frac{m-1}{f} - \frac{1}{p}$

$\frac{1}{p}$ mutato ſigno p ob divergentiam, adeoque $\frac{1}{z} = \frac{m-1}{f} - \frac{1}{p} + \frac{m\alpha}{q}$. Eſt autem ex num. 132. $\frac{1}{u} = \frac{n-1}{f} + \frac{m\alpha}{q}$. Quare ſi in exiguis poſtremis terminis bini valores q habeantur pro æqualibus, cum ipſæ illæ exiguæ quantitates negligi etiam poſſint, erit $\frac{1}{z} = \frac{1}{u} - \frac{1}{p}$, & $\frac{1}{u} = \frac{1}{z} + \frac{1}{p} = \frac{p+z}{pz}$, adeoque $u = \frac{pz}{p+z}$.

138. Hoc pacto ex diſtantiis u, u', u'' rite obſervatis invenientur valores a, b, m, quod num. 123 propoſueramus, facili ſane & obſervatione, & calculo. Verum hæc methodus locum habere non poteſt, niſi in lentibus utrinque convexis, in plano - convexis, & concavo - convexis, quæ habeant convexitatem ita majorem concavitate, ut radius illius ad radium hujus ſit in ratione minore, quam $m-1$ ad m; nam reliquæ per num. 128 carent ſaltem uno ex iis tribus focis realibus. Adhuc tamen inde uſque ad æqualitatem radiorum convexitatis, & concavitatis res perfici poteſt methodo haud multum abſimili. Remanet enim focus directus realis, & realis focus reflexus, qui habetur obverſa radiis venientibus cavitate, & exhibet u''. Quare ſi methodo numeri 114 inveniatur radius concavitatis b, qui habendus erit pro negativo, & determinentur valores u, ac u'', ut prius, habebitur itidem ut prius a, ac $\frac{1}{f}$, & $m-1$. In reliquis poſſet res perfici per focos eoſdem virtuales; ſed ſatius eſt, radios concavitatis quærere methodo numeri 114, radium convexitatis methodo numeri 120, & 121, tum per ipſos invenietur valor m methodo numeri 107.

139. Pro inveniendo valore dm, uſui eſſe poteſt formula inventa numero 65, ubi habetur $-\frac{dr}{r} = \frac{dm}{m-1}$, ubi eſt r diſtan-

ſtantia foci radiorum unius coloris ut rubei, dr differentia ejus diſtantiæ a diſtantia foci coloris alterius, ut violacei, quibus obſervatis, & invento m methodo præcedente, obtinetur dm. Quod ſi ſupponantur inventi ſoli radii ſphæricitatum, obtinebitur dm etiam ignorato m per formulam $-\frac{dr}{rr} = \frac{dm}{f}$, ex qua habetur $dm = -\frac{fdr}{rr}$, ubi $f = -\frac{ab}{a-b}$, ob $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$.

140. Tota difficultas reducitur ad inventionem accuratæ foci diſtantiæ pro binis coloribus. Plures methodos ad eam rem Newtonus adhibuit, quas perſequitur in Optica *lib.* 1. *par.* 2. *prop.* 7. *experim.* 16. Chartam tinxit dimidiam colore rubeo, & dimidiam violaceo, quibus ſuperinduxit tenue filum nigrum circumvolvendo, & flamma vividiore prope ipſam collocata, ut bene illuminaretur in tenebricoſo cubiculo, radios ab ea reflexos tranſmiſit per lentem collocatam e regione, & excepit imaginem in foco ibi, ubi fila diſtinctiſſima apparerent. Invenit illud, imaginem partis rubeæ evadere diſtinctam in diſtantia majore, & partis violaceæ in minore. Prima diſtantia eſt r, differentia binarum diſtantiarum dr.

141. Hæc methodus dabat exiguum diſcrimen dr, quia corporum naturalium colores non ſunt puri, ſed mixti. Hinc potius adhibuit colores primigenios natos ex ſeparatione facta per priſma. Effecit illud, ut Solis ſpectrum coloratum, quod fit a priſmate, caderet ſupra libri aperti paginam, & notabat diſtantias, in quibus ita pingeretur imago partis illuminatæ primum ab altero colore, tum ab altero, ut commode legi poſſet, ac obtinebat majus diſcrimen diſtantiarum, quam ubi adhibuerat colores naturales. Sed quoniam in ipſo ſpectro colorato exhibito a priſmate colores permixti ſunt ob diametrum apparentem Solis,

qua

qua fit ut ſinguli colores non coeant in puncta, ſed diſpergantur per circulos ſatis amplos, qui ſibi invicem ſuperponuntur; adhibuit lentem etiam ad coarctandos eos circulos, quo artificio multo puriores colores habuit, & diſtantiarum differentiam majorem pro imaginibus diſtinctis. Adhuc tamen diſcrimina inter diverſas obſervationes ipſi obvenerunt nimis magna; licet curam adhibuerit ſummam in præſtanda maxima conclavis obſcuratione, ſecluſo omni alio lumine: ut ipſis ejus obſervationibus perpenſis ſatis pateat, eam methodum nulli uſui eſſe poſſe ad habendum valorem *dm*, ſi quid ſatis accuratum requiratur. Quamobrem ad eam rem adhibenda potius ſunt priſmata, de quibus jam agemus.

§. VI.

De iisdem inveniendis ope priſmatum.

142. Ad eruendos eoſdem valores ope priſmatum, oportet primo invenire relationes, quas habent inter ſe, & cum lateribus priſmatis rectæ, per quas radius luminis per ipſum traducitur.

143. Sit (*Fig.* 13.) ACB ſectio priſmatis perpendicularis ejus axi, adeoque & faciebus ipſius. Si radius luminis deveniat per rectam EF jacentem in ipſa; ſatis patet viam ipſius FH intra priſma, & HL poſt egreſſum debere jacere in eodem plano.

144. Angulus C, quem continent latera priſmatis, ad quæ radius appellit in ingreſſu, & egreſſu, dicitur angulus refringens. Ductis autem OFM, QHM perpendicularibus ipſis lateribus, & producta EF indefinite in G, atque LH uſque ad ipſam in N; angulus MFN erit æqualis angulo incidentiæ EFO, angulus MFH erit angulus refractus in ingreſſu, MHF incidentiæ in egreſſu,

egreſſu, MHN æqualis QHL angulo refracto in egreſſu, GNL totalis refractio, nimirum deviatio a priori itinere.

145. Ponantur anguli $MFN = u$, $MFH = x$, $MHF = y$, $MHN = z$, $GNL = r$, $ACB = c$: habebuntur ſequentia lemmata, quorum formulas proponemus primo, tum demonſtrabimus.

$x + y = c$
$u + z = c + r$
m ſin. $x =$ ſin. u
m ſin. $y =$ ſin. z
$AFE + BHL = 180° - c - r$

146. Patet primum; quia in quadrilineo MFCH ob angulos ad H, F rectos angulus C erit complementum ad duos rectos anguli M, cujus itidem erunt ejuſmodi complementum bini anguli MFH, MHF trianguli MFH; adeoque hi duo ſimul debent æquari illi uni.

147. Patet ſecundum; quia bini anguli MFH, MHF ſimul, ſive $x + y$ per formulam 1 ſunt $= c$, & alii bini NFH, NHF ſimul æquantur externo $GNL = r$; adeoque toti MFN, MHN, ſive $u + z = c + r$.

148. Patet tertium, & quartum, quia eſt ſin. MFN = ſin. u ad ſin. $MFH =$ ſin x, & ſin. $MHN =$ ſin. z ad ſin. $MHF =$ ſin. y, ut m ad 1; cum priores duo ſint angulus incidentiæ, & refractus in ingreſſu, poſteriores refractus, & incidentiæ in egreſſu. Quare debet eſſe m ſin. $x =$ ſin. u, & m ſin. $y =$ ſin. z.

149. Patet quintum; quia anguli AFE, BHL ſunt complementa angulorum EFO, LHQ, ſive MFN, MHN, nimirum u, z, quorum ſumma per formulam 2 eſt $= c + r$, adeoque ipſi ſunt $= 180° - c - r$.

150. E ſuperioribus formulis facile deducuntur plura corollaria, & plura problemata ſolvi poſſunt eorum ope; ſed hic perſequemur alia nonnulla uſui futura, quæ pertinent ad eaſdem relationes viæ radii, quæ hic ſubjiciam.

151. Si (*Fig.* 14.) alter radius *e*F ingrediatur in angulo A F *e* æquali angulo B H L, in quo alter E F egreditur; egredietur ille in angulo B *h l* æquali angulo A F E, in quo hic ingreditur.

152. Nam radius regreſſus per L H deberet abire eadem via H F E, & omnes radii paralleli ipſi L H habere debent vias intra, & extra priſma parallelas viæ H F E, & proinde egredi in angulo æquali A F E: perinde autem eſt in utrumvis latus in eodem incidant angulo; adeoque angulo A F *e* primæ incidentiæ, qui æquetur ipſi B H L, debet reſpondere angulus egreſſus B *h l* æqualis angulo A F E.

153. Si mutata inclinatione radii incidentis in idem punctum F ad latus A C refractio totalis decreſcat primo, tum creſcat; fiet minima ibi, ubi triangulum F C H fiet iſoſceles.

154. Fit enim minima, ubi incipit redire ad magnitudinem priorem; adeoque inter binas quaſvis e poſitionibus, quæ refractiones totales exhibent æquales. Porro eæ æquales ſunt in caſu corollarii primi: nam, per formulam 5 numeri 145, ſupplementum $r = AFE + BHL + c$, qui valor manet, ſi ſit $AFe = BHL$, & $Bhl = AFe$, manente eorum ſumma cum ipſo *c*.

155. Habebitur igitur illud minimum in eo caſu, in quo manente eadem conditione coaleſcant viæ E F H L, *e* F *h l* in unicam quo caſu evadet A F E = B H L. Erunt igitur in eo caſu æquales etiam in fig. 13. C H N, C F N ipſis oppoſiti ad verticem, & anguli M F N, M H N ipſorum complementa, & anguli M F H, M H F, quorum ſinus habent ad eorum ſinus ratio-

nem

nem eandem, & demum etiam CFH, CHF horum complementa; adeoque etiam CH, CF ipſis oppoſita.

156. Igitur in caſu minimi erunt æquales ibidem & anguli MFH, MHF, & MFN, MHN, & NFH, NHF, eruntque ſinguli e primis duobus $= \frac{1}{2} c$, e ſecundis $= \frac{c+r}{2}$, e poſtremis $= \frac{1}{2} r$.

157. Aequalitas primi, & ſecundi binarii demonſtrata eſt numero 155; poſtremi autem ſunt differentiæ angulorum primi, & ſecundi. Porro eſt ſumma primi binarii $= c$ per formulam 1 numeri 145, ſecundi $= c + r$ per formulam 2; adeoque ſumma poſtremi remanet $= r$.

158. Hinc in eo caſu $x = y = \frac{1}{2} c$, $u = z = \frac{c+r}{2}$, & inde in eodem $m = \frac{\text{ſin.} \frac{c+r}{2}}{\text{ſin.} \frac{1}{2} c}$; cum nimirum ex formula tertia numeri 145 habeatur $m = \frac{\text{ſin.} u}{\text{ſin.} x}$.

159. Si valores m, m', & r, r' pertineant ad duo genera radiorum; erit $m : m' ::$ ſin. $\frac{c+r}{2}$: $\frac{c+r'}{2}$. Nam ſin. $\frac{1}{2} c$ eſt communis, & ablatus rationem non turbat.

160. Ex formula $m = \frac{\text{ſin.} \frac{c+r}{2}}{\text{ſin.} \frac{1}{2} c}$ eruitur facile $d m = \frac{\text{coſ.} \frac{c+r}{2}}{2 \text{ſin.} \frac{1}{2} c} \times dr$. Si enim (*Fig.* 15.) ſit E*e* differentia exigua arcuum B*e*, BE, quorum ſinus *ef*, EF, & eorum differentia EH; facile perſpicitur fore CE : CF :: E*e* : EH: eſt autem radius CE $= 1$, CF coſinus BE, E*e* differentia arcus BE, qui ſi ſit $\frac{c+r}{2}$, manente c, erit E*e* $= \frac{1}{2} dr$, adeoque differentia ſinus $\frac{c+r}{2}$ erit

$\frac{1}{2}$ cof. $\frac{i+r}{2} \times dr$. Poteſt autem pro arcu dr aſſumi etiam ejus ſinus ad radium $= 1$, ut omnes termini eruantur e tabulis ſinuum.

161. Hinc ſi accipiantur refractiones, & refractionum differentiæ binis priſmatis ad diverſas maſſas pertinentibus, & reſpondeant alteri i, r, m, alteri C, R, M: erit $\frac{dM}{dm} = \frac{\text{cof. } \frac{C+R}{2}}{\text{cof. } \frac{i+r}{2}} \times \frac{\text{ſin. } \frac{1}{2} i}{\text{ſin. } \frac{1}{2} C} \times \frac{dR}{dr}$. Nam in diviſoribus eliditur illud 2 commune.

162. Hæc quidem pertinent generaliter ad priſmata angulorum quorumcumque. At ſi anguli ſint exigui ita, ut poſſint aſſumi pro iis ſui ſinus, formulæ evadunt ſimpliciores.

163. Ex formula numeri 160 habebitur $m = \frac{i+r}{i}$, ſive $m - 1 = \frac{r}{i}$ vel $(m - 1)\, i = r$, ubi ſi ſit $m = 1.\frac{1}{2}$, quod accidit proxime in vitro communi, erit $r = \frac{1}{2} i$, ſive refractio proxime æqualis dimidio angulo refringenti.

164. E ſuperioribus formulis eruitur $dm = \frac{dr}{i}$; & $dr = i\,dm$.

165. Conſequentur ex hiſce omnibus plura theoremata pertinentia ad angulos exiguos: præcipua futura uſui hic proponemus.

166. Si per plura priſmata ex eadem maſſa habentia angulos refringentes exiguos tranſeat radius; refractio erit eadem, quæ eſſet, in priſmate habente angulum æqualem ſummæ eorum omnium angulorum computatis negativo modo in ſummam iis, quæ forte habeant angulos contrario ſitu poſitos.

167. Sint enim ii anguli i, i', i'' &c., & eorum ſumma C, ac ſingulorum refractiones r, r', r'', &c., R: erit $r + r'$

+

$+ r''$ &c. $= (m-1)\,c + (m-1)\,c' + (m-1)\,c''$ &c. $= (m-1)\,(c + c' + c''$ &c.$) = (m-1)\,C = R$. Quoniam autem positio anguli contraria inducit directionem contrariam; patet, eas refractiones demendas esse, ubi summa quæritur, sive computandas negativo modo & ipsas, & angulos, quibus exprimuntur.

168. Si per bina prismata habentia angulos exiguos positos ordine contrario ita transeat radius, ut correcta refractione prodeat cum eadem directione, cum qua advenit; erunt qualitates refractivæ expressæ per valores $m-1$, $M-1$ in ratione reciproca angulorum refringentium, & viceversa.

169. Nam ex num. 163 est $r = (m-1)\,c$, & $R = (M-1)\,C$, qui valores debent esse æquales; si secundi prismatis refractio R corrigit refractionem r primi prismatis. Quare erit $c.\ C :: M-1.\ m-1$, & si ita fuerit, erit $(m-1)\,c = (M-1)\,C$.

170. Si per bina ejusmodi prismata ita transeant bini radii heterogenei delati simul directione eadem communi, ut exeant itidem directione communi, correcta refractionum differentia; erunt qualitates distractivæ expressæ per dm, $d\,M$ in ratione reciproca angulorum, & viceversa.

171. Nam ex num. 164 erit $d\,r = c\,d\,m$, $d\,R = C\,d\,M$, qui valores debent esse æquales; si differentia refractionis $d\,R$ corrigit differentiam $d\,r$. Quare erit $c.\ C :: d\,M.\ d\,m$; & si ita fuerit; erit $c\,d\,m = C\,d\,M$.

172. Videndum jam, quomodo hæ formulæ adhibendæ sint ad determinandos valores m, dm, $\frac{d\,M}{d\,m}$.

173. Prima methodus pro habendo m esse potest transpiciendo per prisma objectum situm ad sensibilem distantiam, & defi-

niendo elevationem. Sit (*Fig.* 16.) in pariete objectum A, quod oculo O trans prisma M P N conversum circa proprium axem appareat in E ita, ut is locus visus sit omnium proximus vero loco A. Concipiatur autem punctum D in medio prismate, in quo sibi invicem occurrant viæ radii A B, O C, & si prima fuerit in eadem altitudine a pavimento, in qua est punctum A, fiat autem, ut D A ad A E, ita radius ad tangentem anguli A D E; is erit $= r$. Quare si præterea habeatur angulus prismatis $P = c$; habebitur $m = \frac{\text{sin.}\frac{c+r}{2}}{\text{sin.}\frac{1}{2}c}$ per num. 158, vel si angulus prismatis sit exiguus, $m = \frac{c+r}{c}$, & $m - 1 = \frac{r}{c}$, per num. 163.

174. Duplex ibi occurrit difficultas altera communis omnibus methodis adhibendi prismata, altera particularis ei methodo. Prima consistit in determinatione anguli prismatis, secunda in determinatione loci visi E, quem locum oculo constituto in O tegit ipsum prisma, quod non sinit videre ullum aliud objectum ibi existens per radium directum, cujus ope definiri possit recta A E.

175. Quod ad primam pertinet, angulus prismatis facile definitur ope instrumenti, quod exhibet fig. 17., in quo regula D E mobilis circa centrum I semicirculi A B C rem perficit, collocato prismate in F G H ita, ut bina latera congruant cum regula A C, & cum parte posteriore regulæ D E; nam arcus L C interceptus inter latus regulæ D E; anterius, & diametrum A C semicirculi, exhibebit quæsitum angulum.

176. Multo sane accuratius determinari potest, ut ego quidem expertus sum, angulus in iis prismatis, in quibus basis triangularis est perpendicularis lateribus, & bene complanata. Ducta in plano recta longiore A B (*Fig.* 18.), applicetur ad illam regula

gula CD, cui verſus extremum D applicetur latus FE priſmatis ita, ut angulus E procurrat nonnihil, tum alteri ejus lateri GE applicetur altera regula HI, qua appreſſa priſmati ſimul, ac plano inferiori, auferatur tam priſma ipſum, quam prior illa regula CD, & ope poſterioris HI immotæ ducatur recta linea HI rectam AB ſecans in E, ubi erat vertex anguli refringentis. Habebitur angulus AEH cum longis cruribus, qui ducto arcu LK habente centrum in E facile definiri poterit ope circini proportionis, in quo ſi aſſumantur in partibus minutis tam radius EG, quam chorda LK; poterit angulus ope tabulæ ſinuum haberi intra pauca minuta, & cum liceat quantumlibet repetere obſervationem, poterit aſſumpto medio in ingenti determinationum numero haberi angulus etiam intra unum minutum. Et quidem ea methodus applicari utcumque poteſt etiam priſmati habenti baſim triangularem impeditam applicando in fine menſulæ ipſum dimidia ſui parte depreſſum regulis procurrentibus ultra ipſum finem.

177. Pro determinatione loci viſi trans priſma adhibui cum ſucceſſu hoc artificium. Sint (*Fig.* 19.) puncta OCE eadem, quæ in fig. 16, PN*np* ſit facies priſmatis obverſa oculo, QR*rq* locus viſus objecti illius, cujus craſſitudo E*e*. Faciei P*n* applicui tenuem regulam e charta craſſiore parallelam lateri P*p*, & excurrentem utrimque in T*t*. Regula longior, & craſſa F*f* ita erat applicata ad perpendiculum ſupra objectum A*a* figuræ 16, ut elevari poſſet, ac deprimi manente paralleliſmo cum latere P*p*, & longitudine objecti, qui motus etiam obtineri poteſt per ſuſpenſionem LKI*i*. Ea regula deprimebatur, donec oculus ad aliquam a priſmate diſtantiam collocatus in O, & videns latus TC*t* reſpondens imæ parti RE*r* objecti viſi, videret per radios viſuales OTH, O*t h* imam regulæ partem F*f* demiſſam ad GE*g* congruere cum ipſa recta T*t*. Eo pacto ope partis HG,

g h extantis ipſius regulæ demiſſæ obtinebatur punctum E latens poſt priſma.

178. Habito hac ratione puncto E figuræ 16, in quo apparebat pars loci viſi omnium proxima loco vero, ac proinde ejus diſtantia a loco A objecti extremo poſito verſus eandem partem, obtinebatur refractio radii rubei, extremi, & valor *m* pro ipſo. Eodem autem pacto obtinebatur & diſtantia *a e* pro extremo violaceo, & proinde pro ſuo *m*, adeoque habebatur etiam *d m*.

179. Si recta D A (*Fig.* 20.) non ſit ſatis accurate perpendicularis rectæ A E, nimirum horizontalis, illa exiſtente verticali; ſatis eſt notare punctum V, ad quod tendit recta D V horizontalis, & V A, V E erunt binæ tangentes ad radium D V pro angulis V D A, V D E, quorum ſumma vel differentia exhibet refractionem A D E. Quod ſi ipſa D V ſit ſatis magna, & punctum C aſſumatur proximum vertici P; poterit aſſumi ipſum P pro puncto D. Adhibito priſmate alterius naturæ habebitur M, & *d* M, adeoque etiam $\frac{dM}{dm}$, ut oportebat.

180. Secunda methodus pro determinandis per priſmata iisdem valoribus eſſe poteſt tranſmittendo per priſma radium Solis, & eruendo inde refractionem *r*.

181. Ingrediantur (*Fig.* 21.) in tenebricoſum cubiculum per exiguum foramen F *f* feneſtræ radii Solis S F C A, *s f c a*, qui excepti priſmate M P N refracti per C B E, *c b e* abeant in parietem oppoſitum in E *e*, ubi converſo priſmate circa proprium axem acquirant poſitionem omnium proximam radio directo C A, *c a*. Si notentur in plano aliquo verticali I K altitudines a pavimento punctorum A, *a*, ac in alio remotiore L O punctorum E, *e*, notentur autem etiam altitudines a pavimento punctorum D, *d*, quæ ſi ſint proxima puncto P, facilius determinantur æſtimatione

acce-

accedente ad verum magis, quam ut error inde timeri poſſit ſenſibilis, notenturque itidem diſtantiæ punctorum D, *d* a planis IK, LO; facile omnia eruentur. Si enim ſint IK, LM æquales altitudini puncti D, erit DK ad KA, ut radius ad tangentem anguli ADK, & ut DM ad ME, ita radius ad tangentem anguli MDE. Eorum angulorum ſumma exhibet refractionem *r* pro rubeis extremis, ſi, ut figura exhibet, jaceat E ſupra M, & ſit infra *e*, quod punctum ſi jaceat infra M, exhibebitur ipſum *r* per differentiam. Ope autem ipſius *r* habebitur *m*, ut ſupra per formulam $m = \frac{\text{ſin.}\frac{e+r}{2}}{\text{ſin}\frac{1}{2}e}$; & eodem pacto ope punctorum *a*, *d*, *e* habebitur *m* pro radiis violaceis, adeoque *dm*, & mutato vitro, M, *d*M, $\frac{d\text{M}}{dm}$.

182. Si notetur dies, & hora obſervationis, poteſt facile haberi angulus ADK, ſive altitudo ſupra horizontem limbi Solis methodis notis ex elementis ſphæricis, remanente ſola determinatione anguli MDE facienda per immediatam obſervationem radii DM, & tangentis ME.

183. Si ope ſpeculi rite aptati, ut in fig. 10., detorqueatur radius directus ita, ut eat is ipſe per lineam horizontalem in M in parietem oppoſitum; res facilius perficietur per unicum triangulum. Itidem ad habendas obſervationes ſatis accuratas expertus ſum opus eſſe ſua machinula, in qua converſio priſmatis fieri poſſit lenta, & continua, quod facile præſtatur ope cochleæ; ſi enim manu fiat, admodum facile habentur ſaltus quidam imaginis, & admodum difficulter determinatur poſitio refractionis minimæ. Oportet autem, poſſit facile, & celeriter removeri priſma a loco radii, ut nimirum notari poſſint puncta A, *a* ra-

dii directi; ſi ea ex aſtronomico calculo non accipiuntur notata hora obſervationis.

184. Celeritas in removendo priſmate eſt neceſſaria ob celerem motum diurnum Solis, quo fit, ut radius directus celerrime locum mutet. Hic motus impeditur ope machinæ, quam appellant *helioſtatam*, quaſi Solem ipſum ſiſtat, ope cujus ita movetur ſpeculum, ut radius Solis ab eo reflexus ſemper retineat poſitionem eamdem. Cum id inſtrumentum & pretioſius ſit, & non ita facile applicetur, ſupplere ſoleo defectum ejus machinæ, applicato intra conclave idem ad aliquam ab eo diſtantiam plano altero, cum exiguo itidem foramine. Methodum & aliis omnino in mentem veniſſe arbitror, cum ſit admodum obvia, & commoda. Eam exprimit figura 22.

185. Sit in ea CD foramen exiguum, per quod radius a ſpeculo reflexus ingreditur conclave. Ad diſtantiam ſatis magnam reſpectu diametri ipſius foraminis colloco planum EF cum alio exiguo foramine IK, & diſtantiam eſſe ſatis magnam oſtendit ipſa imago Solis GH, quæ in ſatis magna diſtantia erit multis vicibus major, quam ſit ipſa diameter foraminis CD, & IK. Per foramen IK tranſibunt radii ad ON ita, ut extremæ directiones ſint CK, DI ita inclinatæ ad directiones extremas CG, DH, ut ex parte CD productæ in Solem incurrant. Ad motum Solis movebitur ejus imago GH, ſed manebit ſemper eodem loco circellus lucidus NO efformatus a radiis profectis jam ab alia parte diſci ſolaris, jam ab alia. Quoniam Solis imago per meridianam lineam traducitur tota tempore longiore etiam duobus minutis; ſaltem per duo minuta immoto etiam ſpeculo hærebit in NO radius fixus, quem obſervator ibi retinebit, quamdiu voluerit, ſi identidem ſpeculum moveat ope machinulæ figuræ 10 ita, ut

imago

imago GH habeat proximum foramini IK eum limbum, qui in motu diurno progreditur.

186. Nec difficile eſt etiam determinare inclinationes ipſas rectarum DI, CK, & punctum T, in quo concurrunt, ut & rectarum DH, CG cum earum concurſu P. Harum inclinatio ad ſe invicem æquatur diametro apparenti Solis; cumque ea ſit proxime minutorum 31, diſtat P a foramine CD circiter per 111 diametros foraminis ipſius: at diſtantia puncti T ab IK ad diſtantiam a CD eſt, ut ipſa IK ad CG, adeoque invenitur factis, ut eſt ſumma diametrorum binorum foraminum ad diametrum IK, ita diſtantia planorum AB, EF a ſe invicem ad diſtantiam puncti T ab IK, quod quidem erit in medio inter bina foramina, ſi eorum diametri ſint æquales. Inde autem innoteſcet facile etiam angulus NTO, nimirum quædam veluti diameter apparens imaginis NO, ſi fiat ut TI ad dimidium IK, ſive in caſu æqualium diametrorum, ut diſtantia planorum AB, EF ad diametrum IK, ita radius ad ſinum dimidii anguli quæſiti; quod ſi angulus inventus conferatur cum diametro apparente Solis; innoteſcet etiam a quota parte ſolaris diſci radios accipiat imago NO, quæ quidem pars eo erit major, quo major fuerit ratio diametri IK ad GH, ſed eo ſæpius oportebit movere ſpeculum.

187. Hæc omnia uſum habere poſſunt in experimentis, quæ inſtitui ſolent circa luminis radios; ſed hic non habent ingentem uſum, ſi exigua ſint foramina, radii incidant ad ſenſum perpendiculares priſmati medio; & notetur in pariete utrumque extrem. imaginis directæ, ubi in refractionis quantitatem inquiritur per tangentes.

188. Radio percurrente intra conclave ope ſpeculi viam horizontalem, ipſum detorſi ſæpe horizontaliter itidem in latus, quod multo commodius fit per priſma verticaliter erectum, ubi ipſa

praxis experimenta capienti multa ſuggerit idonea ad faciliores, & accuratiores determinationes; ſed hic nobis ad alia eſt properandum.

189. In ſuperioribus commode adhibetur formula $m = \frac{\text{ſin. } \frac{c+r}{2}}{\text{ſin. } \frac{1}{2}c}$, in qua nihil contemnitur, cum angulis priſmatum utcumque magnis: ad reliquas methodos, de quibus acturi ſumus, requiruntur anguli exigui, qui nimirum ſint ad ſenſum proportionales ſuis ſinubus; quamquam deinde innuam etiam illud, qua ratione eæ methodi aptari poſſint angulis etiam majoribus. Hæ methodi exhibent tantummodo relationem M ad m, & dM ad dm.

190. Si fiant bina priſmata e binis ſubſtantiis, quorum anguli refringentes deſtruant refractionem, nimirum illud efficiant, ut radius per utrumque ſimul transmiſſus egrediatur cum eadem directione, cum qua abit ſine ipſis; habetur per num. 168 relatio qualitatum refractivarum, ſive ratio M — 1 ad m — 1 reciproca angulorum. Si vero per eos deſtruantur colores; erunt per num. 170 qualitates diſtractivæ nimirum dM ad dm in ratione angulorum reciproca.

191. Ad conferenda inter ſe hac methodo bina vitrorum genera oporteret habere ex altero genere quamplurima priſmata, donec caſu quodam incideretur in unum aliquod, quod refractionem, vel colores accurate corrigeret. Id incommodum evitat methodus a Clairautio propoſita priſmatis mixtilinei habentis alterum latus planum, & alterum cylindricum. (q)

192.

(q) Mixtilineo priſmati Clairautii adjecit aliud celebris Maſſilienſis Opticus P. Abas ex ea S. Francisci familia, quam Obſervantium appellant. Clairautius adhibebat plano-convexum, quod hæc figura exhibet, ille adhibet bina ſimul, alterum

192. Incurrat radius traductus (*Fig.* 23.) per foramen F*f*, prius in priſma MPN terminatum ſuperficiebus planis MP, NP, tum in priſma TRV terminatum ſuperficie plana TR, & cylindrica VBR, ac via CIB deferatur alterum ejus extremum ad E. Si concipiatur tangens ducta per B, donec rectæ TR occurrat in Q; æquivalebit priſma curvilineum rectilineo habenti angulum TQB. Licebit autem promoto antrorſum retrorſum priſmate ipſo mixtilineo variare punctum B, in quo radius prodit, adeoque & ad angulum Q, donec inveniatur ea poſitio, quæ præſtet id, quod quæritur deſtruendo refractionem, vel colores in E.

193. Porro ſi differentia angulorum prope V, & prope R ſit nimis magna; craſſitudo TV erit itidem nimis magna. Id incommodum facile evitabitur poſito alio priſmate OMP ex eadem maſſa, ex qua eſt mixtilineum, ut ſumma ejus anguli; & anguli Q conferenda ſit cum angulo MPN.

194. Plura autem excogitari poſſunt inſtrumenta, quorum ope priſma mixtilineum per cochleam promoveatur motu lento,

alterum plano-convexum, alterum plano-concavum ita, ut binæ illæ curvilineæ ſuperficies ſibi mutuo congruant. In quadam earum poſitione binæ ſuperficies planæ ſunt parallelæ: dum altera curvilinea per alteram transcurrit, ſuperficies planæ ad ſe invicem inclinantur, & conſtituunt angulum variabilem ipſis planis ſuperficiebus contentum. Mirum ſane, quanto aptius ad ejusmodi obſervationes illo ſimplici mixtilineo ſit hoc priſma compoſitum. In illo ſpectrum habetur maxime expanſum, & admodum confuſum: in hoc nitidiſſimum, ut in communibus priſmatis facies planas habentibus. Problema videbatur prima fronte inſolubile: e maſſa ſolida conſtruere priſma, quod angulum habeat variabilem planis ſuperficiebus contentum, inter quas nullum vacuum interſit, ſed eadem materia ſolida ſpatium omne intermedium compleat: ſolutio problematis ibi exhibita eſt ſimpliciſſima ope duplicis fruſti, ubi ſuperficies congruentes, cum nihil obſtent progreſſui rectilineo radii, eundem effectum præſtant, ac ſi eorum angulorum quivis ex unica continua maſſa exſectus eſſet.

& continuo, & per ſolam diſtantiam VB puncti B a certo quopiam puncto V habeatur angulus Q. Quin immo promoveri poteſt priſma curvilineum per cochleam ita, ut ope circuli diviſi, & indicis habeantur admodum accurate gradus & minuta anguli Q reſpondentis certæ poſitioni ipſius priſmatis reſpectu foraminis, cujusmodi inſtrumentum paravi mihi cum ſucceſſu.

195. Quod ſi qualitates refractivæ, & diſtractivæ binorum vitrorum conferantur cum eodem illo vitro priſmatis curvilinei; facile eadem illa vitra comparabuntur etiam inter ſe; nam erit ratio valoris $m-1$, vel dm in primo vitro ad eundem in ſecundo compoſita ex rationibus valoris primi ad valorem intermedii illius priſmatis mixtilinei, & hujus ad valorem ſecundi.

196. Idem obtineri poteſt includendo priſma vitreum intra priſma aqueum. Sint (*Fig.* 24.) AB, BC laminæ vitreæ planis parallelis, & politis terminatæ, inter quas contineatur aqua. Si intra ipſam aquam demergatur priſma vitreum DEF angulo E poſito ſitu contrario reſpectu anguli B; habebitur ipſum priſma vitreum inter duo priſmata aquea, quorum anguli ADE, CFE ſimul ſumpti æquabuntur angulis DBF, DEF ſimul ſumptis. Quare ſi angulus ABC dicatur a, & DEF dicatur c, in caſu, in quo radius GHIKLM traductus per ea tria priſmata habeat refractionem correctam, erit $m-1$ vitri ad $M-1$ aquæ, ut eſt $a+c$ ad a, ſive ut $1+\frac{c}{a}$ ad 1; & eadem erit ratio dm ad dM, ſi deſtruantur colores.

197. Aquam & Newtonus incluſerat vitreis laminis, ac ei priſmati aqueo priſma vitreum immerſerat: idem vidi in Anglia in Cantabrigenſi Academia, ſed nullum aderat inſtrumentum, cujus ope poſſet angulus ABC aperiri magis, vel minus ad libitum ſine effuſione aquæ, & determinari ſatis accurate angulus $B=a$.

Hac

Hac methodo affirmat etiam Clairautius, ſe vitra comparaſſe inter ſe: verum illud ignoro, cujuſmodi inſtrumento ſit uſus. Ego ad eam rem curavi inſtrumentum, quod ſequenti §. diligentius exponam, uti promiſi numero 19, quod mihi quidem viſum eſt commodiſſimum, & ad ſummam accurationem aptiſſimum. (r) Interea hic adnotabo nonnulla ad rem præſentem pertinentia.

198. Primo quidem illud, ne exiguos quidem angulos eſſe accurate ut ſinus. Poſito arcu $= u$, & ſinu $= y$, eſt ex elementis ſerierum applicatarum ad Trigonometriam $y = \frac{1}{1} u - \frac{1}{1.2.3} \times u^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5} \times u^5 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7} \times u^7$ &c. In arcu 19 graduum, qui eſt circiter pars tertia radii, ſecundus terminus eſt $\frac{1}{54}$ primi, qui idcirco non eſt ita contemptibilis; licet tertius evadat $\frac{1}{9720}$ ejuſdem primi, qui proinde contemni poteſt. Et quidem inito calculo arcus graduum 10 eſt partium 17453, quarum radius 100000, habente ſinu 17365 cum differentia utcumque tolerabili partium 88, circiter ducenteſima ſui parte: at arcus graduum 20 eſt 34906, ſinus 34202, differentia exiſtente 704, parte jam $\frac{1}{49}$ totius, plus æquo magna. Quare ubi anguli ſint aliquanto majores, calculus non erit ita accuratus, accepta illa ratione reciproca angulorum.

199.

(r) Dicam in ſecundæ Diſſertationis adnotationibus de inſtrumento ejusdem generis in Anglia conſtructo, cujus notitia ad me devenit biennio poſtquam hæc diſſertatio Bononiæ impreſſa jam fuerat, & paullo poſt Viennæ Germanice edita. Inſtrumentum Anglicanum tum quidem adhuc apud Auctorem ſuum manebat ineditum: an adhuc publici juris ſit factum, ignoro, dum hæc ſcribo incunte anno 1767.

199. Poſſet quidem adhiberi pro ſinu y expreſſio $u - \frac{1}{6}u^3$ in applicatione formularum ad anguios exiguos: ſed quoniam calculus evadit operoſior, & adhuc non evadit penitus accuratus; ſatius eſſe cenſeo uti via indirecta, & in ſubſidium vocare falſas poſitiones.

200. Pro ratione M ad m, ſi innoteſcat jam ſemel valor medius M, ut illius vitri, ex quo conſtat priſma mixtilineum, vel aquæ, & habeantur anguli, in quibus deſtruitur refractio, poteſt poni pro m alius valor arbitrarius, tum ex iis valoribus, & angulis ope formulæ $m = \frac{\text{ſin.}\frac{c+r}{2}}{\text{ſin.}\frac{1}{2}c}$, adeoque ſin. $\frac{c+r}{2} = m$ ſin. $\frac{1}{2}c$ poteſt inveniri refractio r debita ſingulis angulis, ſive ii ſint duo tantum, e ſingulis nimirum materiis ſinguli, vel tres, nimirum duo ex altera, & unus ex altera. Si refractio priori, vel prioribus debita evaſerit æqualis refractioni debitæ poſtremo angulo; valor m eſt rite aſſumptus: ſecus, notetur differentia, & ponatur alter valor m minor, vel major priore, prout fuerit ejus r minus vel majus: facto iterum calculo, & inventis refractionibus, ſi nec eæ fuerint æquales, inveniatur iterum differentia, & ope harum differentiarum, ac binorum valorum m aſſumptorum invenietur methodo elementari falſæ poſitionis poſitio valoris m, quæ faciet nullam differentiam oppoſitarum refractionum, vel exhibebit propiorem terminum ad eam inveniendam.

201. Pro relatione dM ad dm inventis vel hac poſtrema methodo, vel aliqua alia ſuperius expoſita valoribus mediis M, m, & per eos refractionibus R, r, ubi duo ſunt anguli, poteſt e formula numeri 161 fieri $\frac{d\text{M}}{dm} = \frac{\text{cof.}\frac{\text{C}+\text{R}}{2}}{\text{cof.}\frac{c+r}{2}} \times \frac{\text{ſin.}\frac{1}{2}c}{\text{ſin.}\frac{1}{2}\text{C}}$; nam ibi evadit

dit $\frac{dR}{dr} = 1$, ubi contrariæ refractionum differentiæ ſe deſtruunt. Quod ſi anguli ſint tres, & ex altera materia in ſecundo priſmate habeatur c', & r' pro c, & r; ex formula numeri 160 eruetur $dr = \frac{2\,dm\,\mathit{ſin.}\,\frac{1}{2}c}{\mathit{coſ.}\frac{c+r}{2}}$, $dr' = \frac{2\,dm\,\mathit{ſin.}\,\frac{1}{2}c'}{\mathit{coſ.}\frac{c'+r'}{2}}$, $dR = \frac{2\,dM\,\mathit{ſin.}\,\frac{1}{2}C}{\mathit{coſ.}\frac{C+R}{2}}$, adeoque ob $dr+dr'=dR$, erit $dM.\,dm :: \frac{\mathit{ſin.}\,\frac{1}{2}C}{\mathit{coſ.}\frac{C+R}{2}} \cdot \frac{\mathit{ſin.}\,\frac{1}{2}c}{\mathit{coſ.}\frac{c+r}{2}} + \frac{\mathit{ſin.}\,\frac{1}{2}c'}{\mathit{coſ.}\frac{c'+r}{2}}$.

Sed ad hanc applicationem oportebit in fig. 24. noſſe ſeparatim angulos ADE, CFE. Id autem evitabitur, ſi ibidem ipſum latus DE applicetur ad DA, evaneſcente angulo ADE, & evadente EFC = DEF + ABC. Sic in fig. 23. ad habendos tantum duos angulos, ſatis erit rectilineum priſma ejuſdem materiæ cum mixtilineo applicare immediate ad mixtilineum, ut componant ſimul unicum priſma.

202. Adhuc hoc pacto relinquitur error ex alio capite oriundus, qui non erit ita exiguus, ſi anguli ſint aliquanto majores. Nimirum formula $m = \frac{\mathit{ſin.}\frac{c+r}{2}}{\mathit{ſin.}\frac{1}{2}c}$ inventa num. 158 eſt accurata ſolum in caſu, in quo via radii intra priſma ſit æque inclinata ad utrumque ejus latus; quod in fig. 23, & 24 non accidit accurate in omnibus priſmatis, nec vero ſatis proxime; niſi anguli ſint exigui, & radius traducatur per rectam ad ſenſum perpendicularem plano tranſeunti circa medium inter angulos ipſorum priſmatum. Ad calculum accuratiorem in hac methodo deſtructionis colorum, ubi anguli evadant aliquanto majores, oportet noſſe inclinationem radii ad ſingula latera, quod quidem haud difficulter obtinetur ope formularum numeri 145, datis M, m, datis angulis refringentibus, & inclinatione in ingreſſu ad primum pla-

rum. Aucto valore M per quantitatem exiguam arbitrariam dM, & aſſumpta ratione arbitraria ipſius dM ad dm, inveniretur ultimus angulus, in quo radius, qui tanto majorem refrangibilitatem habet, qnantum reſpondet arbitrariæ dM, egreditur e poſtrema ſuperficie. Si is inveniatur æqualis, calculo inito per ſolas M, & m; ratio aſſumpta inter dM, & dm erit accurata; ſecus aſſumenda erit alia, & reſtituto calculo habebitur vel æqualitas quæſita angulorum in egreſſu, vel ſecundus terminus pro regula falſæ poſitionis adhibenda. Nec ſane ii calculi erunt prolixi ob formularum ſimplicitatem: ſimpliciores certe erunt, & accuratiores, quam uſus ſerierum exprimentium ſinus per angulos, quæ ipſæ ſeries in angulis paullo majoribus nulli uſui eſſe poſſunt, dum methodus falſæ poſitionis extenditur ad angulos quoſcunque; nec longa eſſe poteſt, ubi aliunde jam nota ſit ratio dM ad dm non ita remota a vero, per angulos minores, qui colores deſtruant.

203. Hæc fuſius evolvam, & exemplis illuſtrabo in fuſiore opuſculo, ubi ſatis conſtabit illud, exiguam mutationem in valore $\frac{dM}{dm}$ ſecum trahere non ita exiguum diſcrimen in combinatione ſphæricitatum, quæ debeant adhiberi ad corrigendos errores omnes, a quorum errorum correctione accurata pendet omnis horum teleſcopiorum ſucceſſus. Ex altera vero parte admodum difficile eſt ſatis accurate definire valorem dM, & dm, ac eorum rationem immediate per ſpectra colorata priſmatum, cum violaceorum radiorum quædam veluti ſeries infinita ita ſenſim abeat in cæcam umbram, ut nullum liceat ſatis diſtincte limitem definire, & inter ſe conferre in binis priſmatis: ut idcirco ad ejuſmodi relationem obtinendam methodus omnium tutiſſima videa-

deatur ipſa colorum deſtructio, quæ quo per majores fiet refringentes angulos, eo certius habebitur, exiſtente minore effectu errorculorum, quos ſemper relinquunt determinationes angulorum ipſorum priſmatum, quæ formulas ingrediuntur.

204. Notandum præterea & illud: ſi in hac methodo obveniat etiam proxime eadem ratio M — 1 ad *m* — 1, quæ *d* M ad *dm*, nimirum etiam illa ipſa accepta ex inverſa angulorum deſtruentium refractionem, & colores; eas ſubſtantias non eſſe idoneas ad teleſcopia quæſita; quia illis rationibus exiſtentibus æqualibus, abit focus in infinitum juxta num. 83, & ex eodem facile deducitur, facta eadem ratione non multum inæquali, adhuc ipſum focum abire nimis procul. Sed jam faciemus gradum ad deſcriptionem vitrometri, cujus conſtructione, & uſu hoc opuſculum abſolvemus.

§. VII.

Vitrometri conſtructio, & uſus.

205. VItrometrum appellandum cenſui juxta num. 19, inſtrumentum, quod hic exponam, cujus ope facile conferri poſſit qualitas refractiva, & diſtractiva vitri cujuſvis, cum ejuſmodi qualitatibus aquæ, concludendo ejus priſma intra priſma aquæ, & quærendo angulum, in quo aqua corrigit ejus refractionem, vel refractionis differentiam, ſive colores, quod requiritur ad applicandam methodum numeri 183. De eo inſtrumento me hic acturum promiſi ipſo num. 19, & 197.

206. Id exhibetur (*Fig.* 25.), & eſt totum e laminis metallicis præter bina vitra. ABCD eſt veluti pavimentum horizontale: EFCI, GHBK ſunt bini veluti parietes laterales per-

pendiculares pavimento: KBCI eſt paries itidem verticalis fixus poſterior: HRPQF eſt alter paries anterior mobilis circa axem HF: T, S ſunt bina vitra terminata planis parallelis bene politis inſerta poſtremis binis parietibus, & ipſis parallela: GE eſt virga rotunda cum cochlea ad partes E adſtringens parietes laterales: MO eſt cochlea mas circularis habens centrum in medio axe HF inſerta cochleæ fæminæ exiſtenti in medio circulo PN, & habenti manubrium cum indice denotante in limbo circuli diviſiones, quæ exprimunt partes ſingularum converſionum indicis ipſius. ILX eſt regula longior adnexa parieti poſteriori, tenens ſibi afferruminatam faſciam circularem VX habentem centrum in ipſo axe HF in F, diviſam in gradus incipiendo a diſtantia Xo proxime æquali diſtantiæ CF: QY eſt regula mobilis adnexa parieti mobili RPQ, quæ crenam habet in YZ excipientem eam ipſam faſciam, & habet ſibi adnexum vitrum planum politum, quod interiore ſuperficie contingit ſuperficiem ipſius faſciæ circularis. In eadem vitri ſuperficie habetur recta linea YZ, quæ deſignat gradus contentos in arcu circuli inter ipſam & initium diviſionis o.

207. Intra cavitatem TBS interceptam parietibus infundenda eſt aqua, quæ ne effluat ad margines parietis mobilis in RH, FQ, ii margines ſunt obducti corio rite præparato. Ad ipſum præparandum Stephanus Conti, & Nicolaus Narducci Lucenſes Patricii, ingenioſiſſimi viri, & bonarum artium amantiſſimi, ac in inſtrumentis etiam per ſe ipſos perficiendis ad Phyſicam, & Aſtronomiam idoneis maxime induſtrii, cum quibus etiam plurimas inſtitui hujus generis obſervationes ope priſmatum; quæ ipſi mihi elaborarunt egregia ſane, & Artifici hoc inſtrumentum mihi ex meo præſcripto paranti adſtiterunt dirigentes opus ipſum, adhi-

buerunt

buerunt ſequentem methodum. Accepta uncia ceræ albæ bonæ, uncia therebintinæ Venetæ, ſemiuncia olei olivæ, & liquata tota maſſa ad ignem, ubi ea ita cœpit refrigeſcere, ut a digito immerſo ejus calor tolerari poſſet, immiſſum eſt corium ita, ut bene imbueretur, tum extractum, & exſiccatum, ac diligenter applicatum ad illa latera. Eo pacto omnis aquæ effluxus eſt impeditus, relicto libero motu parietis mobilis.

208. Infuſa aqua habetur priſma aqueum truncatum, ut patet, cujus angulus refringens eſt is, quem continerent plana vitrorum S, T producta usque ad concurſum: ipſum autem indicat lineola YZ, ſi initium diviſionis o ſit rite definitum. Facile eſt autem id efficere, ut ipſum rite definitum ſit. Satis eſt ope cochleæ PN adducere parietem mobilem RPQ ad parallelíſmum cum fixo KML, qui paralleliſmus hoc pacto accuratiſſime definitur. Directo ope ſpeculi radio Solis proxime horizontaliter, quod commode fit ope machinulæ figuræ 10 methodo num. 185 ſupplentis uſum helioſtatæ, notetur ejus locus in pariete oppoſito, dum libere tranſit, tum interpoſito inſtrumento, ita, ut debeat tranſire per vitra T, S, & aquam intermediam, moveatur index PN, donec radius tranſmiſſus eodem redeat omni refractione deſtructa. In eo ſitu ita collocetur vitrum YZ, ut lineola tranſeat per illud initium diviſionis o, & in eo ſitu adnectatur curſori QY, qui deinde rite denotabit angulum refringentem aquæ per eamdem lineolam. Ipſa autem lineola ducenda fuit in plano tangente ſuperficiem faſciæ circularis ad evitandam omnem parallaxim, quæ haberetur, ſi ea diſtaret ab eadem ſuperficie, & oculus deflecteretur a directione perpendiculari.

209. Si vitrum jam eſſet adnexum; ſatis eſſet in poſitione paralleliſmi inventa methodo tradita notare diſtantiam lineolæ a

puncto o, quæ rectificationem inſtrumenti exhiberet addenda arcui in aliis poſitionibus deſignato, vel ſubtrahenda, prout in caſu paralleliſmi jaceret ipſa lineola reſpectu o ad partes X, vel ad partes V.

210. Eadem methodo liceret etiam inveſtigare, an vitra S, T re ipſa eſſent terminata planis parallelis, ut accurata inſtrumenti conſtructio requirit, an ſecus: nimirum ante infuſionem aquæ traducendus eſſet radius per ipſa vitra, quo abeunte ad eundem locum, ad quem abit ſine inſtrumento, haberetur ipſius paralleliſmi indicium: nam ſi alio abiret radius; certo inde deduceretur haberi aliquam ſuperficierum alterius vitri, vel utriuſque inclinationem ad ſe invicem. Rectificatio habita per deſtructionem refractionis poſt aquam infuſam corrigeret pro pluribus obſervationibus ejuſmodi inclinationis effectum, ubi ea exigua eſſet; ſed ad inſtrumenti perfectionem habendam, oporteret vitra ad paralleliſmum adducere, quem an aſſecuta fuerint, facile definietur ante, quam aptentur ipſi machinæ, tranſmittendo radium ſolis per ipſa ſingula, & videndo, an ipſum quidquam de ſua directione detorqueant.

211. Exhibentibus angulorum gradus diviſionibus faſciæ circularis XV, facile minuta obtineri poterunt ope diviſionum circuli P N, notando nimirum, quot particulæ deſint ad finem gradus, ſi ad datam poſitionem deventum eſt augendo angulum, vel ad initium, ſi minuendo, comperto ſemel, quot particulæ debeantur uni gradui. Nimirum illa diviſio circuli P Q cum motu indicis idem præſtat, quod in communibus inſtrumentis micrometrum.

212. Multo tutius minuta haberi poſſunt, adnectendo regulæ Q Y in Y arcum plurium graduum diviſum in particulas ſingulis minutis majores vel minores gradu, nimirum efformando eum, quem *Nonium* appellant Geometræ practici, qui non eſt obnoxius iis inæqualitatibus motuum, quarum eſt ſummum periculum in cochlea, potiſſimum in hac fæmina, quæ ob arcus curvaturam non poteſt eſſe ita longa, ut plures habeat ſpiras. Tum vero inutilis eſt diviſio circuli P N, & index; ſed cochlea adhuc eſt neceſſaria ad habendum motum plani R P Q lentum, & continuum, qui ſine cochlea haberetur per ſaltus.

213. Ut poſſit inſtitui examen diviſionis faſciæ X V, ego quidem illud curavi, ut axiculus H F promineret ad partes F cum centro circuli X V ibi notato. Tum enim facile accipitur radius ejus circuli, & fieri poteſt ejus ſcala diviſa ope tranſverſalium in partes 1000: tum vel ejus ope, vel ope circini proportionis accurati facile eſt videre, an ſingulæ chordæ incipiendo ab o contineant numerum particularum, cui reſpondere debet ex tabula ſinuum duplum ſinus dimidii arcus, & ſi id minus accidat, invenire correctionem.

214. Ope hujus inſtrumenti admodum facile determinantur etiam omnes anguli, in quibus radius pervenit ad ſingula plana aquæ, & vitri, ſi adhibeatur methodus expoſita num. 184. ſupplens vicem helioſtatæ. Admodum enim facile datur inſtrumento ejuſmodi poſitio, ut radius incidat perpendiculariter ad primam ſuperficiem vitri T, ſi ea obvertatur foramini. Ea ſuperficies partem radiorum retro reflectit, & reflexus radius ſatis clare cernitur prope foramen ipſum. Si baſis A C inſiſtat plano, quod ope trium cochlearum acquirere poſſit poſitionem

quam

quam libuerit: admodum facile id efficitur, ut is reflexus radius redeat accurate ad ipſum foramen. Eo caſu evadit ſuperficies ei radio perpendicularis. Tum vero ſi priſma vitreum ſit iſoſcelium, remanebit inter ipſum, & faciem inſtrumenti perpendicularem baſi priſma aquæ, cujus angulus refringens erit dimidius anguli priſmatis vitrei; inter ipſum vero, & latus oppoſitum mobile priſma aqueum, cujus angulus erit æqualis ſummæ ex gradibus notatis ab inſtrumento, & dimidio angulo priſmatis vitrei; nam eo caſu in fig. 24. angulus DFC evadit rectus, adeoque ſi concipiatur recta EN perpendicularis baſi DF, & occurrens lateri AD in N, quæ debebit eſſe parallela lateri CFB, erit angulus EFC æqualis alterno FEN, dimidius totius FED; angulus vero ADE externus æqualis binis internis, & oppoſitis, quorum alter DEN erit dimidius anguli DEF, & alter DNE erit æqualis angulo ABC ipſius inſtrumenti interno, & oppoſito in parallelis EN, BC.

215. Ii anguli ſeparatim inventi jam per ſe exhibebunt valores pro calculo numeri 201, & ex iis facile deducentur valores omnium inclinationum radii ad ſuperficies omnes refringentes, in quas incidit pro calculo indicato a num. 200.

216. Jam vero ſatis patet ex dictis uſus ipſius machinulæ. Ubi ea rite rectificata ſit methodo uſitata in inſtrumentis, & expoſita a num. 209, immiſſo priſmatulo vitreo, & aqua, movendum eſt latus mobile RPQ, donec radius exeat in eadem directione irrefractus, & recta ZY, vel nonius indicabit angulum aquæ neceſſarium ad corrigendam refractionem priſmatis vitrei immiſſi, qui combinatus cum ipſius angulo exhibebit rationem qualitatum refractivarum: adducto autem latere mobili

ad

ad poſitionem, quæ extinguat colores, habebuntur eadem pro qualitatum diſtractivarum comparatione.

217. Verum poteſt idem inſtrumentum remoto priſmate vitreo adhiberi ad determinandas qualitatem refractivam, & diſtractivam vitri abſolutas, ut etiam excepto radio in directione perpendiculari primæ ſuperficiei, poſſunt haberi ejus ope angulus incidentiæ, & refractus in egreſſu ad oſtendendam conſtantem rationem ſinuum angulorum ipſorum incidentiæ, & refracti, ſed ea huc non pertinent.

Scholium Generale.

218. Expoſuimus jam præcipua, quæ pertinent ad theoriam: evolvimus formulas pertinentes ad focos lentium: & accurate demonſtravimus tum ipſas, tum plura ipſarum conſectaria: determinavimus, & inter ſe comparavimus errores ortos a diverſa refrangibilitate radiorum, & a figura ſphærica: expoſuimus quando, & quomodo corrigi poſſint: evolvimus quæ pertinent ad determinandos valores, qui ingrediuntur formulas exhibentes ejuſmodi correctionem tam ope lentium, quam ope priſmatum, ubi plura, quæ ad ipſorum priſmatum theoriam pertinent diligenter perſecuti ſumus. Præter theoriam expoſuimus etiam illa, quæ pertinent ad praxim deſcribendo plura inſtrumenta, & oſtendendo, qua ratione ipſorum ope debeant inſtitui obſervationes. Supereſſet eorum omnium applicatio ad obſervationes diligenter inſtitutas, cum exemplis calculorum, & eorum fructu, exhibitis ſyſtematis ſuperficierum terminantium binas lentes objectivas, quæ aptiſſima ſint ad hæc nova teleſcopiorum genera cum aliqua inſtitutione ſejuncta ab

omni geometria, quæ communibus artificibus inſervire poſſit. Verum ea omnia locum hic habere non poſſunt, ubi limites honeſtos diſſertationis inſerendæ commentariis Academiæ exceſſimus. Edemus ea omnia ſeparatim, ubi primum per tempus licuerit, cum hiſce ipſis, quæ huc congeſſimus, auctis, & adhuc magis declaratis opuſculo paulo fuſiore (s).

(s) In ipſo numero 1 diſſertationis ſecundæ conſtabit, quibus diſtractus curis id, quod tum meditabar, cum hæc ſcriberem, exequi usque ad id tempus nequaquam potuerim: ſed nec hucusque id quidem licuit, nec omnino licebit per plures annos: plura, quæ eo pertinent, continentur in epiſtola fuſiore, quam Italice conſcripſi: ea brevi prodibit, in Italia, & vero etiam in Gallia Gallice reddita.

DISSERTATIO II.

De unione colorum aliorum poſt alios per binas ſubſtantias, ac unione multo majore per tres.

1.

Sub finem anni 1763 tranſmiſi ad Academiam Diſſertationem, quæ impreſſa eſt in prima parte hujuſce Tomi: in cujus Diſſertationis fine promiſeram uberiorem fœcundiſſimi argumenti pertractationem edendam fuſiore opuculo, illud adjiciens, *ubi per tempus licuerit.* Id quidem adhuc nequaquam licuit. Primo enim a Summo Romano Pontifice miſſus ad inviſendas cum Eminentiſſimo Cardinali Bonaccurſi Pontinas paludes, tum ab Ampliſſimo Mediolanenſi Senatu vocatus ad Matheſim docendam publice in antiquiſſima, & cele-

berrima Ticinenſi Academia, vacationum vero tempore adhibitus, & Mediolani ad inquirendum in vaſtiſſimam illam Principis templi molem, de cujus faſtigio ſupremo agebatur, an ſcilicet oneri complementi nondum extructi ferendo par eſſet, & Arimini ad inviſendum portum illum jam fere obſtructum, & opportuna proponenda remedia, de quibus omnibus argumentis ſcribendum mihi fuit, & quidem admodum ſuſe, præter quotidianas alias curas quamplurimas, ingentem in primis epiſtolarum vim, quarum plurimæ de argumentis ad Matheſim pertinentibus & nonnullæ de hoc ipſo argumento, ex quibus excerpta multa cum illa ipſa Diſſertatione Germanice reddita nunc eduntur a Scherffero Noſtro Viennæ, nihil ſane ocii ſum nactus ad liberandam fidem, & ea omnia, quæ mihi animo propoſueram, evolvenda. Acceſſit etiam inuſitata ſane Cæli inclementia, quæ iis ipſis temporibus, quibus obſervationum ordinatam ſeriem inſtituere potuiſſem, & inſtrumenta quidem idonea paraveram, Sole obducto per menſes integros plures, ſæpe inchoatum opus abrupit.

2. Cum idcirco ejuſmodi tractatio in aliud mihi tempus differenda ſit, quod ignoro, an unquam ſim habiturus, proponam hic ea tantummodo, quæ ope mei vitrometri obſervare mihi licuit, pertinentia ad unionem colorum non omnium ſimul, ſed aliorum poſt alios per duas ſubſtantias, & quæ inde deducuntur, vel cum eo relationem habent, potiſſimum de objectivo ad conjungendos multo magis heterogeneos radios componendo per tres lentes, ſive per duas continentes aquam incluſam.

§. I.

De unione colorum non omnium ſimul, ſed aliorum poſt alios per binas ſubſtantias heterogeneas ex experimentis.

3. De unione filorum radii habentium diverſos colores egi in Diſſertatione nominata §. IV., ubi num. 87. hæc habentur. *Supereſt monendum illud circa hanc hujus erroris correctionem: ſi in omnibus radiorum heterogeneorum binariis in ingreſſu in eadem bina media ex aere ſit eadem ratio* $\frac{dM}{dm}$ (nimirum ratio qualitatum diſtractivarum); *correcto errore pertinente ad bina radiorum genera, corrigi errorem pertinentem ad omnia reliqua: ſecus, ſi in aliis ſit alia. Id patet ex ipſa formula, in qua res omnis reducitur ad valorem ejus fractionis. An res ita ſe habeat, inquirendum eſt per experimenta methodis, de quibus infra. Ex obſervationibus huc uſque inſtitutis videtur res ita ſe habere, ſi minus accurate, ſaltem proxime.* In ea formula valor M eſt ratio ſinus incidentiæ ad ſinum anguli refracti pro vitro altero pro uno quopiam radio, dM differentia binorum ejuſmodi valorum pertinentium ad binos radios heterogeneos, m, & dm eadem pro altero vitro.

4. Porro rationem dM ad dm pertinentem ad omnia colorum binaria in iisdem binis ſubſtantiis eandem eſſe, ſuppoſuerunt omnes, quos quidem ego huc uſque videre potui, qui hoc argumentum pertractarunt Geometræ, qui idcirco ubi formulas propoſuerunt pro corrigendo errore diverſæ refrangibilitatis, aſſumpto M, & m pertinente ad radios medios, ac $\frac{dM}{dm}$ pertinente ad radios rubeos, & violaceos, corrigendum ſuſceperunt errorem inductum a diverſa refrangibilitate ejus unius binarii, tanquam ſi eo correcto, corrigeretur ſimul error reliquorum omnium, & iis binis

conjunctis conjungerentur ſimul reliqui omnes, quod quidem ita ſe habere nonnulli etiam diſerte affirmarunt.

5. Affirmavit quidem Clairautius in diſſertatione inſerta Commentariis Acad. Pariſ. ad annum 1757, ſe pluribus inſtitutis experimentis nunquam potuiſſe omnes prorſus colores ſimul accurate conjungere, & ejus phœnomeni cauſam eam eſſe ſuſpicatus eſt, quod ratio decurtationis ſinus pro diverſis coloribus in aliis vitris alia eſſet reſpectu ejuſdem colorum binarii; verum is etiam binario tantum unico formulas ſuas applicavit; & D'Alembertus in tertio Opuſculorum ſuorum tomo, in quo idem argumentum pertractavit uberrime, licet innuat, incertum eſſe, an valor hic $\frac{d\,M}{d\,m}$ pro omnibus colorum binariis ſit prorſus idem, adhuc tamen eum valorem ubique adhibuit ut omnibus colorum binariis generalem, perſecutus errorculorum multo minorum correctionem, & nihil ſollicitus de eo, qui oriri debet ex ejus ipſius valoris diſcrimine in binariis diverſis: uſque adeo ea opinio inſederat animis, valorem ipſum in omnibus vel accurate eumdem eſſe, vel ſaltem quamproxime, adeoque conjunctis binis quibuſque coloribus, reliquos vel accurate, vel ſaltem quamproxime ſimul conjungi, quod ipſe etiam in ſuperius memorato loco affirmaveram.

6. Plures ego quidem jam tum obſervationes inſtitueram pluribus methodis, cum diſſertationem ipſam conſcripſi, ſed nullum adhuc inſtrumentum habueram, quo in eam rem ſatis certo poſſem inquirere: illud, quod ibidem fuſe, ac diligenter deſcripſi, jam ab Opifice acceperam, ſed nullas adhuc ſatis accuratas obſervationes ejus ope inſtitueram, quibus paullo poſt inſtitutis, quæ ad eam rem pertinent, evidentiſſime comperi, & pluribus tam nobilitate, quam doctrina præſtantiſſimis viris oſtendi tam

Ro-

Romæ ſuperiore anno ante, quam ad paludes Pontinas diſcederem, quam Mediolani, & Papiæ, quos inter ipſe Eboracenſis Dux, Regis Angliæ frater, Phyſicarum rerum & amantiſſimus, & peritiſſimus ad ea ſpectanda phœnomena meum hoc Mediolanenſis Collegii anguſtum cubiculum, in quo hæc ineunte anno 1765 ſcribere incipio, adire non eſt dedignatus, & ibidem, immoderati æſtus incommodo ſuperato, verſari diutiſſime. (*)

Pro-

(*) Doctor Blair, qui ipſi Eboracenſi Duci eſt a ſecretis, litteris ad me datis 15. Junii anni 1765, licet eas nonniſi poſt annum receperim, ſignificavit mihi jam ab anno 1761 inſtrumentum ejusdem naturæ cum meo vitrometro excogitatum fuiſſe in Anglia a Dom°. Hoare Soc^is. Regiæ membro, quod Regius Princeps coram ſe ipſo comparari curaverit cum meo (ſecum in Angliam deferre dignatus fuerat illud idem primum, quo coram ipſo obſervationes inieram, quod quidem ad me deinde remiſit cum pretioſo munere Shorti teleſcopio catadioptrico:) inventa autem fuiſſe in Anglicano vitra accuratius parallela, quam in meo, quod utique ab Anglicanis artificibus ſperandum magis, quam a noſtris: baſim itidem illius fuiſſe ampliorem ad majora etiam excipienda priſmata, & latus utrumque mobile ad habenda hinc, & inde a vitreo priſmate bina aquea cujus libuiſſet anguli.

Id quidem inſtrumentum adhuc latebat ineditum coram auctore ſuo, qui ei ſimile effingi, & ad me tranſmitti non eſt paſſus, non evulgaturus, donec omnes obſervationes, quas fuerat meditatus, abſolveret, quod an adhuc præſtiterit prorſus ignoro.

Ego ſane in prima diſſertatione vitrometrum deſcribens baſis magnitudinem nequaquam definivi: arctiorem autem fieri curaveram in illo meo primo, ne plus æquo craſſa evaderent aquea priſmata: ipſum enim deſtinaveram potiſſimum priſmatis exigui anguli in quibus formulæ ſunt ſimpliciſſimæ; verum poterant exigua priſmata elaborari, & eo immitti, etiam cum angulo 50, vel 60 graduum: unicum autem latus effeceram mobile, ut inſtrumentum ſimplicius evaderet, & minore pretio parabile, cum unico motu obtineri abunde poſſit determinatio qualitatis refractivæ & diſtractivæ, quæ omnium commodiſſime obtinetur per priſma vitreum cum unico aqueo comparatum methodo, & formulis, quæ in hac diſſertatione occurrent. Præterea vero per unicum latus mobile poſſunt obtineri omnia, quæ per duplex, cum inclinato ipſo priſmate intra aquam, variari poſſit etiam angulus aquæ interceptæ inter ipſum, & latus fixum.

Proponam primo, quid ejus inſtrumenti ope viderim, & quomodo eorumdem confirmationem habuerim per obſervationes aliis methodis inſtitutas, tum quid inde deducatur pertinens ad variam illam qualitatum diſtractivarum rationem, & impedimentum unionis colorum omnium per bina vitra, diligenter exponam; ac demum oſtendam etiam, quanto major, & fere perfecta unio haberi poſſit per tria genera mediorum diaphanorum.

7. Primo quidem direxi radium Solis ope ſpeculi aptati machinulæ expreſſæ in fig. 10. ejuſdem diſſertationis per rectam ad ſenſum horizontalem a foramine feneſtræ ad oppoſitum parietem: tum ipſi foramini applicavi vitrometrum expreſſum in fig. 25. ita, ut latus immobile feneſtrella vitrea munitum reſpiceret foramen ipſum: cujus quidem lateris poſitionem perpendicularem ipſi radio facile obtinebam ita movendo per cochleas ſubjectum planum, ut radii pars reflexa a prima ſuperficie ejuſdem vitri rediret ad foramen ipſum, licet prorſus accurata ejuſmodi poſitione opus non eſſet. Tranſmiſſo per utramque feneſtram radio, vidi ipſum abire ad eumdem in pariete locum, ad quem abibat ſublato repente inſtrumento, vel abierat ante, ubi meum helioſtatæ genus adhiberem expreſſum in diſſertationis fig. 22. Atque id quidem indicio fuit, vitreas laminas ſatis accurate parallelis planis terminari, quæ nimirum a ſua directione radium nequaquam removerent, nec idcirco futuris obſervationibus impedimento eſſent. (*a*)

8. Aqua in inſtrumentum infuſa, adduxi ope cochleæ latus mobile ad eam poſitionem, quæ feneſtræ utriuſque paralleliſmum oculo

(*a*) Id quidem jam tum obtinueram in alio vitrometro ſimili priori in Angliam tranſmiſſo, in quo laminas vitreas ita cera agglutinaveram feneſtrellis, ut inter obſervandum apprimi non nihil poſſent, & deduci ad accuratum paralleliſmum. Cum axe motus, a quo vix quidquam & in illo priore abludebant.

oculo exhiberet: eam deinde poſitionem prorſus accuratam acquiſivi movendo antrorſum retrorſum latus ipſum, donec obtinerem locum in pariete radii per aquam incluſam tranſmiſſi eumdem itidem, qui eſſet locus ejuſdem radii directi: cum vero in eo caſu is radius ne in latus quidem detorqueretur a poſitione directa, illud comperi, axem machinulæ rite collocatum, in recta nimirum parallela lateri immobili, ſine qua conditione latus mobile ad accuratum paralleliſmum cum immobili adduci non poſſet per motum circa eumdem axem. Notabam autem locum indicis in arcu circularis faſciæ, a quo nimirum rectificatio inſtrumenti pendet, cum ab eo numerari debeant arcus metientes angulos, quos latus mobile cum immobili continet, ſive adducatur ad fixum, ſive ab eodem abducatur, qui ſunt aquei priſmatis anguli obverſi ſurſum verſum in primo caſu, & deorſum verſum in ſecundo.

9. Adducto mobili latere radius deſcendit, & imago Solis apparuit ex inferiore parte violaceo, ac indico, & cæruleo colore tincta, e ſuperiore rubeo, aureo, ac flavo, in medio alba, uti in exigua fit priſmatum exigui anguli refractione: radio enim ita detorto in partem angulo refringenti contrariam, ut illis coloribus maxime, his minime detortis, ii omnium maxime a ſede naturali diſcedant, hi omnium minime, fit ſeries quædam continua circularium coloratarum Solis imaginum, quarum magnitudo illut efficit, ut in extremis tantummodo colorati ſpectri marginibus colores appareant puri, in remotiore a loco naturali violaceus, in propiore rubeus, tum ab illo pergendo ad medium ſpectrum, occurrat primo violaceus, & indicus, conjuncti, tum etiam cæruleus, mox & viridis, ac alii poſt alios ita, ut in medio habeatur albedo ex omnibus ſimul compoſita, a rubeo vero pergendo itidem ad medium habeantur primo quidem bina genera, rubeus nimirum, & aureus, tum tria, adjecto & flavo, donec

eodem pacto per mixtionem eorum, qui accedunt alii poſt alios, ad eamdem albedinem deveniatur.

10. Abducto latere mobili a poſitione paralleliſmi, elevabatur imago Solis eodem pacto a binis extremis marginibus in colores inducta, ſed ordine inverſo poſitis, angulo nimirum aquei priſmatis jam deorſum verſum directo, ut nimirum violaceus in ſummo emineret vertice colorati ſpectri, rubeus in imo omnium maxime ad naturalem locum accederet.

11. Traducto latere mobili lento motu continuo hinc, & inde a paralleliſmi poſitione ita, ut per illam tranſiret, ſpectabatur in pariete Solis radius lento itidem motu continuo deſcendens, ac aſcendens ita, ut ubi per ſedem naturalem tranſiret ipſius Solis imago, appareret ibidem rotunda, & prorſus alba ſine ullo ullius coloris veſtigio. In quovis ejuſmodi tranſitu invertebatur colorum ordo ita, ut rubeus, qui imagine infra naturalem ſedem deſcendente, eminebat, omnium altiſſimus, idem, eadem ſupra ipſam evecta, omnium infimum teneret locum, violaceo ita cum velocitate omnium maxima traducto. Inverſio autem ipſa fiebat ſemper per conjunctionem omnium accuratam, quæ ita ſimul habebatur in omnibus, ut extremis conjunctis, omnes etiam ſimul intermedii conjungerentur.

12. Deducto latere mobili ad paralleliſmum, immittebam in aquam priſma exiguum ex flint ita, ut ipſius angulus refringens ſurſum verſum ſpectaret. Plerumque autem applicabam priſmatis latus ad planum feneſtræ vitreæ lateris immobilis, quo pacto obtinebantur bini anguli refringentes, alter ejuſdem vitri poſitione ſurſum directa, alter contraria directione deorſum obverſus aquæ contentæ inter alterum ejus vitrei priſmatis latus, & vitrum feneſtræ lateris mobilis applicatum, qui quidem anguli æquales omnino evadebant: eo autem priſmatis latere non ita

appli-

applicato oriebantur bini aquei anguli hinc, & inde a vitreo priſmate, quorum ſumma ipſius priſmatis angulo æquabatur, uti facile eruitur ex num. 196 diſſertationis.

13. Eo priſmate adjecto, imago in pariete ſtatim deſcendit. Manſiſſet utique, ſi vitrum habuiſſet eamdem qualitatem refractivam, quam aqua. Vitri angulus ſurſum obverſus imaginem deprimebat, angulus aquæ contraria poſitione ſitus eumdem elevabat: cum æquales eſſent, ſi viribus etiam æqualibus pollerent materiæ, ex quibus conſtabant, æquales effectus ſe invicem deſtruxiſſent: ſed cum vitri refractiva vis eſſet major, illud omnino conſequi debuit, ut deſcenſus ab ipſo inductus aſcenſum actioni aquæ debitum ſuperaret. Eadem autem imago apparuit coloratis marginibus ita, uti pars infima violaceum, ſumma rubeum haberet colorem, illo, uti par erat, a ſede naturali recedente omnium maxime, hoc omnium maxime ad ipſum accedente.

14. Huc uſque omnia evenere juxta conſuetas refractionum leges a Newtono traditas, & ante recentiſſima hæc comperta notiſſimas: in iis, quæ conſequentur, occurret primo Dollondianum inventum, Newtoni inventis contrarium, tum illud, quod propoſueram, quod quidem ipſi Dollondianorum teleſcopiorum theoriæ ita obſtat, ut ne ea quidem perfici omnino poſſint, omnem nimirum diverſæ refrangibilitatis errorem corrigere.

15. Abducto latere mobili ita, ut angulus aqueus creſceret, cepit elevari ſpectrum coloribus in utroque margine manentibus cum eodem ordine, ſed minus dilatatis, donec devenit ad locum imaginis directæ ita, ut margo ſuperior ſpectri imbutus colore rubeo occuparet accurate locum ſuperioris marginis imaginis directæ, qui ſummoto inſtrumento facile obtinebatur, & deſignabatur applicato margine chartæ albæ in ejus locum, ad quem

inſtrumento ſtatim reſtituto, ne motus Solaris imaginis poſſet eſſe ſenſibilis (ubi nimirum helioſtatam non adhiberem, quo adhibito imago manet immota, nec ulla feſtinatione eſt opus) ſpectrum adducebatur per cochleam latus mobile promoventem. In eo ſtatu quandoque notabatur angulus priſmatis, tum is adhuc augebatur aſcendente ſpectro, donec imus ipſius margo violaceus congrueret cum loco imi marginis imaginis directæ, ac eo itidem notato angulo, tum aucto, elevabatur ſpectrum ſupra locum ipſum directæ imaginis, in quo adhuc iidem colores, licet ſemper minus dilatati aſpiciebantur, eodemque ordine ita, ut rubeus in ſummo jam omnium maxime diſtaret a loco naturali, violaceus in imo ad ipſum omnium maxime accederet.

16. Hoc quidem pacto imago Solis refracta motu continuo tranſiit per locum imaginis directæ ſine conjunctione illa colorum, quæ in albedinem defineret, uti per ipſam albedinem tranſierat in caſu ſolius aquæ, & ſine ulla conjunctione colorum quorumvis, ſine inverſione ſpectri, in ſpectro ipſo elevato ſupra naturalem ſedem color rubeus majorem eſt viſus refractionem habere, quam violaceus, non quod in ſingulis refractionibus majorem habuerit, ſed quod licet refractio ab aqua inducta pluſquam correxerit refractionem inductam a vitro; adhuc tamen nondum correxerit differentiam refractionum violacei, & rubei, adeoque violaceus adhuc rubeo depreſſior remanſerit. Verum adhuc id ipſum opponitur iis, quæ a Newtono videntur diſerte tradita, & quæ Dollondus invenit falſa.

17. Inſtrumento adhuc magis aperto, perpetuo magis aſcendit ſpectrum, & interea color rubeus in ſummo margine ita ſenſim attenuatus eſt, ut demum evanuerit, ac in vertice jam cepit eminere aureus, tum flavus, violaceo adhuc tenente infimum locum: paullo poſt ſucceſſit in parte ſumma flavo viridis, tum ve-

ro in imo violaceus in purpureum abire cepit vinaceum colorem illum, qui oritur ex mixtione rubei cum violaceo, quando ii soli e ſpectro aſſumpti conjunguntur, qui quidem evaſit admodum ſatur, ubi procedente inſtrumenti motu pulcherrimus in oppoſito margine viridis apparebat. Ibidem excepit viridem cæruleus, & indicus, rubeo in inferiore ora jam libero, & puro, ac demum violaceus quoque emerſit in ſummo, facta inverſione ſpectri, qua rubeus eſſet loco naturali proximus, tum aureus, & flavus, ac remotiſſimus omnium violaceus diſcederet.

18. Inverſio ſpectri eo pacto facta eſt ſine tranſitu per albedinem, coloribus non ſimul omnibus conjunctis, ſed aliis poſt alios ita, ut non niſi bini coirent alii poſt alios. Colorata fimbria ſemper apparuit cum minima dilatatione tum, cum puriſſimus in alto appareret viridis, & vividiſſimus in imo purpureus circa medium nimirum inverſionis, ſed adhuc erat tum etiam admodum ſenſibilis, nec vero illud ipſum minimum ſatis accurate definiri poterat, cum ab uno colore ad alium, & a poſtremo ad albedinem tranſitus fieret ſenſim per inſenſibiles gradus, non repente, & quodam veluti ſaltu abrupto, nec, eamdem ob cauſam, niſi paullo craſſiore quodam oculorum judicio poterant illi ipſi limites determinari, in quibus alter alteri in ſupremo margine ſuccedebat.

19. Circa eam ipſam ſucceſſionem ſuperpoſitionis, ſeu congruentiæ diverſorum colorum obſervavi ſemper, quotiescumque vitra utcumque diverſa intra ipſum vitrometrum collocavi, flint, ſtraſs, vitrorum communium plura genera, quin etiam cryſtallos montanas plures, in quibus tamen quid diſcriminis notatu maxime dignum invenerim, dicam inferius; immo etiam ubi diverſa vitra inter ſe compararem per angulum vitreum variabilem; quamquam multo magis notabilis, & lenta, ac evidentiſſima ſucceſſio ſemper apparuit, ubi intra vitrometrum immittebam flint, vel ſtraſs,

& eo evidentior, ac lentior, quo angulus refringens eſſet major qui tamen, ubi plus æquo eſſet magnus, ante ad maximam inſtrumenti aperturam deveniebatur, quam tota inverſio deſineret. Verum ante ipſum phœnomenum adjectis ſchematis explicabo, quam clariſſime potero, tum quæ inde conſectaria deducantur, evolvam.

20. Ne tamen res complicatior evadat, adhibebo colores tres tantummodo, ut rubeum, ac violaceum extremos, & viridem medium, quos in fig. 1. deſignabo litteris R, W, V, quæ autem dicentur de ipſis, intelligenda erunt de aliis ternis quibuſcumque.

21. In fig. 1. refert B imaginem naturalem albam, in qua omnes colorati circuli conjuncti exhibent colorem album, quæ quidem imago remanet æque commixta, & alba, ubi radius tranſit per inſtrumenti feneſtras vitreis laminis tenuibus munitas æque craſſis in poſitione quacunque laterum, & ſi latera ſint parallela, etiam infuſa aqua. Adducto latere inſtrumenti ita, ut habeatur angulus aqueus refringens ſurſum obverſus, deſcendit imago in locum A, ſed rubeus circulus (circulos nominabo, & eoſdem expreſſi in ſchemate, licet ob obliquum incurſum in parietem circuli ſinguli abeant in ellipſes nonnihil oblongas) minimam omnium refractionem paſſus minime omnium deſcendit, rum viridis infra ipſum, ac violaceus omnium maxime deprimitur. In medio ex omnium commixtione efformatur albedo, ſolus rubeus in ſupremo margine apparet purus, violaceus ſolus purus in imo, viridis nuſquam purus, niſi circa lateralem marginem per ſpatiolum fere prorſus inſenſibile.

22. Abducto latere mobili, & accedente ad paralleliſmum, aſcendit ſpectrum marginibus eodem ordine coloratis, donec in ipſo paralleliſmo uniantur ſimul omnes in B: continuato motu, & angu-

angulo aqueo in contrariam partem obverſo, aſcendit ſpectrum in C, ubi circulis inverſo ordine poſitis violaceus tenet marginem ſummum, rubeus imum, viridi poſito in medio. In utraque poſitione violaceus omnium maxime refractus, omnium maxime a naturali ſua ſede recedit; quam ob cauſam per paralleliſmum tranſeundo refractionibus omnibus correctis, invertitur ſpectrum tranſeundo per albedinem efformatam a conjunctione ſimultanea colorum omnium.

23. Series imaginum *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g* in eadem fig. 1. exhibet inverſionem ſpectri longe alia ratione peractam, ubi priſma ex flint immiſſum eſt in aquam. Imago naturalis, quæ ante immiſſum priſma, lateribus inſtrumenti exiſtentibus parallelis, erat alba e regione B, immiſſo priſmate, ſtatim deſcendit ad locum *a*, ubi ut in A color rubeus omnium maxime eminet, violaceus omnium maxime deprimitur.

24. Aperto magis inſtrumento, auctoque idcirco angulo aqueo, aſcendit ſpectrum & tranſit per locum naturalem in *b*, ſed ibi colores ſuos non amittit. Prius animadvertitur adveniens ad locum marginis ſummi naturalis margo ſummus rubeus, tum ad locum marginis imi naturalis margo imus violaceus, quod indicat ad locum naturalem advenire prius circulum rubeum, tum viridem, ac demum violaceum.

25. Creſcente adhuc angulo aqueo aſcendit imago ſupra locum naturalem in *c* manente adhuc eodem colorum ordine, ubi jam rubeus magis diſtat a loco naturali, quam violaceus, magis nimirum, quam ille, a ſua naturali directione detortus, tamquam ſi majorem refractionem paſſus eſſet, quam violaceus, quamquam & in aqua is quidem minorem refractionem ſit paſſus, & in vitro, cujus refractionem in eo ſtatu aqua pluſquam correxit, elevato utroque colore pluſquam eos vitrum deprimat, ſed nondum

dum correxit differentiam refractionum inductam ab ipſo vitro, ut idcirco licet violaceus plus deprimatur a vitro, & plus elevetur ab aqua, quam rubeus; adhuc tamen exceſſus elevationis ſupra depreſſionem in violaceo ſit minor, quam in rubeo; quo quidem pacto præcipuum doctrinæ Newtonianæ fundamentum maneat, ſitum in majore violacei refrangibilitate, quam rubei, licet ex combinatione binarum contrariarum refractionum relinquatur major receſſus a directione naturali in colore rubeo, quam in violaceo: quamquam hoc ipſum phœnomenum cum priore imaginis *b* partem aliquam Newtonianæ doctrinæ evertit, ut innui num. 16., & de quo fortaſſe aliquid inferius.

26. Inverſio ſpectri per ulteriorem aperturam fit abeundo ab imagine *c* per *d*, *e*, *f* ad *g*. Primum nimirum in *d* conjungitur rubeus cum viridi, violaceo adhuc depreſſo infra utrumque: tum ipſe rubeus unitur in *e* cum violaceo, eminente viridi jam puro, & orto ex illorum commixtione in parte ima purpureo violaceo: deinde in *f* rubeus in fundo jam habetur purus, violaceo, & viridi prorſus permixtis, ac demum in *g* colores ordine contrario diſpoſiti ſpectrum exhibent prorſus inverſum, ut in C.

27. Re ipſa antequam extremus rubeus uniatur in *d* cum extremo viridi, poſt illam poſitionem *c* unitur cum ſingulis aliis rubeis, ſingulis aureis, flavis &c., aliis poſt alios, & ubi in *e* rubeus unitur cum violaceo, vel in *f* cum eodem viridi violaceus, non eminet in ſummo vertice color ex iis compoſitus, ſed ſimplex aliquis ex aureis in primo caſu, ex indicis in ſecundo: verum ex iis tribus, quos ſolos conſideravimus, diu ſinguli extremos tenent margines, tum bini, alii poſt alios ita conjungantur, ut primum binarium conjungatur in parte ſuperiore, ſecundum in inferiore, tertium iterum in ſuperiore.

28.

28. Conſideratis ſimul omnibus, in ſummo vertice ſemper eminet unicus puriſſimus ita, ut ad partem ſummam deveniant alii poſt alios ſinguli ex tot rubeis, aureis, flavis &c.: in parte autem ima videtur haberi ſemper ſolus violaceus poſtremus, donec ad ipſum rubeus primus adveniat, tum poſt binarium unicum extremi violacei cum extremo rubeo in ipſo fundo videtur haberi unicus ipſe rubeus cæteris binariis conjunctis inter utrumque marginem; licet ob ſummam extremorum ſimplicium debilitatem aliquamdiu in fundo appareat purpureus ille vinaceus ortus ex conjunctione margini proxima reliquorum violaceorum cum reliquis rubeis.

29. Ut rem totam mihi animo ſiſtam, concipio in fig. 2. tria fila ſub litteris *m*, *n*, *p*, quorum partes ſint tinctæ omnibus primigeniis coloribus. In filo *m* ii habent ordinem, quem habet ſpectrum ante inverſionem in fig. 1. in A, vel *c*: in filo *p* jam habetur ordo colorum ſpectri inverſi idem, qui in fig. 1. in C, vel *g*. Si filum contrahatur totum ita, ut ſine ulla flexione partes ejus omnes veluti compenetratæ per arctiſſimum ſpatiolum ſimul tranſeant; tum ex parte oppoſita explicentur, & extendantur; id filum exhibebit tranſitum per albedinem B figuræ 1. in inverſione ſpectri. Sed ſi plicetur, ut in *n*, coarctatis quidem ſpatiis, ſed non ſimul conjunctis; exhibebitur ſeries phænomenorum a ſpectro *c* figuræ 1. ad *g*. Dum extremum punctum intervalli R deſcendit infra ſummum verticem, eminebunt omnium intervallorum puncta ſingula alia poſt alia: manebit autem in fundo extremum punctum intervalli W, donec conjungatur cum extremo intervalli R; tum ipſo aſcendente intra ſpectrum, hoc ejus vices excipiet: circa illam conjunctionem margo ille imus aliquamdiu vinaceum habebit colorem ſaturum, ante quem diutiſſime violaceus purus a rubeis omnibus ſatis remotus, poſt

ipſum purus rubeus a violaceis omnibus liber apparebit. Dum autem funiculus ita plicatus invertitur, ſimul itidem contrahitur plurimum, uti ex meis obſervationibus videor deducere ita, ut in media poſitione *n* multo minus ſpatii ejus partes occupent, quam in *m*, & *p*, licet non penitus compenetrentur.

30. Hujuſmodi ſucceſſivam colorum ſuperpoſitionem obſervavi in pluribus priſmatis ex flint, ex ſtraſs Viennenſi, ex compoſitionibus ſimilibus ipſi ſtraſs alibi factis, in quibus omnibus hæc inverſio ſpectri facta eſt cum mora majore, vel minore pro diverſa vitrorum natura, & pro diverſis angulis ejuſdem vitri, ac in iis id ſemper accidit ſupra locum naturalem, uti exhibet figura 1. Eamdem autem moram inverſionis ſine tranſitu per albedinem obſervavi etiam in pluribus generibus vitrorum communium, ut etiam in crown Anglicano, ſed in iis ſemper inverſio ſpectri cœpit ante adventum ipſius ad locum naturalem, ac deſiit poſt ita, ut in ipſo loco naturali nec unio haberetur colorum omnium, nec ibidem in ſummo ſpectro extaret utervis ex extremis, ſed aliquis ex intermediis. Inverſio ſemper eſt facta eodem ordine, nimirum obtinente ſummum ſpectri verticem poſt rubeum colore aureo, tum flavo, viridi, cæruleo, ac demum violaceo, & ſemper cum puriſſimus, & pulcherrimus viridis emineret, vividiſſimus itidem, ſed admodum tenuis, habebatur in fundo purpureus ille vinaceus, qui oritur e rubeo, & violaceo conjunctis.

31. Adhibui etiam priſmatula ex cryſtallo montana tum ita ſecta, juxta præclariſſimum nuperrimum inventum ſummi viri Taurinenſis Profeſſoris Beccariæ, ut unica, tum ita, ut duplex haberetur refractio. In iis ſemper immiſſo priſmate in vitrometrum parallelis ſuperficiebus terminatum, imago deſcendit, & colores erant ſemper vividi, & lati tam in unica imagine, quam

in

in binis, licet ſuperioris imaginis margo inferior, & inferioris ſuperior conjuncti cum vivido imaginis alterius lumine (neque enim altera imago diſtabat ab altera per totam imaginis amplitudinem ob exiguos priſmatum adhibitorum angulos, & diametrum apparentem imaginis ſolaris ſine helioſtata nimis amplam, cum eo non ſatis contractam) multo minus diſtincti, & aliquando fere penitus confuſi apparerent. Aperto vitrometro aſcendit ſpectrum, & eodem ordine facta eſt inverſio tota multo ante, quam ad locum naturalem deveniretur, dum in vitro communi ea accidit circà locum naturalem, & in flint, ac ſtraſs ſupra ipſum, quod quidem maxime notatu eſt dignum, & magno futurum uſui.

32. Circa inverſionem, & potiſſimum in media ipſa inverſione ſpectri binæ imagines cryſtalli montanæ habuerunt ſemper margines admodum diſtinctos, collecta nimirum ibidem in ipſo margine in admodum tenue ſpatium omni ea colorum vi, quæ in ſolitaria refractione ipſius cryſtalli, ſi ea ſit aliquanto major, ut & diſtantia binarum imaginum ſatis notabilis evadat, per refractionis differentiam diffunditur, & gradatim deſinit ſine certo, ac vivido limite potiſſimum ex parte violacea, ex qua coloratum ſpectrum longiſſima ſerie paullatim deſinit in umbram cæcam.

33. Hæc quidem acciderunt; ubi vitra comparata ſunt cum aqua. Comparando priſma rectilineum ex flint cum mixtilineo expreſſo in fig. 23. diſſertationis, de quo in eadem num. 192., ex vitro communi Bohemico, inverſio ſpectri facta itidem eſt tranſeundo per colorem viridem, ſed eo priſmatis genere imago evadit admodum confuſa ob dilatationem ortam ex curvatura ipſius ſuperficiei, quæ imaginem etiam per rotundum foraminulum tranſmiſſam deformat plurimum, niſi foraminulum ipſum perfecte rotundum ſit, & politiſſimum habeat marginem, quod quidem in rectilineis priſmatis non accidit, in quibus per quadratum etiam,

& aſperi marginis exiguum foramen tranſmiſſa imago Solis ſatis rotunda apparet, & diſtincta; cujus phænomeni ratio facile redditur. Ubi eo priſmate mixtilineo ſum uſus, res mihi minus male ſucceſſit adhibito amplo foramine terminato per rectilineum latus ſatis longum, quo pacto rectilineum lucis ad parietem tranſmiſſæ marginem obtinebam, & utcumque diſtinctum, in quo colorum illa ſucceſſio, & potiſſimum in inverſione ipſorum colorum tranſitus ex altera parte per viridem, ex altera per vinaceum purpureum ſatis evidenter obſervabantur.

34. Poſteaquam mihi innotuit Patris Abat celebris Maſſilienſis Optici ex Minorum Obſervantium familia inventum præclariſſimum priſmatis vitrei habentis angulum mutabilem, conſtat enim binis partibus altera plano-concava, altero plana-convexa congruente convexitate cum concavitate ita, ut dum altera ſuperficies per alteram excurrit, planarum ſuperficierum altera jam magis inclinetur ad alteram, jam minus, curavi plura ejuſmodi priſmata compoſita, quæ imaginem exhibent nitidiſſimam, & diſtinctam, & quotieſcumque compararem diverſa vitra inter ſe, vidi ſemper inverſionem ſpectri factam ita, ut alii colores poſt alios remanerent ſoli in altero extremo, & ſemper ubi in eodem apparebat pulcherrimus viridis, in altero extremo habebatur purpureus ille vinaceus vividiſſimus; ſed ipſa inverſio cæteris paribus abſolvebatur citius, & colores erant minus ampli, quam ubi flint, vel ſtraſs conferebantur cum aqua. Etiam ubi applicabam ad foraminulum tria priſmata Dollondiana, quæ in Anglia coemeram, quorum bina ſunt e crown, & unum e flint, adhibentur autem juxta num. 13. diſſertationis ad uniendos colores, qui quidem per ea tranſpicienti evaneſcunt; in radio ita ad parietem tranſmiſſo apparuit ſemper in altero margine color viridis, in altero vinaceus ipſe purpureus.

35. Ad-

35. Adhibui etiam vitrometrum cum helioſtata meo, de quo paullo ante mentio eſt facta, qua methodo multo expeditior eſt obſervatio: nam eo rite diſpoſito radius Solis ad certum parietis locum dirigitur ita, ut imago ſolis occupet ſemper eamdem poſitionem, a cujus marginibus diſtantiæ ſpectri accipiuntur multo accuratiores, impedito interea omni motu & imaginis & ſpectri. Imago ipſa minor, & ſolam partem aliquam exhibens ſolaris diſci colores minus permixtos habet, quo pacto etiam in cryſtallo montana binæ imagines vel penitus a ſe invicem ſeparantur, vel obtinentur minus permixtæ. Verum imago ipſa directa evadit languidior, & minus diſtincta. Videri autem poteſt ibidem timendum etiam aliquid e majore effectu diffractionis in lumine tranſeunte prope duplicis foraminuli margines, quæ, neſcio, an etiam eſſe poſſit cauſa tenuis umbræ cujuſdam, quam in imagine directa obſervavi plerumque circa ipſius medium. Neſcio itidem, an inde etiam oriri potuerit diſcrimen aliquod angulorum, ſub quibus iidem colores appellebant ad verticem ſpectri eodem priſmate immiſſo in vitrometrum, & eodem modo ejus lateri applicato, quod patebit in ſpecimine exiguo plurium obſervationum, quod hic inferius exhibebo, quam quidem rem obſervabo diligentius, & mutatis pluribus circumſtantiis, ubi per Solem licuerit, qui a tribus menſibus jam fere perpetuo, ubicumque interea ſum commoratus, delituit.

36. Illud demum hic monendum omnino eſt, licet evidentiſſime deprehendatur in omnibus hiſce obſervationibus ſucceſſio in appulſu colorum ad ſpectri marginem, & colores ipſi alii poſt alios puriſſimi, ac nitidiſſimi appareant; adhuc tamen ipſum limitem inter binarum ſpecierum colores non niſi admodum craſſa æſtimatione deprehendi poſſe: ita enim rubeus ſenſim degenerat in aureum, ac flavum parum admodum diſcrepantes a ſe invi-

cem, ita hic in viridem, viridis in cæruleum, ac indicum, & violaceus ipſe, qui iis ſuccedit, ita initio inſenſibilis eſt, ut diu hæreat, opus ſit ante, quam quis ſe determinet ad exiſtimandum, mutationem ab altero ad alterum jam eſſe factam. Id quidem etiam Newtono accidit in dividendo ſpectro ad eruendam illam ſuam analogiam colorum cum ſono, qui non ita de limitibus certus, & ſuos, & amicorum oculos ad eam rem ſæpius adhibuit. Id ipſum ſemper expertus ſum etiam ipſe & per me ſpectrum aſpiciens, & plures ſimul amicos adhibens. Alii novum colorem jam ortum in illo ſummo vertice arbitrabantur, dum alii adhuc veterem agnoſcerent, ac ſi idem vitrometri continua diductione quemdam colorem ſuboriri cenſeret, obſervato, & ſcripto angulo vitrometri, tum eodem contracto ad obſervationem iterandam; ejuſdem oculi judicio plures obſervationes factæ habebant ſæpe diſcrimen 20, 30, & quandoque etiam 40 minutorum in exhibendo angulo vitrometri debito limiti inter proximos ejuſmodi colores. Quamobrem plures accepi ejuſmodi obſervationes, & inter ipſas medium arithmeticum de more. Sed adhuc ante, quam per longam dierum ſerenorum ſeriem earum ingentem numerum cum pluribus combinationibus inſtituere mihi liceat, nonniſi ſpeciminis loco hic exhibebo determinationes nonnullas, ex quibus tamen evidentiſſime patebunt plura, quæ magno uſui eſſe debent in Optica, & quæ iis propoſitis perſequemur.

§. II.

Specimen obſervationum, earum in primis, quæ pertinent ad ſucceſſivam colorum congruentiam cum mora in inverſione ſpectri.

37. Priſma, quod in Anglia acceperam, ex flint immiſi in vitrometrum, rite ante explorato & ipſius vitrometri paralleliſmo

mo ad habendum certum numerationis initium, & priſmatis angulo. Hujus anguli chordæ methodo in diſſertatione expoſita num. 176 ad radium 250 obvenerunt iteratis obſervationibus 102, 103, 101 ½, 102, 101, quorum medium 101. 9 exhibet angulum 23°. 31′. Paralleliſmus vitrometri accuratiſſime obvenit in eodem ſemper loco; nam is ſine ulla dubitatione definitur intra unum, vel alterum minutum. Latus priſmatis erat applicatum lateri primo vitrometri excipienti radios ad perpendiculum prope foraminulum feneſtræ ſine helioſtata. Obvenerunt autem hujuſmodi obſervationes, e quibus angulus aquei priſmatis facile invenitur additis ſimul angulo vitrometri, & angulo priſmatis juxta num. diſſertationis 196.

Angulus priſmatis e flint 23°. 31′	Angulus vitrometri.
Correcta refractio rubei primi — — — —	25°. 1′.
Correcta refractio violacei poſtremi — — —	25. 48.
Rubeus deſiit in vertice — — — — —	38. 30.
Cœpit ibidem viridis — — — — — —	41. 4.
Deſiit viridis — — — — — — — —	43. 47.

38. Poſt viridem apparuit cæruleus, ſed ad violaceum deveniri non potuit, cum vitrometrum ſatis aperiri non potuerit: patet autem, quantì colores adhuc fuerint, ubi imago colorata appulit ad locum naturalem, cum oportuerit ab acceſſu rubei ad locum naturalem adhuc aperire vitrometrum per 47′, ut ad locum ſuum violaceus adveniret. Spectri inverſio facta eſt tanto ſupra locum naturalem, ut rubeus in ſummo vertice eſſe non deſierit, niſi poſt alios gradus 13 ½ aperturæ vitrometri ab ejus appulſu ad locum naturalem. Toto intermedio tempore rubeus erat omnium maxime a loco naturali remotus, nimirum ab actione conjuncta vitri, & aquæ maximam omnium refractionem eſt paſſus: facta autem eſt inverſio tam lente, ut a poſtremi rubei deſcenſu

infra

infra aureum ad deſcenſum poſtremi viridis interceſſerint plures, quam quinque gradus aperturæ. Quanto plures eſſent, ſi poſſet obſervari, quando primus rubeus incipiat deſcendere infra contiguos rubeos, quod immediate obſervari non poteſt, & ſi haberetur non ſolum apertura vitrometri uſque ad primi violacei aſcenſum, ſed uſque ad poſtremi incipientis emergere ſupra ſibi proximos, quod itidem obſervationem effugit.

39. Cum illo priſmate tota inverſio videri non potuerit deveniendo ad violaceum, ſelecta ſunt priſmata minoris anguli, ut nimirum ipſa inverſio citius fieret ob refractionem minorem, & quidem adhibita ſunt ex flint, ex vitro Bohemico communi, & ex cryſtallo montana ita ſecta, ut duplicem haberet refractionem. Eodem autem pacto ſingulorum latera applicata ſunt primo lateri vitrometri, & radius admiſſus directione ad ſenſum perpendiculari ipſi ſine helioſtata. Diligenter determinati eorum anguli per plures obſervationes, ut in ſuperiore priſmate eſt præſtitum, ac inventi ſunt ii, qui ipſis hic adſcribuntur. Omiſſa hic eſt accuratior determinatio adventus ad locum naturalem in prioribus binis: ea in primo accidit circa aperturam vitrometri graduum 12, in ſecundo circa 10. In tertio accurate eſt notatus appulſus limbi ſuperioris imaginis utriuſque ad locum naturalem, qui extitit pro imagine ſuperiore aperto vitrometro ad 8°. 51′, pro inferiore ad 9°. 25′.

	Apertura vitrometri pro		
	Flint	Bohem.	Cryſt.
Rubeus deſiit in vertice	19°. 50′.	8°. 27′.	3°. 55′.
Cœpit ibidem viridis	21°. 0′.	8°. 40′.	4°. 27′.
Deſiit viridis	23°. 42′.	9°. 11′.	
Cœpit apparere violaceus	25°. 52′.	11°. 15′.	6°. 2′.

40.

40. Inverſio facta eſt hic etiam in flint poſt tranſitum per locum naturalem, in communi Bohemico cœpit ante, & deſiit poſt eum appulſum, in cryſtallo eſt abſoluta tota ante appulſum. In hac in utraque imagine iidem apparebant ſimul colores in ſummo, licet ii in margine ſuperiore imaginis inferioris eſſent admodum diluti, commixti nimirum cum albo lumine imaginis primæ, per quam is margo traducebatur. In tota fere inverſione margines colorati in cryſtallo extiterunt tenuiſſimi, & diſtinctiſſimi, qui in reliquis binis erant adhuc ſatis ampli, licet multo arctiores quam ante inverſionem uſpiam, & multo magis arcti, quam ubi priſmata ſeorſum adhibebantur ſingula: in iis maxime arcta videbatur colorata falx utriuſque marginis, ubi viridis medius eminebat in ſummo, quo caſu in omnibus habebatur in fundo vividiſſimus, & pulcherrimus ille vinaceus purpureus. Limitem inter aureum, & flavum, inter cæruleum, & indicum nunquam determinavi ob nimis exiguum eorum colorum diſcrimen, quod limitem in hac perquiſitione ſenſibus ſubtrahit.

41. Dimenſus ſum & diametrum imaginis naturalis, & diſtantiam a ſe invicem binarum imaginum a cryſtallo tranſmiſſarum per vitrometrum ad locum naturalem. Diameter erat particularum 85, qualium diſtantia vitrometri a pariete 8360, quæ quidem diameter erat eadem in utraque e binis imaginibus a cryſtallo tranſmiſſis: diſtantia autem imaginum a ſe invicem erat partium 13 tam inter ſupremos, quam inter infimos margines, utraque autem apparebat pari lumine radiis pariter inter utramque diviſis. Illæ particulæ 85 in illa diſtantia demptis 6, quæ erat amplitudo foraminuli, exhibent diametrum apparentem Solis 32′. 40″, qualis tum eſſe debuit, & diſtantia particularum 13 exhibet diſtantiam imaginum 5′. 0″.

42. Ut eorum priſmatum qualitates refractivas ſeorſum eruerem, ſingula applicavi immediate ad foraminulum ita, ut radius in ipſas ſuperficies applicatas ingrederetur ad ſenſum perpendicularis: tum vero evadebat diſtantia horizontalis priſmatis a linea verticali, per quam ſpectrum aſcendit, particularum 8555; notabatur autem in pariete per tenuem lineolam tam limbus ſuperior quam inferior ſpectri, & ſtatim remoto priſmate notabantur itidem bini limbi imaginis naturalis. In cryſtallo montana aſſumpti ſunt bini limbi imaginis ſuperioris, & limbus inferior inferioris. Aderat in pariete linea horizontalis reſpondens foraminulo, & linea verticalis, ambæ diviſæ in biſcentenas ex illis particulis. Hinc facile deinde aſſumi potuerunt limborum diſtantiæ a recta horizontali, acceptis circino diſtantiis a proxima diviſione: porro alter imaginis naturalis limbus erat depreſſus infra horizontalem ipſam, qui notatur ſigno negativo præpoſito. Pro ſingulis priſmatis bini ejuſmodi numeri hic inveniuntur pertinentes ad imaginem naturalem, & bini pro ſpectro, qui in cryſtallo pertinent ad imaginem ſuperiorem; ſed in ea ante ipſos habetur tertius pertinens ad inferiorem marginem inferioris imaginis.

	Diſtantiæ a linea horizontali pro		
Imaginis directæ	Flint 15°. 32′,	Bohem. 15°. 40′,	Cryſt. 13°. 6″
Limbus inferior	— 69	— 36	— 41
Limbus ſuperior	+ 16	+ 47	+ 45
Spectri			
Limbus infimus			1104
Limbus inferior	1342	1284	1124
Limbus ſuperior	1498	1421	1238

43. Ex hiſce numeris erui facile poſſunt qualitates refractivæ earum ſubſtantiarum, & quidem erui poſſent etiam diſtractivæ rubei a violaceo; ſed & exigui anguli nimis exiguam refractionum

ctionum differentiam pariunt, in qua errores exigui obſervationis ipſius ingentem in conſectaria errorem inducunt, & violacei limes æſtimari, meo quidem judicio, ſatis accurate vel ægre poteſt, vel potius omnino non poteſt, uſque adeo protenditur ſenſim extenuatus uſque ad umbram. Majore fortaſſe etiam obſcuritate indigeret ejusmodi obſervatio, ut nigro panno obductis parietibus, licet ego quidem ſatis omne aliud lumen a conclavi removerim præter illud, quod ab ipſo priſmate, & ab internis machinulæ partibus reflectebatur irregulariter.

44. Eodem priſmate e flint obſervationes alio die inſtitui eaſdem illas, quæ pertinent ad inverſionem imaginis cum hoc ſolo diſcrimine, quod ejus latus non applicavi lateri ipſius vitrometri, ſed baſim collocavi ſupra illius baſim, relictis ita binis priſmatis aqueis, altero inter primum vitrometri latus, & faciem priſmatis æqualem dimidio ipſius priſmatis angulo, alterum inter priſma, & latus vitrometri mobile: tum obtinui ſequentes numeros acceptos de more medios inter plures obſervationes, quæ mihi, & amico mecum æſtimanti eo die obvenerunt minus diſcordes, ut ſæpe intra quatuor, vel quinque minuta conſpirarent. Erant autem hujuſmodi:

Angulus priſmatis e flint 15°. 32′	Angulus vitrometri
Rubeus deſiit in vertice — — — — — —	19°. 2′.
Cœpit ibidem viridis — — — — — —	20. 4.
Deſiit viridis — — — — — — — —	22. 42.
Cœpit violaceus — — — — — — — —	26. 11.

45. Alio autem die adhibui helioſtatam meum, quem ita collocavi inter foraminulum, & parietem, ut imaginis pars per ipſius foraminulum ſecundo transmiſſa tangeret ſuperiore ſuo limbo rectam horizontalem, ſiniſtro verticalem, diſtaret autem vitrometri Punctum, e quo radius egrediebatur, ab illa rectarum interſectione particulis 5000. Ita collocato helioſtata, & ima-

gine, quæ per feneſtræ foraminulum tranſmittebatur, ita directa ſpeculo identidem inclinato per machinulæ axes, ut foraminulum ipſius ſemper comprehenderet intra ſe; imago tranſmiſſa per hoc ſecundum foraminulum, ſive directa, & naturalis, ſive refracta, & in colores inducta nullum unquam habuit motum inter obſervandum, quod ſi ea æque vivida, ac diſtincta eſſet, commodiſſimum ſane accideret. En numeros eo pertinentes.

	Diſtantia partium
Foraminuli feneſtræ ab interſect. linear. in pariete	8557.
Vitrometri ab eadem	5000.
Diameter foraminuli feneſtræ	6.
Diameter foraminuli helioſtatæ	11.
Diameter imaginis directæ eo tranſmiſſæ	35.

46. Paralleliſmus vitrometri, a cujus obſervatione ſemper exordior, ne, ſi quem motum habuerit machinula me inſcio, in errorem inducar, ſemper eodem mihi rediit ſine ullo diſcrimine ne unius quidem minuti: inveni ſemper indicem advenire ad + o. 55′, quæ minuta 55 ſemper a gradibus inter obſervandum notatis detraxi ad habendos angulos vitrometri, quos hic exhibeo, & ſupra exhibui.

47. Vitrometri latus fixum diſtabat nonnihil a foramine helioſtatæ, ut imago a prima vitri primi ſuperficie reflexa, directe ad ſenſum rediens ad ipſum foramen, indicaret radii ingreſſum ad ſenſum perpendicularem primæ ſuperficiei. Ac primo quidem obſervationes inſtitui cum aqua ſola ad habendam ejus qualitatem refractivam, & notavi altitudines ſupra horizontalem lineam utriuſque limbi ſpectri aſcendentis ad latus lineæ verticalis

Angulus vitrometri	Limbus infer. rub.	Limbus ſuper. viol.
28°. 0′	921.	987.
32. 0	1126.	1206.
34. 0	1217.	1307.

48.

48. Illæ altitudines circino pluribus vicibus aſſumptæ a diviſione lineæ verticalis proxima, ex parte coloris rubei marginis imi, ex qua margo ipſe eſt multo magis terminatus, atque diſtinctus, congruebant intra unam particulam, ex parte violacea intra pauciſſimas, adhibito ferme eodem ſemper oculi judicio, ſed violaceorum tenuiſſimorum, & qui jam ſatis diſcerni non poterant, videbatur adhuc multo longius protendi.

49. Reducto iterum vitrometro ad paralleliſmum, immiſſa ſunt in aquam bina priſmata ſuperiora ex flint, & communi Bohemico alterum poſt alterum appplicando latus priſmatis ad latus immobile vitrometri, ut radius in ipſum priſma ingrederetur ad perpendiculum indicatum a congruentia imaginis a prima ſuperficie reflexæ: ſpectro deſcendente ad latus lineæ verticalis in pariete, notatæ ſunt depreſſiones utriuſque marginis ipſius infra lineam horizontalem, tum aperto inſtrumento appulſus ad locum naturalem in flint, & in utroque ſeries angulorum inverſionis ſpectri, quæ in ſecundo cœpit ante appulſum ad locum naturalem, & deſiit poſt ipſum. Differentiæ maximæ inter plures determinationes angulorum aperto, & clauſo vitrometro uſque ad judicatam coloris mutationem in ſummo ſpectro fuerunt pro flint in fine rubei minutorum 4, in initio viridis uſque ad 40, ubi idcirco ad eliciendum medium ſunt adhibitæ plures, in fine rubei 21, in initio violacei 11: pro vitro communi, ubi citius res peragitur, obvenerunt differentiæ minores: en obſervationes ipſas.

Depreſſiones infra lineam horizontalem exiſtente ut ſupra
Diſtantia vitrometri ab interſectione linearum — — — 5000.

	Pro imag. directa: pro Flint 15°. 32′:	pro Bohem. 15°. 40′.
Limbi ſuper. rubei	0. 339.	251.
Limbi infer. violacei	35. 393.	292.

	Anguli Flint	vitrometri Bohem.	
Rubeus ad locum naturalem	11°. 22′.		
Violaceus ad locum naturalem	11. 49.		
Rubeus deſiit in vertice	17. 41.	7°. 15′.	
Cœpit viridis	19. 36.	8. 23.	
Deſiit viridis	21. 49.	9. 56.	ad loc. natur.
Cœpit violaceus	26. 3.	13. 45.	

50. Videbimus jam ſequentibus paragraphis, quid ex hiſce obſervationibus, & potiſſimum ex illa mora inverſionis ſpectri deducatur. Alias obſervationes aliis methodis inſtitutas, ſaltem aliquot (earum habeo ingentem numerum) exhibebo fortaſſe inferius.

§. III.

Animadverſiones nonnullæ in propoſitas obſervationes.

51. Sub ipſum finem paragraphi 1. illud monui, me expectare ſerenorum dierum ſeriem adhabendum ingentem obſervationum numerum (*b*), quæ admodum neceſſariæ ſunt ad efformandum certum aliquod, & ſtabile judicium in re tam lubrica, atque difficili, ubi æſtimatione quadam incerta, & craſſa eſt opus, cum alii colores in alios ita ſenſim degenerent, ut circa limites diu hærendum ſit. Tres obſervationes occurrunt ſuperiore paragrapho inſtitutæ eodem priſmate immiſſo in idem vitrometrum, quæ inter

(*b*) Aliis ſubinde diſtractus & curis, & ſtudiis hujusmodi obſervationes prætermiſi, quæ & cœlum ſerenum ſimul, & otium requirunt, quorum alterum cum ſine altero occurrat ſæpe, res admodum facile in longum trahitur plus æquo.

inter ſe non ſatis accurate conveniunt, prima numero 39, ſecunda numero 42, tertia numero 49. Hoc tantum inter ipſas habetur diſcrimen, quod in prima, & tertia obſervatione latus priſmatis erat applicatum lateri vitrometri, adeoque habebatur unicum aquæ priſma ad latus vitrei, in ſecunda erant duo priſmata aquea hinc, & inde a vitreo: at prima diſcrepabat a tertia in eo, quod in illa habebatur radius tranſmiſſus per unicum foraminulum in tertia per duo, adhibito nimirum meo helioſtata. Præterea cum diverſis diebus inſtitutæ ſint obſervationes, & in conclavi habente caminum in hyeme, aeris conſtitutio potuit eſſe nonnihil diverſa, & in aqua itidem, uti ſuperius indicavi, fortaſſe diſcrimen aliquod extitit.

52. Ut viderem, an in tranſitu per foramen helioſtatæ ex diffractione habita fuerit inflexio aliqua radiorum ad imaginem directam tendentium verſus ejus margines, contuli inter ſe magnitudines foraminum, & imaginis naturalis, ubi ſimul obtinui, quam partem diametri ſolaris tranſmiſerit helioſtata. Elementa calculi habentur num. 45.

53. Sit enim in fig. 3., ut in 22 diſſertationis, CD foramen feneſtræ A B, I K foramen helioſtatæ E F, N O imago in pariete L M efformata a radiis D I N, C K O ſe interſecantibus in T. Ducta ex C recta parallela D N, quæ occurrat in V, & X rectis E F, L M, erunt I V, N X æquales D C, & angulus N T O, qui exprimit partem diametri apparentis comprehenſam ab imagine N O, æqualis angulo O C X. Erit autem C K. C O:: K V. O X, & ob angulum C X O proxime rectum radius ad ſinum anguli O C X, ut C O ad O X. Nimirum habebuntur bina theoremata, quæ rem perficiunt. Primo. *Ut diſtantia feneſtræ ab helioſtata ad diſtantiam ejusdem a pariete, ita ſumma diametrorum foraminum helioſtatæ, & feneſtræ ad ſummam diame-*

metrorum imaginis, & foraminis feneſtræ, qua ſecunda diametro detracta a ſumma inventa, invenietur diameter imaginis. Secundo. *Ut diſtantia feneſtræ à pariete ad ſummam diametrorum imaginis, & foraminis feneſtræ, ita radius ad ſinum partis diametri apparentis Solis incluſæ in imagine.*

55. Adhibitis numeris, qui habentur num. 45., habebitur in primo theoremate $8557 - 5000 = 3557$ ad 8557 ita $11 + 6 = 17$ ad quartum, qui provenit 41. Demendo ab eo diametrum foraminis feneſtræ $= 6$, relinquuntur 35 pro diametro imaginis, quæ eſt ipſa obſervata diameter. Quamobrem radii ad marginem imaginis pertinentes non ſunt intorti per diffractionem in ſecundo foramine, licet tenuis umbra, quæ plerumque apparet circa medium foramen juxta num. 35, videatur debere ortum ducere ab aliqua ſaltem exigua inflexione radiorum tranſeuntium per medium. Radii nimirum per diffractionem aliquanto plus intorti jam in tanta diſtantia ſenſum effugiunt. Ex ſecundo autem theoremate erit, ut 8557 ad $35 + 6 = 41$, ita radius 100000 ad 478 ſinum 16′. 27″, quæ erit pars diametri apparentis Solis comprehenſa ab imagine, nimirum paullo plus, quam dimidia ea diameter.

55. Quoniam radii, qui tendunt ad margines imaginis directæ, nullam flexionem patiuntur in tranſitu per ſecundum foramen, videtur inde conſequi illud, eos radios tranſeundo per vitrum, & aquam debere eodem modo diſſolvi, quo ubi adveniunt ſine helioſtata immediate a primo foraminulo, & diſcrimen, quod habetur inter obſervationem primam, ac tertiam, aliunde repetendum eſſe. Diſcrimen aliquod inter primam, & ſecundam haberi potuit ex diverſa applicatione priſmatis: diſcrimen inter omnes tres, ſed admodum exiguum fortaſſe oriri potuit a diſcrimine in conſtitutione aeris, & in aqua, ſi forte non ex eo-

dem

dem puteo eſt hauſta. Verum id vel totum, vel pene totum videtur debere tribui inclinationi nonnihil diverſæ radii ingredientis, & diverſo diverſis diebus oculorum judicio in incertis limitibus. Prima cauſa non habetur in caſu helioſtatæ, quam ob rem videtur præferenda obſervatio, quæ fit ejus ope: verum in imagine per ipſum tranſmiſſa illud omnino accidit, quod vis luminis eſt minor, uti experienti patebit, cujus quidem & ratio facile redditur. Hinc videtur fieri debuiſſe, ut in ejus uſu rubeus, qui eſt vividiſſimus, deſierit in vertice apparere citius, & violaceus, qui eſt languidiſſimus, cœperit apparere ſerius: nam exigua mutatio anguli incidentiæ in ingreſſu videtur exiguum diſcrimen afferre poſſe in angulo, qui faciat eumdem effectum in ordine ad colorem in vertice apparentem. Sed longior obſervationum ſeries variatis circumſtantiis rem ipſam determinabit multo certius.

56. Quidquid autem ſit de hoc non ita magno diſcrimine inter obſervationes, in iis omnibus illud deprehenditur, conjunctionem colorum omnium nunquam haberi in hiſce ſubſtantiis, nunquam album prodire radium, ſed colores uniri alios poſt alios, ſicuti expoſuimus paragrapho primo, & quidem ſatis longo intervallo anguli variabilis durare inverſionem ſpectri. Videbimus autem inferius, quomodo inde inferatur rationem qualitatum diſtractivarum, ſive $\frac{dM}{dm}$ in aliis colorum binariis eſſe longe aliam reſpectu ſubſtantiarum refringentium earumdem; unde fiat, ut teleſcopia duplicis objectivi non poſſint devenire ad illam perfectionem, quæ in iis ſperabatur, niſi forte inveniantur ſubſtantiæ, in quibus ea ratio ſit eadem pro omnibus binariis. Inde autem deducemus itidem, relationem colorum ad diviſionem monochordi, quam Newtonus ſibi viſus eſt inveniſſe, non habere locum

cum generaliter in natura, quæ fortaſſe nuſpiam eſt accurata, & quo pacto per plures heterogeneas ſubſtantias, ſive per objectivum triplex multo major ſperari poſſit teleſcopiorum perfectio.

57. Interea comparando inter ſe obſervationes numeri 39, & initium num. 40, patet illud, inverſionem ſpectri factam eſſe in flint poſt appulſum ad locum naturalem, in vitro communi circa ipſum appulſum, in cryſtallo ante ipſum. Inde facile colligitur, rationem qualitatis diſtractivæ ad refractivam eſſe majorem in flint, quam in aqua, fere æqualem in vitro communi, minorem in cryſtallo. Quando enim imago devenit ad locum naturalem, fit æqualis refractio aquæ, & priſmatis immiſſi: quando ea eſt ſupra locum naturalem, refractio aquæ eſt major, ea enim efficit refractionem ſurſum: quando ea eſt infra, refractio aquæ eſt minor: eſt autem diſtractio æqualis in utraque ſubſtantia ibi, ubi fit inverſio ſpectri, quæ nimirum ibi conjunctis coloribus fit nulla, altera alteram corrigente. Quare ubi hæc correctio accidit ſupra, ut in flint, eadem quantitas diſtractionis convenit minori refractioni vitri, quam aquæ; ubi circa locum naturalem, ut in vitro communi, eidem; ubi infra, ut in cryſtallo, majori: adeoque pari refractione prima ſubſtantia plus diſtrahit, quam aqua, ſecunda fere æque, tertia minus. Et id quidem accidet in reliquis omnibus refractionibus exiguis, in quibus rationes decurtationis ſinuum ſunt quam proxime ut decurtationes angulorum; nam in angulis ſatis magnis, qui ad ſatis magnas refractiones requiruntur, poſſunt decurtationes ſinuum eſſe æquales abſque eo, quod decurtationes angulorum æquales ſint, in quo caſu æqualitas diſtractionis non erit conjuncta cum æqualitate refractionis, licet in minoribus angulis earumdem ſubſtantiarum eæ æquales ſint, qua de re fortaſſe nonnihil infra.

58.

58. Inde autem eruitur primo illud, immiſſo in aquam vitrometri priſmate quovis, & invento loco inverſionis ſpectri, ſtatim conſtare, an id ſubſtantiæ genus ſit aptum ad efformanda objectiva vitra colores conjungentia una cum vitro communi. Si inverſio ſpectri fiat circa naturalem ſitum imaginis; non erit idoneum id genus ſubſtantiæ, ſed referendum erit ad vitra communia. Non poterit per ipſum conjunctum cum vitro communi corrigi differentia refractionis, niſi ipſa refractio corrigatur, adeoque non poterit effici ex ipſis objectivum, quod radios ad axem detorqueat, & imaginem objecti efformet in foco, nec vero detorqueat inæqualiter, ſeparando idcirco radios, & exhibendo ſeriem focorum oblongam cum aliqua confuſione imaginis non collientis in unico puncto omnes radios heterogeneos egreſſos ex unico objecti puncto. Si autem inverſio fiat multo ſupra, vel multo infra, erit quidem idoneum, verum cum hoc diſcrimine, quod in primo caſu ex ea ſubſtantia debebit fieri lens concava, ex vitro communi convexa, & in ſecundo ex ea ſubſtantia lens convexa, & e vitro communi concava: nam ut radii ab objectivo efformato ex illis lentibus conjunctis colligantur ad efformandam imaginem, debebit prævalere refractio introrſum, quæ fit a lente convexa, refractioni extrorſum, quæ fit a concava, & ſi tanto ſit major, & diſtractio illi reſpondens ſit æqualis diſtractioni reſpondenti refractioni minori lentis concavæ cum toto reſiduo exceſſus alterius refractionis ſupra alteram, diſtractiones contrariæ æquales erunt, & ſe corrigent.

59. Eæ ſubſtantiæ, quæ cum vitro communi conjunctæ poſſunt relicta refractione conjungere binos colores, poſſunt utique idem præſtare ob eamdem rationem etiam cum aqua, verum cum ipſa oportebit uti binis lentibus ex illa alia ſubſtantia, inter quas aqua incluſa ſit, vel addere e vitro quovis laminam tenuem æqua-

lis curvaturæ ex utraque parte, quæ contineat aquam adjacentem alteri lenti, quæ lamina curvaturam debebit habere illam ipſam, quæ debetur lenti aqueæ in externa ſua ſuperficie: nam aqua per ſe ipſam non poteſt ullam habere propriam figuram.

60. Multo autem magis apta erit combinatio materiæ invertentis ſpectrum ſupra cum materia invertente infra locum naturalem, quam utriuslibet cum vitro communi; quia quo majus eſt diſcrimen in ratione qualitatis diſtractivæ ad refractivam, eo minor cavitas requiretur in lente concava, & eo minus ipſa producet diſtantiam foci lentis convexæ, quæ idcirco eo minorem numerum graduum ſuæ ſphæræ debebit habere pari teleſcopii longitudine, quod quidem errores ortos a ſphæricitate minores reddet. Fieri autem debebit lens concava e priore, convexa e poſteriore materia.

61. Si e binis ſubſtantiis altera multo ſerius, altera vero multo citius ſpectrum invertat; id etiam indicio eſſe poteſt, eas binas conjungi poſſe, niſi diſcrimen proveniat a majore vi refractiva alterius, vel etiam majore angulo: nam uti patet etiam ex ipſis obſervationibus num. 37, & 39, priſma prioris ex eodem flint multo ſerius invertit ſpectrum, quam poſterioris. Oportet nimirum, ut in altera ſubſtantia ratio qualitatis diſtractivæ ad refractivam ſit multo major, quam in altera, quod ope vitrometri determinari poteſt, an accidat, comparando cum aqua tam qualitates refractivas, quam diſtractivas, ſed ea omnia per formulas multo accuratius præſtantur, de quibus applicatis ad ipſum vitrometrum agemus in ſequenti paragrapho.

62. Hic illud adnotabo præterea, ex eo genere obſervationum ſtatim etiam agnoſci, an data quæpiam ſubſtantia ſit aptior, an magis inepta, quam vitrum commune ad communia teleſcopia perfi-

perficienda per unicum objectivum ſimplex, & ad oculares non compoſitas, uti etiam in hoc teleſcopiorum novorum genere ſimplices adhiberi adhuc ſolent. Quæ ſubſtantiæ ſpectrum invertunt ſupra locum naturalem imaginis, eæ ad ſolitaria objectiva ſunt magis ineptæ; quæ infra, ſunt aptiores, atque id eo magis, quo qualitatem refractivam majorem habuerint, quia pari refractione illæ magis, hæ minus colores diſtrahunt, & major refractiva vis minorem curvaturam requirit ad eamdem foci diſtantiam. Inde vero patet cryſtallos montanas aptiſſimas eſſe ad objectiva ſimplicia, & ad oculares, cum multo minorem habeant diſtractionem pari refractione. Habent autem vim refractivam majorem, quam vitrum commune, quod facile deducitur ex obſervatione numeri 42, & poteſt facile erui etiam comparando qualitates refractivas per vitrometrum, uti patebit itidem in ſequenti paragrapho per formulas ſinuum, ac tangentium accuratas. Verum illud diligenter cavendum in adhibenda ejuſmodi cryſtallo, ut ex priſmate terminato binis pyramidibus, in quod ejusmodi cryſtallus conformatur a Natura, exſecetur lamina perpendicularis axi ipſius priſmatis, in qua poſitione juxta egregium Beccariæ inventum refractio eſt unica. In aliis poſitionibus refractio duplex turbat diſtinctionem imaginis.

63. Si quis interea vellet rationes a veris non ita remotas conſiderando angulos adhibitos in illis obſervationibus, ut proportionales ſinubus, habet in diſſertatione num. 168, & 170 hæc theoremata. *Si per bina priſmata habentia angulos exiguos poſitos ordine contrario ita tranſeat radius, ut correcta refractione prodeat cum eadem directione, cum qua advenit; erunt qualitates refractivæ expreſſæ per* $m-1$, $M-1$ *in ratione reciproca angulorum refringentium, & viceverſa:* tum *ſi per bina ejusmodi priſmata ita tranſeant bini radii heterogenei delati ſimul directione eadem communi, ut exeant*

itidem directione communi, correcta refractionum differentia; erunt qualitates diſtractivæ expreſſæ per dm, dM in ratione reciproca angulorum, & vicevers.

64. Ex num. 39 angulus cryſtalli erat 13°. 6′ = 786′, angulus vitrometri in extinctione refractionis pro imagine ſuperiore 8°. 51′, pro inferiore 9°. 25′, nimirum angulus aquæ, qui per num. 37 æquatur ſummæ angulorum vitrometri, & priſmatis immiſſi, erit pro ſuperiore 21°. 57′ = 1317′, pro inferiore 22°. 31′ = 1351′. Quare pro priore imagine ponendo *m* pro aqua, M pro cryſtallo, erit $\frac{M-1}{m-1} = \frac{1317}{786} = 1.68$, & pro poſteriore $= \frac{1411}{786} = 1.72$, quorum medium 1. 70. Ibidem autem in unione colorum, ſive correctione diſtractionis aſſumendo medium inter finem rubei, & initium violacei, habetur pro angulo vitrometri 4°. 58′, adeoque pro angulo aquæ 18°. 4′ = 1084′. Quare $\frac{dM}{dm} = \frac{1034}{786} = 1.38$ ratio multo minor prioribus.

65. Ex num. 49 angulus vitri communis Bohemici fuit 15°. 40′ = 940′, angulus vitrometri in extinctione refractionis 9°. 56′, adeoque angulus aquæ 25°. 36′ = 1536′, & proinde $\frac{M-1}{m-1} = \frac{1536}{940} = 1.63$. Aſſumendo autem pro extinctione diſtractionis medium inter initium, & finem viridis 9°. 9′, angulus aquæ 24°. 49 = 1489′, & proinde $\frac{dM}{dm} = \frac{1489}{940} = 1.58$, qui valor eſt priori proximus.

66. Ex eodem numero 49 angulus flint fuit 15°. 32′ = 932′, angulus vitrometri in extinctione refractionis pro rubeo 11°. 22′, pro violaceo 11°. 49′, adeoque pro radiis mediis 11°. 35′. Hinc

angu-

angulus aquæ 27°. 7′ = 1627′, & $\frac{M-1}{m-1} = \frac{1627}{932} = 1.74$. Pro extinctione colorum assumendo medium inter initium, & finem viridis, habebitur angulus vitrometri 20°. 42′, adeoque angulus aquæ 36°. 14′ = 2174′. Hinc $\frac{dM}{dm} = \frac{2174}{932} = 2.33$ tanto major priore.

67. Hinc obtinentur sequentes valores pro aqua & cryſtallo: vitro communi: flint

$\frac{M-1}{m-1}$	1.70	1.63	1.74
$\frac{dM}{dm}$	1.38	1.58	2.33

Ex iis vero collatis reliquis binis ſubſtantiis cum flint habebuntur eæ rationes dividendo numeros pertinentes ad flint per numeros pertinentes ad ipſas, & poſito M pro flint, m pro ipſis, erit pro flint, &

cryſtallo: vitro communi

$\frac{M-1}{m-1}$	1.02	1.07
$\frac{dM}{dm}$	1.69	1.47

68. Ex ejuſmodi formulis patet, quam idoneæ ſint combinationes utriuſque ſubſtantiæ cum flint; nam juxta num. 83 diſſertationis, ſucceſſus pendet ab inæqualitate fractionum $\frac{M-1}{dM}, \frac{m-1}{dm}$, ſive etiam $\frac{M-1}{m-1}, \frac{dM}{dm}$, quæ ſi eſſent æquales, abiret focus objectivi compoſiti in infinitum, verum anguli hic adhibiti multo ſunt majores, quam ut aſſumi poſſint ſinubus proportionales. In diſſertatione exhibitæ ſunt formulæ pro binis priſmatis, ubi radius egrediatur cum eadem inclinatione, cum qua eſt ingreſſus, quo caſu

caſu habetur refractio minima: hic proponemus formulas pro caſu, in quo radius ingrediatur in primum e binis priſmatis contiguis ad angulos rectos, quod in pleriſque e ſuperioribus obſervationibus accidit, & facile præſtari poteſt ope vitrometri, uti diximus. Poſſet ea theoria deduci e generaliore cujuſcumque inclinationis priſmatis ad priſma, ſed mihi quidem præplacet illud, ſimpliciores caſus, qui ſoli uſui eſſe poſſunt (expertus enim novi, illas alias inclinationes non niſi ſatis craſſa æſtimatione obtineri poſſe, & uſum quadrantum minorum nihil accurati exhibere, majorum habere ad eam rem applicationem difficillimam) per ſe evolvere ſimpliciore methodo; quam ingenti molimine generales formulas inquirere uſui non futuras, ut ex iis longo ambitu deducantur ea, ad quæ tanto majore compendio devenitur directo itinere.

§. IV.

De refractionibus radii ingredientis ad perpendiculum in primum e binis priſmatis conjunctis cum applicatione ad ſucceſſivam colorum unionem.

69. Theoriam priſmatum applicatam ad caſum minimæ refractionis, & ad angulos exiguos evolvi in diſſertatione §. 6. a num. 142. Hic agam de caſu, qui occurrit in uſu vitrometri expoſito ſuperioribus paragraphis, in quo applicatur latus priſmatis vitrei ad latus immobile vitrometri, & radius ingrediatur directione perpendiculari ad ipſum latus, quam, ut ſæpius expoſui, indicat reflexio rediens ad ipſum foramen.

70. Ingrediatur in fig. 4. radius DE ad angulos rectos in latus AB anguli refringentis ABC, ut aquæ, vel vitri aere circum-

cumdati, per quod tranſcurret irrefractus, & incurret in latus BC alicubi in F, ac pro continuatione itineris per FG, recedet a perpendiculo HFI per rectam FK. Erit angulus incidentiæ HFE æqualis angulo refringenti B, cum uterque ſit complementum ejuſdem EFB, ille ob rectum HFB, hic ob rectum BEF. Angulus KFI erit angulus refractus compoſitus e binis, quorum primus $IFG = HFD = B$, ſecundus ipſa refractio GFK.

71. Fiat angulus refringens $B = b$, angulus $GFK = r$, eritque e numero ſuperiore angulus refractus $IFK = b + r$. Si autem ſit m: 1 ratio ſinus incidentiæ ad ſinum anguli refracti in ingreſſu ex aere in ſubſtantiam anguli B, erit ratio in egreſſu 1 : m ex notiſſimis Dioptricæ principiis, adeoque erit 1 : m :: ſin. b : ſin. $\overline{b+r}$. Inde habebuntur pro eo caſu

$$m \text{ ſin. } b = \text{ſin. } \overline{b+r} \qquad m = \frac{\text{ſin. } \overline{b+r}}{\text{ſin. } b}.$$

72. Hæ formulæ inſervient pro vitrometro continente ſolam aquam, ubi ſi AMNC ſit vitrometrum, erit B is, quem exhibet ipſum vitrometrum & quem in obſervationibus ſuperioris paragraphi appellavimus angulum vitrometri. Per eas uſum habebunt obſervationes numeri 47: eædem autem habebunt locum etiam in obſervationibus numeri 42 habitis per priſmata vitrea applicata eodem modo ad foraminulum. Facile enim e diſtantia foraminuli, & priſmatis a pariete ac loco radii directi, & refracti in ipſo pariete eruuntur refractiones r ope tangentium, quorum valorum r etiam in ſequentibus uſus occurret.

73. Sint jam in fig. 5. bini anguli refringentes BAC, ACL ordine inverſo poſiti cum latere communi AC, uti accidit in vitrometro AMNL, ubi angulus A eſt priſmatis vitrei applicati lateri fixo AM, ACL angulus aqueus æqualis juxta num. 37. ſummæ binorum internorum, & oppoſitorum, quorum

alter BAC priſmatis vitrei, & alter B vitrometri. Incurrat radius DE perpendiculariter in latus AB, per quod tranſibit irrefractus, & incurret in F in latus AC, ubi a recto itinere FQG deflectet ad FOK recedendo a perpendiculo IFH: ſed in appulſu ad LC in O iterum, relicto recto tramite OK, recedet a perpendiculo HOP per rectam OR. Sit H concurſus mutuus binorum perpendiculorum IF, PO, & S, Q concurſus rectarum OH, OR cum DG.

74. Patet, angulum POR fore æqualem ſimul binis OQS, OSQ, quorum primus æquatur GQR, nimirum refractioni totali radii pro directione DQG habentis directionem OQR, ſecundus, cum ſit complementum ad duos rectos anguli ESO æquatur angulo B, qui ob angulos in quadrilineo BESO rectos ad E, & O, eſt itidem complementum ad duos rectos ipſius ESO. Quare ſi retento valore b pro angulo aquæ, qui eſt ſecundus refringens, dicatur a angulus priſmatis immiſſi primi refringentis, angulus vero vitrometri B, qui eſt $b - a$, fiat $= c$ & angulus POR poſtremo refractus $= y$, erit $y = c + r = b - a + r$.

75. Primus angulus incidentiæ DFI prorſus ut num. 70, erit æqualis angulo refringenti $A = a$. Primus angulus refractus erit HFO, qui dicatur x, ratio ſinus incidentiæ ad ſinum anguli refracti in tranſitu ex aere ad ſubſtantiam primi anguli ſit M: 1, ad ſubſtantiam ſecundi m: 1, & erit in tranſitu a prima ad ſecundam m: M. Quare erit m: M:: ſin. a: ſin. x, adeoque ſin. $x = \frac{M}{m}$ ſin. a.

76. Secundus angulus incidentiæ erit HOF. Is cum HFO $= x$ eſt complementum ad duos rectos tertii anguli H, cujus itidem complementum ad duos rectos eſt FCO $= b$ ob angulos in

qua-

quadrilineo HFCO rectos ad F, & O. Quare is erit $b - x$; angulus autem ſecundus refractus eſt POR $= y$. Quare erit 1 : m: : ſin. $\overline{b-x}$: ſin. y; adeoque ſin. $y = m$ ſin. $\overline{b-x}$.

77. En igitur denominationes, & formulas fundamentales omnium, quæ nobis hic occurrent invenienda, vel demonſtranda.

Angulus primus refringens priſmatis immiſſi — — — a
Angulus ſecundus aquæ — — — — — — — — b
Angulus vitrometri — — — — — — — — $c = b - a$
Refractio — — — — — — — — — — r
Angulus primus refractus — — — — — — — x
Angulus ſecundus refractus — — — — — — — y

Formulæ fundamentales

$y = c + r = b - a + r$ ſin. $x = \frac{M}{m}$ ſin. a ſin. $y = m$ ſin. $\overline{b-x}$.

78. Ex hiſce formulis facile deducitur formula numeri 71. Si nimirum aqua ſit ſola; tum erit $a = o$, adeoque $c = b$, $y = b + r$, & ex ſecunda formula $x = o$, ac ex tertia ſin. $\overline{b+r} = m$ ſin. b, ut ibidem. Deducitur autem etiam admodum facile ſolutio plurium problematum, quorum præcipua hic perſtringam. Verum in eorum ſolutione utar pluribus theorematis, quæ ſunt prorſus elementaria, & vel pertinent ad trigonometriam, vel ad methodum differentialem. Hujuſmodi ſunt, quæ ſequuntur.

79. In quovis angulo z exiſtente radio $= 1$, erit (cof. z)$^2 = 1 -$ (ſin. z)^2, ac $\frac{\text{ſin. } z}{\text{cof. } z} =$ tang. z. In quibuſvis binis u, & z erit ſin. $u \pm z =$ ſin. u cof. $z \pm$ cof. u ſin. z. Patent e trigonometria vulgari.

80. In quovis angulo z erit d ſin. $z =$ cof. $z\, dz$: patet e num. 160 diſſertationis.

81. In binis quantitatibus u, z quibuſvis eſt $d(uz) = zdu + udz$, & $d\left(\frac{u}{z}\right) = \frac{zdu - udz}{zz}$. Patet ex num. 30 diſſertationis.

82. Quæratur jam primo angulus b, qui corrigat refractionem, dato a, & datis qualitatibus refractivis expreſſis juxta num. 63 per $M - 1$, $m - 1$, adeoque datis M, m.

83. Ex prima formula fundamentali, facto $r = o$, erit $y = c = b - a$, & ex tertia $\text{ſin.}\ \overline{b - a} = m\ \text{ſin.}\ \overline{b - x}$, ſive (num. 79) $\text{ſin.}\ b\ \text{coſ.}\ a - \text{coſ.}\ b\ \text{ſin.}\ a = m\ \text{ſin.}\ b\ \text{coſ.}\ x - m\ \text{coſ.}\ b\ \text{ſin.}\ x$, adeoque $m\ \text{ſin.}\ b\ \text{coſ.}\ x - \text{ſin.}\ b\ \text{coſ.}\ a = m\ \text{coſ.}\ b\ \text{ſin.}\ x - \text{coſ.}\ b\ \text{ſin.}\ a$, quod ob $m\ \text{ſin.}\ x = M\ \text{ſin.}\ a$ per formulam ſecundam, fiet $= M\ \text{coſ.}\ b\ \text{ſin.}\ a - \text{coſ.}\ b\ \text{ſin.}\ a = (M - 1)\ \text{coſ.}\ b\ \text{ſin.}\ a$. Erit igitur $\frac{\text{ſin.}\ b}{\text{coſ.}\ b}$, ſive (num. 79) $\text{tang.}\ b = \frac{(M - 1)\ \text{ſin.}\ a}{m\ \text{coſ.}\ x - \text{coſ.}\ a}$.

84. Si anguli ſint exigui, evadunt tangentes, & ſinus proxime æquales arcubus exprimentibus angulos, & coſinus radio $= 1$, adeoque $b = \frac{M - 1}{m - 1} \times a$, ſive $\frac{M - 1}{m - 1} = \frac{b}{a}$, qualitates refractivæ reciprocæ angulorum, uti etiam num. 63 habuimus.

85. Ex formula numeri 83 etiam ex majoribus angulis datis a, & b, ac altero e valoribus M, m inveniri facile poteſt alter ex ipſis, quod quidem uſui eſſe poteſt pro obſervationibus numeri 49, ubi ſi ſemel inventus fuerit valor m pro aqua, per ſolos angulos in appulſu imaginis ad locum naturalem habetur valor M pro ſubſtantiis priſmatum immiſſorum in aquam. Verum idem valor M ex angulis, & m inveniri poteſt per obſervationem quamcumque unicam, in qua præterea notetur refractio, quod fiet per problema ſequens.

86. Quæratur ſecundo valor M ex datis m, & a, b, r in unica obſervatione quacumque.

87. Erit ex tertia formula fundamentali ſin. $\overline{b - x} = \frac{1}{m}$ ſin. y, ſive ex prima $= \frac{1}{m}$ ſin. $\overline{b - a + r}$. Datis m, a, b, r, dabitur $b - x$, & dato b, habebitur x, ac ejus ope ex formula 2 habebitur $M = \frac{m \text{ ſin. } x}{\text{ſin. } a}$.

88. Quæratur tertio per binas obſervationes factas priſmate immiſſo, ac notatis angulis vitrometri, & refractionibus uterque valor M, m ſimul. Valor a, & x manet in utraque obſervatione idem nihil mutatus a majore, vel minore apertura vitrometri. Valores b, r, y primæ obſervationis ſint b', r' y' in ſecunda.

89. Pro inveniendo M, multiplicatis in ſecunda, & tertia formula fundamentali primis membris inter ſe, & ſecundis inter ſe, fiet ſin. x ſin. y = M ſin. a ſin. $\overline{b - x}$ = M ſin. a ſin. b cof. x — M ſin. a cof. b ſin. x. Quare tranſponendo, & dividendo $\frac{\text{cof. } x}{\text{ſin } x} \times$ M ſin. $a = \frac{M \text{ ſin. } a \text{ cof. } b + \text{ſin. } y}{\text{ſin. } b}$, qui valor cum debeat eſſe $= \frac{M \text{ ſin. } a \text{ cof. } b' + \text{ſin. } y'}{\text{ſin } b'}$, erit multiplicando, & tranſponendo, ſin. b ſin. $y' -$ ſin. b' ſin. y = M ſin. a (ſin. b' cof. $b -$ cof. b' ſin. b) = M ſin. a ſin. $\overline{b' - b}$ (num 79), adeoque $M = \frac{\text{ſin. } b \text{ ſin. } y' - \text{ſin. } b' \text{ ſin. } y}{\text{ſin. } a \text{ ſin. } b' - b}$, ubi $y = b - a + r$, $y' = b' - a + r'$.

90. Pro inveniendo m ex invento M ſic licet progredi. Ex tertia formula fundamentali eſt ſin. $y = m$ ſin. b cof. $x -$ m cof. b ſin. x, ſive cum ex ſecunda ſit m ſin. x = M ſin. a, erit ſin. $y = m$ ſin. b cof. x — M cof. b ſin. a, adeoque (ſin. y + M cof. b ſin. $a)^2 = m^2$ (ſin. $b)^2$ (cof. $x)^2$, ſive (num. 79.) $= m^2$

$(\text{fin. } b)^2 - m^2 (\text{fin. } b)^2 (\text{fin. } x)^2 = m^2 (\text{fin. } b)^2 - M^2 (\text{fin. } a)^2 (\text{fin. } b)^2$, nimirum $m^2 = \frac{(\text{fin } y + M \text{ cof. } b \text{ fin. } a)^2 + M^2 (\text{fin. } a)^2 (\text{fin } b)^2}{(\text{fin. } b)^2}$

ubi licet assumere vel valores b, $y = b - a + r$, vel b', $y' = b' - a + r'$.

91. Hoc pacto per duas observationes vitrometro factas potest haberi sine ulla alia observatione valor M, & m pro illo radiorum genere, pro quo notata sint loca imaginis directæ, & refractæ in pariete ad eruendas refractiones, & notati anguli vitrometri. Verum hi valores multo facilius inveniuntur seorsum singuli per singulas observationes pro singulis substantiis factas, adhibendo formulam numeri 71, vel semel invento m pro quodam aquæ genere per unicam observationem methodo adhuc admodum simplici eruitur M per num. 86.

92. Quæratur quarto, quæ sit futura differentia refractionum binorum radiorum heterogeneorum simul ingredientium ad perpendiculum in primum prisma, posito quod pro primo radio valores sint M in primo, m in secundo angulo refringente, & pro secundo radio $M + dM$, $m + dm$, sint autem dM, dm quantitates admodum exiguæ respectu M, m.

93. In tribus formulis fundamentalibus erit constans a, b, c, reliqua omnia habenda erunt pro variabilibus, quorum variationes pendebunt ab ipsis dM, dm, & inveniri poterunt juxta regulas differentiales, valor autem quæsitus erit dr, qui erit ex prima formula $= dy$.

94. Porro ex num. 80 in secunda formula $\text{cos. } x\,dx = \text{fin. } a \times \frac{m\,dM - M\,dm}{m^2}$, vel posito $\frac{m}{M}$ fin. x pro fin. a, erit $m\,dx = \frac{m}{M} \times \frac{\text{fin. } x}{\text{cos. } x} \times \frac{m\,dM - M\,dm}{m}$, sive (num. 79) $= \text{tang. } x \left(\frac{m\,dM}{M} - dm\right)$.

95.

95. In tertia formula ex eodem num. 79 erit $\text{cof. } y\,dy = dm$ $\text{fin. } \overline{b-x} - m \text{ cof. } \overline{b-x}\,dx = \text{cof. } \overline{b-x}\left(dm \times \frac{\text{fin. } \overline{b-x}}{\text{cof. } \overline{b-x}} - m\,dx\right) = \text{cof. } \overline{b-x}\,(\text{tang. } \overline{b-x}\,dm - \text{tang. } x\left(\frac{m\,d\,\mathrm{M}}{\mathrm{M}} - dm\right))$ $= dm \text{ cof. } \overline{b-x}\,(\text{tang. } \overline{b-x} - \text{tang. } x\left(\frac{m}{\mathrm{M}} \times \frac{d\,\mathrm{M}}{dm} - 1\right))$.

96. Quare demum valor quæsitus $dr = dy = \frac{dm \text{ cof. } \overline{b-x}}{\text{cof. } y}$ $(\text{tang. } \overline{b-x} - \text{tang. } x\left(\frac{m}{\mathrm{M}} \times \frac{d\,\mathrm{M}}{dm} - 1\right))$.

97. Ibi datis angulis a, b, & valoribus M, m, $d\,\mathrm{M}$, dm, dabuntur per formulas fundamentales etiam valores x, y, adeoque & hic valor quæsitus dr, quo valore utemur hic ad plures alias perquisitiones.

98. Quæratur quinto ratio qualitatum distractivarum $\frac{d\,\mathrm{M}}{dm}$, data ratione pertinente ad refractivas $\frac{\mathrm{M}}{m}$, & angulo, in quo bini colores uniantur. In eo casu differentia refractionum dr evanescit, adeoque fit ejus valor $= 0$, quo diviso per $\frac{dm \text{ cof. } \overline{b-x}}{\text{cof. } y}$, erit $\text{tang. } \overline{b-x} - \text{tang. } x\left(\frac{m}{\mathrm{M}} \times \frac{d\,\mathrm{M}}{dm} - 1\right) = 0$, sive $\frac{d\,\mathrm{M}}{dm} = \frac{\mathrm{M}}{m}\left(\frac{\text{tang. } \overline{b-x}}{\text{tang. } x} + 1\right)$. Porro dato a datur x ex formula $\text{fin. } x = \frac{\mathrm{M}}{m} \text{ fin. } a$.

99. Si anguli sint exigui, evadit $\frac{\text{tang. } \overline{b-x}}{\text{tang } x} + 1 = \frac{b-x}{x} + 1 = \frac{b}{x}$, & fit $x = \frac{\mathrm{M}}{m} \times a$, adeoque $\frac{d\,\mathrm{M}}{dm} = \frac{b}{a}$, sive cum M pertineat ad a, & m ad b, qualitates distractivæ in ratione reciproca angulorum refringentium, uti alia methodo invenimus in dissertatione

tione juxta num. 63 pro angulis exiguis. In iis non eſt neceſſarium aliunde noſſe rationem valorum M, m, quæ requiritur in ſuperiore formula pro angulis majoribus. Ea tamen eſt adhuc admodum ſimplex, cum valor x admodum facile inveniatur per logarithmos ex a, & $\frac{M}{m}$, tum etiam $\frac{M}{m} \times \frac{tang.\ b-x}{tang.\ x}$ itidem admotum expedite. Porro calculus paullo accuratior evadet, ſi pro M, & m pertinentibus ad alterum colorem adhibeatur valor medius $M + \frac{1}{2} dM$, & $m + \frac{1}{2} dm$, ſed ſi differentiæ iſtæ ſint ſatis exiguæ, parum admodum mutabunt valores quæſitos.

100. Quæratur ſexto angulus ſecundus b, in quo colores unientur, datis angulo primo a, & valoribus $\frac{M}{m}$, $\frac{dM}{dm}$. Ex eadem ſuperiore formula $\frac{dM}{dm} = \frac{M}{m}\left(\frac{tang.\ b-x}{tang.\ x} + 1\right)$ erit $tang.\ b-x = \left(\frac{m}{M} \times \frac{dM}{dm} - 1\right) tang.\ x$, ubi invento x, admodum facile invenietur b. Multo autem facilius in angulis exiguis, in quibus fiet $b = \frac{a\,d\,M}{d\,m}$.

101. Cum vero & formularum, quas invenimus, & problematum, quæ ſolvimus, plures admodum notabiles uſus occurrant, evolvemus eorum præcipuos ſeorſum ſingulos ſequentibus paragraphis.

§. V.

§. V.

De unione colorum extra caſum refractionis correctæ etiam, ubi ratio qualitatis diſtractivæ ad refractivam ſit eadem in utraque ſubſtantia refringente.

102. Newtonus videtur omnino hunc caſum manifeſto excluſiſſe, & ſane perperam, ut ex hoc paragrapho patebit.

103. Si anguli ſint exigui, & fuerit $\frac{dM}{dm} = \frac{M-1}{m-1}$, ſive, quod eodem redit, $\frac{dM}{M-1} = \frac{dm}{m-1}$, debebunt quidem colores uniri in ipſo appulſu ad locum naturalem, nimirum diſtractio debebit corrigi ibi, ubi corrigitur refractio utriuſque e coloribus, ad quos pertinent differentiæ dM, dm, debebit ſimul deſtrui: nam e numero 99 in unione colorum eſt $\frac{dM}{dm} = \frac{b}{a}$, & ex num. 84 in correctione refractionis $\frac{M-1}{m-1} = \frac{b}{a}$, adeoque idem angulus b conjunctus cum a utrumque ſimul præſtat.

104. At ſi anguli non ſint exigui, id nequaquam accidet niſi in unico caſu, quem evolvemus, ſed alius erit angulus b, qui primum effectum præſtet, alius, qui ſecundum, etiam in caſu, in quo $\frac{dM}{dm} = \frac{M-1}{m-1}$. Nam per num. 100 poſito $\frac{M-1}{m-1}$ pro $\frac{dM}{dm}$, erit tang. $\overline{b-x} = \left(\frac{m}{M} \times \frac{M-1}{m-1} - 1\right)$ tang. x, & per num. 83 eſt tang. $b = \frac{(M-1)\,\mathit{ſin}\cdot a}{m\,\mathit{coſ}.x - \mathit{coſ}.a}$.

105. Exhibebunt quidem hæ formulæ eumdem valorem b pro caſu, in quo ſit $M=m$, ſive qualitas refractiva utriuſque ſubſtantiæ eadem, in quo quidem caſu ex utraque æquatione eruetur

tur $b=a$. Nam in prima æquatione fit $\frac{m}{M} \times \frac{M-1}{m-1} - 1 = 1 - 1 = 0$, adeoque etiam $b-x=0$, $b=x$, & ob ſin. $x = \frac{M}{m}$ ſin. $a=$ ſin. a, fit $x=a$, adeoque $b=a$. In ſecunda vero ob $x=a$, fiet tang. $b = \frac{(M-1)\,\mathit{ſin.}\ a}{(m-1)\,\mathit{coſ.}\ a} = \frac{\mathit{ſin.}\ a}{\mathit{coſ.}\ a}$, (ſive num. 79) = tang. a, adeoque $b=a$. Nimirum anguli refringentes ex eadem materia ordine contrario poſiti ſimul corrigunt & refractionem, & diſtractionem: nam inducunt binas oppoſitas ſuperficies parallelas.

106. At poſitis aliis valoribus quibuſcumque inæqualibus pro M, & m, valores b in iis æquationibus diverſi ſane obvenient, & eo magis diverſi, quo illa ratio magis diſtabit ab æqualitate, & quo major primus angulus accipietur, quod quidem ex ipſis formulis deduci poſſet, ſed multo facilius patebit ponenti numeros quoſvis inæquales pro M, & m.

107. Si ponantur numeri paſſim ab Opticis propoſiti pro vitro, & aqua, erit $M=1.\frac{1}{2}$, $m=1.\frac{1}{3}$, $\frac{M}{m} = \frac{9}{8}$, $\frac{M-1}{m-1} = \frac{3}{2}$. Hinc facto angulo vitri $a=30°$, ex formula ſin. $x = \frac{M}{m}$ ſin. a, invenitur $x=34°.14'$; adeoque ex formula prima tang. $\overline{b-x} = \left(\frac{m}{M} \times \frac{M-1}{m-1} - 1\right)$ tang. x erit $b-x=12°.47'$, & $b=47°.1'$: at ex formula ſecunda tang. $b = \frac{(M-1)\,\mathit{ſin.}\ a}{m\ \mathit{coſ.}\ x - \mathit{coſ.}\ a}$ fit $b=46°.39'$, qui quidem angulus a priore differt per $22'$, & corrigit in ea hypotheſi ille diſtractionem, hic refractionem. In eo exemplo inventum quidem eſt diſcrimen, ſed exiguum; at id aucto angulo a creſcet plurimum. Nam eo facto $=60°$ invenitur b ex prima formula $=85°.15'$, ex ſecunda $=114°.43'$ diſcrimine $29°.28'$ immani ſane.

108.

108. Newtono impoſuit fortaſſe iliud, quod in ea perquiſitione angulum vitri adhibuit non ita magnum, ne angulus aquæ plus æquo excreſceret, & in angulo non ita magno parum admodum differt angulus corrigens diſtractionem ab angulo emittente radium cum ea directione, cum qua advenit. Et hoc quidem pertinet ad illum errorem Newtoni, quem Clingeſtierna deprehendit juxta num. 10 diſſertationis, & cujus erroris generalem is admodum elegantem exhibuit geometricam demonſtrationem, quæ hic numerica pro ſingularibus caſibus deducta eſt, ſed æque ipſius Newtoni generalem affirmationem evertens, quæ illud requirit, ut ſi ſit $\frac{dM}{dm} = \frac{M-1}{m-1}$, ſive $\frac{dm}{m-1} = \frac{dM}{M-1}$, quantitas eadem in binis ſubſtantiis, debeant colores uniri ibi, ubi refractio corrigitur.

§. VI.

De diverſa in diverſis ſubſtantiis proportione, quam ſervant differentiæ valorum exprimentium rationem ſinuum demonſtrata a ſucceſſiva inverſione ipſius ſpectri, quæ evertit Newtonianam analogiam luminis cum ſono.

109. Si in omnibus ſubſtantiis proportio, quam ſervant differentiæ valorum exprimentium rationem ſinuum pro diverſis coloribus, eſſet eadem, quod quidem requirit Newtoniana analogia luminis cum ſono, deberet dM pertinens ad duos colores ad dM pertinentem ad alios duos habere eamdem rationem in omnibus ſubſtantiis, adeoque eamdem, quam dm pertinens ad illos, ad dm pertinentem ad hos. Quare valor $\frac{dM}{dm}$ eſſet in omnibus colorum

binariis idem. An id ita ſe habeat, videbimus hic ope formularum paragraphi 4.

110. Ex formula numeri 100, in qua tang. $\overline{b-x} = (\frac{m}{M} \times \frac{dM}{dm} - 1)$ tang. x, illud facile eruitur, ſi valor $\frac{dM}{dm}$ ſit idem in omnibus colorum binariis, unionem omnium colorum debere fieri ſimul in angulo ad ſenſum eodem. Si enim valores M, m conveniant radiis rubeis, & dM, dm ſint differentiæ pertinentes ad alium colorem quemvis, dummodo $\frac{dM}{dm}$ ſit ratio eadem pro omnibus, erit itidem pro omnibus dato primo angulo a idem etiam totus valor $(\frac{m}{M} \times \frac{dM}{dm} - 1)$ tang. x, cum nimirum debeat eſſe idem valor x hic adhibitus pertinens ad ipſos rubeos ob ſin. $x = \frac{M}{m}$ ſin. a. Quare & valor $b - x$ erit idem, & b idem in omnibus. Solum haberi poterit diſcrimen perquam exiguum ortum ex quantitatibus ordinis inferioris ad dM, dm in applicatione methodi differentialis ad eas quantitates non infiniteſimas reipſa, ſed ſatis exiguas, quod tamen perquam exiguum eſſe debet.

111. Cum igitur in vitrometro conjunctio diverſorum colorum non ſit habita in eadem apertura inſtrumenti, vel parum admodum diverſa, ſed in angulis per multos gradus a ſe invicem differentibus; evidens eſt, rationem $\frac{dM}{dm}$ pro diverſis binariis eſſe ſatis diverſam. Quamobrem tota illa analogia diviſionis ſpectri cum monochordo, qua Newtonus ſonorum harmoniam traduxit ad colores, omnino debet corruere. Si enim ea proportio haberet locum accurate in una aliqua ſubſtantia, ut in vitro communi, in quo ipſe dimenſiones ſuas cepit, eo ipſo non poſſet

eum

eum habere in aliis, quæ per moram lentam exhibent inverſionem ſpectri; adeoque ea non poteſt eſſe generalis quædam naturæ lex, ſed in aliqua particulari ſubſtantia poſſunt ad eam phænomena accedere caſu quodam. Cum vero is quidem ſit unus e præcipuis fructibus, quos mihi exhibuerunt obſervationes meo vitrometro peractæ, lubet in eo adhuc magis declarando immorari nonnihil.

112. Et quidem exordiendo ab angulis exiguis, in quibus res etiam ſine Geometria, & calculo in oculos incurrit; concipiamus bina priſmata e binis vitrorum generibus, ut in num. 14. diſſertationis, quorum primum commune pro ſingulis gradibus refractionis exiguæ inductæ in colorem rubeum addat minuta 2 pro violaceo, alterum, ut flint, addat 3. Si exiguus angulus (*c*) e

(*c*) Ut res unico intuitu pateat, apponam binas tabellas: in prima ſupponam, ut hic pro viridi addi dimidium ejus, quod additur pro violaceo, in ſecunda ſecus. Patebit in primo caſu uniri ſimul omnes tres prodeuntes nimirum in eodem angulo; in ſecundo unitis rubeo, & violaceo, extare viridem ad latus.

Deſignabit autem in ſingulis tabellis prima linea refractionem poſitivam priſmatis minus diſtrahentis, ſecunda negativam plus diſtrahentis, nimirum factam cum directione contraria, tertia refractionem communem factam a binis priſmatis conjunctis. In prima tabella adduntur a primo vitro colori violaceo minuta 2 refractionis pro ſingulis gradibus, viridi 1, a ſecundo vitro illi 3, huic 1 $\frac{1}{2}$. In ſecunda tabella idem præſtatur a ſecundo vitro reſpectu utriuſque, idem a primo reſpectu violacei, ſed viridi vitrum primum addit 1 $\frac{1}{3}$ pro ſingulis gradibus.

Refractio	Rubei	Viridis	Violacei
a vitro primo	+ 6°	+ 6° 6′	+ 6° 12′
a vitro 2^do	— 4	— 4 6	— 4 12
ab utroque ſimul	+ 2	+ 2 0	+ 2 0

Refractio	Rubei	Viridis	Violacei
a vitro 1°	+ 6°	+ 6° 6′	+ 6° 12′
a vitro 2^do	— 4	— 4 5 $\frac{1}{3}$	— 4 12′
ab utroque ſimul	+ 2	+ 2 0 $\frac{2}{3}$	+ 2 0

In prima tabula prodeunt omnes tres cum gradibus refractionis duobus, adeoque ſimul: in ſecunda prodeunt ſimul rubeus, & violaceus cum duobus gradibus, ſed viridis procurrit per duos trientes unius gradus.

primo inducat refractionem pro rubeo graduum 6 ; idem pro violaceo inducet 6°. 12′ : ſi autem angulus e ſecundo inducat pro rubeo refractionem contrariam = 4° , inducet pro violaceo 4°. 12′ , adeoque remanebunt pro utroque accurate 2°. Sit jam quidam color in medio ſitus , qui Newtono pro vitris communibus , quibus eſt uſus in ejuſmodi perquiſitionibus , eſt viridis ad cæruleum vergens , cui primus ille refringens angulus idcirco addet minutum 1 , & inducet in ipſum refractionem 6.° 6.′ Si idem eodem pacto eſſet in medio reſpectu ſecundæ ſubſtantiæ, haberet a ſecundo angulo contrariam refractionem 4°. 6′. Quare etiam pro ipſo remaneret refractio accurate 2°. Egrederetur igitur is etiam color ſimul cum rubeo , & violaceo , atque ab iiſdem iis angulis ſimul unirentur , quod quidem valet pro omnibus utcumque diſtantibus a rubeo , quorum differentia ſi in utraque ſubſtantia ad differentiam violacei , & rubei haberet rationem eamdem , utique unitis hiſce duobus unirentur & illi ; nam e differentiis proportionalibus , ubi una evaneſcit , reliquæ ſimul omnes evaneſcant neceſſe eſt. Cum igitur ex obſervatione conſtet colores non uniri ſimul omnes , ſed compoſito purpureo vinaceo e rubeo , & violaceo conjunctis eminere viridem , atque alios poſt alios conjungi longa ſerie in ſpectri inverſione , oportet ii non eumdem teneant locum reſpectivum in iis ſubſtantiis, & diviſio, quæ differentias valoris m, ſive ſeriem valorum dm exhibeat, in aliis ſit alia , nec ita parum diverſa.

113. Nec vero hoc in exiguis tantummodo refringentibus angulis evenire debet , ſed etiam quamproxime in ſatis magnis , cum nimirum res pendeat a differentia refractionis rubei , & violacei , quæ exigua eſt etiam , ubi tota refractio eſt ſatis magna. Ingrediatur in fig. 6. radius D C in ſuperficiem refringentem A C B, in qua , uti accidit in obſervationibus numeri 42 , & 47 radius recedat a perpendiculo , & pro continuatione itineris per C E

abeant

abeant radii extremi per rectas CF, CH, quivis ex intermediis per CG, & quadrans circuli habentis centrum in C, ac radium quemcumque, occurrat iis directionibus in E, F, G, H, ſuperficiei refringenti in B, rectæ ipſi perpendiculari in N, ducanturque perpendiculares ad CN ſinus EI, FK, GL, HM, tum ad EI perpendiculares FO, GP, HQ, quarum poſtrema occurrat rectæ FK in *q*, media autem in *p*.

114. Angulus incidentiæ communis habebit pro menſura arcum NE, anguli refracti habebunt arcus NF, NG, NH, refractiones habebunt arcus EF, EG, EH, ſinus incidentiæ erit EI, ſinus angulorum refractorum erunt FK, GL, HM, productiones ſinuum EO, EP, EQ, quæ ſi arcus EFGH fuerit ita exiguus, ut curvatura ipſius negligi poſſit, erunt proxime proportionales refractionibus EF, EG, EH: ſed ſi is fuerit aliquanto major ita, ut curvatura ſit ſenſibilis, ea proportio locum non habebit. Adhuc tamen etiam ubi tota refractio EH fuerit ingens, differentia refractionis FH erit exigua, adeoque differentiæ refractionum FG, FH erunt quamproxime in eadem ratione rectarum F*p*, F*q*, ſive ut differentiæ productionum OP, OQ, nimirum ut differentia *dm* valoris *m* reſpondens binario CF, CG ad *dm* reſpondentem binario CF, CH. Cum enim ſit IE. KF :: 1. *m*, erit $m = \frac{KF}{IE}$, adeoque illi duo valores *dm*, ut $\frac{OP}{IE}$ ad $\frac{OQ}{IE}$, ſive ut OP ad OQ. Hinc ſi bini valores *dm*, ſive OP, OQ in binis ſubſtantiis fuerint ad ſe invicem in eadem ratione; etiam arcus FG, FH erunt in ratione eadem quam proxime: nimirum ſi P fuerit in media recta OQ in utraque ſubſtantia, erit ad ſenſum etiam G in medio arcu FH, & in magnis etiam refractionibus redibit idem argumentum, quo uſi ſumus num. 112.

115.

115. Porro idem eruitur etiam e formula numeri 71, ubi habetur $m = \frac{\sin. b + r}{\sin. b}$, adeoque per num. 80 eſt $dm = \frac{\cos. b + r}{\sin. b} \times dr$, exiſtente differentia refractionis dr in ratione dm ob b conſtantem, & conſtantem itidem refractionem r primi coloris, quicumque alius cum ipſo componatur. Sunt enim eæ differentiæ refractionum dr ipſi arcus FG, FH.

116. Si radii CF, CG, CH excipiantur plano ad ſenſum perpendiculari mediæ directioni eorumdem in R, S, T, æquivalebit ea recta ad ſenſum arcui diviſo in eadem ratione, in qua eſt FGH, & erunt etiam RS, RT ad ſenſum ut FG, FH, ſive ut bini illi valores dm. Hinc ſi in ſpectro ita excepto notentur limites colorum; partes ſpectri ita diviſi reſpondentes radiis datorum generum exhibebunt valores dm pertinentes ad omnia binaria diverſorum generum quorumcumque. Si dM in una ſubſtantia ad dm in alia ſubſtantia pro quovis eodem binario habuerit rationem eamdem; etiam dM unius binarii ad dM alterius in priore erit, ut dm illius ad dm hujus in poſteriore: adeoque ſpectrum utriuſque ſubſtantiæ erit diviſum per colorum eorumdem limites proportionaliter. Si autem illa ratio $\frac{d\mathrm{M}}{dm}$ non fuerit eadem in quovis binario colorum in utraque ſubſtantia, manifeſto conſequitur, non debere diviſionem ſpectri in utraque ſervare proportionem eamdem. Quare ſi in altera ea diviſio ſit eadem, quæ in monochordo, uti Newtonus affirmat ſe inveniſſe in eo vitro, quo eſt uſus; in altera non erit eadem, ubi illa ratio eadem non ſit.

117. Cum igitur ex obſervationibus vitrometro habitis, quibus habetur conjunctio diverſorum binariorum colorum facta per angulos admodum diverſos, deducatur, rationem $\frac{d\mathrm{M}}{dm}$ pro iiſdem binariis non eſſe eamdem in binis ſubſtantiis; manifeſte deducitur

tur illud, quod num. 111 diximus, non poſſe eſſe generalem relationem illam colorum in ſpectro cum tonis muſicis in monochordo, ſed caſu fortuito in aliqua ſubſtantia habebit locum, quin illum habeat in ulla alia colores omnes ſimul non colligente, ubi cum eadem rite conjungatur.

118. Facile deducitur ex iis, quæ diximus, poſſe in ipſam rationem valorum $\frac{dM}{dm}$ pro diverſis colorum binariis inquiri per diviſionem ſpectri; ſi enim in una ſubſtantia dicatur dM pro uno binario, dM' pro alio, & in altera pro iiſdem dm, dm', habebitur ex diviſione ſpectri $\frac{dM}{dM'}$, & $\frac{dm}{dm'}$: dicatur primus valor a, ſecundus b: erit $dM = a dM'$, $dm = b dm'$, adeoque $\frac{dM}{dm} = \frac{a}{b} \times \frac{dM'}{dm'}$. Quare $\frac{dM}{dm} \cdot \frac{dM'}{dm'} :: a. b.$

119. Et quidem id ipſum habet locum non ſolum ubi, ut in ſuperiore figura, radius recedit a perpendiculo, ſed etiam ubi accedit ad ipſum, in quo res accidit paullo aliter. Eum caſum exprimit figura 7. Radius delatus per DCE accedit ad perpendiculum diſtractus per CF, CG, CH. Decurtatio ſinus EO ad differentiam OP, vel OQ non eſt ut $m - 1$ ad dm. Eſt enim $m. 1 :: IE. KF$, adeoque $m = \frac{IE}{KF}$, & inde $m - 1 = \frac{IE - KF}{KF} = \frac{EO}{KF}$: & $EO = (m-1)KE$: pro binario autem CF, CG erit $dm = \frac{IE}{KF} - \frac{IE}{LG} = \frac{IE(LG - KF)}{KF \times LG} = \frac{IE \times Fp}{KF \times LG} = \frac{mOP}{LG}$, & $OP = \frac{dm}{m} \times LG$. Quare decurtatio ſinus EO ad differentiam OP, ut $(m - 1) KF$ ad $\frac{dm}{m} \times LG$, vel habitis KF, LG pro æqualibus, ut $m - 1$ ad $\frac{dm}{m}$, & non ut

$m - 1$ ad dm. Adhuc tamen etiam ibi eſſet quamproxime OP ad OQ ut dm primi binarii CF, CG ad dm' ſecundi CF, CH, quia eſſet $OP = \frac{dm}{m} \times LG$ & $OQ = \frac{dm'}{m} = dm \times MH$, ubi valor m eſt idem, valores LG, MH proxime æquales, & remanet OP ad OQ, ut primum dm ad ſecundum, in qua ipſa ratione remanet proxime FG ad FH, & RS ad RT. Verum hic caſus immediate obſervari non poteſt, nam radius ſi ingrediatur in priſma aqueum, vel vitreum, debet inde etiam egredi, ut abeat ad diſtantiam, in qua colores ſint ſatis remoti, ut menſuræ poſſint rite capi.

120. Notandum autem hic occurrit illud, etiam ubi radii accedant ad perpendiculum, differentiam decurtationis ſinus fore ad decurtationem totalem ut dm ad $m - 1$, ſi radii diverſorum colorum habeant diverſos angulos incidentiæ, & angulum communem refractum. Si nimirum in fig. 6. rubeus, & violaceus adveniant directionibus CF, CH, & ambo refringantur per CE; erit differentia decurtationis ſinus OQ ad decurtationem pro rubeo EO, ut dm ad $m - 1$, quam rationem Newtonus cenſuit generaliter in omnibus ſubſtantiis eſſe, ut 1 ad 27. In hoc ſenſu ea eſt decurtatio ſinus, quam nominavi in diſſertatione num. 6, & ſequentibus, nimirum pro caſu, quo ſinus anguli refracti ſit idem pro utroque radio ita, ut is poſſit aſſumi pro unitate, quo caſu ſinus anguli incidentiæ exprimet valorem m pro rubeo, $m + dm$ pro violaceo. In caſu receſſus a perpendiculo habebitur productio pro decurtatione: ratio vero dm ad $m - 1$ exprimit productionem in receſſu, decurtationem in acceſſu, exiſtente communi in primo caſu angulo incidentiæ, in ſecundo angulo refracto.

121. Redeundo ad diviſionem ſpectri, ubi priſma adhibetur in poſitione minimæ refractionis, ibi etiam ex formulis in diſſertatione propoſitis diſtantiæ, quas habent in ſpectro a ſe invicem diverſa colorum binaria, ſunt ut valores dm ad ipſa pertinentes.

For-

Formula numeri 160 eſt $dm = \frac{\text{cof.}\frac{c+r}{2} \times dr}{2 \text{ ſin. } \frac{1}{2} c}$, ubi c eſt angulus priſmatis, r refractio primi coloris, $r + dr$ refractio ſecundi. Si cum eodem illo primo ut cum rubeo componantur colores diverſi ad habenda varia binaria, erit commune $\frac{\text{cof.}\frac{c+r}{2}}{2. \text{ſin. } \frac{1}{2} c}$, & remanebunt differentiæ refractionum dr, ut valores dm: ipſis autem differentiis refractionum ſunt proportionales quamproxime diſtantiæ colorum in ſpectro, ubi radius refractus in ſatis magna diſtantia excipiatur plano perpendiculari medio ductui ipſius radii. Tum enim habita pro unico puncto illa exigua parte ſuperficiei priſmatis, ex qua omnes radii egrediuntur, ipſam referet in fig. 7. punctum C, recta C E referet directionem radii incurrentis, E F, E G, E H refractiones, F G, F H differentias refractionum pertinentes ad duo binaria, quibus cum ſint proxime proportionales R S, R T diſtantiæ eorum colorum in ſpectro, erunt itidem eæ diſtantiæ proportionales ipſis dm.

122. Hinc Newtonus rationem ipſam diverſorum dm pertinentium ad initium rubei collatum cum limitibus colorum primigeniorum exquiſivit per diſtantias eorumdem limitum in ſpectro, quam invenit expreſſam ſequentibus numeris ab initio rubei ad initium aurei, flavi, viridis, cærulei, indici, violacei, ac ad finem ipſius violacei $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{9}$, 1, exprimente nimirum unitate differentiam dm pertinentem ad initium rubei, & finem violacei, quam ipſam differentiam ſtatuit pro omnibus ſubſtantiis eſſe $\frac{1}{2}\frac{1}{7}$ valoris $m - 1$ pertinentis ad rubeum, reliquis vero intermediis habentibus elegantem analogiam cum diviſione monochordi. Illa quidem numerorum progreſſio non eſt arithmetica, quod nihil aliud indicat, niſi diſtantias limitum eorumdem,

ſive amplitudines colorum in ſpectro non eſſe inventas inter ſe æquales: nec ſane video, quid faciat ad rem conſideratio diſcriminis ejus ſeriei a progreſſione arithmetica, quod vidi propoſitum in hac perquiſitione a magno ſane geometra inter cauſas errorum, qui remaneant incorrecti in theoria duplicis objectivi.

123. Porro in aſſumendis ex diviſione ſpectri valoribus progreſſionis exprimentis differentias $d\,m$, non habentur valores penitus accurati, ne in caſu quidem unicæ refractionis figuræ 6., in qua quidem facile eſt etiam determinare quantitatem erroris. Si enim ducatur chorda F H, quæ occurrat radio C G in X, & rectæ P G productæ in V, radius autem C G producatur tantundem in Y, erit R S ad R T ut F X ad F H, & O P ad O Q ut F V ad F H. Prima ratio eſt diſtantiarum in ſpectro, ſecunda valorum $d\,m$, adeoque error conſiſtit in lineola X V, quæ eſt ſecundi ordinis; nam eſt ad X G quamproxime ut G L ad L C ob ſimilia triangula X G V, G C L, in quibus anguli ad G ſunt alter complementum alterius, angulus ad L rectus accurate, ad X quamproxime; & eſt X G ad X H, ut X F ad X V. Tantillus error jure negligendus eſt, ubi a minus accurata diſtinctione limitum multo majores errores inducuntur.

124. Rationem $d\,m$ ad $m - 1$ in aliis ſubſtantiis eſſe multo majorem, in aliis minorem, id quidem invenit Dollondus; relativam poſitionem in ſpectro non eſſe eandem, adeoque analogiam illam cum monochordo non eſſe proprietatem innatam coloribus, id ex hiſce meis obſervationibus evidenter deducitur, uti oſtendimus, & id ipſum inveniſſet utique is ipſe, ſi diviſiones ſpectri in multis ſubſtantiis ſatis accurate determinaſſet, ſed re ipſa admodum difficile eſt obſervationes ejusmodi ſatis accurate inſtituere ob admodum incertos limites colorum, quorum alii in alios deſinunt ſenſim *par nuance*, non ſaltu quodam abrupto.

125.

125. Inde fit, ut diſcrimen rationum, quas habent valores *d m* pertinentes ad diverſa colorum binaria in diverſis ſubſtantiis, admodum difficile ſit definire ex ejuſmodi determinatione limitum in ſpectro. Oſtendam quo pacto in id liceat inquirere ope formularum, quas propoſui paragrapho 4, & problematum, quæ ibi ſoluta ſunt, poſtea quam oſtendero, quomodo datis rationibus diverſorum *d m*, ſive poſitionibus colorum in ſpectro inveniri poſſit, qui color debeat remanere ſolus in eo extremo imaginis ſolaris, in quo etiam in inverſione ſpectri unicus perſeverat.

126. Interea tamen notabo illud, triplicem hoc in genere haberi Newtoni errorem. Primum theoriæ, quo cenſuit, ſi ratio *d m* ad *m* — 1 ſit conſtans in omnibus ſubſtantiis, debere conjunctionem binorum colorum per eas ſubſtantias ſemper fieri ibi, ubi imago Solis ad locum naturalem redit, egreſſis radiis cum directione, cum qua ingreſſi ſunt, ſive debere corrigi ſimul & diſtractionem, & refractionem: eum errorem primus, quod ſciam, notavit Klingeſtierna, & de eo egimus numero 102. Secundus error facti conſiſtit in eo, quod cenſuerit in omnibus ſubſtantiis rationem valoris *d m* reſpondentis primo rubeo, & poſtremo violaceo ad *m* — 1 rubei primi eſſe eamdem, nimirum 1 ad 27, ex quo errore conjuncto cum primo deſperandum cenſuit de ulteriore perfectione teleſcopii dioptrici, & eum errorem deprehendit Dollondus per experimenta inſtituta in flint, & crown, quibus conjunctis multo perfectiora teleſcopia conſtruxit, & de eo egimus in diſſertatione num. 11, ubi nomen decurtationis intelligi debet juxta num. 120 hujus. Tertius error itidem facti in eo eſt ſitus, quod cenſuerit valores *d m* pertinentes ad diverſa colorum binaria in diverſis ſubſtantiis eſſe conſtanter in eadem ratione illa inducente illam determinatam diviſionem ſpectri per colorum limites, de quo errore hic egimus, quem obſervationes meo vitro-

metro inſtitutæ, & ſuperius hic traditæ in clariſſima, ni fallor, luce collocarunt, qui illud efficit, ut teleſcopia duplicis objectivi eam habere perfectionem non poſſint, quam ii ſperarunt huc uſque, qui de eo argumento egerunt, quos ego viderim, & cujus remedium a triplici objectivo repetendum cenſeo, ut infra videbimus.

127. Cæterum in hiſce tanti viri in argumento, in quo tamdiu, tam diligenter verſatus eſt, in quo tam multa tot ſæculis ante ipſum incognita tanta ſagacitate reperit, tanta diligentia explicavit, tot replicatis lapſibus miſeram humanæ mentis conditionem licet agnoſcere, erroribus in tanto etiam tam claro lumine ſemper obnoxiam.

§. VII.

De determinatione colorum, qui ſimul uniri debeant, & coloris, qui debeat extare ſolus in altero extremo ſpectri, datis angulis, & datis qualitatibus refractivis binarum ſubſtantiarum pertinentibus ad omnes colores.

128. VIdimus paragrapho 1, & 2 colores uniri alios poſt alios, & alios poſt alios eminere ſingulos in ſummo ſpectro in ipſa etiam inverſione ipſius, & in paragrapho ſuperiore vidimus id indicare diverſam in binis ſubſtantiis, quæ ibi adhibentur, ſeriem valorum $d\,m$, ſive diverſam ſeriem numerorum exprimentium diſtantias, quas habent ad ſe invicem limites colorum, ſine quo diſcrimine ante inverſionem ſpectri ſemper emineret rubeus, tum ſuccederet unio colorum omnium ſimul cum albedine, ac demum poſt inverſionem ab illo unico angulo peractam emineret violaceus. Videndum nunc, quo pacto data pro utraque ſubſtantia quali-

qualitate refractiva omnium colorum, ſive datis pro utraque valoribus m, M, & valoribus omnibus $m + d\,m$, $M + d\,M$, determinari poſſit, qui colores a datis quibuſvis angulis refringentibus earumdem uniri debeant, quibus determinatis, determinatur, ubi debeat incipere inverſio ſpectri, quo ordine peragi, ubi diſinere.

129. Aſſumpta pro unitate quavis recta habebuntur rectæ exprimentes m, & M, ac datas quaſvis $d\,m$, $d\,M$. Exprimat in fig. 8. recta A B differentiam $d\,m$ reſpondentem colori rubeo, & violaceo in altera ſubſtantia, & B C ipſi perpendicularis $d\,M$ reſpondentem alteri, ac detur in utraque diviſio reſpondens ſingulis coloribus intermediis ita, ut A D ſit valor $d\,m$ reſpondens rubeo, & cuipiam alteri colori, ut initio viridis, ac B d valor $d\,M$ reſpondens iiſdem in ſecunda, quæ diviſiones juxta num. 116 expriment diviſionem ſpectri factam per poſitionem colorum eorumdem in ipſo ſpectro pertinentem ad eas binas ſubſtantias. Ductis perpetuo rectis D E, d E parallelis ipſis B C, B A, earum concurſus E erit ad lineam quamdam continuam, quæ dabitur, data relatione poſitionis omnium punctorum D in recta A B, & omnium d reſpondentium eidem colori in recta B C. Ea autem linea continua exprimet relationem omnium valorum $d\,m$ pertinentium ad quodvis binarium colorum in prima ſubſtantia ad valores reſpondentes in ſecunda per ſuas abſciſſas A D, & ordinatas D E æquales rectis B d, quæ reſpondent in ſecunda ſubſtantia rectis A D ſubſtantiæ primæ.

130. Si dm, dM pertinentes ad colorem rubeum, & quemcumque alium eſſent in iis binis ſubſtantiis in eadem conſtanti ratione, in qua ſunt $d\,m$, d M pertinentes ad rubeum, & violaceum; linea A E C congrueret cum recta A C; eſſet enim ſemper A D. D E : : A B. B C, adeoque quivis angulus D A E = B A C,

BAC, & quodvis punctum E ſemper eſſet in recta AC. Sed ſi ea ratio fuerit pro diverſis colorum binariis diverſa, ſive diverſa ratio diviſionis rectarum AB, BC per colores eoſdem; erit E ad curvam quamdam, quæ dabitur, data relatione abſciſſarum ad ordinatas.

131. Quoniam num. 97. differentia refractionis dr binorum colorum, ad quos pertinent dm, dM, eſt $= \frac{dm \text{ cof. } \overline{b-x}}{\text{cof. } y}$ (tang. $\overline{b-x}$ — tang. x ($\frac{m}{M} \times \frac{dM}{dm}$ — 1)), aſſumendo primum rubeum pro primo ex iis duobus coloribus, & dividendo per $\frac{m}{M} \times \frac{\text{cof. } \overline{b-x} \text{ tang. } x}{\text{cof. } y}$ quantitatem, quæ pertinebit ad primum colorem rubeum ſolum, adeoque erit conſtans utcumque mutatis dm, dM, erit ea differentia ut dm ($\frac{\text{tang. } \overline{b-x}}{\text{tang. } x} \times \frac{M}{m} - \frac{dM}{dm} + \frac{M}{m}$) $= \frac{M\,dm}{m}$ ($\frac{\text{tang. } \overline{b-x}}{\text{tang. } x}$ + 1) — dM. Fiat $\frac{M}{m}$ ($\frac{\text{tang. } \overline{b-x}}{\text{tang. } x}$ + 1) = P, eritque ipſa refractionis differentia ut $P\,dm - dM$, ubi quantitas P facile invenitur, datis m, M, angulo b, & angulo a, ex quo per ſecundam formulam numeri 77 fundamentalem ſin. $x = \frac{M}{m}$ ſin. a invenitur x, adeoque & $b - x$, & admodum facile totus valor P.

132. Capiatur jam in BC, ſi opus eſt, producta, recta BF, quæ ſit ad AB, ut hic valor P ad unitatem, ſive quæ ſit = AB × P, ducaturque AF, quæ occurrat ordinatæ DE productæ, ſi opus eſt, in Q, & recta EQ intercepta inter curvam AEC, & rectam AF exprimet differentiam illam refractionum pertinentium ad primum colorem rubeum, ad quem m, M, & colorem D, ad quem pertinent differentiæ dm, dM. Erit enim 1. P : :

AB.

A B. B F :: A D = $d m$. D Q = P $d m$; cumque ſit D E = d M, erit E Q = P $d n$ — d M, ut oportebat.

133. Hinc ſi ulla chorda H I ſit parallela ipſi A F, ducanturque ordinatæ H K, I L; patet in iis angulis a, b, qui exhibuerunt inventum valorem P, debere uniri colores K, L. Si enim eæ ipſæ ordinatæ incurrant in rectam A F in R, S, erunt H R, I S æquales, adeoque æquales differentiæ refractionis eorum colorum a refractione primi rubei, & proinde ipſi æqualem habebunt refractionem, & conjungentur in ſpectro.

134. In eo caſu oportebit etiam, habeatur aliqua tangens N M parallela ipſi A F, ad quam deveniret poſitio chordæ H I motu parallelo translatæ verſus ſuum arcum, donec ipſa evaneſcat, abeuntibus punctis H, I ſimul in aliquod extremum punctum M, antequam ea directio arcum ipſum relinquat. Ducta inde ordinata M O, facile patet, colorem O fore ſolum in extremo ſpectro, qui omnium maximam verſus eamdem partem habebit differentiam refractionis a rubeo. Patet enim M P fore maximam omnium parallelarum E Q interceptarum inter arcum, & rectam A P, cum quævis Q E producta uſque ad tangentem M N debeat evadere æqualis ipſi P M.

135. Si chorda H I digreſſa a contactu M retro regrediatur motu parallelo, determinabit ſuis extremis punctis H, I omnia binaria omnium colorum D, L unitorum ab iis angulis, qui colores ſemper uniti habebuntur, donec alterum extremum adveniat ad A, vel C. Si adveniat ad utrumque ſimul, quod accidet, ſi punctum F cadat in C; tum in altero ſpectri extremo unientur primus rubeus, & poſtremus violaceus: ſi adveniat prius I ad C, quam H ad A, quod accidet, ubi B F fuerit major, quam B C; tum violaceo B conjuncto cum colore K, rubeus primus A extabit ſolus in altero ſpectri extremo. Si adveniat prius ad A,

quam ad C, quod accidet, ubi BF fuerit minor, quam BC, vel valoris negativi; tum extremus violaceus erit in altero ſpectri extremo ſolus, & primus rubeus A erit conjunctus cum aliquo alio, ſi ipſa recta AF occurrat iterum eidem curvæ alicubi, quo caſu congruente H cum A abibit & I in ipſam, ac determinabit colorem L unitum cum primo rubeo, vel ſi ipſa AF nuſquam iterum eidem curvæ occurrerit; in altero extremo ſpectri erit ſolus rubeus exiſtente eo ſolo violaceo in altero.

136. Ut autem ductu quodam continuo incurrat in oculos ſeries omnis phænomenorum, quæ debent accidere, dum paullatim motu itidem continuo creſcit angulus *b* ſecundæ ſubſtantiæ, ut aquæ in vitrometro, manente angulo *a* primæ; notetur, exprimi per AB valorem *d m* pertinentem ad ſecundam anguli variabilis, per BC valorem *d* M pertinentem ad primam, ac conſiderentur duo caſus: in primo curva AMC jaceat a chorda AC verſus AB, ut in fig. 8., & 9., in ſecundo ad partes oppoſitas, ut in fig. 10., ut nimirum $\frac{OM}{AO}$ valor $\frac{d\,M}{d\,m}$ pertinens ad primum rubeum, & quempiam alium ex intermediis ſit minor in primo caſu, major in ſecundo, quam $\frac{BC}{BA}$ valor pertinens ad primum rubeum, & poſtremum violaceum.

137. Si ducantur in fig. 9., & 10. AD, CE, quæ curvam tangant in A, & C, ac ipſi EC fiat parallela AG; erit, ut facile patet, BD in priore quidem minor, quam BC, & BG major, in poſteriore vero illa major, hæc minor. Quoniam autem eſt AB. BF :: 1. $P = \frac{M}{m}\left(\frac{\text{tang } b - x}{\text{tang. } x} + 1\right)$; facile patet mutationes omnes valoris P pendere a mutatione valoris *b*: manent enim M, *m* pertinentes ad primum rubeum in vitro, & in aqua, manet angulus vitri *a*, adeoque & *x* ob formulam ſin. $x = \frac{M}{m}$ ſin.

$\frac{M}{m}$ fin. a. Si concipiatur $b = o$, quod accideret applicato latere mobili vitrometri lateri prismatis vitrei ita, ut nulla aqua interjaceret; fiet $\frac{\text{tang. } \overline{b-x}}{\text{tang. } x} = \frac{\text{tang. } -x}{\text{tang. } x} = -1$, adeoque $P = \frac{M}{m}(-1+1) = o$, & $BF = o$. Orto b, & perpetuo crescente, crescet perpetuo valor P, & cum ipso recta B F.

138. Quare dum vitrometro aperto, angulus variabilis perpetuo crescit; initio quidem nulli colores erunt conjuncti, donec punctum F appellat ad punctum D in fig. 9., G in fig. 10., & ejusmodi conjunctiones habebuntur, dum F excurrit per rectam D G in primo casu, G D in secundo, incipiente inversione spectri in altero e punctis D, G, & desinente in altero.

139. Nam in primo casu figuræ 9. in appulsu F ad D evadit A F tangens curvæ in A, tum eam secat alicubi in I determinans per ordinatam I L colores L interea conjungendos cum primo rubeo A, & habetur inter A, & I aliqua tangens N M ipsi parallela determinans per ordinatam M O colorem O interea extantem solum in summo spectro, id autem ita, ut puncta I, M exeant ex A, & punctum I quidem peragrata tota curva appellat ad C, appellente F ad ipsum C. Progresso F in F′ ultra C, jam A F nusquam iterum occurrit curvæ, adeoque nusquam habetur I, sed M progreditur per M′, donec abeat in C in ipso appulsu F′ ad G, occurrente interea recta ex C parallela F′ A curvæ alicubi in H, & per ordinatam H K determinante colores K conjunctos alios post alios cum postremo violaceo B.

140. Hinc in eo casu facta inversione per incrementum anguli variabilis incipit conjunctio primi rubei, primo quidem cum to a serie rubeorum, tum cum reliquis omnibus coloribus, usque ad postremum violaceum, ac interea incipiunt eminere soli in

ſummo ſpectro omnes rubei, tum aurei, ac flavi, & reliqui omnes alii poſt alios. Remanet autem in imo ſpectro violaceus, donec ad ipſum adveniat primus rubeus, appellentibus F, & I ad C, & conjunctus cum ipſo efficiat vinaceum purpureum: deinde rubeus incipit jam ab omnibus liber eſſe ſolus in ipſo fundo, violaceo etiam poſtremo aſcendente ſupra ipſum. Incipit inverſio ſpectri in appulſu puncti F ad D, & deſinit in appulſu F′ ad G ita, ut dum ipſum F percurrit G C, ſit in imo violaceus poſtremus, dum F′ percurrit C D, ſit ibi primus rubeus.

141. Patet autem e contrario in hoc caſu, ſi initio angulus variabilis aquæ ſit ita magnus, ut B F evadat major, quam B G, tum perpetuo decreſcat, ſpectrum a poſitione contraria, in qua violaceus erit in ſummo, rubeus in imo, debere inverti per eosdem gradus ordine contrario, ita nimirum, ut violaceus poſtremus incipiat deſcendere infra præcedentes, & uniatur cum omnibus intermediis, donec deveniat ad rubeum primum, puncto F′ appellente ad C, tum infra ipſum deſcendat, ipſo primo rubeo poſt unionem cum eodem poſtremo violaceo ibi factam unito deinde cum omnibus intermediis, donec emergat omnium altiſſimus, ut idcirco in imo ſpectro ſit ſemper rubeus primus, dum F′ percurrit GC, tum ſemper violaceus poſtremus, dum F percurrit CD; in ſummo vero ſpectro violaceus primo diſpareat, & ipſi ſuccedant indicus, cæruleus, viridis, ac reliqui ordine eodem retrogrado.

142. At in ſecundo caſu figuræ 10. omnia ſuccedent ordine prorſus contrario: ſi inverſio fiat augendo angulum variabilem, ea incipiet a violaceo poſtremo ſe plicante ſupra ſibi proximos, remanentibus in imo ſpectro, non in ſummo ſolis indico, cæruleo, viridi &c.; donec deveniatur ad rubeum primum: ſi autem ea fiat minuendo angulum; inverſio ipſa incipiet a primo rubeo, remanentibus itidem in imo ſpectro ſolis aureo, flavo, viridi

ridi &c., donec deveniatur ad violaceum. Colores extremi puri cum intermedia mixtione purpurei erunt in primo caſu in imo ſpectro, & colores intermedii puri in ſummo, at in ſecundo caſu illi in ſummo, hi in imo.

143. Nam ibi recta A G parallela tangenti E C cadente intra angulum B A C, dum creſcit angulus variabilis, incipiet inverſio in appulſu F ad G ab egreſſu punctorum M, H ex C, donec in appulſu F ad C abeat H in A, ac exoriatur I ex eodem C, & percurrat itidem totum arcum C A pergente M motu continuo per M′, donec adveniat ad A, & inverſionem abſolvat.

144. In utraque figura ſingula puncta M, I, H percurrunt totam curvam, dum inverſio fit, ſed M quidem durat toto tempore inverſionis, puncta vero I, H orta eodem loco, quo M, duplo citius ſingula abſolvunt motum ſuum orto altero, dum alterum occidit.

145. Facile autem demonſtratur hoc aliud theorema, eum colorem extare ſolum in altero extremo, qui ſi conferatur cum ſibi infinite proximo, & appellentur $d\,m$, $d\,\mathrm{M}$ differentiæ valorum m, M pertinentium ad ipſos, ſit $\frac{d\,\mathrm{M}}{d\,m} = \frac{\mathrm{M}}{m}\left(\frac{\text{tang. }\overline{b-x}}{\text{tang. }x} + 1\right)$. Si enim in fig. 8. ducatur ex H recta H T parallela axi A B, uſque ad I L, & puncta H, I accedant ad M, donec in ipſum recidant, evaneſcente chorda H I; erunt ſemper H T, T I, ut A B ad B F, ut 1 ad $\frac{\mathrm{M}}{m}\left(\frac{\text{tang. }\overline{b-x}}{\text{tang. }x} + 1\right)$, quæ poſtremo evadent differentiæ valorum M, m pertinentium ad colores K, L, deſinentes in O, adeoque erit ibi $d\,m.\ d\,\mathrm{M} :: 1.\ \frac{\mathrm{M}}{m}\left(\frac{\text{tang. }\overline{b-x}}{\text{tang. }x} + 1\right)$. Id autem congruit cum formula inventa num. 100. pro ſolutione ejusdem problematis.

146. Hinc autem patet, inverſionis limites haberi, ubi valores fractionis $\frac{d\,M}{d\,m}$, quarum altera pertineat ad primos rubeos inter ſe collatos, altera ad poſtremos violaceos, exhibuerint binos angulos b in formula $\frac{d\,M}{d\,m} = \frac{M}{m}\left(\frac{\text{tang. } \overline{b - x}}{\text{tang. } x} + 1\right)$, intra quos limites continebuntur omnes anguli intermedii h, reſpondentes omnibus intermediis valoribus ejus fractionis.

147. Si linea A M C non habeat curvaturam continuam verſus eamdem partem, ſed ſe retro reflectat, & iterum alicubi tangat, vel ſecet rectam A C; ſinguli appulſus exhibebunt ſingulos alios colores ſimul conjungendos cum primo rubeo, & poſtremo violaceo, & ſi curvatura ſit ejuſmodi, ut recta quæpiam quæcumque ipſi curvæ poſſit occurrere in pluribus punctis; puncta ejuſmodi determinabunt colores totidem uniendos ſimul, ubi recta A F evaſerit parallela illi rectæ.

148. Quod ſi ea curva abiret in rectam A C; patet, utramque tangentem A D, C E, & rectam A G poſteriori parallelam, abituras ſimul in rectam A C, in quam abibunt ſimul omnia puncta curvæ ipſius, adeoque inverſionem ſpectri debere fieri ad ſenſum per conjunctionem omnium colorum ſimul ibi, ubi habebitur ſuperior æquatio, pertinentibus ſingulis $d\,m$, $d\,M$ ad primum rubeum, & poſtremum violaceum, adeoque in eo caſu ſimul ad reliqua binaria omnia, juxta num. 110.

149. Superiore numero diximus, unionem omnium colorum in eo caſu debere haberi ſimul ad ſenſum; nam id quidem nequaquam ita ſe haberet ſemper accurate; cum numero 129 pro $d\,m$, $d\,M$ aſſumptæ ſint quantitates non infiniteſimæ, ſed finitæ, nimirum differentiæ pertinentes ad primum rubeum, & poſtremum violaceum, exiguæ quidem, ſed non infinite parvæ, & iis aptatæ ſint methodi infiniteſimales, quæ in ejuſmodi applicatione admittunt

tunt errores, ſed eo minores reſpectu ipſarum $d\,m$, $d\,M$, quo eæ fuerint minores reſpectu M, m. Idcirco ad habendam unionem ſucceſſivam colorum, & colorem extantem ſolum in altero extremo ſpectri, differentia ipſa refractionis $d\,r$ numero 92, ex qua omnes inſequentes determinationes ſunt ortæ, non eſt accepta $= 0$. quod dediſſet ſolam unionem coloris rubei cum illo alio colore, ad quem pertineret $m + d\,m$, & $M + d\,M$, ſed conſiderata eſt, ut quædam finita quantitas. Potuiſſent $d\,m$, & $d\,M$ abſciſſa, & ordinata curvæ adhibitæ appellari x, & y, & per calculum conſuetum ope differentiarum $d\,x$, & $d\,y$ ex natura ejus curvæ, quæri colores infinite proximi, & contactus, ut & retenta denominatione $d\,m$, $d\,M$ pro x, & y, potuiſſent per ſolam formularum conſiderationem haberi ea omnia, quæ tradidimus huc uſque; ſed mihi quidem videtur multo aptior conſideratio curvæ cum omnibus mutationibus tangentium, & ſecantium ad ea ipſis non mentis tantummodo, ſed frontis oculis ſiſtenda evidentiſſime, & cum intuitione quadam contemplanda.

150. Hiſce fuſius expoſitis, demum hic adnotabo primo illud: cum in omnibus ſubſtantiis in ipſo §. 2. adhibitis cryſtallo montana, vitro communi Bohemico, flint, aucto aquæ angulo inverſio ſpectri cæperit a rubeo ſe deorſum plicante verſus violaceum ita, ut colores ſinguli puri extiterint alii poſt alios in ſummo ſpectro ii, qui rubeum conſequuntur, aureus, flavus, viridis, ac reliqui uſque ad violaceum ipſum, debere juxta num. 140 haberi caſum primum, curva A M C ingreſſa triangulum B A C, in quo caſu ratio $\frac{d\,M}{d\,m}$ eſt major in coloribus extremis, quam in rubeo conjuncto cum quovis medio; unde & illud conſequitur ex num. 121 quemvis determinatum ex coloribus intermediis, ut

initium,

initium, vel finem viridis, accedere propius ad rubeum in ſpectro earum ſubſtantiarum, quam in ſpectro æquali aquæ.

151. Deinde illud: ſi anguli ſint exigui valorem P fore multo ſimpliciorem, nimirum $= \frac{b}{a}$; nam per num. 99 eſt $\frac{b}{a} = \frac{M}{m}\left(\frac{\text{tang. } b - x}{\text{tang. } x} + 1\right)$, qui eſt valor P num. 131. Calculus ita evaderet multo ſimplicior, ſed quo minor eſt angulus, eo citius invertitur ſpectrum, & eo majorem in conſectaria errorem inducit obſervationis error.

152. Denium addam & illud, omnem hanc theoriam æque transferri ad obſervationes peractas ope binorum priſmatum ſeparatorum, quorum alterum habeat angulum fixum, alterum mobilem, quod etiam in priſmate vitreo præſtari poteſt juxta num. 34, ut bina vitra immediate comparentur ad ſe invicem, per quorum priſmatum utrumvis radius tranſeat cum refractione minima omnium, quas in eo habere poteſt. In ſingulis per num. 121 eſt $dm = \frac{\text{cof. } \frac{c+r}{2}}{2 \text{ ſin. } \frac{1}{2} c} \times dr$, adeoque ſi eæ litteræ retineantur pro ſubſtantia anguli variabilis, & majuſculæ pro altera, erit tota differentia refractionis ex utroque priſmate ſimul $dr - dR = \frac{2 \text{ ſin. } \frac{1}{2} c}{\text{cof. } \frac{c+r}{2}} \times dm -$

$$\frac{2 \text{ ſin. } \frac{1}{2} C}{\text{cof. } \frac{C+R}{2}} \times dM = \frac{2 \text{ ſin. } \frac{1}{2} C}{\text{cof. } \frac{C+R}{2}}\left(\frac{\text{cof. } \frac{C+R}{2}}{\text{cof. } \frac{c+r}{2}} \times \frac{\text{ſin. } \frac{1}{2} c}{\text{ſin. } \frac{1}{2} C} \times dm - dM\right),$$

adeoque eadem methodo numeri 131 ea differentia, ut valor hac parentheſi incluſus, ac $P = \frac{\text{cof. } \frac{C+R}{2}}{\text{cof. } \frac{c+r}{2}} \times \frac{\text{ſin. } \frac{1}{2} c}{\text{ſin. } \frac{1}{2} C}$, ubi C, c ſunt

anguli

anguli prismatum, R, r refractiones eruendæ ex immediata observatione, vel ex formula $m = \frac{\text{sin.}\frac{c+r}{2}}{\text{sin.}\frac{1}{2}c}$, ex datis m, M, C, c.

§. VIII.

De Methodo determinandi proxime curvam exhibentem omnes rationes $\frac{dM}{dm}$ *qualitatum distractivarum ex aliquot observationibus angulorum, in quibus dati colores extant soli in inversione spectri.*

153. HÆc perquisitio est inversa ejus, quam superiore §. habuimus. Ibi ex data relatione in fig. 8. rectarum AD, DE experimentium valores dm, dM, quæ determinat curvam AMC, inquisivimus in inversionem spectri, determinando, qui color debeat extare solus in altero extremo ipsius spectri in dato angulo prismatis variabilis, combinando cum angulo constanti prismatis alterius. Hic e contrario datis aliquot observationibus ejus anguli cum colore, quem is relinquit solum in eo extremo, inquiritur in ipsam curvam, quæ exhibeat rationem valorum eorumdem.

154. Ea perquisitio est præcipuus omnis hujusce tractationis fructus, & in eo sitam esse arbitror maximam utilitatem methodi adhibentis angulum variabilem unius substantiæ cum constanti alterius, cujus nimirum ope licebit procedere ad unionem colorum plurium per totidem lentes ex totidem substantiis elaboratas. Valores dm, dM possunt investigari immediate saltem pro colorum limitibus juxta num. 118 per ipsam determinationem divisionis spectri factæ per eosdem limites in utraque substantia, sed cum ii limites ipsi sint admodum incerti juxta num. 124, admodum difficile est eos valores ita accurate definire, ut inevitabilis observatio-

tionis error in diſcrimine diviſionis haud ita magno perquiſitionem omnem penitus non evertat.

155. Multo magis idoneam cenſeo methodum, quam hic exponam, & multo minus pernicioſos eſſe errorculos, qui hic etiam committuntur ob incertos limites colorum eminentium in ſummo ſpectro, dum id invertitur; licet in hac methodo debeat aſſumi ut cognita poſitio colorum in ſpectro ipſo alterius e binis ſubſtantiis, qua aſſumpta docebimus, quo pacto invenire liceat, ſi minus accurate, ſaltem quamproxime poſitionem in ſpectro alterius, ubi ſi quid erratum fuerit in aſſumenda priore illa poſitione ex immediatis dimenſionibus ſpectri, id nihil ad ſenſum influat in rationem $\frac{dM}{dm}$, inducto ſimili errore in alterum etiam ex iis, quod quæritur ex altero non ita bene aſſumpto.

156. Methodus autem ejusmodi perquiſitionis hæc eſſe poteſt. Sint in fig. 11. ABC puncta eadem, quæ in præcedentibus, ac pertineant in ſubſtantia anguli variabilis, ut in aqua O, O', O'' &c. ad limites colorum eos, quibus extantibus ſolis in altero ſpectri extremo notati ſint anguli ipſi. Si concipiatur tangens MN occurrens axi AB in N, eique parallela AF; dabitur ex obſervatione ratio AB ad BF, quæ per num. 131 eſt, ut 1 ad $\frac{M}{m}\left(\frac{\text{tang.}\overline{b-x}}{\text{tang.}\,x}+1\right)$, qui valor facile invenitur juxta num. eumdem 131, adeoque dabitur ratio ſubtangentis NO ad ordinatam OM, ſive directio tangentis.

157. Quare problema huc reducetur. Datis pluribus abſciſſis AO, AO' &c. invenire curvam, quæ egreſſa ex A, ordinatis OM, OM' &c. occurrat in angulis datis alicubi in M, M' &c. Quod ſi etiam detur ratio AB ad BC ex conjunctione coloris rubei primi cum poſtremo violaceo, quam exhibere videtur angulus in-

inducens vividiſſimum purpureum ortum in altero extremo ex unione plurimorum rubeorum cum pluribus violaceis; nam primum rubeum, & extremum violaceum diſcernere ſeorſum ſingulos, dum alter ibi ſuccedit alteri, tenuitas non ſinit; accedet inde nova determinatio curvæ, ut nimirum debeat deſinere in datum punctum C.

158. Ejuſmodi determinatio fieri poterit eadem methodo, quæ adhiberi ſolet pro interpollationibus. Fiat quævis abſciſſa $AO = x$, & ordinata $OM = y$, & ex iis, quæ demonſtrata ſunt num. 145, quæ congruunt cum notiſſima methodo adhibendi calculum differentialem pro inveniendis tangentibus curvarum, erit $\frac{dy}{dx} = \frac{OM}{ON} = \frac{BF}{BA} = P = \frac{M}{m}\left(\frac{\text{tang.}\overline{b-x}}{\text{tang. } x} + 1\right)$, qui valor dabitur pro ſingulis ordinatis.

159. Fiat jam æquatio ad curvam $y = Ax + Bx^2 + Cx^3$ &c. aſſumendo tot terminos, quot habentur ordinatæ ſecantes curvam in iis datis angulis. In ea æquatione poſito $x = 0$, erit $y = 0$, adeoque curva ipſa tranſibit per A. Differentiando autem habebitur $dy = A\,dx + 2Bx\,dx + 3Cx^2\,dx$ &c., adeoque $A + 2Bx + 3Cx^2$ &c. $= \frac{dy}{dx}$. Sint $AO = q$, $AO' = q'$ &c., & valores P, reſpondentes ordinatis OM, O'M' &c. ſint p, p' &c. quibus erunt æquales valores $\frac{dy}{dx}$ pertinentes ad ipſas, adeoque habebuntur ſequentes æquationes.

$$A + 2q\,B + 3q^2\,C \text{ &c.} = p$$
$$A + 2q'\,B + 3q'^2\,C \text{ &c.} = p'$$
$$A + 2q''\,B + 3q''^2\,C \text{ &c.} = p''$$

160. Ex iis invenientur A, B, C &c. prorſus eodem pacto, quo ubi quæritur curva, quæ tranſeat per data puncta, inveniuntur valores iidem ex datis totidem x, & y, nimirum per

totidem æquationes primi gradus, quot ſunt ipſæ A, B, C: iis autem inventis habebitur æquatio ad curvam quæſitam.

161. Si detur poſtrema ordinata BC, & ea fiat $= u$, ac $AB = t$, accedet ſuperioribus æquationibus æquatio formæ parum diverſæ $tA + t^2B + t^3C$ &c. $= u$, & numerus terminorum erit augendus unitate, ut æquetur numero æquationum, per quas determinandi ſunt ipſorum coefficientes. Si ea poſtrema ordinata non detur, inventa æquatione ad curvam per ſolas ordinatas occurrentes ipſi in datis angulis, invenietur ex ipſa æquatione $u = At + Bt^2 + Ct^3$ &c.

162. Ex eadem invenietur quævis alia ordinata y reſpondens cuivis abſciſſæ x, & cum illa exprimat dM ſubſtantiæ anguli conſtantis, hæc dm ſubſtantiæ anguli variabilis pro primo rubeo combinato cum colore, ad quem pertinet extremum punctum ejus abſciſſæ, habebitur valor $\frac{dM}{dm}$ reſpondens binario cuivis continenti primum rubeum cum illo colore alio quovis.

163. Si pro diviſione ſpectri AB reſpondentis angulo variabili aſſumeretur ut data diviſio ſpectri BC reſpondentis angulo conſtanti; ſatis eſſet aſſumere pro x rectas CD, pro y DM, & omnia eodem modo procederent facta tantummodo $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{P}$. Tum enim eſſet $\frac{dy}{dx} = \frac{ON}{OM} = \frac{AB}{BF} = \frac{1}{P}$. Facto $\frac{1}{P} = p$, & $CD = q$, redirent omnia, quæ ſupra.

164. Ubi adhibetur vitrometrum, poſſet paullo diligentius inquiri ſemel in diviſionem ſpectri exhibiti a ſatis magno angulo priſmatis aquei, & adhiberi pro diviſione rectæ AB juxta primam methodum, vel poſſet accipi pro ſatis proxime determinata diviſio, quam pro vitro communi Newtonus propoſuit juxta

num. 122,

num. 122, & ejus ope adhibita ſecunda methodo erui diviſio ſpectri aquei, cum quo reliqua ſpectra deinde compararentur.

165. Hoc pacto ſatis proxime obtineretur diſcrimen rationis $\frac{dM}{dm}$ pertinentis ad primum rubeum, & poſtremum violaceum a ratione pertinente ad ipſum primum rubeum, & colorem medium quempiam, ut initium, vel finem viridis. Si ea diſcrimina pro omnibus colorum binariis eſſent non ita exigua in omnibus plurium ſubſtantiarum binariis, nullum ex iis binariis ſubſtantiarum poſſet unire colores plures quam duos ope duplicis objectivi; poſſent tamen adhiberi plures lentes conjunctæ e ſingulis ſubſtantiis ſingulæ ad eam rem præſtandam, de qua re agemus ſequenti paragrapho. Subſtantiæ ad eam rem idoneæ omnino eſſe debent vitrum commune, flint, & aqua; cum adhibitis binis ex iis quibusque juxta §. 2. inverſio ſpectri facta ſit per moram notabilem, non ſimul transeundo per colorem album.

§. IX.

De unione plurium colorum per objectivum compoſitum e pluribus lentibus.

166. IN diſſertatione §. 4. propoſuimus formulam pro correctione erroris orti a diverſa refrangibilitate radiorum methodo Dollondiana per duplex objectivum, quæ quidem uniret omnes colores ſimul; ſi valor $\frac{dM}{dm}$ in iis ſubſtantiis eſſet idem pro omnibus colorum binariis, qui cum pro aliis ſit alius; ſatis patet eam non conjungere, niſi illud binarium ſolum, cujus valor $\frac{dM}{dm}$ adhibetur.

Verum ſi plures adhibeantur lentes ex pluribus ſubſtantiis, poterunt uniri colores totidem, quot lentes adhibebuntur.

167. Si radii ſphæricitatum pro prima lente ſint a, b, pro ſecunda a', b', pro tertia a'', b'' &c., & ubique juxta num. 55 diſſertationis $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$, diſtantia foci omnium lentium ſimul R, rationes autem ſinuum pro primo e radiis generum uniendorum ſint M, M', M'' &c., ac pro colore primo, & ſecundo ſit $\frac{dm'}{dm} = h'$, $\frac{dm''}{dm} = h''$ &c., pro primo, & tertio ſint k', k'' &c., pro primo, & quarto l', l'' &c., erit per num 58 ipſius diſſertationis $\frac{1}{R} = \frac{m-1}{f} + \frac{m'-1}{f'} + \frac{m''-1}{f''} + \frac{m'''-1}{f'''}$ &c. $+ \frac{1}{p}$; adeoque ad conſervandam eamdem foci communis diſtantiam in iis tribus coloribus debebunt haberi æquationes $\frac{dm}{f} + \frac{dm'}{f'} + \frac{dm''}{f''} + \frac{dm'''}{f'''}$ &c. $= 0$, tam ubi per ipſas dm, dm', dm'', dm''' exprimantur differentiæ debitæ colori primo, & ſecundo, quam primo, & tertio, primo, & quarto &c., nimirum $\frac{dm}{f} + \frac{k'dm}{f'} + \frac{h''dm}{f''} + \frac{h'''dm}{f'''}$ &c. $= 0$; $\frac{dm}{f} + \frac{k'dm}{f'} + \frac{k''dm}{f''} + \frac{k'''dm}{f'''}$ &c. $= 0$; $\frac{dm}{f} + \frac{l'dm}{f'} + \frac{l''dm}{f''} + \frac{l'''dm}{f'''}$ &c. $= 0$, ſive $\frac{1}{f} + \frac{h'}{f'} + \frac{h''}{f''} + \frac{h'''}{f'''}$ &c. $= 0$; $\frac{1}{f} + \frac{k'}{f'} + \frac{k''}{f''} + \frac{k'''}{f'''}$ &c. $= 0$; $\frac{1}{f} + \frac{l'}{f'} + \frac{l''}{f''} + \frac{l'''}{f'''}$ &c. $= 0$.

168. Satis patet ope earum æquationum valores omnes f, f', f'' &c. reduci poſſe ad f, ſive facto $f = 1$, inveniri omnes ipſorum valores, relicta indeterminata ratione a ad b in quovis valore $\frac{1}{f} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b}$ pro corrigendo errore figuræ ſphæricæ, & pro aliis uſibus, quæ relationes ita determinandæ, vel ad

ar-

arbitrium aſſumendæ erunt totidem, quot ſunt *f*. In diſſertatione, in qua binas lentes conjunctas conſideravimus, uſi ſumus altera ex iis ad corrigendum errorem figuræ ſphæricæ pro radiis mediis, altera ad dandam lentibus ipſis formam commodiorem. Quo vero plures ſunt lentes, eo ad plura officia eædem indeterminationes poterunt adhiberi.

169. Illud autem hic etiam oportebit cavere, quod ibidem cavimus, ne nimirum ſphæricitatum radii proveniant aut imaginarii, aut nimis exigui, & ne ejusmodi ſint relationes valorum $m - 1$ ad dm, ut focus communis radiorum parallelorum in immenſum recedat, quo caſu formulæ nulli uſui eſſe poſſunt.

170. Omiſſa generali hac conſideratione perſequemur ſyſtema ſimpliciſſimum lentium trium, (*d*) quæ conjungant colores ex-

(*d*) Accepi nuper, ab amico Pariſiis commorante, D. Alambertum nunc imprimere, alios duos opuſculorum tomos, qui de lumine agant, ubi hic a me propoſitus trium ſubſtantiarum uſus pro objectivis teleſcopiorum improbatur: cum ii vel nondum prodierint, vel ſaltem nondum huc advenerint, nihil hic eo in genere poſſum adjicere, ignorans nimirum, quibus fundamentis is innitatur. Illud mihi quidem rem ipſam iterum perpendenti videtur evidentiſſimum, per duas ſubſtantias hucusque cognitas, ut per vitrum commune conjunctum cum flint, vel ſtras, vel cryſtallo montana, non uniri niſi duos colores: ope trium ſubſtantiarum uniri poſſe tres, quo caſu omnes uniantur ſimul ad ſenſum: quo autem unio colorum eſt major, eo ceteris paribus perfectiora obventura teleſcopia.

Rem utique tentaſſem vitris ad formulas elaboratis: ſed mihi idonea defuerunt vitra. Una cum nobili amico ex Anglia, & quidem magno pretio, deferri curavimus laminas ex flint, quæ primo aſpectu apparebant egregiæ, quæ quidem politæ, & ante teleſcopiorum etiam longiorum objectiva vitra poſitæ, nihil imaginis nitorem turbabant; at certâ quâdam ratione exſectis inde priſmatis nobis conſtitit, ea conſtare ſtratis parallelis admodum tenuibus, quorum ſingula diverſæ denſitatis, & naturæ erant, quamobrem diverſa pollebant in diverſis ſui partibus vi refractiva lentes inde exſectæ, quod obſtitit perfectioni lentium objectivarum etiam tantummodo duplicium, quas ex eodem vitro ami-

extremos ambos cum medio quopiam, ut cum altero extremo viridis, vel illo ipſo, qui in una e ſubſtantiis erit quamproxime in medio ſpectro: tum enim unio debebit fieri ejusmodi, ut reliquorum diſtantia ab ipſis ſenſum omnem effugiat; cum enim unitis binis extremis per majoris etiam anguli priſmata jam craſſitudine ſpectri plurimum imminuta, medii parum admodum exſtent; unitis tribus, diſtantia reliquorum tanto minor effecta, videtur non debere ſub ſenſus cadere. Habebitur illud diſcrimen inter unionem trium, ac duorum, quod inter oſculum ac contactum in Geometria. Si binæ interſectiones circuli cum curva coeant, contactum efficiunt: concurſus trium exhibet oſculum, in quo arcus curvæ infiniteſimus in infinitum magis accedit ad circuli arcum, quam in puro contactu, uti jam olim demonſtravi in mea diſſertatione de circulis oſculatoribus.

171. Accedit, quod in ſyſtemate ejusmodi trium lentium poterit adhiberi aqua incluſa binis lentibus vitreis, cum e tribus indeterminationibus, quæ remanent in relationibus trium a ad b, poſſint aſſumi binæ pro efficiendo $b = a'$, & $b' = a''$, relicta tertia pro correctione erroris figuræ ſphæricæ, quo pacto quatuor tantum ſuperficies, ſive binæ lentes erunt elaborandæ infuſa aqua inter ipſas annulo incluſas ingenti ſane compendio; dummodo numeri ad vitra adhibenda pertinentes exhibeant ea, quæ num. 169 neceſſaria eſſe monuimus.

172. In

amicus ipſe exſectas poliverat: eæ nimirum præter imaginem objecti diſtinctam, habebant circa ipſam lumen erraticum eam obruens, atque confundens, quod in aliquo ejusmodi objectivo duplici coibat in aliam imaginem priore confuſa, ubi tubus contrahebatur, vel producebatur, quod quidem debebat accidere, ubi politæ ſuperficies ad duo tantummodo ex ejusmodi ſtratis pertinerent, ſingulis ſingulos exhibentibus focos a ſe invicem remotos, ſed ſatis magna præditos lumin is vi.

172. In eodem ſyſtemate habebuntur ex ipſo numero 169 æquationes binæ $\frac{1}{f} + \frac{h'}{f'} + \frac{h''}{f''} = 0$, $\frac{1}{f} + \frac{k'}{f''} + \frac{k''}{f''} = 0$, adeoque $\frac{h'}{f'} + \frac{h''}{f''} = \frac{k'}{f'} + \frac{k''}{f''}$, & hinc $\frac{1}{f''} = -\frac{h'-k'}{h''-k''} \times \frac{1}{f'}$, vel $\frac{1}{f'} = -\frac{h''-k''}{h'-k'} \times \frac{1}{f''}$. Subſtitutis hisce valoribus in prima æquatione fiet $\frac{1}{f} + (h' + h'' \times \frac{k'-h'}{h''-k''})\frac{1}{f'} = 0$, ſive $\frac{1}{f} = -\frac{h'h''-h'k''+h''k'-h'h''}{h''-k''} \times \frac{1}{f'} = \frac{h'k''-h''k'}{h''-k''} \times \frac{1}{f'} = -\frac{h'k''-h''k'}{h''-k''} \times \frac{1}{f''}$. Quare habebuntur $\frac{1}{f'} = \frac{h''-k''}{h'k''-h''k'} \times \frac{1}{f}$; $\frac{1}{f''} = -\frac{h'-k'}{h'k''-h''k'} \times \frac{1}{f}$.

173. Eæ formulæ ſunt admodum elegantes, & ſane ſimplices, ut etiam eſt admodum elegans ratio $f'.f'' :: b'-k'.h''-k''$, ubi f', & f'' ſunt juxta num. 82 diſſertationis dimidia radiorum ſphæricitatis lentium iſoſceliarum æquivalentium lenti ſecundæ, & tertiæ; cum facto $a = -b$ ſit ibi $\frac{1}{f} = \frac{2}{a}$ adeoque $f = \frac{1}{2}a$.

174. Poſſet inquiri in haſce relationes valorum f, f', f'' etiam quærendo relationes trium angulorum e tribus ſubſtantiis, quæ uniri debent ad efformandum objectivum uniens colores extremos cum medio, ope duorum priſmatum anguli variabilis, qui tres anguli ſi eſſent exigui, eſſent ut valores $\frac{1}{f}$, $\frac{1}{f'}$, $\frac{1}{f''}$, lentes enim ubi a radio permeantur, æquivalent priſmatis habentibus angulos æquales iis, quos ibi continent tangentes arcuum tranſeuntium per axem, & ii anguli in quibusvis exiguis datis diſtantiis ab axe ſunt in ratione reciproca radiorum curvaturæ: in majoribus autem angulis adhibita theoria aliquanto ſublimiore, eodem deveniri poſſet. Quin idem obtineri poſſet per theoriam adhuc complicatiorem comparando ſingula priſmata e tribus ſubſtantiis adhibendis habentia angulos conſtantes cum

aliis binis e binis aliis ſubſtantiis habentibus angulos variabiles, quod multo commodius eſſet; nam priſmatula cum angulo conſtante facile fiunt, cum variabili multo ſane difficilius. Verum ſi anguli ſint exigui, colores difficilius ſub ſenſum cadunt; ſi majores, theoria eſt multo complicatior, quamobrem eam perquiſitionem hic omittam, alibi aliquando fortaſſe, ubi licuerit per otium, & valetudinem evoluturus.

175. Determinata relatione trium valorum f ad ſe invicem, facile patet, quid præſtandum ſit, ut corrigatur ſolus error diverſæ refrangibilitatis pro iis tribus coloribus, aſſumendo nimirum ad arbitrium tres relationes a ad b, quo pacto lentes etiam iſoſceliæ adhiberi poſſent, quarum radii ſint in eadem ratione valorum f. Communis autem diſtantia foci R habebitur per formulam $\frac{1}{R} = \frac{m-1}{f} + \frac{m'-1}{f'} + \frac{m''-1}{f''} + \frac{1}{p}$, & poſitis pro $\frac{1}{f'}, \frac{1}{f''}$ ſuis valoribus erit $\frac{1}{R} = \frac{1}{f}\left(m - 1 + \frac{(m'-1)(k''-k'') + (m''-1)(k'-k)}{k'k'' - k''k'}\right) + \frac{1}{p}$, in quo valore coefficiens primæ partis incluſus parentheſi debet non eſſe $= 0$, ut formula uſui eſſe poſſit.

176. Si aqua debeat includi inter binas lentes, oportebit, ſit $b = a'$, & $b' = a''$, & adhuc remanebit una indeterminatio pro corrigendo errore figuræ ſphæricæ radiorum mediorum. Hinc ob $\frac{1}{f''} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{b'}$, erit $\frac{1}{f''} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a''}$, cumque ob $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ ſit $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{f}$, poſito $f = 1$, erit $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - 1$, & $\frac{1}{f''} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a''} - 1$: cum vero ſit etiam $\frac{1}{f''} = \frac{1}{a''} - \frac{1}{b''}$, poſitis pro $\frac{1}{f'}$, & $\frac{1}{f''}$ ſuis valoribus ex num. 172, fient $\frac{1}{a} - \frac{1}{a''} - 1 = \frac{k'' - k'}{k'k'' - k''k'}$, & $\frac{1}{a''} - \frac{1}{b''} = -\frac{k' - k}{k'k'' - k''k}$

$\frac{h' - k'}{h'k'' - h''k'}$, sive $\frac{1}{a''} = \frac{1}{a} - \frac{h'' - k''}{h'k'' - h''k'} - 1$, $\frac{1}{b''} = \frac{1}{a''} + \frac{h' - k'}{h'k'' - h''k'}$
$= \frac{1}{a} + \frac{(b' - k') - (h'' - k'')}{b'k'' - h''k'} - 1.$

177. Eo pacto assumpto f pro unitate, ad quam omnes valores reducantur, habebuntur per a omnes valores reliquorum radiorum b, a', b', a'', b'', qui nimirum positi ordine suo cum valoribus f', f'' erutis ex num. 172 erunt.

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{a'} = \frac{1}{a} - 1$$
$$\frac{1}{b'} = \frac{1}{a''} = \frac{1}{a} - \frac{h' - k'}{h'k'' - h''k'} - 1$$
$$\frac{1}{b''} = \frac{1}{a} + \frac{(h' - k') - (h'' - k'')}{h'k'' - h''k'}$$
$$\frac{1}{f} = 1$$
$$\frac{1}{f'} = \frac{h'' - k''}{h'k'' - h''k'}$$
$$\frac{1}{f''} = \frac{h' - k'}{h'k'' - h''k'}$$

178. Relinquetur igitur determinandus solus valor a, quo definito relate ad illam unitatem assumptam, reliqui omnes determinabuntur. Is autem determinabitur facto $= o$ errore figuræ sphæricæ, cujus expressio eruitur facile ex formulis numeri 55 dissertationis, ubi si dicatur ς', quod ibi est σ, error nimirum pertinens ad secundam lentem, & componatur eodem modo error ς'' pertinens ad tertiam, dicatur autem p, ut ibi distantia puncti, ad quod convergunt radii ante ingressum in primam lentem, p' distantia r foci radiorum primæ lentis, p'' foci primæ, & secundæ conjunctarum, erunt

$$\varsigma = \frac{m - 1}{m}\left(\frac{m^3}{f^3} - \frac{2m^2 + m}{af^2} + \frac{m + 2}{a^2 f} + \frac{3m^2 + m}{pf^2} - \frac{4m + 4}{apf}\right.$$
$$\left. + \frac{3m + 2}{p^2 f}\right) \pm e^2$$

$$\varsigma' = \frac{m' - 1}{m'}\left(\frac{m'^3}{f'^3} - \frac{3m'^2 + m'}{a' f'^2} + \frac{m' + 2}{a'^2 f'} + \frac{3m'^2 + m'}{p' f'^2} - \frac{4m' + 4}{a' p' f'} + \frac{3m' + 2}{p'^2 f'}\right)\frac{1}{2}e^2$$

$$\varsigma'' = \frac{m'' - 1}{m''}\left(\frac{m''^3}{f''^3} - \frac{2m''^2 + m''}{a'' f''^2} + \frac{m'' + 2}{a''^2 f''} + \frac{3m''^2 + m''}{p'' f''^2} - \frac{4m'' + 4}{a'' p'' f''} + \frac{3m'' + 2}{p''^2 f''}\right)\frac{1}{2}e^2.$$

179. Error figuræ ſphæricæ ibi erit $R^2(\rho + \rho' + \rho'')$ pro $R^2(\rho + \sigma)$: quare oportebit facere $\rho + \rho' + \rho'' = 0$. Æquatio dividetur per $\frac{1}{2}e^2$, & pro teleſcopiis, in quibus radii ad objectivum adveniunt paralleli, facto p infinito, omittentur poſtremi tres termini valoris ρ; poterit autem in ſingulis valoribus ρ, ρ', ρ'' diviſor m, m', m'' transferri intra parentheſim, ut in diſſertatione num. 94, utut relicto extra parentheſim $m - 1$ pro factore communi ſingulorum ς, qua translatione calculus numericus evadet paullo facilior, & adhuc facilior diviſione inſtituta per $m'' - 1$, quo pacto valor ς'' erit liber a coefficiente communi, & priores bini habebunt pro coefficientibus $\frac{m - 1}{m'' - 1}$, & $\frac{m' - 1}{m'' - 1}$. Valores $\frac{1}{f}, \frac{1}{f'}, \frac{1}{f''}$ dabuntur in numeris ex poſitione $f = 1$, & ex numero 177, valores $\frac{1}{p'}, \frac{1}{p''}$ dabuntur itidem; erit enim primus $= \frac{m - 1}{f}$, ſecundus $\frac{m - 1}{f} + \frac{m' - 1}{f''}$, adeoque remanebunt ſoli valores $\frac{1}{a}, \frac{1}{a'}, \frac{1}{a''}$, quorum poſtremi cum ex num. 177 habeant formam $\frac{1}{a} + t$ exiſtente t numero ibi dato, ſubſtitutis his valoribus pro $\frac{1}{a'}, \frac{1}{a''}$, & eorum quadratis pro $\frac{1}{a'^2}, \frac{1}{a''^2}$ habebitur demum æquatio data per numeros, ac $\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}$, quæ idcirco erit ſecundi gradus.

180. In

180. In ea æquatione termini eſſent 15, ſed cum ſingulæ ſubſtitutiones pro valoribus $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{a''}$ addant binos terminos, & ſingulæ pro $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{a''}$ ſingulos; fient 21: erunt autem pro primo termino æquationis $\frac{1}{a'}$ termini colligendi tres, pro ſecundo $\frac{1}{a}$ quatuor, quorum duo ex ſubſtitutione: pro poſtremo autem termini numerici 11, quorum duo ex ſubſtitutione pro $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{a''}$, quatuor ex $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{a''}$. Invento in ea æquatione $\frac{1}{a}$, invenientur ex formulis numeri 177 reliqui tres valores $\frac{1}{b} = \frac{1}{a'}$, $\frac{1}{b'} = \frac{1}{a''}$, $\frac{1}{b''}$ unde habebuntur quatuor radii binarum lentium vitrearum a, b, a', b'' includentium aquam in numeris, quorum unitas f. Eruto autem in iisdem unitatibus per formulas numeri 177 etiam valore diſtantiæ foci communis R, quam pro tribus lentibus, & pro radiis parallelis exhibet æquatio numeri 175, nimirum $\frac{1}{R} = \frac{m-1}{f} + \frac{m'-1}{f'} + \frac{m''-1}{f''}$; reducentur illi quatuor radii ad numeros, quorum unitas ſit R, quæ eſt longitudo teleſcopii, dempto ocularium ſyſtemate, dividendo numeros prius inventos per numerum inventum pro R, adeoque invenientur quæſiti radii relati ad eam ipſam teleſcopii longitudinem.

181. Si in ea æquatione valor a evadat imaginarius; poterit facile inveniri ejus valor ejuſmodi, ut exhibeat errorem minimum; nam æquatio reducta habebit hanc formam $\frac{1}{a^3} + \frac{p}{a} + q = 0$, datis per numeros p, & q, cujus primum membrum erit ipſe valor erroris figuræ ſphæricæ diviſus per conſtantem $\frac{1}{2} R^3 e^3$, vel ſimul etiam per $m'' - 1$. Differentiando ipſum membrum, habi-

to a pro variabili, fiet $-\frac{2\,da}{a^3} - \frac{p\,da}{a^2} = 0$; unde habetur $\frac{1}{a} = -\frac{1}{2}p$, ex quo valore inventis reliquis b, a'', b'', R, ut ſupra, habebitur ſyſtema exhibens errorem minimum. Is autem error ipſe habebitur ponendo hunc valorem a in formula $\frac{1}{a^2} + \frac{p}{a} + q$, & ipſam ducendo in $\frac{1}{2}\,R^2\,e^2$, vel ſimul etiam in $m'' - 1$, ex qua ſubſtitutione habetur valor $R^2\,(q - \frac{1}{4}p^2)\,\frac{1}{2}\,e^2$, vel is ductus in $m'' - 1$.

Scholium generale.

182 HOc pacto habentur omnia, quæ pertinent ad ſyſtema trium lentium compoſitarum e tribus ſubſtantiis habentibus diverſas rationes qualitatum diſtractivarum ad refractivas, & diverſam rationem diviſionis ſpectri, ſive diverſam rationem qualitatum diſtractivarum pertinentium ad diverſa colorum binaria, quæ ratio ſi eſſet eadem in binis ſubſtantiis pro binariis omnibus; ſufficerent binæ lentes ex iis binis ſubſtantiis ad conjungendos ad ſenſum in punctum unicum radios omnes provenientes ab unico objecti puncto. Ubi ea ratio eſt diverſa in omnibus tribus habentibus itidem ſatis magnum diſcrimen rationis qualitatum diſtractivarum ad refractivas, obtinebitur idem quamproxime per lentes tres unitis coloribus extremis cum uno medio.

183. Hanc methodum videtur indicare Natura ipſa, quæ in oculo conſtituit tres diverſas refringentes ſubſtantias, quamquam in eo quidem videtur Natura ipſa longe majorem perfectionem quæſiviſſe; nam & curvatura humoris cryſtallini plurimum differre ſolet a circulari, & ipſa lens humoris cryſtallini conſtat ſtratis diverſis ſuperinductis, quæ ſunt diverſæ denſitatis, uti conſtat potiſſimum in humore cryſtallino piſcium

in-

ingentium, in quibus diſcrimen denſitatis diverſorum ſtratorum multo facilius per obſervationem determinatur. Fortaſſe ſingula ſtrata deſtinata ſunt ad habendas ejusmodi qualitates refractivas, & diſtractivas, & ejusmodi figuras, ut ſi perfecta habeatur oculi conformatio, quamplurimi colores uniri poſſint, vel etiam omnes, ſi continuus ſit mutationis progreſſus in denſitate, & natura materiæ humorem cryſtallinum componentis; unde fit, ut formulæ pertinentes ad errores diverſæ refrangibilitatis, & figuræ ſphæricæ non poſſint applicari ad diſtinctionem imaginis in oculo, præterquam quod vel nulli, vel rariſſimi ſunt oculi, ut & cætera membra omnia, & poma, & frondes, & cryſtalli, & omne ſalium genus, ac reliqua omnia Naturæ opera, in quibus perfecta, quam affectant, figura obſervetur.

184. Si adhibeantur tria vitrorum genera, oportebit elaborare lentes tres, in quibus tamen binæ indeterminationes ſupererunt ad commodiorem formam ſeligendam. Sunt, qui commendent ut ſimpliciorem caſum, in quo ſuperficies quæpiam aſſumatur plana, facto infinito ejus radio. Verum apud vitrorum artifices ſatis conſtat, planam ſuperficiem multo difficilius efformari ſatis exactam, quam ſphæricam. Congruentia ſuperficierum contiguarum eſt multo magis opportuna; nam ea minuit partem luminis amiſſi per reflexiones. In quovis ingreſſu in lentem, & egreſſu ſemper reflectitur pars luminis eo major, quo majus eſt diſcrimen mediorum, quæ ſuperficies dirimit. Si lentes diſtent utcumque exiguo intervallo, habebitur duplex reflexio in egreſſu e vitro in aerem, & ingreſſu ex aere in vitrum, quibus ſuccedit in contiguis unica multo debilior orta in tranſitu e vitro in vitrum. Præter partem luminis amiſſam per eas reflexiones pro imagine in foco radiorum tranſeuntium ſine ulla reflexione habetur incommodum luminis ſpurii advenientis ad imaginem ipſam objecti poſt aliquot refractiones conjunctas cum binis reflexionibus. In tribus

len-

lentibus habentibus ſex ſuperficies, ſi nullæ congruant, habentur 15 binaria, quæ ſingula lumen transmittunt ad imaginem, & ſingula focos habent, pro quibus inveniendis habeo formulas admodum expeditas. Si aliquis ex iis focis foco principali radiorum directorum ſit proximus, imaginem turbat lumine ſpurio perfuſam in objectis admodum lucidis non ita tenui. Si ſuperficies lentis intermediæ congruant cum adjacentibus, ſuperficies reflectentes erunt quatuor, & binaria ipſarum tantummodo ſex.

185. Hinc etiam ex hiſce capitibus multo melius eſt aquam includere binis lentibus, quod requirit formationem ſuperficierum tantummodo quatuor, & minuit jacturam luminis in foco principali, ac ejus perturbationem a lumine bis reflexo.

186. Theoria omnis ejusmodi objectivi efformati per ejusmodi lentem triplicem hic eſt fuſe expoſita. Primo quidem ex obſervationibus vitrometro habitis, quæ fuſe referuntur paragrapho 1, & 2, & ex aliis indicatis, quæ ſunt habitæ ope priſmatis vitrei habentis angulum variabilem, oſtenditur ejus neceſſitas ad majorem teleſcopiorum perfectionem; cum inde appareat, unitis per lentem duplicem radiis extremis, medios ſimul cum ipſis non conjungi. Pluribus circa obſervationes propoſitas adnotatis in §. 3., expoſita eſt in §. 4. theoria radii transeuntis per duo priſmata contigua, in quorum primum incidat ad perpendiculum. Ejus ope deducta ſunt plura conſectaria phænomeni obſervati pertinentia ad unionem colorum, & expoſita omnis ratio inverſionis ſucceſſivæ ſpectri ex diverſa in diverſis ſubſtantiis ratione differentiæ valorum exprimentium rationem ſinuum pertinentium ad diverſa colorum binaria, ſive appellata m ratione ſinus indicentiæ coloris minus refrangibilis ex aere in quampiam ſubſtantiam, $m + dm$ eadem ratione in colore magis refrangibili, M, & $M + dM$ pro alia ſubſtantia, ex diverſa ratione valorum dm, dM pertinentium ad diverſa binaria, ut eo-

rum,

rum, qui pertinent ad rubeum, & viridem, ac eorum, qui pertinent ad rubeum, & violaceum; unde deducta eſt diverſa in diverſis ſubſtantiis ratio diviſionis ſpectri, & triplex Newtoni error expoſitus.

187. In ea perquiſitione occurrit §. 7. uſus curvæ exprimentis omnes ejusmodi rationes, exhibentibus abſciſſis omnes valores $d\,m$ pertinentes ad omnia binaria primi rubei combinati cum quovis alio, & ordinatis omnes dM ipſis reſpondentes, ac §. 8. exhibita eſt ratio determinandi proxime curvam ipſam ex aliquot obſervationibus habitis vitrometro, vel angulo variabili priſmatis vitrei, adeoque rationes ipſas valorum $d\,m$, dM reſpondentium binis colorum radiis, nimirum rubeo combinato cum violaceo, & cum quopiam intermedio, ut viridi, quod eſt elementum omnino neceſſarium pro determinatione ſyſtematis trium lentium, quæ ipſæ rationes quo pacto ex diviſione ſpectri immediate obſervata utcumque deduci poſſint, indicatum eſt §. 6.

188. Demum §. 9. delati ſumus ad unionem plurium colorum quotcumque ope totidem lentium, ſed indicata tantummodo ſolutione generali diligenter evolvimus id, quod pertinet ad lentes tres, potiſſimum ad eas, in quibus ſuperficies lentis mediæ congruunt ſingulæ cum ſingulis extremarum. Denominationes pertinentes ad illam rationem differentiarum habentur num. 167: formulæ, quæ proveniunt ex conditione unionis trium colorum in earum functionibus datis per ipſarum radios ſphæricitatis, habentur num. 172: valorem foci communis ejusmodi lentium exhibet numerus 175: formularum reductionem ad 4 radios profluentem ex congruentia ſuperficierum intermediarum habet 176, cum expreſſione radiorum reliquorum per radium ſolius primæ ſuperficiei, quorum indiculus habetur num. 177.

189. Inde num. 178 proponitur æquatio ſecundi gradus orta ex correctione figuræ ſphæricæ, cujus æquationis forma conſideratur num. 179. Ex ea æquatione eruto valore primi radii,

eruuntur per præcedentes formulas reliqui, & diſtantia foci communis, adeoque ſyſtema totum quatuor ſuperficierum relatum ad diſtantiam foci communis. Quod ſi forte ea æquatio exhibeat valores imaginarios, oſtenditur num. 180, quo pacto iidem radii inveniri poſſint ita, ut omnium minimum retineant ſphæricæ figuræ errorem.

190. Hæc omnia ad theoriam pertinent: ſupereſſet applicatio numerorum ad formulas, qui deſumi poterant ex ipſis obſervationibus, quas propoſuimus, quem laborem ſuſcepiſſem utique, ſi per tempus, & valetudinem licuiſſet. Tot curis obrutus, quarum aliquas in exordio hujuſce diſſertationis expoſui, vix, ut liquet ex num. 6, cæpi in hac ipſa diſſertatione digerere in primo ipſo hujuſce anni exordio Mediolani argumentum, quod jamdiu animo conceperam, & cujus ſpecimen quoddam tenue, quod pertinet ad ſucceſſivam inverſionem ſpectri obſervatam per vitrometrum, ejusque cauſam, ac ad formulas trium lentium initio ſuperioris anni perſcripſeram ad Clairautium, ut regiæ ſcientiarum Academiæ communicaretur, tum vero & ad Scherfferum noſtrum Viennam, a quo id ipſum, cum aliis nonnullis, ut in hujus ipſius diſſertationis exordio innui, jam Germanice eſt editum. Demum Mortono, qui Regiæ Societati eſt a ſecretis, innueram & ſucceſſivam inverſionem ſpectri, & diverſam in diverſis ſubſtantiis rationem diviſionis ſpectri inde erutam, quæ omnino everteret analogiam cum Newtoniana diviſione monochordi, ut ea meo nomine cum Regia Societate Londinenſi communicaret. Vix inter Papienſis ſcholæ turbas mille aliis impedimentis interturbatus perſequi utcumque potui, abſoluturus utique in hiſce vacationibus bacchanalium, per quas iterum regredi Mediolanum oportuit ad alia etiam ſimul curanda, niſi in ipſo fere primo adventu correptus morbo ſane importuno deberem decumbere. Quam ob cauſſam urgente impreſſionis tempore ægre in ipſo lecto huc congeſſi præcipua ex iis, quæ jamdiu, ut ajebam, in animo habueram jam digeſta.

DISSERTATIO III.

De diſtributione Luminis refracti a lentibus per circellum exprimentem errorem figuræ ſphæricæ.

1.

Ubi radii lucis incidunt in unam, vel plures lentes, & ab iis detorti per refractionem exhibent imaginem objecti, ea imago eſſet maxime diſtincta, ſi radii a quovis objecti ipſius puncto profecti in unico puncto colligerentur. At obſtat tam figura ſphærica, quam diverſa radiorum refrangibilitas. Figura ſphærica radios etiam homogeneos non colligit accurate in unico puncto; ſed ii, qui incidunt propiores axi, coeunt cum ipſo axe in puncto remotiore ab ipſa lente, quam qui incidunt remotiores. Quod ſi etiam lens illos colligeret in unico puncto; diverſa diverſorum colorum refrangibilitas efficeret aberrationem, quæ cum illo errore figuræ ſphæricæ conjungitur, cum nimirum radii violacei citius coeant, quam rubei.

2. Secluſo mente errore figuræ ſphæricæ, radii omnes heterogenei colliguntur in circello, & ipſe error figuræ radios omnes heterogeneos adhuc intra circellum continet, quos circellos conſideravimus in prima diſſertatione impreſſa in parte prima novi tomi Academiæ Bononienſis, ac eos, ubi minimi ſunt, inter ſe contulimus, atque invenimus proportionem diametrorum generalem, quæ in caſu conſiderato a Newtono, eandem nobis rationem exhibuit, quam ipſe ſine demonſtratione propoſuerat, quæ aliquot millibus vicium reddit majorem diametrum in illo errore diverſæ refrangibilitatis, quam in hoc figuræ ſphæricæ.

3. Newtonus quidem in eodem illo errore diverſæ refrangibilitatis conſideraverat etiam diſtributionem totius luminis per ipſum circellum, & propoſuerat tam rationem, in qua variatur ejus denſitas in progreſſu a centro ad peripheriam, quam eam, quæ exprimat, quota pars totius luminis contineatur in quovis minore circello concentrico continente partem areæ totius circelli exprimentis eum errorem. Determinatio ab illo exhibita Opticæ parte 1. libri 1. prop. 7. huc redit. Si in figura 1 diameter ejus circelli ſit CO C, & ſumatur quodvis punctum H inter centrum O, & peripheriam, fore denſitatem luminis in ipſo ut $\frac{HC}{HO}$, quantitatem autem luminis in circello, cujus radius OH, ad totum lumen, uti eſt differentia quadratorum OC, CH ad quadratum OC; unde patet, denſitatem in centro, evaneſcente HO, abire in infinitum, perpetuo autem minui verſus marginem C, in quo, evaneſcente HC, evaneſcat etiam ipſa; quantitatem vero luminis fore dimidiam quantitatis totalis in eo circello, in quo quadratum CH fuerit dimidium quadrati OC; quo caſu lumen in eo ipſo circello erit æquale lumini annuli reſidui HC.

4. Pro-

4. Proportionem illam Newtoni ego quidem accurate demonſtravi in parte 2 diſſertationis de lumine impreſſa anno 1748, quam quidem demonſtrationem inde deſcriptam huic diſſertationi adnectam in fine. Libet nunc perquiſitionem eandem inſtituere in circello pertinente ad errorem figuræ ſphæricæ, quæ quidem perquiſitio plurimi intereſt, ubi ii errores inter ſe comparantur, cum ſenſus a lumine excitatus pendeat omnino ab ipſius denſitate, & copia luminis in dato ſpatiolo collecti. (*a*) Ad hanc perquiſitionem

(*a*) En autem quid demum invenerim; nam diuturnæ, & admodum moleſtæ perquiſitionis fructum hic paucis exponam in anteceſſum.

Circellus C'OC continens in minimo ſpatio radios omnes homogeneos refractos ab apertura F' I F cadit inter B concurſum radiorum extremorum, & I ultimam interſectionem infinite proximorum axi, triplo propior illi, quam huic.

Ejus diameter, mutata apertura, eſt in ratione triplicata aperturæ ipſius, & ſeſquiplicata rectarum IO, OB, IB.

Ad quodvis punctum H ipſius diametri deferuntur radii numero tres a tribus aperturæ punctis P, P', P'', quæ ſic inveniuntur. Centro O, intervallo OI deſcribatur circulus occurrens ipſi IO productæ in R: in IR producta tantundem in E capiatur IG, quæ ſit ad ipſam IE, in duplicata ratione OH ad OC: centro R, intervallo RG inveniatur in peripheria circuli punctum H: Sumatur arcus RM triens RK, tum MM', MM'' trientes totius peripheriæ, poſito M' in ſemicirculo RKI, vel in oppoſito, prout fuerit IG minor, vel major, quam IR: centro R intervallo RM, RM', RM'' inveniantur puncta N' verſus I, & N, N'' verſus E: erigantur perpendiculares ad IE rectæ NT, N'T' in directione OH, & N''T'' in oppoſita, quæ ſint ad OC in ratione ſeſquiplicata IN, IN', IN'' ad IO. Rectæ ductæ ex H per puncta T, T', T'', determinabunt quæſitas directiones radiorum PH, P'H, P''H.

Ad ſingula puncta C', C peripheriæ circelli deferuntur bini tantum radii, & ad centrum O numero infiniti.

Lumen, quod ingeritur in quemvis annulum Hh ab annulo intermedio Pp, æquatur ingeſto a reliquis binis P'p', P''p'' ſimul.

Factis Oq, Oq' ad OC in ſubduplicata ratione 1 ad 2, circello interiore q'Oq' continetur dimidium totius luminis contenti toto circello C'OC reliquo dimidio contento in annulo exteriore qC, qui eſt ipſi circello interiori æqualis.

Ubi-

nem proderunt plurimum ea, quæ in memorata Bononienſi diſſertatione ſunt demonſtrata.

5. Referat recta F F in figura 1. lentem, a qua radii detorqueantur ad axem A I: oſtenſum eſt num. 69, radios quidem, qui incidunt in puncta propiora axi, ſerius convergere prope punctum quoddam I, quod ſit ultimus limes concurſuum omnium cum ipſo axe, & conſideratur, ut focus radiorum infinite proximorum axi, veluti radius P H, qui appellit ad punctum axis L proximum puncto I, tum reliquos, quo magis remoti incidunt ex parte utravis, eo citius ad ipſum devenire, ut P H in L, P H in L, poſtremos autem, qui incidunt in puncta extrema aperturæ F F, omnium citiſſime in quodam puncto B, exprimente B I errorem rectilineum reſpondentem toti aperturæ habenti ſemidiametrum A F. Porro is error ibi determinatur generaliter ita, ut reſpondeat cuivis aperturæ non nimis magnæ, atque id quidem num. 44 pro lente unica, num. 52 pro binis, de quo errore ibidem agitur num. 69. & alibi. Determinatur autem ex data ſuperficierum curvatura, qualitate refractiva, & amplitudine aperturæ, appellata nimirum A P ſemidiametro aperturæ e, invenitur formula continens valorem datum per ipſam qualitatem refractivam ſubſtantiæ, e qua lens conſtat, & radios ſphæricitatum, ductum in e,

quæ

Ubicumque fuerit punctum H, lumen contentum annulo H q ad dimidium luminis totalis, nimirum ſemidifferentia luminis contenti circello interiore O H, & annulo exteriore H C ad ſemiſummam eſt, ut chorda R M ad radium O R.

Denſitas luminis in quovis loco H eſt reciproce, ut differentia quadratorum ejusdem chordæ R M, & radii O R, quæ denſitas idcirco in margine C, C, & in centro O excreſcit in infinitum, eſt autem minima in punctis q, q.

Ea denſitas minima ad mediam, quæ haberetur, ſi totum lumen æqualiter diffunderetur per totam aream circelli C O C, eſt ut 2 ad 3, quod quidem acuit ſenſum erroris figuræ ſphæricæ per totum circellum.

Diſſertatio continet horum omnium demonſtrationes cum tota inveſtigationis ratione, & pluribus animadverſionibus ſcitu non indignis.

quæ formula cum exprimat diſtantiam concurſus L ab I, inde patet, errorem ejusmodi rectilineum L I eſſe, ut quadratum ſemidiametri aperturæ A P.

6. Porro ſatis patet, radios ejusmodi contingere perpetuo in punctis quibusdam T, qui ſunt ultimi limites interſectionum radiorum proximorum, curvam quandam continuam, quam Geometræ cauſticam appellant, quam ibidem conſideravimus a numero 69: numero 71 inventum eſt, cauſticam hujusmodi in hoc lentium caſu prope punctum I accedere in infinitum ad naturam parabolæ gradus tertii, in qua quadrata ordinatarum ſunt ut cubi abſciſſarum computatarum ab ipſo puncto I, ubi ejusmodi parabola habet cuſpidem efformatam ab arcubus I C' D, I C D tangentibus hinc & inde axem medium I O A. Radii incidentes in F' F eam tangunt in punctis D' D æque remotis ab axe ſecante rectam D' D bifariam, & ad angulos rectos in E, ſi puncta F', F eodem modo æque ab eo diſtant, tum progreſſi ultra B ſecant arcus ipſius oppoſitos in C, C' ita, ut & C' C ſecetur ab axe eodem biſariam itidem, & ad angulos rectos in O. Demonſtratum eſt autem num. 72 fore ſubtangentem ad abſciſſam computatam ab I ut 2 ad 3, adeoque $EB = \frac{2}{3} EI$ & proinde I B trientem I E, ut etiam illud, fore I O quadrantem ipſius I E, adeoque I B. I O :: 4. 3, & B O trientem I O: fore itidem $C'C = \frac{1}{8} D'D$. Ipſum circellum deſcriptum diametro C' O C eſſe ſpatium minimum omnium eorum, quæ radios omnes excipiunt, demonſtratum eſt num. 69 ex eo, quod verſus E ſe expandat cauſtica, verſus I latera B C', B C anguli C' B C.

7. Ea omnia ſine ullo calculo infiniteſimali, quo ibi uſi ſumus, quanquam admodum elementari, ſic demonſtrabuntur multo facilius ex hiſce ſolis lemmatis, quod error rectilineus I E in diverſis apperturis ſit, ut quadratum ſemidiametri aperturæ A P,

& quod is error, ubi aperturæ non ſint ita enormes, ſit perquam exiguus reſpectu diſtantiæ foci AI: ea ſatis ſunt nota, &, ut vidimus, immediate deducuntur ex ipſa expreſſione erroris hujusce determinata in eadem diſſertatione.

8. Sint in fig. 2 bini radii infinite proximi PL, *pl*, quorum interſectio T haberi poterit pro contactu, in quem ea deſinit, ubi demum *pl* deſinit in PL, & rectæ ex T, ac L parallelæ AP occurrant illa axi in N, hæc radio [illegible] in H. Primo quidem, facta $\frac{AP^2}{IL} = 1$, adeoque $AP^2 = IL$, erit $AP^2 - Ap^2$, ſive $2AP \times Pp = Ll$, nimirum $Pp . Ll :: 1 . 2AP$. Deinde habebuntur e triangulorum ſimilitudine ſequentes proportiones, AN. NL :: PT. TL :: *Pp*. LH, & AP . AL :: LH. L*l*. Igitur habitis AN, AL pro æqualibus ob ingentem diſtantiam puncti A a punctis N, L proximis ſibi invicem, & puncto I, erit ex æqualitate perturbata $AP . NL :: Pp . Ll :: 1 . 2AP$. Quare $NL = 2AP^2$. Cum igitur ſit $IL = AP^2$, erit $NL = 2IL$, & IL pars tertia abſciſſæ IN, quæ ipſa abſciſſa erit idcirco, ut quadratum ipſius AP.

9. Hinc autem habebitur $AL^3 . NL^3 = \frac{4}{9} IN^3 :: AP^2 = IL = \frac{1}{3} IN . NT^2 = \frac{4 IN^3}{27 AL^3}$. Cum igitur AL haberi poſſit pro AI conſtanti, erit NT^2, ut IN^3 quadratum ordinatæ, ut cubus abſciſſæ, quæ eſt natura parabolæ gradus tertii, quam ſupra nominavimus.

10. Inde vero conſequuntur omnia, quæ diximus. Nam in fig. 1 abeunte T in D, abit L in B, & eſt IB triens IE: aſſumpta vero $OB = \frac{1}{4} IB$, adeoque $= \frac{1}{8} BE$, & erecta OC normali ad axem usque ad concurſum cum DB in C, erit $OC^2 . ED^2 :: OB^2 . BE^2 :: 1 . 8 \times 8 = 64$: & pariter eſt $IO^3 . IE^3 :: 1 . 4 \times 4 \times 4 = 64$. Quare cum & quadratum ordinatæ erectæ ex O ad ED^2 de-

debeat esse ut IO^3 ad IE^3, erit OC' ordinata ad curvam, quam idcirco ibi secat iterum tangens FDB: cumque eadem sit ratio pro puncto C, patet diametrum CO'C circelli continentis in minimo spatio omnes radios esse ad rectam D'ED, ut OB ad BE, nimirum ut 1 ad 8, & ejus distantiam IO a vertice cuspidis I esse quadrantem totius axis IE.

11. Oportet jam videre, qua lege distribuatur totum lumen per planum ejus circelli, nimirum primo quidem, quæ sit ratio densitatum in punctis quibusvis assumptis intra ipsum in quovis plano secante totum solidum spinale causticæ respondens toti lenti circumquaque circa axem, quod planum refert figura 1, ita, ut solidum ipsum spinale generetur conversione dimidiæ ipsius figuræ circa axem AI: tum vero, quæ sit ratio totius luminis ad partes contentas circello genito ab OH, & residuo annulo genito ab HC.

12. Ad ea determinanda proderit plurimum prius investigare, quot, & qui radii PL deferantur ad quodvis punctum H, & in quibus angulis, sive quæ futura sit pro iis radiis ratio distantiarum AP ad semidiametrum totius aperturæ AF, quibus semel determinatis, cætera omnia inde admodum facile consequentur. Porro id quidem totum præstatur expeditissime per analysim admodum elementarem, & constructionem sane elegantissimam.

13. Problema 1. Invenire radium, qui debeat appellere ad quodvis punctum H datum in quovis radio OC circelli CC'.

14. Assumpta ES versus I = IO, erit SI = 3IO, NI = 3IL, adeoque SN = 3OL: est autem $IO^3 . IN^3 :: OC^3 . NT^3$, & $LN^2 = \frac{4}{9} IN^2 : LO^2 . = \frac{1}{9} SN^2 :: NT^2 . OH^2$. quare conjunctis rationibus, & demptis communibus $\frac{1}{9} NT^2$, IN^2, erit $4IO^3 . IN \times SN^2 :: OC^2 . OH^2$, nimirum $IN \times SN^2$ quantitas data, cum dentur reliqua ea proportione (a): inde facile eruitur

æqua-

(a) Problema huc reductum est, ut datis in recta indefinita binis punctis I, S, quæratur tertium N ejusmodi, ut e binis ejus distantiis a punctis datis NI, NS,

æquatio commodiſſima, & conſtructio ſimpliciſſima. Fiat IO $= a$, OC $= c$, OH $= r$, RN $= x$, erit IN $= x + 2a$, SN $= a - x$, & iis valoribus ſubſtitutis $c^2 . r^2 :: 4a^3 . - 3a^2 x + x^3 + 2a^3 = \frac{4a^3 r^2}{c^2}$, ſive $x^3 - 3a^2 x + a^3 \left(2n - \frac{4ar^2}{c^2}\right) = 0$.

15. Hæc æquatio habet radices reales tres, quotieſcunque valor $2a = \frac{4ar^2}{c^2}$ fuerit minor, quam $2a$, quod hic ſemper accidit; nam ob OH ſemper minorem OC eſt r minor, quam c, adeoque $\frac{4ar^2}{c^2}$ minor, quam $4a$, qui valor ablatus a valore $2a$ vel relinquet quantitatem poſitivam, vel ſaltem negativam minorem $2a$. Maxima e tribus radicibus erit æqualis reliquis binis ſimul ſumptis, & cum ſigno contrario, cum earum ſumma $= 0$ deſtruat ſecundum terminum: ea vero maxima erit poſitiva, vel negativa, prout ultimus terminus fuerit e contrario negativus vel poſitivus, cum poſtremus terminus debeat eſſe productum ex radicibus omnibus acceptis cum ſigno contrario, adeoque ob productum binarum minorum conformium ſemper poſitivum, debeat habere ſignum contrarium ſigno radicis maximæ. Conſtruetur autem methodo elementari notiſſima ad triſectionem arcus circuli, cujus radius a, chorda $2a - \frac{4ar^2}{c^2}$ (*b*). En conſtructionem ipſam

ſane

NS, productum ex altera in quadratum alterius æquetur dato ſolido. Æquationes omnes ſecundi gradus eo reducuntur, ut debeat eſſe productum ex ipſis æquale plano dato. Ad hoc autem productum datum ex quadrato alterius in alteram reducuntur omnes æquationes gradus tertii, in quibus ſecundus terminus deeſt, & tertius eſt negativus.

(*b*) 1. Licet ea conſtructio ſit ſatis nota, ac pertinens ad elementa, eandem tamen hic evolvemus, cum ab ea pendeant reliqua fere omnia, quæ dicturi ſumus. Sit in fig. 3 arcus RMK diviſus in partes æquales tres in M, N, & chorda

ſane ſimplicem, & elegantem pro iis radicibus, & earum uſu ad determinandos radios quæſitos.

16. Capiatur ab I verſus E recta IG, quæ ſit ad IE in ratione duplicata OH ad OC: centro O intervallo OI deſcriba-

---

KR occurrat radiis OM, ON in A. Patet, triangulum MRA fore ſimile iſoſcelio MOR ob angulum ad M communem, & angulum MRK æqualem MOR, cum ille inſiſtat ad circumferentiam arcui KM, hic ad centrum arcui MR ejus dimidio. Quare erit & RA = RM, & poſito OR = a, RK = b, RM = x, erit OR = a . RM = x : : RM = x .. MA = $\frac{x^2}{a}$. Erit itidem OM = a . OA = $a - \frac{x^2}{a}$: : NM = x . BA = $x - \frac{x^3}{a^2}$. Sunt autem RA, & KB æquales inter ſe, ut patet, & ſingulæ = MR = x. Quare erit tota KR = $3x - \frac{x^3}{a^2} = b$, ſive $x^3 - 3a^2 x + a^2 b = 0$.

2. Ejus æquationis una radix erit chorda RM: reliquæ duæ ſi aſſumantur trientes circuli MM', MM'', erunt chordæ RM', RM'', quia arcus RMM', & RMM'M'' erunt trientes arcuum RKIM'' RK, RKIM'' RKIM'' RK, qui omnes eadem æquatione contineri debent.

3. Patet autem, debere eſſe b non majus $2a$, cum chorda diametro major eſſe non poſſit.

4. Poſito M' in eodem ſemicirculo cum RMK, & M'' in oppoſito, patet, facta $b = 2a$, abire K in I, adeoque arcum RM fore trientem ſemiperipheriæ, & idcirco RM itidem eidem æqualem fore; ac chordas RM, RM'' æquales radio RO, punctum vero M' abiturum in I: facto autem $b = 0$, evaneſcit tam RK, quam RM, & fiunt RM', RM'' æquales inter ſe, chordæ nimirum graduum 120, quæ ſunt ad radium in ratione ſubduplicata 3 ad 1.

5. In reliquis caſibus erit RM' radix maxima, RM minima, quæ habebit ſignum contrarium ſigno reliquarum, & contrarium ſigno valoris b.

6. Facile inveniuntur eæ radices per tabulas ſinuum. Fiat ut IR = $2a$ ad RK = b ita radius ad ſinum anguli, qui dicatur A: capiantur $\frac{1}{3}$ A, 60° + $\frac{1}{3}$ A, 60° — $\frac{1}{3}$ A, & factis, ut radius ad ſinum cujusvis ex iis tribus, ita RI = $2a$ ad quartum, habebuntur tres chordæ RM, RM', RM''.

7. Sunt

tur circulus occurrens axi iterum in R: centro R, intervallo RG inveniatur in peripheria ejus circuli punctum K: assumatur arcus RM triens RK: centro R, intervallo RM inveniatur in axe punctum N ad partes oppositas puncto G respectu R: erigatur demum ordinata NT ad arcum ICD jacentem ad eandem axis plagam cum H, & recta HT determinabit positionem radii quæsiti PL.

17. Constructionis ratio est manifesta. Cum sit $OC^2 = C^2.OH^2 = r^2 :: IE = 4a.\ IG = \frac{4ar^2}{c^2}$, & $IR = 2a$; erit $RG = 2a - \frac{4ar^2}{c^2}$, cui capienda erat æqualis chorda RK. Tum RM erit $= x$, ut oportebat. Quod si, facta IG majore, quam IR, abeat RG in directionem oppositam in Rg; mutabit eandem & arcus RK abiens in Rk, & RM in Rm, adeoque & RN in Rn, quæ adhuc debebit esse contraria Rg, uti fuerat præscriptum.

18. Scholium 1. Æquatio illa gradus tertii præter radicem RM habet alias duas, quæ inveniuntur assumptis trientibus MM', MM'' totius peripheriæ: pro casu IG minoris, quam sit IR, ponatur M' in eodem semicirculo cum K, M, & M'' in opposito, ac pro casu IG majoris, abeuntis nimirum in Ig, mutata di-

---

7. Sunt enim chordæ RK, RM, RM', RM'', sinus angulorum, quos metiuntur dimidii sui arcus ad radium RI, & dimidia arcuum MM', MM'' sunt gradus 60.

8. Mutata RK, mutantur omnes tres chordæ RM, RM', RM'', ita tamen, ut mutatio primæ æquetur mutationibus reliquarum simul sumptis.

9. Nam crescente RM, debet crescere RM', quæ oritur a summa ipsius RM, & 60°, & decrescere RM'', quæ oritur a differentia. Cum vero debeat, remanere RM' æqualis summæ RM, RM'', debebit ejus incrementum æquari excessui incrementi RM' supra decrementum RM'', adeoque incrementum RM' cum decremento RM'' debet æquari soli incremento RM.

10. Hæc harum radicum proprietas hic probe notanda, magno nimirum futura usui.

directione RK, RM in R*k*, R*m*, retineantur *m*', *m*'' in ſemicirculis, in quibus erant M', M'', ut jam ſint *m*, *m*'' in eodem, *m*' in oppoſito. Sumatur autem tam RN'' in primo caſu, quam R*n*'' in ſecundo verſus E, & RN', R*n*' verſus I, ducaturque ordinata N'T, vel *n*'*t*' ad arcum eundem ICD, ordinata vero NT'' vel *n*''*t*'' ad oppoſitum IC'D'.

19. Plagæ punctorum N determinantur a valore radicum: in primo caſu, exiſtente RG poſitiva, radix maxima eſt RM', & debet eſſe negativa, reliquis poſitivis, & idcirco RN'' jacet cum RN ad eandem plagam, RN' ad oppoſitam. In ſecundo caſu exiſtente R*g* negativa, & migrante *m* ad partes *m*'' radix maxima evadit R*m*'', & remanet ſola poſitiva, reliquis negativis: quam ob cauſſam mutat directionem R*m*, ſed eam retinet tam R*m*', quam R*m*''. Porro idem exhibet etiam motus continuus eorum punctorum: ſolum punctum M delatum ad R progreditur ita, ut RM evaneſcens in R, abeat in negativam in R*m*.

20. Schol. 2. Inventis punctis N, facile determinantur puncta T ſine ullo curvæ præſidio. Capienda erit NT ad OC in ſeſquiplicata ratione IN ad IO, ſive fieri debebit, ut IO^3 ad IN^3, ita OC^2 ad NT^2, cujus quadrati latus exhibebit quæſitam NT.

21. Notandum quoque, quælibet puncta N determinare per ſuas TN productas ad arcum oppoſitum etiam alia puncta, quæ exhibebunt radios pertinentes ad punctum H' poſitum ex parte oppoſita verſus C'. Nam idem punctum G pertinet ad H, quod ad H; cum IG determinetur per quadratum CH', quod facta CH negativa in CH' adhuc remanet poſitivum.

22. Schol. 3. Proderit plurimum evolvere caſus præcipuos pendentes a diverſa poſitione punctorum H, & G. Secetur autem bifariam RE in S, & per S, ac R ducantur ordinatæ, quæ occurrant curvæ in punctis V, V, Z, Z. Porro haberi

debet ob oculos ſemper nexus inter G, & H, cum ſit IG. IE :: OH^2 . OC^2 per conſtructionem. Pro varia poſitione puncti H in recta OC acquirit variam poſitionem G in recta IE, & ab ipſa pendent poſitiones punctorum M, N, T, P, L.

23. Si punctum H abierit in centrum O, evaneſcente OH, evaneſcet etiam IG, & puncto K abeunte in I cum G, erit RM triens ſemiperipheriæ, cui idcirco fiet æqualis & RM', puncto M' abeunte itidem in I. Abibunt igitur in I & puncta N', T', L', nimirum unus e tribus radiis erit is ipſe, qui defertur per axem AI, quem utique patet debere tranſire per centrum O. Chordis autem RM, RM'' factis æqualibus radio circuli RO, abibunt & puncta N, N'' in S, & contactus T, T'' in V, V'', puncta autem P, P'' abibunt in ejusmodi puncta Y, Y', ut ſit tam AY, quam AY' ad AF in ſubduplicata ratione 3 ad 4, ſive proxime ut 86 ad 100.

24. Et quidem ubicumque fuerit H extra centrum O, ad ipſum non devenient, niſi ſoli tres radii delati a tribus punctis P jacentibus in eodem plano cum ipſo, & axe, determinatis per propoſitam conſtructionem: ſed ad centrum O præter radium, qui venit per axem, venient infiniti numero radii, nimirum ii omnes, qui tranſeunt per peripheriam circuli habentis Y' Y pro diametro, cum plana omnia in eo caſu tranſeant per H poſitum in ipſo axe.

25. Si captis in OC, OC' punctis q, q' ita, ut quadratum Oq, Oq' ſit dimidium quadrati OC, punctum H abeat in q, vel q', erit IG dimidia IE, adeoque punctum G abibit in R, evaneſcentibus tam RK, quam RM. Is eſt caſus, in quo una e tribus radicibus æquationis RM facta $= o$, reliquæ binæ RM', RM'' evadent æquales inter ſe, & erunt ſingulæ ad IR in ſubduplicata ratione 3 ad 4, ſive proxime ut 86 ad 100; cadet N in R, & P in quoddam punctum Q ita, ut ſit itidem quadratum AQ dimidium

qua-

quadrati AF, uti eſt IR dimidia IE, eritque ibi AQ. AF :: Oq. Oc. Sumptis autem Rr, Rr' verſus I & E, quæ ſint ad IR in ſubduplicata ratione 3 ad 4, abibunt N', N'' in r, r'.

26. Si fuerit OH adhuc major; jam IG evadens major, quam IR abibit in Ig. Facta Rg negativa, debebit mutare directionem etiam arcus RMK juxta num. 18, abeunte K in k, M in m, N in n infra R, N' in n' ſupra r, N'' in n'' ſupra r', perget autem recedere P ab F, P' ab A, & accedere P'' ad F.

27. Si punctum H abierit in C; erit Ig = IE, adeoque RK iterum æqualis RI, abeunte m'' in I, n'' in E, & factis RM, Rm &c. æqualibus inter ſe, & æqualibus radio RO, abibunt ambo n', n in O. Nimirum contactus t'' abibit in D', & bini contactus t', t in C, abeunte radio P''H in illum F'D'C extremum, & binis PHT', PTH in unicam tangentem curvam in C, & tranſeuntem per quoddam punctum X, quod quidem ſecabit bifariam rectam AF, cum per num. 19 debeat tum eſſe $OP^2 . OF^2 :: IO . IE ::$ 1.4, licet id figura non exprimat ob nimis exiguam diſtantiam rectæ F'AF a curva D'ID.

28. Coroll. *Ad quodvis punctum aſſumptum in margine circelli deveniunt bini radii, ad quodvis poſitum ubivis inter peripheriam, & centrum deveniunt tres, ad centrum ipſum numero infiniti.*

29. Patet ex evolutione caſuum expoſitorum in ſcholio ſuperiore.

30. Scholium 3. Erit admodum utile conſiderare nexum omnem punctorum P, T, N, H, & eorum motus pendentes a ſe invicem ad acquirendam ideam admodum diſtinctam caſuum omnium, quæ viam ſternet pronam, & expeditam ad conſiderandam ipſam luminis diſtributionem, quæ eſt totius perquiſitionis caput præcipuum.

31. Si

31. Si punctum H digreſſum a centro O percurrat totum radium OC; punctum P' percurret rectam AX, punctum P rectam YX, punctum P'' rectam Y'F: punctum N', & *n'* rectam I*r*O: N, & *n* rectam SRO: N'', & *n''* rectam S*r'*E: punctum T', & *t'* arcum IC: T, & *t* arcum VZC: T'', & *t''* arcum V'D', & iis æquales ſunt motus ex parte oppoſita, puncto H percurrente OC'.

32. Si punctum P (deſignabimus hic unica littera ſine accentibus caſus omnes pertinentes ad H, & H') motu continuo excurrat ab F' ad F, unicam quandam velut oſcillationem perficiens; punctum contactus T percurret itidem motu continuo arcus D'CI, ICD unicam itidem oſcillationem conficiens in curva continua D'ID: punctum N ipſi reſpondens deſcendet per EI, tum aſcendet per IE conficiens oſcillationem duplicem: punctum H diſcedet a C, & perficiet oſcillationem triplicem: primam per COC', dum abit P per F'X', N per EO, T per D'C', ſecundam per C'OC, dum abit P per XAX, N per OIO, T per C'IC, tertiam iterum per COC', dum abit P per XF, N per OE, T per CD.

33. Quoniam punctum H in ſingulis ejusmodi oſcillationibus ſemel advenit ad quodvis punctum aſſumptum intra diametrum C'OC, præter ipſa puncta extrema C', C, ad quorum utrumvis advenit tantummodo bis in oſcillationum limitibus; idcirco ad quodvis punctum H advenient tres radii & ad utrumvis e punctis C', C duo tantum. Ad centrum O etiam advenient tantummodo tres e radiis jacentibus in plano quovis tranſeunte per axem. Sed quoniam advenient radii pertinentes ad omnia ejusmodi plana; in eo habebuntur ſimul infiniti.

34. Patet autem, in ſecunda ſeſquioſcillatione puncti H redire omnia eodem prorſus modo, quo in prima, ſed ordine retrogrado.

35. Scho-

35. Scholium 4. Si assumatur quodvis punctum d in recta $C'OC$ producta ex parte utravis; quadratum Od fit majus quadrato OC, adeoque & Ig major, quam IE, & Rg major diametro RI. Quamobrem chorda ipsi æqualis in circulo aptari non potest. Is est casus, in quo valor $\frac{4ar^2}{c^2}$ evadit major, quam $4a$, & $2a - \frac{4ar^2}{c^2}$ major $- 2a$. In eo casu æquatio $x^3 - 3a^2x + a^2\left(2a - \frac{4ar^2}{c^2}\right) = 0$ habet unicam radicem realem, quæ non pertinet ad trisectionem anguli, sed ad inventionem duarum mediarum continue proportionalium inter duas datas: ejus expressio habetur tota realis per formulas notissimas radicales, quæ huc reducitur

$$a\sqrt[3]{\frac{2r^3 - c^2 + 2r\sqrt{r^2 - c^2}}{c^2}} + a\sqrt[3]{\frac{2r^2 - c^2 - 2r\sqrt{r^2 - c^2}}{c^2}},$$

cujus valor debet esse major, quam $2a$, adeoque punctum N abiret ultra E, & determinaret contactum in arcu $IC'D'$ opposito puncto h producto ultra D'. Illuc nimirum adveniret radius unicus pertinens ad aperturam productam ultra F', adeoque majorem data. (a)

36. Fa-

(a) 1. Punctum quidem d adhuc est ejusmodi, ut perpendicularis ex ipso ducta ad axem adhuc occurrat ipsi axi supra punctum I, & secet curvam alicubi in C, quam ob causam ad ipsum etiam pertinet inventa æquatio. Sed si ea perpendicularis caderet infra I; immutanda esset paullisper calculi ratio. Illud quidem satis erat pro investiganda distributione luminis per circellum $C'OC$, & per totum ejus planum, sed ad eam habendam pro plano quovis, sive situm sit supra I, sive per ipsum transeat, sive cadat infra, ita instituenda est analysis, ut non pendeat a concursu ejus perpendicularis cum ipsa curva. Id autem hic præstabimus.

36. Facile autem demonſtrari poteſt illud: ex omnibus radiis tranſeuntibus per aperturam FF' devenire ad quodvis punctum aſſumptum intra angulum F'BF radium unicum: ad quodvis punctum trilinei D'BC' vel DBC contenti binis rectis, & arcu D'C',

---

2. Ad id præſtandum conſiderentur poſitiones omnes puncti H, per quod radius tranſire debeat. Sint in fig. 4 ID'X', IDX bina crura ejus parabolæ gradus tertii, ad cujus formam accedit cauſtica in infinitum prope cuſpidem I, & jaceat ubicunque punctum H, per quod debeat tranſire radius contingens ipſam curvam in T, & occurrens axi in L. Ducta ex eo recta perpendiculari ad axem, tres erunt caſus, quorum ſinguli in alios ſubdividentur: vel enim ea recta incurret in ipſum axem ſupra I verſus curvam in O, vel incurret in ipſum I, puncto H abeunte in h, vel infra ipſum in O', puncto H abeunte in H'. In primo autem caſu recta aH incurret alicubi in curvam in C, & punctum H jacebit vel in axe in O, vel reſpectu ipſius axis citra C, vel in C, vel ultra C; in ſecundo, & tertio, vel erit in axe in ipſo I, aut O', vel cadet extra ipſum.

3. Ut unica ſolutio transferri poſſit ad omnes eos caſus, applicetur ipſa primo caſui, & in eo conſideretur contactus T cadens ad partem axis contrariam reſpectu H; nam ex ea parte habetur ſemper aliqua ſolutio realis in omnibus caſibus; & ducta ordinata TN, tum ex quovis alio puncto p aſſumpto ad arbitrium in axe ſupra I ordinata pq, captaque OR æquali, & contraria OI, ponatur $IO = OR = a$, $OH = r$, $Ip = b$, $pq = c$, eritque juxta num: 8. $IL = \frac{1}{3} IN = \frac{1}{3}(x+2a)$, $LN = \frac{2}{3}(x+2a)$, $OL = \frac{1}{3}(x+2a) - a = \frac{1}{3}(x-a)$.

4. Erit autem juxta num. 5. $Ip^3 = b^3 . IN^3 = (x+2a)^3 :: pq^2 = c^2 . NT^2 = \frac{c^2(x+a)^3}{b^3}$. Rurſum $OL^2 = \frac{1}{9}(x-a)^2 . LN^2 = \frac{4}{9}(x+a)^2 :: OH^2 = r^2 . NT^2 = \frac{4r^2(x+2a)^2}{(x-a)^2} = \frac{c^2(x+2a)^3}{b^3}$. Hinc $\frac{4b^3r^2}{c^2} = (x+2a) \times (x-a)^3$, quod exhibet æquationem $x^3 - 3a^2x + a^2(2a - \frac{4b^3r^2}{a^3c^2}) = 0$.

5. Si jam punctum p arbitrarium ita aſſumatur, ut congruat cum O, fiet $c = OC$, & $b = a$, adeoque $x^3 - 3a^2x + a^2(2a - \frac{4ar^2}{c^2}) = 0$ æquatio illa ipſa, quam evolvimus a num. 15; in qua nimirum ſi OH non

ſit

D'C, vel DC duos: ad quodvis punctum quadrilinei BC'ICB contenti binis rectis, & binis arcubus C'I, CI tres: ad quodvis punctum ſitum extra ejusmodi quadrilineum, ſed intra angulum C'BC cruribus utcumque in infinitum productis, iterum unicum;

ſit major, quam OC, ſive r major, quam c, habentur radices tres reales, quas exhibet illa triſectio arcus circularis; ſed earum binæ fiunt inter ſe æquales, ubi abeat H vel in O, exiſtente tum æquatione $x^3 - 3a^2x + 2a^3$ cum radicibus $a, a, -2a$, vel in C, exiſtente tum æquatione $x^3 - 3a^2x - 2a^3$ cum radicibus $-a, -a, +2a$, habenturque generaliter quidem tres radii in figura 1 PH, P'H, P''H, ſed ubi H abit in O, abeuntibus P, P'' in Y, Y', ac P' in A, adhuc ſunt tres, & ubi H abit in C, abeuntibus P, P' in X, ac P'' in F', remanent tantum duo: illi autem, qui veniunt ad centrum O ex Y', Y, ſunt tantum duo ex omnibus advenientibus in unico plano tranſeunte per axem: ſed cum in omnibus ejusmodi planis jaceat ipſum O, & in ſingulis habeantur bini ejusmodi radii ad punctum H abiens in O adveniunt numero infiniti juxta num. 28.

6. In ſecundo caſu, in quo punctum O abit in I, fit $a = o$, adeoque æquatio $x^3 - \frac{4b^3r^2}{c^2} = o$. In ea ſi etiam h abeat in I, evaneſcit & r, & evadit $x^3 = o$, quo nimirum caſu omnia puncta P, P', P'' figuræ 1 abeunt in unicum A, ſolo radio, qui per axem advenit abeunte ad I. Sed ſi h ſit extra I; habet x unicum valorem realem $b\sqrt[3]{\frac{+r^2}{c^2}}$, qui facile admodum conſtruitur. Si enim ita capiatur Ip, ut ſit $pq = 2Ih$, evadet $c = 2r$, adeoque $x = b = Ip$.

7. Capiatur igitur Ie dupla Ih in directione contraria, & ex e erigatur recta axi parallela: ejus occurſus cum arcu curvæ, exhibebit quæſitum punctum T. Erit enim NT = Ie dupla Ih, & abeunte p in N fiet pq æqualis ipſi NT. Eſt autem admodum expedita etiam directa demonſtratio conſtructionis adeo ſimplicis, erit enim IL . IN = eT : : hi . he : : 1 . 3, ut oportebat juxta num. 8.

8. In tertio caſu, in quo O' cadit infra I, abit infra I etiam R', ac mutata directione rectæ IO' mutatur ſignum valoris a, & æquatio evadit $x^3 - 3a^2x + a^2\left(-2a - \frac{4b^3r^2}{c^2}\right) = o$, ſive $x^3 - 3a^2x - a^2\left(2a + \frac{4b^3r^2}{c^2}\right) = o$,

ad reliqua puncta omnia nullum. Sed iis omiſſis progrediemur ad determinandam diſtributionem luminis per circellum C' O C.

37. Ad ejusmodi perquiſitionem notandum illud, quod facile patet: ſi concipiatur aliud punctum *h* quodcunque in radio

O C

$= o$, quæ quidem æquatio, ubi poſito H' extra O' valor r non evaneſcit, ob valorem incluſum parentheſi majorem $2a$ habet unicam radicem realem, eamque habet poſitivam, & majorem $2a$.

9. Ea æquatio invenietur immediate, ſi fiat $IO' = O'R' = a$, & $R'N = x$: tum enim habetur $IN = x - 2a$, & $OL = \frac{1}{3}(x + a)$, adeoque $(x - 2a) \times (x + a)^2$, exhibet $x^3 - 3a^2x - 3a^3 = \frac{4b^3r^2}{a^2c^2}$, ſive $x^3 - 3a^2x - a^2(2a + \frac{4b^3r^2}{a^2c^2}) = o$.

10. Quodſi valor arbitrarius b fiat $= a$, aſſumpta nimirum $Ip = IO'$; habebitur $x^3 - 3a^2x - a^2(2a + \frac{4ar^2}{c^2}) = o$, quæ æquatio differt ab æquatione reducta primi caſus in ſolo ſigno prioris partis poſtremi termini $-2a^3$. Formula autem eam radicem exprimens cum ſolo ſignorum diſcrimine invenietur $a\sqrt[3]{\frac{2r^2 + c^2 + 2r\sqrt{r^2 + c^2}}{c^2}} + a\sqrt[3]{\frac{2r^2 + c^2 - 2r\sqrt{r^2 + c^2}}{c^2}}$

11. Si autem abeunte H' in O' fiat $r = o$; habetur $x^3 - 3a^2x - 2a^3 = o$, cum tribus radicibus $-a$, $-a$, $+2a$. Sed priores illæ, quæ in primo caſu obvenerant, abeunte H in C, & exhibebant binos valores $x = RO$, cum binis punctis contactuum abeuntibus in C, hic nullius ſunt uſus, cum terminentur infra R' ad punctum axis, cui reſpondent ordinatæ ad curvam imaginariæ: poſtrema terminatur ad I, & exhibet unicam ſolutionem realem, qua oſtenditur ad ipſum O' devenire unicum radium, nimirum illum, qui defertur per axem.

12. Hæc quidem locum habent, ſi conſideretur curva integra producta utcumque ultra puncta D', D figuræ 1 independenter a limitatione aperturæ F' F, quæ e tota curva abſcindit ſolos arcus finitos ID', ID. Omnia puncta, qua reſpectu rectæ F' D' B C in infinitum productæ jacent verſus lentem, habent unam tangentem ejus arcus, qui poſt arcum ID' ſurſum producitur, & idem accidit reſpectu productionis arcus ID punctis omnibus jacentibus eodem modo reſpectu réctæ F D B C'. Eæ demendæ ſunt a tangentibus exhibentibus radios ad ea puncta delatos definitis per ſuperiores æquationes. Huic animadverſioni innituntur ea, quæ proponuntur ſequenti num. 36.

OC cum punctis p, p', p'' ipsi respondentibus, lumen omne, quod transmittitur per annulos genitos a conversione linearum Pp, P$'p'$, P$''p''$ circa axem AI, abire in annulum genitum a linea, Hh. Radius enim PH motu continuo puncti P usque ad p abit in ph, & evertit quodammodo spatia Pp, Hh, atque idem habetur in reliquis.

38. Porro inde facile eruitur sequens lemma, quod viam sternit ad solutionem sequentium problematum.

39. Lemma. *Quantitas luminis delati ad annulum* Hh *ab annulis* P$'p'$, P$''p''$ *simul æquatur lumini delato a solo annulo* Pp.

40. Nam eæ quantitates luminis sunt proportionales ipsis annulis, cum lumen uniforme deferatur ad totam aperturam. Porro ii annuli sunt differentiæ circulorum habentium pro radiis AP, AP', AP'' a circulis habentibus radios Ap, Ap', Ap''. Differentiæ eorum circulorum sunt, ut differentiæ, quæ habentur inter quadrata radiorum, quæ quadrata cum sint per num. 8 ut rectæ IN, IN', IN'', erunt illi annuli, ut harum differentiæ. Porro differentiæ harum sunt eædem, ac differentiæ rectarum RN, RN', RN'', cum pendeant a sola mutatione punctorum N, N', N'', adeoque sunt eædem, ac differentiæ chordarum RM, RM', RM'', ipsis æqualium. Cum igitur differentia solius chordæ RM æquetur per num. 8 adnotationis ad num. 15 binis differentiis chordarum RM', RM'' simul; etiam solus annulus Pp æquatur binis P$'p'$, P$''p''$ simul sumptis, & quantitas luminis delati ab illo quantitati luminis delato ab his Q. E. D.

41. Corol. *Lumen transmissum ab annulo* XY *æquatur lumini transmisso a circulo* AX, *& annulo* YF.

42. Nam per num. 31 abeunte H ab O ad C percurrit P rectam YX, P' rectam AX, P'' rectam Y'F'. Hinc lumen delatum ab annulo XY æquatur lumini delato simul a circulo AX,

& annulo $Y'F'$, qui eſt idem ac annulus YF, cum in media converſione abeat YF in $Y'F'$.

43. Scholium. Id quidem patet etiam ex eo, quod per num. 33, 25, 27 puncta A, X, Y, F reſpondent punctis I, O, S, E, adeoque quadrata, & circuli AX, AY, AF ſunt, ut rectæ IO, OS, SE, & circulus AX, annulus XY, ac annulus YF, ut rectæ IO, OS, SE, quarum media æquatur binis extremis ſimul.

44. Quin immo cum OI, & SE æquentur inter ſe, patet; ſummam omnium annulorum $P'p'$ æquari ſummæ omnium $P''p''$, licet ſinguli ſingulis non ſint æquales.

45. Probl. 2. *Invenire rationem luminis contenti circello interiore* OH, *& annulo exteriore* HC *ad totum lumen tranſiens per totum circellum* OC.

46. Quoniam lumen allapſum ad quemvis annulum Hh a binis locis P', P'', æquatur ſimul lumini allapſo a ſolo loco P, ſatis erit invenire rationem luminis delati ex hoc ſolo poſtremo. Porro inde defertur ad circellum OH lumen pertinens ad annulum YP & ad HC lumen pertinens ad annulum PX. Sunt igitur ea lumina, ut ii annuli, nimirum ut differentiæ circulorum AY, AP, & AP, AX, ſive ut differentiæ quadratorum eorundem, nimirum per num. 8 ut differentiæ rectarum IS, IN & IN, IO, vel ut rectæ SN, NO. Quare tres rectæ SN, NO, SO exprimunt lumen contentum circello OH, annulo HC & toto circello OC. Q. E. inveniendum.

47. Cor. 1. *Luminis quantitas erit eadem in circello interiore, & annulo exteriore, ubi puncto* H *abeunte in* q; *fuerit area circelli æqualis areæ annuli.*

48. Nam puncto H abeunte in q, abit per num. 25 N in R, & fit $SN = NO$. Porro ibidem eſt quadratum OH dimidium

dium quadrati OC, & proinde circellus interior dimidius circelli totius, adeoque æqualis reſiduo annulo exteriori.

49. Cor. 2. *Semiſumma luminis totius ad ſemidifferentiam luminis contenti circello interiore, & annulo exteriore eſt, ut radius circuli* OR *ad chordam* RM, *exiſtente majore illo, vel hoc, prout* OH *fuerit major, vel minor quam* O*q*.

50. Eſt enim OR dimidia ſummæ OS, & RN æqualis RM eſt ſemidifferentia rectarum SN, NO. Circellus autem OH continebit plus, vel minus dimidio contento in circello O*q*, prout fuerit major, vel minor ipſo.

51. Probl. 3. *Determinare rationem denſitatis luminis in diverſis locis* H *circelli* OC.

52. Concipiatur radius *p h* infinite proximus radio PH, pro quorum interſectione aſſumi poterit juxta num. 8 contactus T, & erit denſitas radiorum in P*p* ad denſitatem in H*h*, ut annulus P*p* ad annulum H*h*. Is annulus ad hunc eſt conjunctim, ut ejus latitudo P*p* ad latitudinem H*h*, & ut peripheria circuli habentis pro radio AP ad peripheriam circuli habentis pro radio OH. Prima ratio eſt PT ad TH, ſive AN ad NO, ſecunda radii AP ad OH, ſive AL ad OL. Quare illa ratio compoſita eſt AN × AL, ad NO × OL. Porro ob tantam diſtantiam puncti A*a* punctis N, L proximis puncto I, poterit haberi utraque AN, AL pro æquali conſtanti AI, adeoque cum & denſitas in annulo P*p* ſit conſtanter eadem per totam aperturam, nimirum denſitas radiorum incidentium; erit denſitas in H reciproce, ut rectangulum NO × OL, ſive ob SN triplam OL per num. 14, reciproce ut rectangulum ON × NS, quæ quidem ratio pertinebit ad denſitatem luminis ingeſti in H tam ex unico loco P, quam ex omnibus tribus ſimul, cum per num. 39 hoc ſit illius duplum. Quam ob rem patet haberi id, Q. E. inveniendum.

53. Schol. 1.

53. Schol. 1. Ratio, quæ determinata eſt pro lumine veniente ex P, eſt generalis etiam pro lumine, quod veniat e ſingulis locis P', P'', comparando vel ſingula ejuſmodi puncta inter ſe in diverſis poſitionibus, vel alia cum aliis, & cum ipſo puncto *d*, ſi producta apertura, & cauſtica, radii eo devenirent, aſſumendo ſuum N, quod caderet ultra E; ubique enim demonſtratio eſt eadem. Præterea patet, ad videndum omnem progreſſum denſitatis ſatis fore, ſi conſideretur nexus inter motum puncti H ab O ad C, & motum puncti N, vel *n* ab S ad O juxta num. 31.

54. Cor. 1. *Denſitas luminis erit reciproce, ut differentia quadratorum ſemidiametri* OR, *& chordæ* RM.

55. Eſt enim rectangulum ON × NS differentia quadratorum OR, RN, & RM æquatur ipſi RN.

56. Corol. 2. *Denſitas eadem in centro* O, *& in margine* C *excreſcit in infinitum, a centro usque ad punctum q perpetuo decreſcit, tum usque ad marginem perpetuo creſcit, ut idcirco ſit minima in ipſa diſtantia* A*q*, *cujus quadratum eſt dimidium quadrati totius* OC.

57. Nam rectangulum ON × NS evaneſcit tam puncto N abeunte in S, quam puncto *n* in O, perpetuo creſcit puncto N, vel *n* accedente ad medium R, ubi fit maximum: puncto autem H abeunte utravis ex parte ad *q*, accedit G, vel *g* ad R, adeoque etiam N, vel *n*, quod in ipſum recidit, ubi H appellit ad ipſum *q*.

58. Corol. 3. *Eadem denſitas æqualis eſt in iis binis diſtantiis a centro* O, *quarum quadrata æque differunt a quadrato* O*q dimidio quadrati* OC.

59. Quoniam enim recta IG, vel I*g* eſt proportionalis quadrato OH; ubi hoc quadratum æque diſtiterit a dimidio quadrato OC, rectæ IG, I*g* æque different ab IR dimidia IE, adeoque RG, R*g* æquales erunt, ac proinde æquales & RK, R*k*, & RM, R*m*, & RN, R*n*, & ON × NS, O*n* × *n*S.

60. Corol. 4

60. Corol. 4. *Denſitas minima in* q *ad denſitatem mediam, quæ haberetur, ſi totum lumen æqualiter diffunderetur per circellum* OC, *eſt ut 2 ad 3.*

61. Nam ob denſitatem conſtantem in tota apertura exprimet denſitatem in H*h* luminis venientis ex ſolo annulo P*p* is annulus diviſus per annulum H*h*, ſive $\frac{AN \times AL}{NO \times OL} = \frac{3\,AN \times AL}{ON \times NS}$, adeoque totius luminis denſitatem $\frac{AN \times AL}{ON \times NS}$: denſitatem autem mediam circulus radio AF diviſus per circulum radio OC, nimirum $\frac{AB^2}{BO^2} = \frac{9\,AB^2}{OR^2}$, cum per num. 10 ſit $OB = \frac{1}{3}IO = \frac{1}{3}OR$. Cum igitur AN, & AL poſſint haberi pro æqualibus AB, & abeunte H in *q*, adeoque N in R, fiat $ON \times NS = OR^2$, erit illa denſitas ad hanc ut 6 ad 9, ſive ut 2 ad 3.

62. Scholium 2. Si conſideretur denſitas luminis venientis ab unico loco; facile invenietur ratio variationis ipſius habitæ, dum punctum P percurrit totam aperturam F'F, quo tempore punctum N juxta num. 32 perficit duas oſcillationes, deſcendendo per EI, & aſcendendo per IE, ac punctum H tres, primam per COC' dum abit P per FX, & N per EO, ſecundam per C'OC, dum abit P per XOX', & N per OIO, tertiam iterum per COC', dum abit P per XF, & N per OE.

63. Initio primæ oſcillationis rectangulum $ON \times NS$, abeunte N & E evadit $OE \times ES = 3\,OR^2$, tum perpetuo decreſcit, donec abeunte P in Y', & H in O, ac N in S, id evaneſcat cum NS: deinde iterum creſcit in progreſſu P ab Y' ad Q' abeunte H ab O ad *q'*, & N ab S ad R, ubi recidente N in R fit maximum, æquale nimirum quadrato OR. Inde iterum decreſcit in progreſſu P a Q' ad X', H a *q'* ad C, N ab R ad O, ubi iterum evaneſcit, evaneſcente ON.

64. Quare initio primæ oſcillationis ea denſitas minima in margine C, inde perpetuo creſcit verſus centrum O, in quo excreſcit in infinitum, tum inde decreſcit perpetuo, & evadit minima in q', in ea diſtantia, cujus quadratum eſt dimidium quadrati OC'. Ibi iterum incipit augeri., & poſt incrementum continuum abit in fine ipſius primæ oſcillationis in infinitum in C'.

65. In ſecunda oſcillatione abeunte P ab X' ad A, & H a C' ad O, N ab O ad I, rectangulum $ON \times NS$ perpetuo creſcit, evadit maximum in I, ubi iterum fit $= 3\ OI^2 = 3\ OR^2$, tum decreſcit per eosdem gradus, abeunte P ab A ad X, H ab O ad C, & N ab I ad O, ubi iterum evaneſcit.

66. Quare denſitas initio ſecundæ oſcillationis decreſcit usque ad centrum, ubi evadit minima, tum creſcit perpetuo usque ad marginem C, in quo iterum excreſcit in infinitum.

67. In tertia oſcillatione, cum omnia debeant redire, ut in prima ordine retrogrado, denſitas ex infinito marginis C decreſcit perpetuo usque ad q, ubi fit minima, tum augetur perpetuo usque ad centrum, ubi excreſcit in infinitum, ac inde perpetuo decreſcit usque ad marginem C'.

68. In omni ejusmodi excurſione abit in infinitum bis in centro in medio primæ, & poſtremæ oſcillationis, bis in margine in initio, & fine ſecundæ, acquirit minimum bis in margine in initio primæ, & fine tertiæ, ſemel in centro in medio ſecundæ, ſemel in puncto q' in prima poſt, & in q in tertia ante appulſum ad centrum.

69. Porro in initio primæ in C, in medio ſecundæ in O, & in fine tertiæ in C' denſitas eſt æqualis, cum illud rectangulum ubique fiat $= 3\ OR^2$. In punctis q, q' eſt triplo major, cum ibidem idem rectangulum ſit $= OR^2$. Minimum autem illud in C, & C' oritur ex eo, quod apertura non procurrat ulterius ultra F', < F; nam

ſi

ſi ea procurreret eundo a C verſus d, vel a $\dot{C}$ verſus $\dot{d}$, pergeret imminui continuata mutatione, quam habuit a q ad C & a $\dot{q}$ ad $\dot{C}$, procurrente N ultra E, & aucto idcirco adhuc rectangulo ON × NS.

70. Singula e tribus punctis P'', P', P implent totum circellum deſcriptum radio OC lumine diverſo; primum quidem juxta num. 42 lumine annuli $F'Y'$, ſecundum lumine circuli AX, tertium lumine annuli XY, nam FY, $X'A$, $X'Y'$ dum transmittunt lumen ad radium OC', idem eorundem illorum annulorum lumen adhibent, cum ad eosdem pertineant, figura circa axem revoluta. Eæ luminum quantitates ſunt juxta num. 43, ut rectæ ES, IO, OS, ſive 1, 1, 2, uti debuit eſſe, cum P ſolum ingerat quantitatem æqualem illatæ a P', & P'' ſimul.

71. Sed ſi omnia ea puncta æquale lumen ubique ingererentin ſuo motu, haberetur denſitas media triplo utique minor, quam media conſiderata num. 60 totius luminis ingeſti ab omnibus ſimul, & denſitas minima in q eſſet duplo minor ea, quam conſideravimus ibidem, cum ibi aſſumpſerimus lumen veniens ab omnibus tribus locis duplum luminis venientis hic a ſolo loco P. Cum igitur ibi denſitas minima ad illam mediam in q fuerit ut 2 ad 3, erit hic ad hanc ut 1 ad 1 ſive ut ipſi æqualis, & in centro in O, ac in marginibus C, C' in initio, & fine triplo minor.

72. Scholium 3. Ubi dicitur, denſitatem excreſcere in infinitum, diligenter notandum eſt, rem debere accipi in conſideratione geometrica, non in phyſica, conſiderando nimirum lumen tanquam corpus quoddam continuum, cujus omnia puncta progrediantur per lineas accurate rectas, atque id ita, ut compenetrari etiam poſſint partes diverſæ, & quidquid luminis per lineam continuam extendebatur, poſſit abire in punctum unicum, quidquid extendebatur per ſuperficiem, poſſit abire in lineam, vel

punctum. In Phyſica res longe aliter ſe habet: lumen non eſt corpus quoddam continuum, nec ejus partes compenetrantur, ſed addenſatio fit per earum mutuum acceſſum majorem; idcirco in ipſa Phyſica oportet infinitæ denſitati ſubſtituere denſitatem ingentem tantummodo reſpectu raritatis prioris.

73. Reipſa autem ne in geometrica quidem conſideratione hic habebitur denſitas infinita, hæc nimirum denſitas, quam hic conſideravimus. Hic enim conſideravimus denſitatem, quæ oritur ex maſſa luminis collocata in ſpatio habente tres dimenſiones, quarum binæ tantum conſideratæ ſunt in annulis ex Pp, Hb, quia interea tertia dimenſio, quæ pendet a progreſſu luminis, habetur utrobique pro eadem ob celeritatem luminis ubique eandem.

74. Hujusmodi denſitas non convenit unico cuipiam puncto, nec unicæ cuipiam lineæ, aut ſuperficiei, ſed ſolido: quando applicatur puncto cuipiam, intelligitur ſemper ſpatiolum circa illud punctum, in quo ea ubique ſit eadem, vel habeatur pro eadem, nimirum, cujus ſingulis particulis æqualibus contineantur ſingulæ particulæ æquales quantitatis luminis, & metitur eam denſitatem quantitas luminis diviſa per illud ſpatiolum, quod eam continet.

75. Porro ſi aſſumatur areola utcunque exigua circa centrum, vel prope margines; nulli alteri puncto ejus areolæ poſito extra centrum, & ipſos margines convenit expreſſio denſitatis infinitæ, ſed erit finita in punctis quibusvis ejus areolæ in ſe determinatis. Quare nulli ſpatiolo in ſe determinato utcumque exiguo conveniet denſitas infinita.

76. Habebitur tantummodo illud: ſi concipiatur punctum quodcunque in ſe determinatum utcumque proximum centro, vel peripheriæ; & circa ipſum areola in immenſum minus lata, quam ſit ejus diſtantia a centro, vel peripheria; in illa areola habebitur quædam denſitas, quæ eo erit major, quo illud punctum plus ac-

ce-

cedet ad centrum vel peripheriam, nec ulla erit denſitas utcumque magna ejusmodi, ut non poſſit inveniri punctum quoddam ita parum diſtans a centro, vel peripheria, ut in ſpatiolo circa ipſum poſito multo minore, quam ſit ea parva diſtantia, denſitas ſit major, quam illa data. Id conſtituet ſeriem quandam denſitatum finitarum continuatam in infinitum ſine ulla ultima, ſed etiam ſine ulla abſolute infinita, quod probe notandum eſt ad evitandas plurimas æquivocationes, in quas facile inciditur, ubi agitur de infinito, & infiniteſimis quantitatibus, quæ quidem nullæ ſunt in ſe ipſis abſolute tales, ſed a nobis tantummodo concipiuntur indefinite tales.

77. Si accipiatur centrum ipſum, vel punctum aliquod peripheriæ, & ſpatiolum accipiatur ipſi adjacens; utcumque id ſumatur parvum, denſitas luminis in eo, æſtimata a toto lumine, quod continet, diviſo per ipſum ſpatiolum, erit ſemper finita, ſed eo major, quo minus ſpatiolum aſſumetur: data quacunque denſitate utcumque magna, invenietur ſpatiolum ita parvum, ut habeat denſitatem ita conſideratam majorem ipſa. Sed cum nullum poſſit eſſe ultimum ſpatiolum minimum; nulla pariter erit ultima denſitas abſolute infinita. Id autem habebitur diſcriminis inter punctum aſſumptum ubicumque alibi, ubi expreſſio denſitatis eſt finita, & ibi, ubi eſt infinita, quod in primo caſu, ſi conſideretur ſpatiolum perquam exiguum circa ipſum, imminuto eo ſpatiolo in infinitum, denſitas computata a toto lumine diviſo per totum ſpatiolum manebit æquipollenter eadem, quia in ſingulis ejus particulis æqualibus quantitas luminis erit æquipollenter eadem, adeoque denſitas æquipollenter eadem: at in ſecundo caſu, quo ſpatiolum illud magis minuitur, eo magis creſcit denſitas illa ita computata, nam in particulis ejus æqualibus, quæ propiores ſunt ipſi puncto, continetur plus luminis, quam in remotioribus, denſitate in illis

majore, quam in his, & quidem eo majore in infinitum, quo magis accedunt ad illud ipſum punctum.

78. Plura hic conſiderari poſſent eo pertinentia, ſed quæ magis pertinerent ad illuſtrandam methodum infiniteſimorum, atque infinitorum, eorumque uſum in Geometria, quam ad argumentum, de quo agimus. Addemus tantummodo illud, quod magis facit ad rem præſentem, quod nimirum in ſpatiolo contiguo margini expreſſio denſitatis infinitæ habetur in punctis omnibus lineolæ continuæ nimirum arcus peripheriæ, dum in ſpatiolo aſſumpto circa centrum ea habetur in unico puncto. Hinc etiam translata conſideratione ejusmodi ad Phyſicam, magis debet ſenſum percellere maxima illa radiorum denſitas in ipſis marginibus, quam in centro erroris, quia in centro ipſa eſt tanta in ſpatiolo quaquaverſus exiguo, ad margines vero eam ingentem magnitudinem habet per totam longitudinem peripheriæ erroris ejusdem.

79. Schol. 4. Poteſt conſiderari & aliud denſitatis genus, ubi lumen geometrice conſideratur, non phyſice: in eo genere habebitur denſitas abſolute infinita in centro, ad quod cum adveniant per num. 33 radii omnes, qui tranſeunt per omnia puncta peripheriæ habentis radium AY, in eo quodammodo compenetrantur.

80. Ad omnnia reliqua puncta bini, vel terni radii deferuntur ad ſingula, quorum ſinguli per ſingula puncta aperturæ transeunt: quamobrem in iis denſitas, ſi ita loqui fas eſt, punctualis eſt ubique eadem extra centrum, in quo ea eſt abſolute infinita.

81. Poteſt itidem conſiderari denſitas linearis, conſiderando lineas luminis ut continuatas, quæ a lineis longioribus, per quas tranſibant, abeant ad alias breviores. Quantitatem hanc linearem luminis exprimere poterit peripheria circuli aperturæ, per quam id tranſit, & ſpatium erit peripheria circuli, in quam con-

tra-

trahitur, ac illa diviſa per hanc, exhibebit ejusmodi linearem denſitatem.

82. Eo pacto denſitatem linearem in H exprimet peripheria radio AP diviſa per peripheriam radio OH, erit ea nimirum, ut $\frac{AP}{OH} = \frac{AL}{OL}$, ſive cum AL conſiderari poſſit, ut æqualis conſtanti AI, erit ea denſitas reciproce, ut ſola OL, nimirum reciproce ut SN ejus tripla. Initio in C, abeunte N in E, exprimetur per $\frac{1}{SE} = \frac{1}{OR}$. Abeunte H in O, abibit N in S, adeoque deſinente tota peripheria genita a puncto H in unicum punctum, evadet denſitas abſolute infinita, ſed punctualis, non vero linearis. Abeunte H in fine primæ oſcillationis in C', jam abibit N in O, & fiet SN = SO = 2 OR, adeoque denſitas evadet prioris ſubdupla. Redeunte H ad O in ſecunda oſcillatione, jam abibit N in I, & fiet SN = SI = 3 OR, adeoque denſitas primæ ſubtripla: in reliqua autem ſeſquioſcillatione omnia redeunt ordine retrogrado. Erit nimirum in binis appulſibus ad binos margines, & ternis intermediis ad centrum, ut 1, ∞, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, ∞, 1.

83. Scholium 5. Nec inutile futurum arbitror, nec injucundum, iis potiſſimum, qui ſimplicitate geometrica delectantur, & in problematum ſolutione ingenium exercent ſuum, ſi aperiam, qua via ad propoſitas ſolutiones devenerim, itinere nimirum tortuoſo admodum, & moleſto. Sæpe mihi videor per ſylvam quandam vagari denſiſſimam, dum veritatem quampiam inquiro, ſpinis, herbisque obrutam, & virgultis contectam. Longo ambitu per implexas, & intricatiſſimas ambages circumferor, ſignis per totum iter diſpoſitis, quæ exſtent, & facile deprehendi poſſint. Ubi demum in eam incurro, inde trans tenues ramuſculos, fron-

des-

desque tranſpiciens, agnoſco per ea ipſa relicta indicia vel illum locum, unde primo diſceſſeram, vel aliquem ex iis, quæ in via offenderam, ad quem brevi exſecto tramite, per ipſum eo alios adduco, labore breviſſimo, omiſſis omnibus illis tortuoſis, atque ſpinoſis anfractibus, per quos primo inceſſeram, quorum quidem me demum pudet, quaſi vero non illa eſſet methodorum ſimpliciſſimarum ratio, atque natura, ut poſtremæ in mentem veniant, & niſi aliquanto obſtinatiore quærantur animo, ne veniant quidem.

84. In primis inquirens in radios, qui tranſeant per datum punctum H figuræ 1, feceram, uti erat magis pronum, abſciſſam $IN = x$, qua poſitione adhibita, habebam $LO^2 = (a - \frac{1}{3}x)^2$. $LN^2 = \frac{4}{9}x^2 :: OH^2 = r^2 . NT^2 = \frac{c^2 x^3}{a^3}$; unde mihi obvenit æquatio $x^3 - 6ax^2 + 9a^2x - \frac{4a^3r^2}{c^2} = 0$. In ea, facta $z + 2a = x$ ad eliminandum ſecundum terminum, habui $z^3 - 3a^2z + a^2 (2a - \frac{4ar^2}{c^2}$, quæ usque adeo facile conſtrui poterat ad anguli triſectionem. Hinc cum ea poſitio det $z = x - 2a = IN - IR = RN$, vidi ſtatim, ſatius fore, ſi fieret ipſa $RN = x$, quo pacto debet obvenire ſtatim æquatio illa ipſa carens ſecundo termino ſine ullo transformationis ſubſidio.

85. Caſu animadverti multo poſt, cum denſitatis rationem inveſtigarem, eſſe NS triplam OL, ex quo mihi ſtatim facile innotuit, rem eo adduci poſſe, ut datis punctis I, S quæri deberet punctum N ita, ut quadratum ejus diſtantiæ IN ductum in diſtantiam alteram NS æquaretur ſolido dato juxta num. 14, quo omnes reducuntur æquationes gradus tertii, in quibus deficiente ſecundo termino tertius eſt negativus, ſed ad ejusmodi æquationem obtinendam oportet abſcindere SR trientem datæ SI, & denominare x diſtantiam RN, uti præſtiti.

86. In-

86. In eo quidem nulla difficultas occurrebat, vel admodum exigua; triſectio anguli itidem exhibuit mihi admodum expedite caſus omnes pendentes a poſitione puncti H aſſumpti ubicumque intra rectam OC: deprehendi etiam facile pro punctis H aſſumptis in OC producta habere locum eandem æquationem, ſed ibi uniçam haberi realem radicem, quin arcus circularis triſectio ulli uſui eſſe poſſet. Multo ſerius animadverti illud, quod jam ab initio debebam animadvertere, eam ſolutionem non eſſe, generalem pro punctis aſſumptis in quavis recta, cum poſſent proponi etiam rectæ tranſeuntes per ipſam cuſpidem cauſticæ, vel infra ipſam, quo caſu paullo aliter diſponenda erat figura, & inſtituendus calculus, uti eſt deinde præſtitum in adnotatione ad num. 35. Quoniam pluribus jam vicibus omnem diſſertationis ordinem mutaveram, ſimplicioribus, vel generalioribus ſubſtitutis, & res ad id, quod mihi initio quærendum propoſueram, non pertinebat; ut novam mutationem evitarem, adnotatiuncula ſum uſus, quæ methodum adhibitam extenderet.

87. Proceſſi inde ad inveſtigandam denſitatem luminis in quovis loco dato H. Illud mihi ſtatim innotuit, multo faciliorem fore perquiſitionem, ſi conſiderandam ſuſciperem denſitatem luminis venientis ex unico loco, nam conſideratio luminis compoſiti ex omnibus tribus provenientibus e tribus locis P, P', P'' debebat eſſe multo operoſior, cum ſingularum æquationis radicum valores analytici ſeorſum haberi non poſſent. Inquirens autem in ejusmodi denſitatem reſpondentem ſoli annulo $P\rho$ vidi facile, eam fore proportionalem reciproce rectangulo $LO \times ON$, & inde facile intuli caſus omnes denſitatis auctæ in infinitum, evaneſcente nimirum OL, OL'', ubi punctum H abit in O, & ON, ON', ubi abit in C. Verum ad determinandum locum minimæ denſitatis primo quidem uſus ſum calculo.

88. Posita itidem $IN = x$, $IO = a$, obtinui $OL = a - \frac{1}{3}x$, $ON = x - a$, adeoque $OL \times ON = -\frac{1}{3}(xx - 4ax + 3aa)$. Differentiando hanc formulam, & omittendo divisorem communem $-\frac{1}{3}$, obtinui $2xdx - 4adx = 0$, adeoque $x = 2a$, sive $IN = IR$, quo casu cum evanescat RN, adeoque RM, & idcirco RK, & RG, existente $IG = \frac{1}{2}IE$, vidi, fore ibi quadratum OH dimidium quadrati OC.

89. Eo pacto obtinui minimum, quod habetur in puncto H in prima oscillatione, & in puncto H in tertia inter duo infinita marginis, & centri. Verum ea formula mihi non exhibebat illud minimum, quod habetur in O in media secunda oscillatione. Cum inquirerem in originem ejus defectus, vidi haud ita difficulter, illud minimum non contineri formula $x^2 - 4ax + 3a^2$, quæ non habet ullum limitem maximi, qui minimæ densitati respondeat, præter illum, in quo $x = 2a$. Illa minima densitas respondet puncto N eunti in I, ubi $x = 0$. Porro si valor x perpetuo minuatur, donec evanescat; formula ita crescit, ut abeunte x in negativum, adhuc pergat crescere, & crescat perpetuo in infinitum. At id ipsum minimum pendet a natura curvæ, vi cujus valor x non transit e positivo in negativum, sed postea quam evanuit in appulsu N ad I, retro regrediente ipso N, iterum crescit ex parte positiva. Debetur id maximum in formula, minimum in densitate, non naturæ ipsius formulæ, sed naturæ curvæ non permittentis valorem x formulæ excurrere per omnes magnitudines hinc, & inde a zero.

90. Si autem libeat in ipsa differentiatione invenire indicium ejus minimi, oportebit eamdem conferre cum ipsa natura curvæ. In ea ibi ob ipsam naturam ejus cuspidis evadit valor dx infinities major, quam alibi respectu differentiæ ordinatæ, si assumpto valore alterius abscissæ x immoto, altera abscissa $x + dx$ concipiatur ad ipsam accedens in infinitum, decrescente in infinitum

tum dx. Poteſt autem ibi alio pacto conſiderari dx, nimirum ut differentia inter duas x, pertinentes ad bina puncta extrema arcus infinitesimi, qui concipiatur motu continuo delatus ita, ut ejus extrema puncta aliud poſt aliud tranſcurrant punctum I. Ubi medium ejus arcus devenerit ad I, duo extrema ejus puncta hinc, & inde poſita ab ipſo I eandem habebunt abſciſſam, exiſtentibus ibi æqualibus binis x, & exiſtente $dx = 0$. Quamobrem adhuc ibi habebitur $2xdx - 4adx = 0$, non quod ibi ſit $x = 2a$, ſed quod ſit $dx = 0$, facta $= 0$ differentia formulæ, quæ redit ad priorem valorem.

91. Ejuſmodi aberrationes a regulis communibus ſæpe accidunt in curvarum punctis quibusdam, quæ ego appellare ſoleo anomala, uti ſunt puncta flexus contrarii, cuſpides, atque alia quædam; & jam diu conſtat; quod & ego demonſtravi jam ab anno 1740, in punctis flexus contrarii fallere methodum communem inveniendi maxima, & minima per differentiam poſitam $= 0$: ſed hæc hoc loco innuiſſe ſit ſatis.

92. Dum illam formulam conſiderarem $\frac{1}{3}(x^3 - 4ax + 3a^2)$, quæ oritur multiplicando $x - a$ per $\frac{1}{3}(3a - x)$, facile animadverti illud, $3a - x$ exhibere mihi valorem SN, qui proinde deberet eſſe triplus LO. Statim mihi directe patuit, rem ita ſe habere, adeoque ejus demonſtrationem præmiſi initio numeri 14, & ejus ope ſolutionem problematis, quo radii quærebantur tranſeuntes per H, multo elegantiorem concinnavi, reducendo eodem numero problema ipſum ad inventionem puncti N inter puncta data I, S ejuſmodi, ut $IN^2 \times SN$ æquaretur dato ſolido, mutata idcirco magna parte eorum, quæ jam conſcripſeram.

93. Cum vero viderem, denſitatem quæſitam eſſe in ratione reciproca rectanguli $ON \times NS$ tripli $LO \times ON$; illud mihi primo in mentem venit, ut eam exprimerem per rectam lineam

ei rectangulo proportionalem. Vidi eam rectam fore ordinatam ad parabolam quamcumque, quæ haberet chordam OS perpendicularem axi: facile enim demonſtratur, id rectangulum fore æquale rectangulo ſub ea ordinata, & parametro. Eam curvam delineaveram, & progreſſum omnem denſitatis ope ejus ordinatæ facile determinaveram, cum illud occurrit, quod ſtatim initio debuiſſet, nihil opus eſſe altiore curva, cum quadratum ordinatæ ad circulum, cujus diameter OS, æquetur rectangulo ſub ON, & NS ubi N cadat inter O & S, & quadratum tangentis, ubi N abeat extra eos limites in N', vel N''. Sed ſtatim & illud occurrit, nec circulo opus eſſe, cum ſatis ipſa ſola conſideratio rectanguli ON × NS omnia per ſe præberet per varias poſitiones puncti N, quibus conſideratis præſtiti omnia a num. 22, ſine calculo differentiali, ſine parabola, ſine circulo.

94. Cum adhuc calculum differentialem adhiberem ad deprehendendam minimam denſitatem luminis ex unico loco venientis, tentavi viam, qua invenirem phænomena omnia denſitatis luminis venientis ſimul ex omnibus tribus locis, quæ initio mihi apparuit ſatis ardua. En ſpecimen tentati itineris.

95. Poſita $OH = r$, $IN = x$, $IO = a$, $NT = x^{\frac{3}{2}}$, & factis $LN = \frac{3}{2}x$. $NT = x^{\frac{2}{a}}$ :: $OL = a - \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}(3a - x)$. $OH = r$, habueram $2r = 3ax^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}$. Poſitis autem $IN = x$, $IN' = x'$, $IN'' = x''$ habebam denſitatem ex tribus locis P, P', P'' ſimul, ut $\frac{1}{LO \times ON} + \frac{1}{L'O \times ON'} + \frac{1}{L''O \times ON''}$, ſive ut $\frac{1}{x - 4ax + 3a^2} + \frac{1}{x'^2 - 4ax' + 3a^2} + \frac{1}{x''^2 - 4ax'' + 3a^2}$, nulla mutatione facta in ſignis, licet in ſecundo valore evadat negativum ON', in tertio OL'', cum ex omnibus locis poſitivum ingeratur lumen, utut expreſ-

preſſum valore negativo. Capienda jam erat differentia hujus formulæ, & ponenda = 0.

96. Ibi dx, dx', dx'' reducendæ eſſent ad dr ope formulæ $2r = 3ax^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}$, in qua $2dr = \frac{1}{2}ax^{\frac{-1}{2}}dx - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}dx$, ſive $dx = \frac{4x^{\frac{1}{2}}dr}{3(a-x)}$, $dx' = \frac{4x'^{\frac{1}{2}}dr}{3(a-x')}$, $dx'' = \frac{4x''^{\frac{1}{2}}dr}{3(a-x'')}$. Hoc pacto eliminatis jam dx, dx', dx'', tota formula dividi poſſet per dr, & remaneret æquatio data per x, x', x''. Haberentur autem aliæ tres $2r = x^{\frac{1}{2}}(3a - x)$, $2r = x'^{\frac{1}{2}}(3a - x')$, $2r = x''^{\frac{1}{2}}(3a - x'')$, quarum ope eliminatis x, x', x'', remaneret unica æquatio pro r.

97. Hoc pacto haberetur expreſſio denſitatis quæſitæ per ſolum valorem r, adhibitis ad eam inveniendam tribus valoribus x, x', x'', ſive tribus æquationis radicibus, utut incognitis, & talibus, ut per formulam algebraicam ſingulæ ſine imaginarietate exprimi non poſſint. Verum is quidem calculus ita eſt moleſtus, & implexus, ut omnino vel deterreat, vel ſaltem animum avertat. Idcirco omiſſa ejusmodi perquiſitione, illud mihi in mentem venit, ſatius fore, ſi prius inveſtigarem, quota pars totius luminis contineretur circello, cujus radius OH, ut deinde capta differentia ejus valoris, & diviſa per annulum Hh, obtinerem expreſſionem quæſitam denſitatis luminis totalis.

98. In ejusmodi perquiſitione vidi facile, lumen ad annulum CH devenire ab annulo F'P'', ab annulo P'X, & ab annulo XP, nimirum ab annulo F'P, & ab annulo P'P; ad circellum autem OH ab annulo P''Y', circulo AP', & annulo PY. Porro annuli ii ſunt differentiæ circulorum reſpondentium eorum peripheriis, adeoque pro circello OH habetur circulus AP, & differen-

tia circulorum AP, AY, ac AY', AP'', quæ duæ ſimul efficiunt differentiam circulorum AP, AP'': pro annulo HC habetur differentia circulorum AP'', AF', & circulorum AP', AP'. Nimirum ſi ſumantur quatuor circuli AF, AP'', AP, AP', ordine ſuæ magnitudinis, pertinent ad annulum, & ad circellum alterni ſumpti poſitive, & negative: ſi ii dicantur a, b, c, d, pertinent ad annulum $a - b + c - d$, ad circellum $b - c + d$, quorum ſumma eſt a circulus totius aperturæ.

99. Porro patebat, eos circulos eſſe, ut quadrata radiorum, & noveram, ea quadrata eſſe, ut rectas IN', IN, IN'', IE, juxta num. 5. Quare inde intuli, lumine totali expreſſo per IE, exprimi lumen circelli per IN' + N'N'', & lumen annuli per N'N + N''E.

100. Quoniam autem RN + RN'' erat = RN' ob RM + RM'' = RM', haud difficulter perſpexi, eſſe IN' = IR — RN' = IR — RN — RN'' = IR — 2 RN — NN'', adeoque IN' + NN' = IR — 2 RN = 2 OR — 2 RN. Inde vero ob lumen totale expreſſum a tota IE = 4 OR, ſtatim patuit, lumen reſiduum annuli HC debere exprimi per IR + 2 RN = 2 OR + 2 RN. Aſſumptis autem dimidiis OR, & RN, ſive RM, patebat poſſe exprimi totum lumen per OS, lumen circelli per SN, lumen annuli per ON, & ſponte inde profluebat theorema propoſitum num. 49, ſemiſummam luminis circelli, & annuli ad ſemidifferentiam eſſe, ut eſt radius circuli OR ad chordam RM.

101. Id quidem theorema & elegans omnino eſt, & ſimplex, at ſatis longo ambitu ad ipſum deveneram, cum nondum animadvertiſſem a binis locis P', & P'' ſimul tantum luminis devenire ad annulum HC, quantum a ſolo puncto P. Poteram ego quidem id ipſum vel inde colligere, cum in circellum OH ingeratur ex P lumen ab annulo XP, ſive differentia circulorum AP, AX,

cui

cui reſpondet recta SN differentia rectarum IS, IN. Quæ cum ſit dimidia valoris 2 ON — 2 RN, exprimentis totum lumen, ſtatim inde inferebatur, a ſolo loco P ingeri tantum, quantum a locis P', P'' ſimul. Verum cum non pateret hic uſus luminis ingeſti a ſolo loco P, ipſum ſeorſum non quæſieram, ſed totum annulum PP' ſimul conſideraveram, ut idcirco eam ibi æqualitatem non adverterim. Ubi autem id agnovi ea ratione, quam inferius indicabo, multo brevior, & expeditior patuit via ad id ipſum theorema ex hac ipſa expreſſione luminis ingeſti e ſolo P reſpondentis rectæ SN, qua deinde ſum uſus, deletis iis, quæ ante conſcripſeram.

102. Inventa ſimplici menſura totius luminis concluſi circello OH, quod nimirum eſſet proportionale rectæ SN, inde progreſſus ſum ad definiendam denſitatem in annulo H*h* ſequenti ratione.

103. Denſitatem in H*h* exprimit totum lumen, quod eo ingeritur diviſum per annulum H*h*. Quoniam autem totum lumen circelli OH exprimitur per SN, lumen annuli H*h* exprimet differentia rectæ SN, quæ eſt eadem ac differentia rectæ RN ob RS conſtantem, ſive chordæ RM; & quoniam IG eſt, ut quadratum OH, adeoque ut circellus OH; annulum H*h*, qui eſt ejus circelli differentia, exprimet differentia rectæ IG, ſive RG, ob IR conſtantem, vel chordæ RK.

104. Res igitur eo deducta erat, ut inveniretur expreſſio commoda rationis, quam habet differentia chordæ RM ad chordam arcus tripli RK.

105. Ad eam inveſtigandam reduxi utramque differentiam ad differentiam arcus, nam differentia arcus tripli eſt tripla, adeoque utraque differentia chordæ facile reducitur ad differentiam arcus minoris, quæ proinde ex utroque termino rationis eliminatur,

re-

remanente ratione expreſſa per quantitates finitas. Ad eam rem adhibui hujusmodi theorema elementare. Differentia arcus ad differentiam chordæ terminatæ ad alterum diametri extremum eſt, ut ipſa diameter ad chordam, quæ terminatur ad ejus extremum alterum. Nam in figura 5. ſi chordæ IM, R*m* ſibi invicem occurrant in N, linecla MN æquivalebit arcui circuli deſcripti centro R ob angulum RMN in ſemicirculo rectum. Quare erit *m*N differentia chordæ, ſunt autem ſimilia triangula *m*MN, IRN ob angulos ad M, & R inſiſtentes eidem arcui I*m*, & angulos ad N oppoſitos ad verticem æquales. Erit igitur differentia arcus M*m* ad N*m* differentiam Chordæ RM, ut diameter RI ad IN, quæ poteſt ſumi pro chorda IM.

106. Hinc in fig. 6 differentia chordæ RM erit $\frac{MI \times Mm}{RI}$, differentia chordæ $RK = \frac{KI \times Kk}{IR} = \frac{3\,KI \times Mm}{IR}$, & illa diviſa per hanc erit $= \frac{MI}{3KI}$. Quare denſitas quæſita erit, ut hæc fractio, ſive omiſſo conſtanti 3 ut $\frac{MI}{KI}$.

107. Hæc expreſſio binas habet variabiles, quarum nexus mutuus non eſt ita ſimplex, ut poſſit ſtatim ingerere ideam variationum omnium, quæ denſitati accidunt. Quamobrem ut ad unicam variabilem devenirem, arcu MK bifariam ſecto in N duxi rectam IN quærens, quid mihi exhiberet angulus NIR æqualis KIM. Cum & angulus KRI ſit æqualis angulo KMI ob communem arcum KI, cui inſiſtunt, vidi ſtatim, poſito D in concurſu rectarum IN, RK, fore ſimilia triangula KIM, DIR, adeoque $\frac{MI}{KI} = \frac{RI}{DI}$, ſive ob RI conſtantem, fore illam fractionem, & denſitatem quæſitam reciproce ut ID.

108. Va-

108. Variationes rectæ ID perſecutus pro varia magnitudine arcus RK, qui in fig. 1 pendet a poſitione puncti G in IE, & II in OC, jam definiveram loca denſitatis infinitæ, & minimæ, putans me deveniſſe ad expreſſionem ſimpliciſſimam; licet adhuc tota lex mutationis rectæ ID non eſſet ſatis obvia primo aſpectui; cum repente animadverti, poſito A in occurſu rectæ OM cum RK, oriri angulum AOR æqualem angulo DIR, inſiſtente illo ad centrum arcui MR, hoc ad peripheriam arcui duplo RN. Hinc $\frac{MI}{KI} = \frac{IR}{ID} = \frac{OR}{OA}$, ſive ob OR conſtantem reciproce ut OA.

109. Ipſius OA variatio vix, aut ne vix quidem eſt magis manifeſta, quam variatio ID: at vidi ſtatim ex iis, quæ in fig. 3. demonſtrata fuerant in adnot. ad num 15, eſſe OA ut differentiam quadratorum OR, RM. Eſt enim ibi OR . RM :: RM . MA $= \frac{RM^2}{OR}$, adeoque $OA = OM - OA = OR - \frac{RM^2}{OR} = \frac{OR^2 - RM^2}{OR}$, qui valor eſt reciproce ut $OR^2 - RM^2$ ob OR conſtantem.

110. Reducta res erat ad variationem ſolius chordæ RM, cujus mutationes omnes ſtatim incurrunt in oculos. At progreſſus per unum, & alterum paſſum, vidi in fig. 1 differentiam quadratorum OR, RM eſſe eandem, ac differentiam quadratorum OR, RN, adeoque æqualem rectangulo ON×NS. Eo delatus agnovi locum, per quem tranſieram quærendo rationem denſitatis luminis provenientis a ſolo loco P, quæ ratio inventa eſt eadem num. 52. Id quidem me illico perculit; cum enim in eadem ratione mutaretur denſitas luminis venientis a ſolo loco P, ac luminis venientis ex omnibus tribus ſimul, oportebat, conſtans aliqua ratio intercederet inter lumen ex eo loco ſolo adveniens, & lumen delatum ex omnibus tribus ſimul. Quæſivi igitur, quæ eſſet ejusmodi ratio, & ea perquiſitio induſtriam requirebat non vulgarem.

111. Primo quidem vidi annulos Pp, $P'p'$, $P''p''$ inferre in annulum Hh lumen ſibi proportionale, eos autem eſſe, ut differentias circulorum AP, AP' AP'', ſive quadratorum eorundem, vel ut differentias rectarum IN, IN', IN'', quæ ſunt eædem, ac differentiæ rectarum RN, RN', RN'', ſive chordarum RM, RM', RM''; quærenda igitur erat relatio inter ejusmodi differentias.

112. Ad eam relationem inveſtigandam, primo mihi ſeſe obtulit theorema expoſitum num. 105, ex quo, ſi mente concipiantur chordæ IM, IM', IM'' &c. debent eſſe, ut differentiæ chordarum RM, RM', RM''; nam ob arcus MM', MM'' conſtantes, differentiæ arcuum RM, RM', RM'', debent eſſe æquales inter ſe, & ipſæ ad diametrum RI ubique eandem, debent per id theorema eſſe, ut ſunt eæ differentiæ ad eas chordas. Porro noveram, ubi tria puncta M, M', M'' circulum dividunt in tres partes æquales, aſſumpto quovis peripheriæ puncto I, chordas IM', IM'', quæ ducuntur ad puncta terminantia arcum, in quo aſſumitur I, ſimul ſumptas, æquari chordæ tertiæ IM, quod quidem theorema prorſus elementare ingentem habet uſum, & facillime demonſtratur, ac ex eo etiam pendebat æqualitas ſummæ chordarum RM, RM'', cum chorda RM'. Quare ſtatim ſe prodidit æqualitas differentiarum pertinentium ad chordas RM', RM'' cum ſola differentia chordæ RM, quæ mihi prodidit illud, rationem illam conſtantem luminis delati e locis P', P'' cum lumine delato ex unico loco P eſſe rationem æqualitatis.

113. At ea æqualitatis deductio erat adhuc aliquanto prolixior: indigebat novis rectis, & lemmate, quod non eſt verum, niſi in differentiis infiniteſimis, quarum theoria indiget ad ſui demonſtrationem. Vidi autem, rem debere immediate profluere etiam ex æqualitate chordæ RM' cum ſumma chordarum RM', RM''. Verum ea æqualitas me initio ſuſpenſum te-

tenu't, cum videretur idcirco differentia RM' debere æquari differentiis RM, RM' ſimul, non differentiam RM differentiis RM, RM''. At rem aliquanto diligentius perpendens, vidi illud, ob MM'' conſtantem, creſcente chorda IM, majorem e binis RM', RM'' neceſſario creſcere, minorem decreſcere, & cum exceſſus ejus incrementi ſupra decrementum ſociæ minoris debeat æquari incremento minoris, oportere idcirco incrementum minimæ e tribus æquari ſimul & incremento maximæ, & decremento mediæ: vidi nimirum, quod & num. 94 innui, nullum hic habere uſum poſitiva, & negativa, ubi quantitas luminis ingerenda in annulum H*h* e quovis trium locorum P, P', P'' ſit quidpiam poſitivum, nec negativa alium uſum habeant, niſi ad determinandas plagas motuum in iis differentiis, quarum ſingularum magnitudini, quocumque ea ſigno affecta ſit, eſt proportionale lumen ipſum, quod ingeritur.

114. Hic quidem fuit errorum meorum finis. Deletis fere omnibus, quæ conſcripſeram, nimirum omiſſis tot tortuoſis itineribus, quibus ad hanc æqualitatem deveneram, ſtatim poſt ipſam conſtructionem primi problematis poſui num. 9 adnotationis ad num. 15 hanc ipſam æqualitatem incrementi chordæ RM cum incremento alterius, e chordis RM', RM'', & decremento alterius, quæ æqualitas debeat manere etiam in *m*, *m*', *m*'', licet ibi incremento R*m* reſpondeat incrementum R*m*'', & decrementum R*m*'. Id me brevi itinere deduxit ad æqualitatem luminis propoſitam num. 39; unde & ſecundi, & tertii problematis ſolutio profluxit ſane elegans, & expedita. Eam ſemitam non habuiſſem, nec æqualitatem differentiarum vidiſſem, nec ejus nexum cum æqualitate luminum, niſi ad hanc illo tam longo ambitu deductus percepiſſem terminorum viciniam inter ſe, & cum ipſo illo, quod in iis problematis quærebatur.

115. Prona quidem erat ea elementaris veritas, quæ mihi alibi etiam fortaſſe futura erit uſui aliquando: *in tribus chordis a*

quovis peripheriæ puncto ductis ad tria puncta ipſam dividentia in partes æquales tres, incrementum breviſſimæ æquari incremento longiſſimæ, & decremento mediæ ſimul ſumptis. Prona erat ejus translatio ad hanc æqualitatem luminis in hac inveſtigatione, pronus hujus uſus ad hæc ſolvenda problemata; ſed eorum nihil ego quidem perſpiciebam initio, nec vero perſpexiſſem, niſi poſt adeo longam indaginem.

116. Dum eam meæ mentis imbecillitatem contemplor, alia ſe mihi prodit imago rei nihilo minus apta ad eam exprimendam, quam ipſe ille implexus per ſilvam error. Videor mihi aliquando videre immenſam quandam, apertamque planitiem ſignis marmoreis, & ornatiſſimis fontibus, ac floribus, & plantis refertam, ad cujus latus per ampliorem viam ingens cæcorum, & ſemicæcorum turba prætereat. Illi nihil deprehendunt, hi umbram quandam percipiunt monumentorum, quæ ad paucos paſſus intra campum ſunt ſita, de quibus vix quidquam agnoſcant, niſi ad ſingula accedant, & palpando magis, quam adſpectando deprehendant demum, ad quam ſingula claſſem pertineant; dum quiſpiam bene oculatus remotiſſima, quæque cum proximis perſpicit ſimul omnia, & unico intuitu contemplatur. Eodem ſane pacto vulgus nihil extra communem ſemitam ſitum deprehendit: vulgares Geometræ prima quædam in campi limite ſita, utcumque agnoſcunt: ii, qui habentur pro perſpicaciſſimis, ad paucos paſſus cognitiones protendunt ſuas, labore ingenti, quos ſi ita veluti attentantes, palpantesque intueatur aliud mentium genus ordinis ſupra humanam naturam multo eminentioris; dum omnem non earum modo veritatum, ſed longiſſime etiam poſitarum multitudinem immenſam intuitu unico perluſtrat; irrideat, neceſſe eſt, humanam imbecillitatem, cæcitatemque, potiſſimum ſi nos videat, tam paucis tanto labore utcumque ſemicompertis, per intolerabilem dementiam ſuperbire.

AD-

ADDITAMEMTUM.

De diſtributione luminis per circellum erroris diverſæ refrangibilitatis.

117. NUmero 3 hujus diſſertationis exhibui theoremata a Newtono propoſita pro hac diſtributione, & num. 4 promiſi eorum demonſtrationem excerptam ex mea diſſertatione de lumine edita anno 1748. Hic fidem liberabo adhibitis ſchematis, quæ ibidem expreſſi, quæ quidem hic erunt 7, & 8, ibi erant 11, & 12: in iis litteræ ad eadem puncta denotanda adhibentur diverſæ a litteris hic adhibitis in fig. 1, ſed ipſa ſchematum comparatione illæ facile ad has reducentur. In ea diſſertatione a num. 115 habentur, quæ hic ſequuntur.

118. Newtonus Opticæ parte 1, libri 1, pr. 7 agens de diſtributione radii albi provenientis ab eodem puncto objecti, & transmiſſi per lentem vitream intra circellum, per quem diſpergitur ob diverſam refrangibilitatem diverſorum colorum, qua fit, ut non omnes in eodem puncto coeant, ſed alii propius, alii remotius a lente ipſa, ſic habet: *Sit* (hic in noſtra fig. 7) *ADE iſtiusmodi circulus centro C ſemidiametro AC deſcriptus, ſitque Bb minor circulus eodem cum iſto ADE centro deſcriptus, ejusque ſemidiametrum AC interſecans in B: biſeca autem AC in N. Jamque, ut ego quidem calculum poſui, denſitas luminis inquovis loco B erit ad denſitatem ejusdem in N, ut AB ad BC, totumque lumen intra circulum minorem Bb ad totum intra majorem ADE erit, ut exceſſus quadrati AC ſuper quadratum AB ad quadratum ipſius AC.*

119. Sine calculo etiam id theorema ſic Geometrice eruitur ex illa æquabili diſtributione (nimirum luminis refracti per longitudinem ſpectri, de qua in illa diſſertatione agebatur). Radii incidentes in fig. 8 ad ſenſum paralleli in lentem DE ita refringantur,

ut rubei quidem minime refrangibiles contempta aberratione proveniente a figura vitri, convergant ad punctum axis M, violacei autem maxime refrangibiles, ad punctum L, & reliqui omnes radii convergent ad punctum aliquod interjacens inter puncta L, M, ac totidem coni efformabuntur, quorum omnium vertices erunt in recta illa ML. Si omnes hi radii excipiantur alicubi plano ad axem perpendiculari, efformabunt circulum quendam, & omnium ejusmodi circulorum minimus erit, ſi planum tranſeat per interſectionem AC*a* extremorum conorum terminatorum ad M, & L, ut ſatis patet.

120. Quoniam anguli MEL, MDL ſunt circiter pars vigeſima ſeptima totius refractionis, ſive totius anguli FME, vel FMD, erunt ſatis exigui, & diſtributio radiorum æquabilis per angulos eosdem trahet ſecum æquabilem diſtributionem eorundem per intervallum LM convenientium in punctis O, H. Mediæ refrangibilitatis radii coibunt in C, reliqui tam minus, quam magis refrangibiles diſpergentur ante concurſum in aliquo puncto H, vel poſt concurſum in aliquo puncto O, per circulum, cujus diameter IC*i*, & intra eundem circulum ſingulorum denſitas erit ubique ad ſenſum eadem, ut erat eadem in appulſu ad lentem DE. Excurret autem a C ad A duplex ſeries continua peripheriarum circulorum I*i* ſenſim majorum, quarum peripheriarum numerus in æqualibus ipſius CA ſegmentis erit ad ſenſum æqualis ob æquabilem illam diſtributionem radiorum in angulis AE*a*, AD*a*. Sed ſi aliorum denſitates cum aliorum denſitatibus comparentur, erunt ipſæ in ratione reciproca circulorum, per quos ſinguli diſperguntur, ſive in ratione reciproca duplicata ſemidiametrorum CI.

121. Exprimat jam fig. 7 eosdem circulos A*a*, I*i*, & in quovis puncto B aderit aliquid luminis ex omnibus radiis, quorum circumferentia terminatur ad quodvis punctum I poſitum inter

B,

B, & A, & nihil ex iis, qui ad B non pertingunt. Singulorum autem denſitas erit in ratione reciproca duplicata rectæ CI, ac proinde exprimetur per IG ordinatam ad hyperbolam tertii gradus FGM deſcriptam inter aſymptotos perpendiculares AC, CV, in qua ordinatæ ſint in ratione reciproca duplicata abſciſſarum. Quare cum excurrente æquabiliter puncto I ab A ad B, numerus quoque peripheriarum circulorum æquabiliter excurrat; exprimet tota area hyperbolica FABM ſummam omnium particularum luminis exiſtentium in B pertinentium ad omnes ejusmodi circulos. Eſt autem ex hujus hyperbolæ natura area ipſius ab ordinata quavis BM, vel AF ad partes oppoſitas C æqualis rectangulo CBM, vel CAF. Quare eæ areæ ſunt reciproce ut ipſæ CB, CA, ſive directe ut CA, CB, & dividendo erit AB ad BC, ut differentia illarum arearum, ſive area FABM ad aream ultra FA poſitam. Abeat jam punctum B in N, & factis AB, BC æqualibus, evadet area FABM æqualis illi areæ poſitæ ultra FA. Quare area pertinens ad quodvis punctum B ad hanc ipſam aream pertinentem ad punctum N, ſive denſitas radiorum in quovis puncto B ad eorundem denſitatem in N erit in illa ratione AB ad BC, ut Newtonus poſuit primo loco.

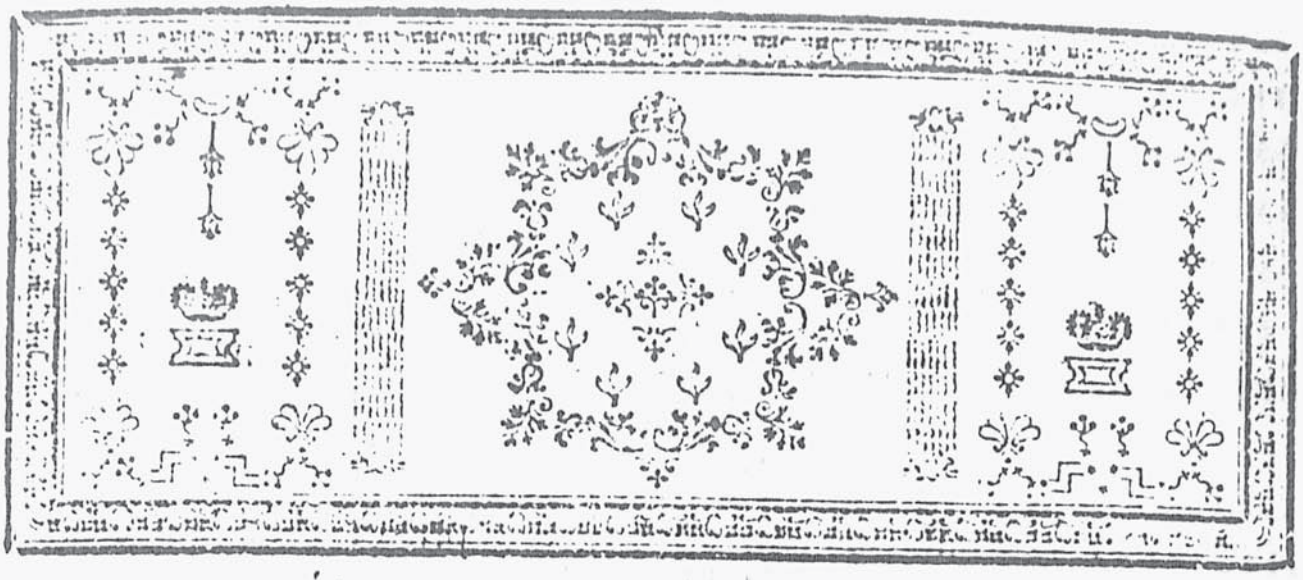
122. Ut jam innoteſcat quantitas luminis comprehenſi quovis circulo B*b*; ad quodvis punctum O rectæ CV ducatur recta AO occurrens ordinatæ BM in P, & recta quævis BP exponet numerum particularum in quavis circumferentia cujusvis circuli B*b*. Nam erit is numerus ut denſitas, & circumferentia B*b* ſimul, ſive directe ut denſitas, & ut radius CB. Quare is numerus pertinens ad quodvis punctum B ad eundem numerum pertinentem ad N erit, ut AB ad BC, & BC ad CN ſimul, ſive ut AB ad CN. Stante igitur puncto N, & utcumque variato B, erit numerus in circumferentia B*b*, ut AB, ſive ut BP. Quare quantitas lumi-

nis

nis in toto circulo CB incluſi exprimitur per aream BCOP, ſive per differentiam ſimilium triangulorum CAO, BAP, quæ cum ſint, ut quadrata laterum CA, AB; eadem quantitas exprimetur per differentiam quadratorum eorundem, & quoniam abeunte B in A, differentia illa jam æquatur quadrato ſolius CA, erit in quavis alia puncti B poſitione quantitas luminis incluſa circulo B*b* ad totum lumen incluſum toto circulo A*a*, ut differentia quadratorum CA, AB ad quadratum CA. Quod erat alterum a Newtono propoſitum.

123. Hæc quidem in ea diſſertatione: addam hic illud tantummodo, patere ex hac ipſa demonſtratione illud, in illo circello haberi in centro unionem omnium colorum, adeoque lumen album, ſi id objecti punctum, ad quod ii radii pertinent, & is circellus, pertinebat ad objectum album, vel per ſe radians, quod nimirum reflectat, vel emittat omne radiorum genus: tum abeundo verſus margines deerunt alii poſt alios colores, qui circa medium ſpectrum verſantur, ac demum in ipſo circelli margine haberi unitos ſimul radios rubeos, & violaceos, qui gignunt purpureum vinaceum nulli primigenio colori ſimilem. Inde autem conſtat ex hoc erroris genere non provenire colores illos, qui in communibus teleſcopiis apparere ſolent, qui quidem ſunt in objectorum lucidorum marginibus violaceus verſus campi marginem, & rubeus verſus centrum, ſed eos gigni ab oculari juxta theoriam, quam expoſuimus in adn. ad num. 98. diſſertationis primæ. Quamobrem conjunctio binarum lentium convexæ, & concavæ e binis ſubſtantiis pro objectivo vitro, quæ errorem illum diverſæ radiorum refrangibilitatis corrigit in foco objectivi vitri, non tollit illos colores, qui in communibus teleſcopiis apparere ſolent, ubi campus habeatur amplior, cum augmento imaginis objecti ſatis magno, quod quidem etiam in ea adnotatione monuimus.

DIS-



DISSERTATIO IV.

De foci trium ſuperficierum cum conſideratione errorum, & applicatione ad ſpecula vitrea.

I.

In adnotatione ad num. 130 diſſertationis primæ egimus de foco lentium vitrearum ex unica reflexione facta in ſecunda ſuperficie inter duas refractiones factas in prima in ingreſſu & egreſſu, quem ibi generaliter determinavimus, habita tamen ratione ſolius erroris orti a craſſitudine vitri: agemus hic de iisdem generalius, incipiendo a foco trium ſuperficierum, habita etiam ratione errorum, qui oriuntur & ex craſſitudine vitri, & ex figura ſphærica, & ex diverſa refrangibilitate: tum applicabimus eam omnem theoriam ad ſpecula vitrea cava, in quibus occurrit etiam conſideratio duarum imaginum, quæ oriuntur a duplici foco ipſis proprio: prima imago fit a prima ſuperficie per unicam reflexionem ſine ulla refractione; quotiescumque enim per refrin-

gentem ſuperficiem tranſeunt radii, radiorum advenientium pars ab eadem retro reflectitur : ſecunda vero imago fit a ſecunda ſuperficie, ad quam adveniunt radii transmiſſi per primam, & eorum pars ab eadem ſecunda ſuperficie reflexa ad primam iterum redit, ac per eam eorundem pars transmiſſa, & iterum ibidem refracta focum habet, ac imaginem objecti efformat. Si eæ imagines non congruant; altera alteram nonnihil turbat.

2. Horum omnium conſideratio præter theoriam ipſam, quæ geometrica, & phyſica conſideratione digniſſima eſt per ſeſe, utilis eſſe poteſt pro ſpeculis vitreis, ſi ad teleſcopia catadioptrica adhiberi debeant, uti ea Newtonus ipſe initio adhibuit cum ſucceſſu aliquo. Nunc quidem ſola metallica ſunt in uſu, quæ tamen ingens habent incommodum ex eo, quod nimis facile nitorem illum amittant, qui eſt nimium neceſſarius ad habendam imaginis claritatem. Vitrea hoc quidem incommodum non haberent; at in ipſis cum habeatur pro vividiore imagine duplex refractio præter reflexionem, habetur incommodum diverſæ refrangibilitatis, ut duplicis imaginis præter errorem figuræ ſphæricæ, & craſſitudinem vitri, quæ duo ſunt communia etiam lentibus dioptricorum teleſcopiorum. Verum ſi hi ipſi errores ad trutinam revocentur, ac eorum magnitudines calculo definiantur, videri poterit, quid præſtari debeat, ut corrigantur, quantum fieri poteſt: ope Geometriæ, & calculi videndum, quid in eo genere obtineri poſſit; multo enim diutius perdurarent ejusmodi teleſcopia obſervationibus idonea, nec usque adeo ab humido aere ipſis timendum eſſet per noctem, uti nunc metallicis timere cogimur.

3. Dividemus autem totam hanc perquiſitionem in partes duas : prima continebit formulas pertinentes ad hujusmodi focos, quos derivabimus a formalis generalibus demonſtratis in prima diſſertatione : ſecunda continebit plurium problematum ſolutionem erutam ex ipſis formulis primæ partis.

PARS I.

PARS I.

De formulis focorum tam generaliter, quam pro unica reflexione ſolitaria, & pro reflexione media inter duas refractiones.

§. I.

De formularum fundamentis eruendis e prima diſſertatione.

4. Conſiderabimus hic initio, ut in ipſa diſſertatione prima, radios ante appulſum ad ſuperficiem ſphæricam convergentes, ſuperficiei autem ipſius centrum poſitum ultra ipſam verſus punctum convergentiæ, & habebimus pro poſitivis valores omnes linearum, quæ jacent in directione radiorum primo advenientium, pro negativis valores earum, quæ habent directionem contrariam. Hinc ſi radii ante incurſum divergant, ſi cavitas ſphæræ ſit obverſa directioni radiorum primo advenientium, ſi radii ultimo prodeuntes divergant; diſtantia puncti divergentiæ in primo, & tertio caſu, radius ſphæricitatis in ſecundo habendi erunt pro negativis. Mutabuntur autem denominationes nonnullæ, ut facilius pergendo ad plures ſuperficies perſpiciatur analogia, a qua potiſſimum pendet nitor quidam, & elegantia, quam nos quidem, ubicumque poſſumus, vel maxime conſectamur.

5. Denominationes pro unica ſuperficie erunt ſequentes:

Diſtantia a ſuperficie puncti axis, ad quod convergunt radii incidentes in extrema puncta aperturæ .... *a*
Semidiameter aperturæ .... *e*
Semidiameter ſphæricitatis poſita in directione radiorum primo advenientium .... *r*
Ratio ſinus incidentiæ ad ſinum anguli refracti .... *n*
Diſtantia foci radiorum extremorum conſiderata in eadem directione radiorum primo advenientium .... *x*

6. Si pro refractione habeatur reflexio, valor n erit $= -1$, considerando nimirum directionem rectæ, per quam radii redeunt, tanquam si per eandem progrederentur, quo casu frangerentur quidem, sed in angulo refracto æquali angulo incidentiæ, & jacente ad partes radii oppositas cum directione sinus oppositi.

7. Assumetur autem etiam valor subsidiarius sequens $\varphi = \frac{n-1}{n^3}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{n+3}{r^2 u} + \frac{2n+3}{r u^2} - \frac{n+1}{u^3}\right)\frac{1}{2}e^2$.

8. His ita positis habebitur hujusmodi theorema generale $\frac{1}{x} = \frac{n-1}{nr} + \frac{1}{ru} + \varphi$.

9. Id quidem eruitur e pluribus numeris dissertationis primæ. In ea num. 31 est $x = q - q^2\varphi$, unde eruitur juxta adnotationem ad eum numerum $\frac{1}{x} = \frac{1}{q} + \varphi$, dividendo nimirum, & omittendo terminos, in quibus valor φ exiguus ascendit ad altiores potentias. Porro ibi num. 28 habetur $\frac{1}{q} = \frac{1}{a} - \frac{k}{m}$, & ibi est a, quod hic r, ac num. 26 est $k = \frac{1}{a} - \frac{1}{p}$, sive existente hic u, quod ibi erat p, & hic n, quod ibi erat m, est $k = \frac{1}{r} - \frac{1}{u}$; unde fit $\frac{1}{x} = \frac{1}{r} - \frac{1}{nr} + \frac{1}{nu} + \varphi = \frac{n-1}{nr} + \frac{1}{nu} + \varphi$.

10. Porro num. 31 habetur $\varphi = \frac{m-1}{m^3}\left(k^3 - \frac{mk^2}{p}\right)\frac{1}{2}e^2$, quod positis u, & u pro m, & p, evadit $\frac{n-1}{n^3}\left(k^3 - \frac{nk^2}{u}\right)\frac{1}{2}e^2$: in eo valore, quæ extra parenthesim sunt, congruunt cum iis, quæ assumpta sunt hic in valore φ num. 8: quæ autem intra paren-

the-

theſim ſunt, itidem congruunt, ſi pro k ponatur ſuus valor $\frac{1}{r} - \frac{1}{u}$: habebitur enim

$$k^3 = \frac{1}{r^3} - \frac{3}{r^2 u} + \frac{3}{r u^2} - \frac{1}{u^3}$$

$$-\frac{n k^2}{u} = \quad -\frac{n}{r^2 u} + \frac{2n}{r u^2} - \frac{n}{u^3}$$

$$k^3 - \frac{n k^2}{u} = \frac{1}{r^3} - \frac{n+3}{r^2 u} + \frac{2n+3}{r u^2} - \frac{n+1}{u^3}$$

11. Cum igitur valor x & e in ea diſſertatione, & hic ſint iidem, ac totus valor φ ſit inde erutus idem, qui hic eſt aſſumptus; habebitur jam theorema propoſitum num. 8, quod hic repetemus, & appellabimus

Theorema fundamentale

$$\frac{1}{x} = \frac{n-1}{nr} + \frac{1}{nu} + \varphi$$

§. II.

Applicatio theorematis fundamentalis ad plures ſuperficies.

12. UBi radii concipiuntur ſucceſſive transmiſſi per plures ſuperficies, conſideranda erit præterea diſtantia ſuperficiei proxime ſequentis a proxime antecedenti, quæ fiat $= \alpha$ ita, ut diſtantia inter primam, & ſecundam dicatur α, inter ſecundam, & tertiam α', inter tertiam, & quartam α'', & ita porro. Si non habeantur reflexiones; omnes ejusmodi diſtantiæ erunt poſitivæ, jacente ſuperficie ſequenti ultra ſuperficiem præcedentem, ſecundum directionem poſitivorum: ſed ſi reflexiones occurrant, omnes diſtantiæ α a prima reflexione ad ſecundam, a tertia ad quartam, a quinta ad ſextam, & ita porro, erunt negativæ, regrediente tum radio ita, ut ſuperficies ſequens jaceat citra præcedentem.

13. Eodem pacto valores x, n, r, φ pertinentes ad ſuperficiem ſecundam, tertiam &c habebunt accentum unum, duos &c. Appellabimus autem q quemvis valorem x aſſumptum ſine valoribus exiguis pendentibus a diſtantia ſuperficierum α, & a valore φ, qui pendet a valore e ſemidiametro aperturæ, & quidem ab ejus quadrato.

14. Quod ſi diſtantia puncti convergentiæ radiorum advenientium ad primam ſuperficiem dicatur p; erit quidem $u = p$, ſed pro advenientibus ad ſecundam, tertiam &c debebit aſſumi $x \mp \alpha$, $x' \mp \alpha'$ &c, cum ſigno —, vel +, prout ſuperficies poſterior jacuerit ultra, vel citra priorem: nam radii advenient ad illam novam ſuperficiem convergentes ad diſtantiam foci prioris (quæ quidem erit divergentia, ſi valores x fuerint negativi), & ejus diſtantia a nova ſuperficie ipſa erit eadem, ac diſtantia a priore imminuta, vel aucta per illud intervallum ſuperficierum earundem. Verum ubi hic novus valor u adhibetur in valoribus exiguis datis per α, & φ, poterit pro x adhiberi q, a qua ſubſtitutione in exiguo valore oritur error exiguus reſpectu ipſius, adeoque ſecundi ordinis, & proinde contemnendus.

15. Hinc jam habebuntur ſequentes valores ponendi in formula theorematis fundamentalis, cum eo ipſo transformato.

Pro 1^ma ſuperficie

$$u = p,\quad r = a,\quad n = m,\quad \varphi = \frac{m-1}{m}\left(\frac{1}{a^3} - \frac{m+3}{a^2 p} + \frac{2m+3}{a p^2} - \frac{m-1}{p^3}\right)\tfrac{1}{2}e^2$$

$$\frac{1}{x} = \frac{m-1}{ma} + \frac{1}{mp} + \varphi \qquad \frac{1}{q} = \frac{m-1}{ma} + \frac{1}{mp}$$

Pro 2^da ſuperficie

$$u = x - \alpha,\quad \frac{1}{u} = \frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{\alpha}{q^2},\quad r = a',\quad n = m'$$

$$\frac{1}{x'} = \frac{m'-1}{m'a'} + \frac{m-1}{mm'a} + \frac{1}{mm'p} + \frac{\varphi}{m'} + \varphi' + \frac{\alpha}{m'q'} \qquad \frac{1}{q'} = \frac{m'-1}{m'a'} + \frac{m-1}{mm'a} + \frac{1}{mm'p}$$

Pro

Pro 3^tia ſuperficie

$$u = x - \alpha', \quad \frac{1}{u} = \frac{1}{x'} + \frac{\alpha'}{x'^2} = \frac{1}{x'} + \frac{\alpha'}{q'^2}, \quad r = a'', \quad n = m''$$

$$\frac{1}{x''} = \frac{m''-1}{m''a''} + \frac{m'-1}{m'm''a''} + \frac{m-1}{mm'm''a} + \frac{1}{mm'm''p} + \frac{\varphi}{m'm''} + \frac{\varphi'}{m''} + \varphi'' + \frac{\alpha}{m'm''q'} + \frac{\alpha'}{m''q'^2}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{m''-1}{m''a''} + \frac{m'-1}{m'm''a'} + \frac{m-1}{mm'm''a} + \frac{1}{mm'm''p}$$

---

16. Hæc tertia formula ſufficeret pro præſenti perquiſitione, in qua agitur de tribus ſuperficiebus: verum non erit abs re inde eruere formulam generalem, cujus lex facile hic apparet pro quocumque numero ſuperficierum $n+1$: erit nimirum (denotante n numerum accentuum, qui apponi deberent, non exponentem potentiæ)

$$\frac{1}{x^n} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{m^n-1}{m^n a^n} + \frac{m^{n-1}-1}{m^{n-1}m^n a^{n-1}} + \frac{m^{n-2}-1}{m^{n-2}m^{n-1}m^n a^{n-2}} \cdots + \frac{m-1}{mm'\ldots m^n a} + \frac{1}{mm'\ldots m^n p} \\ + \frac{\varphi}{m'm''\ldots m^n} + \frac{\varphi'}{m''m'''\ldots m^n} + \frac{\varphi''}{m'''m''''\ldots m^n} \cdots + \varphi^n \\ + \frac{\alpha}{m'm''\ldots m^n q'} + \frac{\alpha'}{m''m'''\ldots m^n q'^2} + \frac{\alpha''}{m'''m''''\ldots m^n q''^2} \cdots + \frac{\alpha^{n-1}}{m^n q^{n-1}} \end{array} \right.$$

17. Porro ſi radii adveniant paralleli; evaneſcit ubique poſtremus terminus majorum quantitatum, in quo habetur p in denominatore: patet autem facile, quo pacto formari debeant omnes valores q ex modo, quo ii formati ſunt num. 15 pro ſecunda & tertia ſuperficie; & quo pacto formari debeant valores φ, patebit ex methodo, qua iidem ſequenti paragrapho formabuntur pro iisdem.

§. III.

Applicatio ad ſpecula vitrea cava.

18. FAcile applicantur formulæ ad ſpecula vitrea cava, quæ adhiberi poſſint pro teleſcopiis catadioptricis, quorum nimirum cavitas obvertatur radiis advenientibus. In ejusmodi ſpeculis habentur tres incurſus in duas ſuperficies. Fiet refractio in prima ſuperficie, tum reflexio in ſecunda, ac iterum refractio in prima. Si radii binarum ſphæricitatum ſint a, & b, conſiderandi erunt ut negativi ob utriusque cavitatem obverſam radiis primo advenientibus. Quare in poſtrema formula numeri 15 erit $a = -a$, $a' = -b$, $a'' = -a$.

19. Si intervallum ſuperficierum dicatur α, erit ibidem $\alpha = \alpha$; & $\alpha' = -\alpha$, nimirum poſt primam reflexionem juxta num. 12.

20. Erit autem $m = m$, $m' = -1$ (nimirum in reflexione) $m'' = \frac{1}{m}$ (nimirum in egreſſu e vitro): quamobrem $m' - 1 = -2$, & $\frac{m'' - 1}{m} = -(m - 1)$

21. Factis hiſce ſubſtitutionibus in eadem formula poſtrema numeri 15, & omiſſo termino diviſo per p pro radiis, qui ab objecto remoto delati ad ſpeculum habeantur pro parallelis, habebitur ſequens formula

$$\frac{1}{x''} = +\frac{2(m-1)}{a} - \frac{2m}{b} - m\varphi + m\varphi' + \varphi'' - \frac{m\alpha}{q^2} - \frac{m\alpha}{q'^2},$$ in qua fiat $\frac{2(m-1)}{a} - \frac{2m}{b} = \frac{1}{q''}$

22. Multo operoſior eſt calculus pro valoribus $m\varphi$, $m\varphi'$, & potiſſimum pro valore φ''. Eſt generaliter $\varphi = \frac{n-1}{n^3}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{n+3}{r^2 u} + \frac{2n+3}{r u^2}\right.$

$+\frac{2n+3}{ru^2}-\frac{n+1}{u^3}\Big)\frac{1}{2}e^2$, juxta num. 15, & in valore ϕ ob $u=p$ eſt $\frac{1}{u}=o$, in valoribus vero ϕ', & ϕ'' poteſt aſſumi q, & q' pro u, cum in iis u ſit $x-\alpha$, & $x'+\alpha$, ac poſſit juxta num. 14 ibi poni q, q' pro x, x', & ob ſimilem rationem utrobique negligi α. Porro cum num. 15 ſit $\frac{1}{q}=\frac{m-1}{ma}+\frac{1}{mp}$, & retinendum ſit m, ponendum $-a$ pro a, ac o pro $\frac{1}{p}$, evadet $\frac{1}{q}=-\frac{m-1}{ma}$. Cumque ibidem ſit $\frac{1}{q'}=\frac{m'-1}{m'a'}+\frac{m-1}{mm'a'}+\frac{1}{mm'p}$, ac ponendum ſit -1 pro m, retinendum m, ponendum $-b$ pro a', & $-a$ pro a, ac o pro $\frac{1}{p}$, habebitur $\frac{1}{q'}=-\frac{2}{b}+\frac{m-1}{ma}$.

23. Hinc in formula $\frac{n-1}{n^3}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{n+3}{r^2u}+\frac{2n+3}{ru^2}-\frac{n+1}{u^3}\right)\frac{1}{2}e^2$ ponendi erunt ſequentes valores

Pro ϕ erit $n=m$, $r=-a$, $\frac{1}{u}=o$. Pro ϕ' erit $n=-1$, $r=-b$, $\frac{1}{u}=\frac{1}{q}=-\frac{m-1}{ma}$. Pro ϕ'' erit $n=\frac{1}{m}$, $r=-a$, $\frac{1}{u}=\frac{1}{q'}=-\frac{2}{b}+\frac{m-1}{ma}$

24. Hiſce valoribus ſubſtitutis fient

$$\phi''=\left\{\begin{array}{l}+\frac{n-1}{n^3r^3}=\ldots\ldots+\frac{m^2(m-1)}{a^3}\\ -\frac{(n-1)(n+3)}{n^3r^2u}=\ldots\ldots-\frac{2m(m-1)(3m+2)}{a^2b}+\frac{(m-1)^2(3m+1)}{a^3}\\ +\frac{(n-1)(2n+3)}{n^3ru^2}=\ldots\ldots+\frac{4m(m-1)(3m+2)}{ab^2}-\frac{4(m-1)^2(3m+2)}{ma^2b}+\frac{(m-1)^3(3m+2)}{ma^3}\\ -\frac{(n-1)(n+1)}{n^3u^3}=-\frac{8m(m-1)(m+1)}{b^3}+\frac{12(m-1)^2(m+1)}{ab^2}-\frac{6(m-1)^3(m+1)}{ma^2b}+\frac{(m-1)^4(m+1)}{m^2a^3}\end{array}\right\}\frac{1}{2}e^2$$

$$m\phi=\ldots\ldots-\frac{2m}{b^2}+\frac{4(m-1)}{ab}-\frac{2(m-1)^2}{ma^2b}$$

$$-m\phi=\ldots\ldots+\frac{m-1}{m^2a^3}$$

$$-m\phi+m\phi'+\phi''=\left(\frac{-8m^3+6m}{b^3}+\frac{24m^3-16m^2-16m+8}{ab^2}+\frac{-24m^3+32m^2+4m-16+\frac{4}{m}}{a^2b}+\frac{8m^3-16m^2+6m+6-\frac{4}{m}}{a^3}\right)\frac{1}{2}e^2$$

25. Cum demum ſit $\frac{1}{q'} + \frac{1}{q''} = \frac{4}{b^2} - \frac{4(m-1)}{mab} + \frac{2(m-1)^2}{m^2a^2}$, erit $-\frac{m\alpha}{q'} - \frac{m\alpha}{q''} = -\left(\frac{4m}{b^2} - \frac{4(m-1)}{ab} + \frac{2(m-1)^2}{ma^2}\right)\alpha$.

26. Hoc pacto habebitur jam totus valor $\frac{1}{x^n}$ conſtans tribus partibus: prima eſt $\frac{1}{q^n}$ valor poſitus in fine numeri 21, ſecunda habetur in fine numeri 24, quæ fiat $= s$, tertia in fine num. 25, quæ fiat $= t$, eritque $\frac{1}{x^n} = \frac{1}{q^n} + s + t$, ſive $x^n = q^n - q^{n-1}s - q^{n-1}t$.

27. Primus terminus hujus formulæ exprimet diſtantiam foci radiorum axi proximorum neglecta craſſitudine vitri, tertius differentiam provenientem ab eadem craſſitudine, ſecundus errorem figuræ ſphæricæ: tota vero formula exhibebit diſtantiam a ſpeculo foci radiorum extremorum.

28. Inventa jam expreſſione generali valoris diſtantiæ foci in ejusmodi ſpeculis cum errore proveniente a figura ſphærica, & a craſſitudine vitri, facilis erit tranſitus ad ſolvenda plura problemata, quæ ſunt fructus totius hujusce perquiſitionis.

PARS II

Continens ſolutionem plurium problematum erutam ex ipſa formula inventa.

PROBLEMA I.

29. *INvenire ejusmodi relationem inter radios ſphæricitatum a, & b, ut radii diverſæ refrangibilitatis coeant in eodem puncto.*

30. Ad id obtinendum oportet differentiare totam formulam numeri 26 $\frac{1}{x^n} = \frac{1}{q^n} + s + t$, habito pro variabili valore m, uti eſt

præ-

præſtitum in diſſert. 1 num. 82, & ponere differentiam $= o$. Eo pacto obtineretur æquatio continens præter potentias inferiores etiam a^3, & b^3, adeoque relatio eorum radiorum ad ſe invicem non erueretur, niſi per æquationem gradus tertii. Præterea ea relatio pro diverſo valore aperturæ e eſſet diverſa, ut facile conſtat.

31. Verum primo quidem illud commode accidit, quod valores s, t ſunt perquam exigui, quibus proinde neglectis differentiando ſolum valorem $\frac{1}{q''}$ habebitur quæſita relatio ſatis proxima. Capto valore b per a ex relatione, & ſubſtituto in valore t, habebitur formula ſatis proxima veræ pro radiis axi proximis, neglecto valore s, qui continet errorem figuræ ſphæricæ pendentem ab apertura. Differentiando formulam $\frac{1}{q''} + t$ ita reductam, obtinebitur quæſita relatio inter a, & b adhuc propior.

32. Cum per num. 21 ſit $\frac{1}{q''} = \frac{2(m-1)}{a} - \frac{2m}{b}$, fiet $\frac{2\,dm}{a} - \frac{2\,dm}{b} = o$, adeoque $a = b$. Quamobrem habetur inde erutum ſequens theorema: *Ad corrigendum errorem diverſæ refrangibilitatis debebit eſſe ſpeculum concavo-convexum ejusdem proxime curvaturæ ex utraque parte.*

33. Poſito autem a pro b in valore $t = -\left(\frac{4m}{b^2} - \frac{4(m-1)}{ab} + \frac{(2m-1)^2}{ma^2}\right)\alpha$, habebitur $t = \left(-\frac{4m}{a^2} + \frac{4m}{a^2} - \frac{4}{a^2} - \frac{2m}{a^2} + \frac{4}{a^2} - \frac{2}{ma^2}\right)\alpha = -\frac{2(m^2+1)\alpha}{ma^2}$, adeoque erit proxime $\frac{1}{q''} = \frac{2(m-1}{a} - \frac{2m}{b} - \frac{2(m^2+1)\alpha}{ma^2}$, & differentiando $\frac{2\,dm}{a} - \frac{2\,dm}{b} - \frac{2(m^2-1)\alpha\,dm}{ma^2} = 0$, adeoque $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - \frac{(m^2-1)\alpha}{m^2a^2}$, & demum $b = a + \frac{(m^2-1)\alpha}{m^2}$.

34. Cum vero in vitris communibus ſit proxime $m = \frac{3}{2}$, fiet $b = a + \frac{5}{3}\alpha$; unde profluit hujusmodi theorema. *In ſpeculis vitreis ad corrigendum errorem diverſæ refrangibilitatis pro radiis axi proximis, debet altera ſuperficies eſſe cava, altera convexa, & ſecundæ ſuperficiei radius eſſe longior radio primæ per $\frac{5}{3}$ craſſitudinis vitri.*

35. Scholium 1. Quando dicitur vitrum concavo-convexum, id intelligitur de externis ſuperficiebus, nam ſuperficies ſecunda, quæ radios reflectet, erit æque cava verſus radios ad illam advenientes, ac prima, per quam ipſi bis transmittentur, quod itidem in ſequentibus eodem ſenſu accipi debet.

36. Scholium 2. In eo foco unientur non duo tantummodo, ſed omnes radii heterogenei, cum formula non pendeat a valore dm, adeoque eadem remaneat, quæcumque ſit ipſa differentia dm valoris m, nimirum quicumque color cum certo aliquo colore comparetur, ut cum rubeo.

37. Scholium 3. Facile determinabitur pro eo caſu locus foci communis binarum ſuperficierum comparandus cum foco ſolius primæ ſuperficiei, ut innoteſcat, quantum diſtet alter ab altero.

38. Focus quidem primæ ſuperficiei habetur ex ipſa formula fundamentali numeri 11, & quidem admodum expedite pro radiis parallelis, & axi proximis, omiſſo ibidem tam ſecundo, quam tertio termino, ut remaneat $\frac{1}{x} = \frac{n-1}{nr}$: poſito ibi pro reflexione $n = -1$, $r = -a$, erit $\frac{1}{x} = -\frac{2}{a}$, adeoque $x = -\frac{1}{2}a$.

39. At pro foco communi in formula numeri 26, omiſſo ſecundo termino s, qui pendet ab apertura, habebitur $\frac{1}{x''} = \frac{1}{q^n} + t$. In valore $\frac{1}{q^n} = \frac{2(m-1)}{a} - \frac{2m}{b}$ juxta num. 22, & 26, ſub-

ſubſtituto ex num. 33 pro $\frac{1}{b}$ valore $\frac{1}{a} - \frac{(m^2-1)\alpha}{m^2a^2}$, & in valore $t = -\left(\frac{4m}{b^2} - \frac{4(m-1)}{ab} + \frac{2(m-1)^2\alpha}{ma^2}\right)$ juxta num. 25, & 26 pro ipſo $\frac{1}{b}$ ſolo $\frac{1}{a}$, erit ille prior $= \frac{2m}{a} - \frac{2}{a} - \frac{2m}{a} + \frac{2(m^2-1)\alpha}{ma^2}$ $= -\frac{2}{a} + \frac{2(m^2-1)\alpha}{ma^2}$, hic poſterior $-\frac{2(m^2+1)\alpha}{ma^2}$, quorum ſumma $-\frac{2}{a} - \frac{4\alpha}{ma^2} = \frac{1}{x''}$, adeoque $x'' = -\frac{1}{2}a + \frac{\alpha}{m}$, ſive ponendo $\frac{2}{3}$ pro $m = -\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}\alpha$.

40. Quare *in eo caſu focus compoſitus eſt propior ſpeculo per* $\frac{2}{3}$ *craſſitudinis vitri, quam focus ſimplex primæ ſuperficiei.*

41. Scholium 4. Facile invenietur in eodem caſu magnitudo erroris figuræ ſphæricæ. Satis erit in valore s, qui juxta num. 26 habetur in fine num. 24 ponere a pro b. Ellifis reliquis omnibus, quæ habentur intra parentheſim, ea reducitur ad $-\frac{2}{a^3}$, adeoque fit $s = -\frac{2}{a^3} \times \frac{e^2}{2} = -\frac{e^2}{a^3}$: erat autem num. 26 valor $x = q'' - q''^2 s - q''^2 t$, adeoque error figuræ ſphæricæ $-q''^2 s = -\frac{1}{4}a^2 \times -\frac{e^2}{a^3} = \frac{e^2}{4a}$

42. Porro idem error habetur in ſpeculo ſimplici unius tantum ſuperficiei, ut etiam inventum eſt in diſſert. 1 in adn. ad num. 111. Nam in valore ϕ numeri 15 deletis terminis diviſis per p remanet tantum $\frac{m-1}{m^3a^3} \times \frac{1}{2}e^2$, adeoque poſito -1 pro m, & $-a$ pro a, habetur $-\frac{2}{a^3} \times \frac{1}{2}e^2 = -\frac{e^2}{a^3}$, & $\frac{1}{x} = -\frac{2}{a} - \frac{e^2}{a^3}$, adeoque $x = -\frac{1}{2}a + \frac{e^2}{4a}$.

43. Quare habetur primo hujusmodi theorema: *Existentibus radiis sphæricitatum æqualibus error figuræ sphæricæ in foco composito est idem ac in simplici.*

44. Si distantia foci sit pedum trium, & apertura pollicum quatuor, erit reducendo ad lineas $a = 6 \times 144$, $e = 2 \times 12$, adeoque $\frac{e^2}{4a} = \frac{4 \times 144}{4 \times 6 \times 144} = \frac{1}{6}$. Inde habetur hoc alterum theorema: *In speculis vitreis, in quibus binæ sphæricitates sint æquales, radio existente pedum 6, & apertura pollicum 4, focus radiorum extremorum erit propior foco mediorum per $\frac{1}{6}$ unius lineæ, qui quidem erit proxime idem, si binæ sphæricitates fuerint proxime æquales.*

PROBLEMA II.

45. *INvenire ejusmodi relationem inter* a, & b, *ut bini foci radiorum homogeneorum axi proximorum coeant.*

46. Expressio foci communis radiorum axi proximorum ex formula num. 26, omissa s, & neglecta quantitate exigua t, erit $\frac{1}{x^{\prime\prime}} = \frac{1}{q^{\prime\prime}} = \frac{2(m-1)}{a} - \frac{2m}{b}$ juxta num. 21, & 26, & expressio foci e sola prima superficie per num. 38 est $\frac{1}{x} = -\frac{2}{a}$. Si ii valores æquentur, erit $\frac{m-1}{a} - \frac{m}{b} = -\frac{1}{a}$, adeoque $\frac{m}{a} = \frac{m}{b}$, sive $a = b$. Hic valor proximus b poni potest pro a in valore exiguo t formulæ accuratioris $\frac{1}{x^{\prime\prime}} = \frac{2(m-1)}{a} - \frac{2m}{b} + t$, qui valor t, ut num. 39, evadet $-\frac{2(m^2+1)\alpha}{ma^2}$. Quare habebitur $\frac{m-1}{a} - \frac{m}{b} - \frac{(m^2+1)\alpha}{ma^2} = -\frac{1}{a}$; unde eruitur $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - \frac{(m^2+1)\alpha}{ma^2}$, & $b = a + \frac{(m^2+1)\alpha}{m}$, ubi posito $\frac{3}{2}$ pro m fiet $b = a + (2 \cdot \frac{1}{6})\alpha$.

47. Hinc

47. Hinc habebitur hujusmodi theorema. *Ad conjungendum focum compoſitum utriusque ſuperficiei cum foco ſolius ſuperficiei primæ, debebit eſſe radius ſecundæ ſuperficiei longior radio primæ per craſſitudines vitri* $2 . \frac{1}{\nu}$.

48. Scholium 1. Facile invenietur in eodem caſu error diverſæ refrangibilitatis. Satis erit capere differentiam formulæ $\frac{1}{q''} = \frac{2(m-1)}{a} - \frac{2m}{b}$, omiſſis s & t, habendo pro variabili ſola m: habebitur $-\frac{dq''}{q''^2} = \frac{2dm}{a} - \frac{2dm}{b}$, ubi poſito $\frac{1}{a} - \frac{(m^2+1)\alpha}{ma^2}$ pro $\frac{1}{b}$, &, ob x'' proxime $= q'' = -\frac{1}{2}a$, $-\frac{4dx}{a^2}$ pro $\frac{dq''}{q''^2}$, erit $-\frac{4dx}{a^2} = \frac{2dm}{a} - \frac{2dm}{a} + \frac{2(m^2+1)\alpha dm}{ma^2}$, ſive $dx = \frac{(m^2+1)\alpha dm}{2m}$.

49. In vitris communibus invenit Newtonus $\frac{dm}{m-1} = \frac{1}{27}$, ſi pertineat m ad radios rubeos, & $m + dm$ ad violaceos. Quare ſi ponatur m pertinere ad radios medios, & dm ſit differentia reſpondens extremis, erit $\frac{dm}{m-1} = \frac{1}{55}$, & poſito $m = \frac{3}{2}$, adeoque $m - 1 = \frac{1}{2}$, erit $dm = \frac{1}{2} \times \frac{1}{55} = \frac{1}{110}$, & $dx = -\frac{13}{4} \times \frac{1}{110} \times \frac{2}{3}\alpha = -\frac{1}{55}\alpha$.

50. Habetur igitur hujusmodi theorema. *Diſtantia foci radiorum extremæ refrangibilitatis a foco radiorum mediæ in vitris communibus erit* $\frac{1}{55}$ *craſſitudinis vitri.*

51. Scholium 2. Hæc quantitas eſt admodum exigua, & quidem nec videtur debere eſſe accurata: eſt enim ſecundi ordinis, cum contineat productum ex α, & dm, neglectæ autem ſunt plures ſecundi ordinis quantitates.

52. Scholium 3. Error figuræ ſphæricæ erit ibi etiam, ut in præcedenti $\frac{1}{6}$ unius lineæ.

PROBLEMA III.

53. *INvenire ejusmodi relationem inter* a, *&* b, *ut corrigatur error figuræ ſphæricæ.*

54. Ponendum erit $s = 0$. Is valor habetur in fine numeri 24, in quo ſi pro coefficientibus datis per m ponantur valores c, e, f, g, & tota formula dividatur per $\frac{1}{2}e^2$, habebitur $\frac{c}{b^3} + \frac{e}{ab^2} + \frac{f}{a^2b} + \frac{g}{a^3} = 0$, vel poſito $\frac{a}{b} = y$, adeoque $\frac{1}{b} = \frac{y}{a}$, fiet $\frac{cy^2}{a^3} + \frac{ey^2}{a^3} + \frac{fy}{a^3} + \frac{g}{a^3} = 0$, ubi multiplicando per a^3, habebitur æquatio gradus tertii data per y, & numeros, in qua valor y per eam inveniendus exprimet rationem quæſitam a ad b.

55. Schol. 1. Si pro m ponatur $\frac{3}{2}$, & rite ſubſtituantur numeri, invenietur æquatio $-18y^3 + 29y^2 - 16 \cdot \frac{1}{3}y + 3 \cdot \frac{1}{5} = 0$: ea eſt accurate diviſibilis per $3y - 2$, exiſtente quoto $-6y^2 + 5 \cdot \frac{2}{3}y - 1 \cdot \frac{3}{5} = 0$, ſive $y^2 - \frac{17}{18}y + \frac{5}{18} = 0$. Hæc æquatio habet duas radices imaginarias: ille diviſor $3y - 2 = 0$ dat $y = \frac{2}{3}$. Quare habetur hujusmodi theorema: *Ad deſtruendum errorem figuræ ſphæricæ deberet eſſe ſpeculum concavo-convexum, & radius ſecundæ ſuperficiei eſſe ad radium primæ ut 3 ad 2.*

56. Schol. 2. Tum error diverſæ ſubſtantiæ focorum evaderet immanis, & error diverſæ refrangibilitatis adhuc notabilis.

57. Nam pro foco quidem compoſito haberetur $\frac{1}{x''}$ proxime $= \frac{1}{q''} = \frac{2(m-1)}{a} - \frac{2m}{b} = \frac{2m}{a} - \frac{2}{a} - \frac{4m}{3a} = \frac{2m-6}{3a}$, adeoque $x'' = \frac{3a}{2m-6}$, qui valor poſito $m = \frac{3}{2}$ evadit $= -a$, pro foco autem ſimplici habetur $-\frac{1}{2}a$: quamobrem ii duo foci diſtarent a ſe invicem per dimidium radium ſuperficiei primæ, alter duplo magis, quam alter.

58. Pro

58. Pro errore diverſæ refrangibilitatis, ut num. 48, erit $-\frac{dx''}{x''^2} = \frac{2\,dm}{a} - \frac{2\,dm}{b} = \frac{2\,dm}{a} - \frac{4\,dm}{3a} = \frac{2\,dm}{3a}$, adeoque ob $\frac{1}{x''^2} = \frac{1}{a^2}$ erit $dx'' = -\frac{2}{3}\,a\,dm$, nimirum ſi diſtantia foci, ut num. 44, ſit pedum 3, adeoque $a = 3 \times 144$, cum ſit $dm = \frac{1}{110}$ per num. 48, erit $dx'' = -\frac{288}{110} = -2.6$, qui error eſt fere 16 vicibus major errore figuræ ſphæricæ $\frac{1}{6}$ invento num. 44.

PROBLEMA IV.

59. *Invenire omnes tres errores in caſu ſphæricitatum æqualium.*

60. In eo caſu nec congruit focus radiorum extremorum cum foco mediorum in radiis homogeneis, nec focus unius ſpeciei radiorum cum foco alterius, nec focus primæ ſuperficiei cum foco communi utriusque.

61. Primus error, qui eſt error figuræ ſphæricæ, pro hoc caſu radiorum ſphæricitatis æqualium inventus eſt num. 43 $= \frac{e^2}{4a}$ nimirum juxta num. 44 exiſtente diſtantia foci pedum trium, adeoque radio a pedum 6, & apertura pollicum 4, ſive e pollicum 2, $= \frac{1}{6}$ unius lineæ.

62. Pro errore diverſæ refrangibilitatis conſideranda eſt formula numeri 26, in qua $\frac{1}{x''} = \frac{1}{q''} + s + t$: valor $\frac{1}{q''}$ per num. 21 eſt $\frac{2(m-1)}{a} - \frac{2m}{b} = \frac{2(m-1)}{a} - \frac{2m}{a} = -\frac{2}{a}$, qui cum non pendeat a valore m, non pendet a diverſa refrangibilitate: ſecundus valor s num. 41 inventus eſt pro eodem caſu ſphæricitatum æqualium $= -\frac{e^2}{a^3}$, qui idcirco pariter non pendet a diverſa refrangibilitate: valor poſtremus t inventus eſt num. 33 pro eodem

caſu ſphæricitatum æqualium $= -\frac{2(m^2+1)\alpha}{ma^2}$, adeoque cum hic error ex poſtrema formula numeri 26 ſit $-q''^2 t$, & ob $\frac{1}{q''} = -\frac{2}{a}$ ſit $q'' = -\frac{1}{2}a$, erit hic error idem $\frac{(m^2+1)\alpha}{2m}$. Hujus differentia, habendo m pro variabili, eſt $\frac{(m^2-1)\,dm\,\alpha}{2m^2}$ quantitas ordinis ſecundi, & idcirco minus exacta, ut num. 51 monuimus.

63. Adhuc tamen ſi numeros adhibere libeat, habebitur $\frac{5}{4} \times \frac{1}{110} \times \frac{2}{9} \times \alpha = \frac{\alpha}{2 \times 22 \times 9} = \frac{1}{396} \times \alpha$.

64. Pro foco compoſito formula $x'' = q'' - q''^2 s - q''^2 t$ juxta num. 26 habebit pro primo termino $q'' = -\frac{1}{2}a$, pro ſecundo $-q''^2 s = -\frac{1}{4}a^2 \times -\frac{e^2}{a^3} = \frac{e^2}{4a}$: pro tertio $q''^2 t = \frac{(m^2+1)\alpha}{2m}$, Quare $x'' = -\frac{1}{2}a + \frac{e^2}{4a} + \frac{(m^2+1)\alpha}{2m}$. Porro ex num. 42 diſtantia foci ex prima reflexione in prima ſuperficie eſt $-\frac{1}{2}a + \frac{e^2}{4a}$. Quare remanet pro diſtantia eorum focorum $\frac{(m^2+1)\alpha}{2m}$, quæ facto itidem $m = \frac{3}{2}$ evadit $\frac{13}{12} \times \alpha$.

65. Hinc primus error figuræ ſphæricæ in eo ſpeculo eſt $\frac{1}{6}$ lineæ idem, qui in ſpeculo ſimplici, ſecundus diverſæ refrangibilitatis inſenſibilis; tertius binarum imaginum $\frac{13}{12}$ craſſitudinis vitri.

Scholium generale 1.

66. AD acquirendam clariorem ideam eorum omnium errorum, poſſunt ii conferri cum errore figuræ ſphæricæ, & errore diverſæ refrangibilitatis, qui haberentur in lente iſoſcelia ejusdem foci, & aperturæ radiis eandem permeantibus. Poſſent quidem

ipſi

ipſi erui ex hiſce formulis adhibendo formulam valoris $\frac{1}{x}$ numeri 15 pertinentis ad duas ſuperficies. Sed quoniam eæ pro ejusmodi caſu reductæ jam ſunt in prima diſſertatione ad formam commodiorem num. 43, & 44, utemur iis ita reductis. Porro ibi error figuræ ſphæricæ eſt $r^2\varrho$.

67. Facto autem ibidem $\frac{1}{p} = o$ ob paralleliſmum radiorum incidentium fit, $\varrho = \frac{m-1}{m}\left(\frac{m^3}{f^3} - \frac{2m^2+m}{af^2} + \frac{m+2}{a^2f}\right)\frac{1}{2}e^2$: in lente iſoſcelia, cujus radius ſphæricitatis a, eſt ibidem $f = \frac{1}{2}a$, & $r = \frac{f}{m-1} = \frac{a}{2(m-1)}$. Hinc totus error $r^2\varrho$ evadit $= \frac{a^2}{4m(m-1)} \times \left(\frac{8m^3}{a^3} - \frac{8m+4m}{a^3} + \frac{2m+4}{a^3}\right)\frac{1}{2}e^2 = \frac{4m^2-4m-1+\frac{3}{m}}{4(m-1)a} \times e^2$. Ponendo autem $\frac{3}{2}$ pro m, habetur $\frac{5}{3} \times \frac{e^2}{a}$, & factis $a = 3 \times 144$, $e = 2 \times 12$, evadit $\frac{e^2}{a} = \frac{4}{3}$, & totus is errror $\frac{20}{9} = 2 \cdot \frac{2}{9}$ unius lineæ.

68. Error diverſæ refrangibilitatis habetur a formula $r = \frac{a}{2(m-1)}$, ubi capiendo differentias $dr = -\frac{a\,dm}{2(m-1)^2} = \frac{24}{110} = \frac{864}{110} = 7.85$, qui quidem in ejusmodi apertura non eſt niſi triplo major priore.

69. Verum tantam aperturam dioptrica teleſcopia non ferunt, & hic error poſterior ab ipſa apertura non pendet, dum prior ille eſt proportionalis quadrato aperturæ, cum ſit ut e^2. Ex comment. Acad. Pariſ. anni 1755 pag. 462 objectivum pedum trium, cui ab Hugenio tribuitur apertura fere unius pollicis, vix ferre poteſt aperturam linearum 6.7. Hinc factis ut $(4 \times 12)^2$ ad $(6.7)^2$ ita error inventus $\frac{20}{9}$ ad quartum, invenitur $\frac{5278}{2780} = \frac{1}{23}$.

ſs error ad errorem diverſæ refrangibilitatis inventum 7.85 eſt, ut 1 ad 181 multo quidem minor, ſed non quanto ipſum Newtonus invenit in objectivis longiſſimi foci, juxta ea, quæ diximus in diſſert. 1 num. 71; licet enim juxta ea, quæ in ſequentibus ſcholiis dicentur, adhuc imminui debeat ea ratio; adhuc tamen continebitur multo ſupra illam Newtonianam 1 ad 5449.

Scholium generale 2.

70. IN omnibus ſuperioribus exemplis numericis aſſumptus eſt valor $dm - \frac{1}{110}$ pro errore diverſæ refrangibilitatis conferendo ita focum radiorum maxime vel minime refrangibilium cum foco medie refrangibilium, atque id in vitris communibus. Si quæratur error, quem exhibet diſtantia foci maxime refrangibilium a foco minime refrangibilium, duplicandus eſt ejus erroris valor, & ſi vitra adhibeantur aliam habentia vim refractivam, vel diſtractivam, adhibendus valor eorum m, & dm.

Scholium generale 3.

71. VAlores inventi pertinent ad errores rectilineos: habetur autem & error circularis juxta ea, quæ diximus in diſſert. 1. §. 3. Radii excepti plano perpendiculari ad axem cum nusquam colligantur in unico puncto, diſperguntur per circellum, & inter circellos excipientes radios ejusmodi conſideratur is, qui eſt omnium minimus. Is in errore orto a diverſa refrangibilitate jacet in medio inter focos extremos, ut in fig. 4 ejus diſſertationis diameter COC' ejus circelli cadit ad ſenſum in medio inter B, & I, ac idem accideret radiis, ſi ex unica reflexione primæ ſuperficiei coirent in altero ex iis duobus punctis, & ex reflexione interme-

dia

dia inter duas refractiones in altero: at pro errore figuræ ſphæricæ jacet in ea diſtantia a foco B radiorum extremorum, ut ibidem in fig. 5, quæ eſt pars quarta intervalli ejusdem BI foci B a foco I proximorum axi.

72. Hinc eſt diameter ejus circelli nimirum ibidem COC ad diametrum aperturæ FAF, ut BO, in primo, & ſecundo caſu dimidium erroris rectilinei BI in tertio ejus quadrans, ad BA diſtantiam ejus foci a vitro. Quare ubi quæritur ſola ratio errorum, & conſiderantur diametri errorum circularium minimorum, duplicandus eſt adhuc terminus reſpondens prioribus binis erroribus. Sic in lente, de qua egimus hic ſuperius num. 69, error figuræ ſphæricæ conſideratus in ea diametro circelli minimi ad errorem diverſæ refrangibilitatis erit ut 1 ad $4 \times 181 = 724$ in ratione, ut ibi monuimus, minore quidem, quam ſit 1 ad 181, ſed quæ continetur adhuc multo ſupra Newtonianam illam 1 ad 5449. Ubi autem quæritur valor abſolutus ejus diametri, debet error rectilineus integer in illis multiplicari utrobique per diametrum aperturæ, & dividi ibi per duplam, hic per quadruplam diſtantiam foci: nimirum ſi apertura in lente, & ſpeculo ponatur eadem pollicum 4, & diſtantia foci itidem eadem pedum trium, ibi multiplicandus erit per $\frac{4 \times 12}{2 \times 3 \times 144} = \frac{1}{18}$, hic per $\frac{1}{36}$.

73. Notandum autem etiam, quod in errore duplicis reflexionis lumen diſtribuitur fere æqualiter per totum circellum, ſi alii errores mente ſecludantur, ſed id, quod reflectitur a prima ſuperficie, eſt multo debilius eo, quod reflectitur a ſecunda, ſi hæc ſit munita ſtanno: a prima ſuperficie reflectitur tantum pars quædam luminis totalis incidentis, ad ſecundam dempto adhuc eo, quod irregulariter diſpergitur, abit pars reſidua: inde reflectitur hujus partis pars, parte reflincta, & parte itidem irregulariter di-

ſperſa: pars igitur partis redit ad primam ſuperficiem, ubi hujus ipſius parte reflexa, parte diſperſa irregulariter, non niſi pars quædam ejusdem inde emergit.

74. Adhuc tamen reliqua ſimul omnia parum officiunt ſortiſſimæ reflexioni ſuperficiei ſtanno obductæ. Ex Bougerio in eo caſu pars a prima ſuperficie reflexa luminis totalis eſt $\frac{1}{40}$, vel $\frac{1}{39}$, quæ autem reflectitur a ſecunda, eſt luminſs in eam incidentis pars circiter $\frac{3}{4}$, adeoque ſi & in egreſſu reflectatur hujus pars eadem, ac negligatur exigua pars irregulariter diſperſa; erit lux primo reflexa ad egreſſam poſt reflexionem inter mediam inter duas refractiones, ut $1\times4\times39$ ad $39\times3\times38$, ſive ut 1 ad $28.\frac{1}{2}$.

75. In errore autem diverſæ refrangibilitatis denſitas in centro circelli excreſcit in infinitum, ac pergendo verſus margines decreſcit perpetuo, & quidem ita ultra quoscunque limites, ut in margine evaneſcat, cujus progreſſionis legem evolvimus, ac demonſtravimus in additamento ad ſecundam diſſertationem.

76. In errore figuræ ſphæricæ denſitas in centro excreſcit in infinitum, & pergendo verſus margines decreſcit perpetuo, donec deveniatur ad diſtantiam, cujus quadratum ſit dimidium quadrati radii integri, & iterum creſcit, ac verſus margines excreſcit in infinitum, quemadmodum fuſe in tertia diſſertatione evolvimus. Id reddit errorem hunc poſtremum ſenſibilem in majore diſtantia a centro circelli.

Scholium generale 4.

77. CUm ſint tam diverſi eorum errorum fontes, diverſa poſitio circelli, diverſa denſitas luminis, diverſa ratio diſtributionis, oporteret inquirere in magnitudinem circelli omnium minimi, continentis lumen ab iis omnibus erroribus diſperſum, & rationem di-

ſtri-

ſtributionis per ipſum. Sed id adhuc non eſſet ſatis ad comparandum ſenſum confuſionis in iisdem: oporteret inſuper noſſe, ad quam diſtantiam agant particulæ luminis in fibras fundi oculi, ad quam diſtantiam a loco impreſſionis protendatur motus ob longitudinem, & nexum fibrarum, quid deinde perturbationis augeatur in progreſſu usque ad cerebrum: addendum foret etiam, ubi lumen reflectitur a particulis objecti agentibus utique in lumen in aliqua diſtantia, quæ confuſio fiat ibi. Iſtæ omnes conſiderationes efficiunt, ut non ſit mirum, aperturarum rationem neceſſariam ad diſtinctionem conjungendam cum amplitudine, & claritate inventam per experimenta ab Artificibus non reſpondere calculis deductis a ſola magnitudine illorum errorum.

78. Sunt autem & alia, quæ contemnuntur, quæ quidem ubi de tam exiguis quantitatibus agitur, quam ſunt errorum circularium diametri, non omnino contemptibiles eſſe poſſunt: aſſumitur, reflexionem, & refractionem luminis fieri in unico puncto, radios, eam directionem, quam accipiunt in poſtremo egreſſu a ſuperficie refringente, vel reflectente, accipere in plano ſuperficiem ipſam tangente in eadem diſtantia a contactu expreſſa per *e*, negliguntur reflexiones ortæ in itinere ab exiguis vaporibus volitantibus per aerem, plures novi errores orti a lentibus ocularibus, vitia oculorum, quæ adſunt ſemper, cum nulla ejusmodi naturæ opera omnem, quam ea videtur affectare, perfectionem acquirant, ac alia fortaſſe multa ejus generis ad eandem rem pertinentia negliguntur.

79. Patet ex iis omnibus, quantæ imperfectiones habeantur in inſtrumento omnium præcipuo inter ea, quæ a natura accepimus ad acquirendam notitiam rerum extra nos poſitarum, cujusmodi omnino eſt ſenſus viſus.

Scho-

Scholium generale 5.

80. PRoderit hic omnes æſtimationes ſaltem eorum ex erroribus, quos in ſuperioribus problematis determinavimus, in unum colligere.

1.

81. *Ut error diverſæ refrangibilitatis ſit nullus*

Speculum debebit eſſe proxime ejusdem curvaturæ in utraque ſuperficie:

Radius ſecundæ longior radio primæ per $\frac{5}{9}$ craſſitudinis vitri:

Focus compoſitus erit propior, quam focus primæ ſuperficiei ſimplex per $\frac{2}{3}$ ipſius craſſitudinis:

Error figuræ ſphæricæ quadrato ſemidiametri aperturæ diviſo per quadruplum radium:

In ſpeculo, cujus focus diſtet per pedes 3 cum apertura pollicum 4, erit $\frac{1}{6}$ lineæ.

2.

82. *Ut radiorum homogeneorum proximorum axi focus primæ ſuperficiei coeat cum foco compoſito,*

Speculum debebit eſſe itidem proxime ejusdem curvaturæ in utraque ſuperficie:

Radius ſecundæ longior radio primæ per craſſitudines vitri $2 . \frac{1}{6}$:

Diſtantia foci minime refrangibilium a foco maxime refrangibilium erit prorſus inſenſibilis $\frac{1}{51}$ craſſitudinis ipſius:

Error figuræ ſphæricæ ut in primo caſu $\frac{1}{6}$ lineæ.

3.

3.

83. *Ut error figuræ ſphæricæ ſit nullus,*

Radius ſecundæ ſuperficiei ad radium primæ debebit eſſe ut 3 ad 2.

Error binorum focorum enormis, nimirum dimidii radii primæ ſuperficiei:

Error diverſæ refrangibilitatis in foco, & apertura caſus primi linearum $2 . \frac{3}{5}$:

4.

84. *Si ſphæricitates fuerint accurate æquales,*

Error figuræ ſphæricæ in foco, & apertura caſus primi erit $\frac{1}{6}$ lineæ:

Error diverſæ refrangibilitatis inſenſibilis $\frac{1}{396}$ craſſitudinis vitri:

Error binorum focorum ex binis reflexionibus $1 . \frac{1}{12}$ craſſitudinis ipſius.

Scholium generale 6.

85. EX iis omnibus conſtat, hæc ſpecula habere non poſſe diſtinctionem eandem, quam æqualia metallica habentia unicam reflexionem ſine refractione. Videtur autem præ cæteris ſeligendus caſus primus: verum eſt admodum difficile vitris inducere figuras, quarum radii habeant ſatis acurate diſcrimen usque adeo exiguum: nec vero methodi, quæ haberi poſſunt ad cognoſcendum radium ſphæricitatis inductæ vitro usque ad tam exiguum diſcrimen deprehendendum, accuratæ eſſe poſſunt.

86. Cum plures errores pendeant a craſſitudine vitri, patet oportere eam imminuere, quantum licet: ſed ſi ea nimis exigua ſit, dum vitrum agglutinatur ad tornandam alteram ſuperficiem, altera figuram inductam amittit, vel ſaltem ſatis corrumpit.

DISSERTATIO V.

De focis ſuperficierum quotcumque cum applicatione ad focos unius lentis, vel binarum, potiſſimum ex reflexione duplici in binis.

I.

In adnotatione ad num. 170 diſſertationis ſecundæ injecta eſt mentio objectivi duplicis, quod elaborandum curaveram e flint, & vitro communi, poſt determinatas admodum accurate qualitates refractivas utriusque materiæ cum ratione qualitatum diſtractivarum, ubi adjeci, quid viderim circa lumen erraticum involvens imaginem diſtinctam, & eam indicavi ipſius erratici luminis, quam nunc quidem credo veram eſſe cauſam, nimirum defectum homogeneitatis in flint, cujus laminas, ut ut primo aſpectu egregias, inveni conſtantes pluribus ſtratis heterogeneis. Antequam id ejus vitri vitium deprehenderem, cum cogi-

tarem, unde id erraticum lumen oriri poſſet; venerant mihi in ſuſpicionem radii, qui poſt binas reflexiones in binis ex illis quatuor ſuperficiebus deveniunt itidem ad oculum.

2. Quoniam quotiescunque radii lucis in tranſitu per aliquam ſuperficiem refringuntur, eorum pars aliqua reflectitur, non ſolum oriuntur inde ii foci, quos conſideravimus in diſſert. 1 a num. 123, & de quibus potiſſimum agit diſſert. 4, ſed & alii, de quibus potiſſimum agemus hic. Illi fiunt per unicam reflexionem factam in ſecunda ſuperficie intermediam inter duas refractiones, quæ habentur in prima a radiis retro reſilientibus verſus punctum radians: hi autem fiunt per duplicem reflexionem cum binis refractionibus in unica lente, cum refractionibus binis, vel pluribus in pluribus lentibus conjunctis, & radii, ad quos pertinent, progrediuntur ultra ipſas lentes. En quid de hiſce focis reſpectu illius luminis erratici ſcripſerim ad Scherfferum noſtrum litteris ad eum datis ante hos 38 menſes, nimirum menſe Octobri anni 1764, quarum partem eam, quæ huc pertinebat, germanice redditam is impreſſit cum prima diſſertatione.

3. Habetur ibi regula generalis pro foco quotcumque ſuperficierum neglectis earum diſtantiis, & errore figuræ ſphæricæ ſine ulla demonſtratione, cum applicatione ad duplicem reflexionem in una, vel binis lentibus. Deſcribam hic introductionem, & regulam, tum eam demonſtrabo, ac applicabo prius ad unicam lentem, tum ad duas. En igitur, quid ego ad ipſum in ea epiſtola ſcribens de objectivo illo duplici.

4. „ Transſpexi lunam: imago apparuit ſatis diſtincta, ſed aliud quoddam lumen tenuius ipſam involvens, & excurrens circumquaque extra ipſam turbabat nitorem illum: apertura nonnihil imminuta, apparuit multo minus, & objecta terreſtria intuenti diſparuit ob ipſam ejus luminis tenuitatem. Diu hæſi anxius, unde

id

id lumen : fortaſſe etiam ex minus exacta politura : ſed ſuſpicor alteri cuipiam cauſæ tribuendum. Inter cætera illud mihi incidit fortaſſe id provenire a radiis bis reflexis ; nam etiam ubi lucernæ flammulam transſpicio per binas ejusmodi lentes, præter flammulam vividiſſimam directam, video alias 6 ex ejusmodi duplici reflexione ortas, ut transſpicienti per unicam lentem ad latus, unica habetur, quæ quidem (*a*) omnino fuit ſatelles ille Veneris, nimirum altera Veneris imago per duplicem reflexionem habita præter duplicem refractionem. Ubi ſuperficies ſunt binæ, habetur unica ; ubi ſunt quatuor, habentur 6 ; fieri enim poteſt reflexio in ſecunda, & prima, in tertia & prima, in quarta & prima, in tertia & ſecunda, in quarta & ſecunda, in quarta & tertia. Si aliqua ex iis habeat focum non ita procul a foco imaginis principalis directæ, & lumen ſit ſatis vividum, in objecto apparere debebit illud lumen circa imaginem principalem.

5. Cogitavi igitur per hosce dies de ejusmodi focis, & in genere de focis poſt quemcunque reflexionum, & refractionum numerum, & incidi in theoriam eorum elegantiſſimam ſane, ſaltem ubi craſſitudo lentium negligatur, quæ ſponte fluit a ſola prima mea formula (*b*) Clairautiana (prima earum, quæ habentur in 2 diſſert. num. 55) $\frac{1}{q} = \frac{m-1}{ms} + \frac{1}{mp}$, quæ etiam reflexioni convenit, dummodo fiat $m = -1$. En methodum inveniendi ejusmodi focos.

6. Scribantur radii ſphæricitatum omnium ſuperficierum, ad quas lucis radius appellit ordine, quo ad eas appellit, ſed retrogrado, nimirum incipiendo ab appulſu poſtremo : ſcribantur ſub

(*a*) De hoc argumento vide additamentum in fine hujus Diſſertationis.

(*b*) Nimirum prima earum, quæ habentur in 1 diſſert. num. 55, quas appello Clairautianas, quia eas ex ipſo excerpſi ; meas, quia ibi easdem ex alio ſimpliciore principio demonſtravi.

ipſis valores m, qui ipſis competunt, nimirum pro quolibet exponens rationis ſinus anguli, quem efficit cum perpendiculo radius lucis ad eam ſuperficiem accedens, ad ſinum anguli, quem efficit ab ea recedens: fiant totidem fractiones, quot ſunt ii ſphæricitatum radii, in quorum ſingulis numerator ſit ſuum $m - 1$, denominator factum ex omnibus præcedentibus m, incluſo illo, ductum in illum radium ſphæricitatis: eorum terminorum ſumma (*c*) adjecto $+ \frac{1}{tp}$ (exprimente t factum ex omnibus in adhibitum in poſtremo termino, p diſtantiam, ad quam convergant radii, dum ad primam ſuperficiem adveniunt) dabit valorem $\frac{1}{x}$, in quo x ſit diſtantia foci quæſita. Illud autem factum omnium præcedentium m ducendum in m novum, jam inventum eſt pro præcedenti termino, quod novi facti inventionem reddit tanto faciliorem.

7. Regula eſt ſane facilis & expedita: en exemplum. Sit prima lens ex vitro, quod pro ingreſſu ex aere in ipſum habeat m, adeoque pro egreſſu $\frac{1}{m}$, ſecunda habeat M, & $\frac{1}{M}$; ſint autem radii ſphæricitatum a, b, c, d, ac quæratur focus radiorum parallelorum, qui habeant binas reflexiones in ſuperficiebus tertia & prima. Radius ingredietur per primam a, ubi habebit m, egredietur e ſecunda b, ubi habebit $\frac{1}{m}$, reflectetur in tertia c, adeoque ibi erit -1, ingredietur per ſecundam b, eritque ibi m, reflectetur in prima a cum -1, egredietur in ſecunda b cum $\frac{1}{m}$, ingredietur in tertiam c cum M, egredietur e quarta d cum $\frac{1}{M}$. Iis valo-

(*c*) In illa epiſtola poſueram tantum $\frac{1}{p}$ omiſſo coefficiente t, ex præpropera ſcriptione, quem hic determino.

valoribus assumptis ordine retrogrado formantur sequentes duæ lineæ, & ex posteriore fit tertia continens facta præcedentium omnium m in ea contentorum ducta in postremum: tum ex iis juxta canonem præscriptum eruitur quarta terminorum formulæ, pro cujus deductione notetur illud $\frac{m-1}{m}$ verti in $-(m-1)$, ubi pro m ponatur $\frac{1}{m}$, & verti in $+2$, ubi fit $m = -1$, ac $\frac{1}{m} \times m$, & $\frac{1}{M} \times M$ fieri $= 1$. Porro in quarta omittitur terminus continens p ob radios, qui concipiuntur advenientes paralleli.

d	:	c	:	b	:	a	:	b	:	c	:	b	:	a
$\frac{1}{M}$	:	M	:	$\frac{1}{m}$	:	-1	:	m	:	-1	:	$\frac{1}{m}$	:	m
$\frac{1}{M}$	:	1	:	$\frac{1}{m}$	:	$-\frac{1}{m}$	:	-1	:	1	:	$\frac{1}{m}$	:	1

$$-\frac{M-1}{d}+\frac{M-1}{c}-\frac{m-1}{b}+\frac{2m}{a}-\frac{m-1}{b}-\frac{2}{c}-\frac{m-1}{b}+\frac{m-1}{a}=\frac{1}{x}$$

Accepta vero summa, incipiendo a terminis divisis per a, habebitur $\frac{3m-1}{a}-\frac{3m-3}{b}+\frac{M-3}{c}-\frac{M-1}{d}=\frac{1}{x}$

8. Huc usque in ea epistola, in qua applicatur regula ad numeros earum duarum lentium, quas habebam ego, & post animadversiones nonnullas adduntur in fine formulæ pro omnibus casibus unius lentis, vel duarum. Exponam hic primo quidem adhuc uberius, quo pacto tertia linea deducatur e secunda, tum quarta ex omnibus tribus simul: deinde vero regulam ipsam demonstrabo.

9. In primo termino tertiæ lineæ retinetur $\frac{1}{M}$, qui erat unicus terminus secundæ: pro secundo termino tertiæ, ducto hoc primo $\frac{1}{M}$ suo in secundum secundæ M, habetur 1: pro tertio

ipsius

ipſius tertiæ hic ſuus ſecundus ductus in tertium ſecundæ $\frac{1}{m}$, exhibet $\frac{1}{m}$: pro quarto ejusdem hic ſuus $\frac{1}{m}$ ductus in quartum ſecundæ — 1 dat — $\frac{1}{m}$: hic ductus in quintum ſecundæ m dat quintum tertiæ — 1: ipſe ductus in ſextum ſecundæ — 1 dat ſextum tertiæ + 1: is ductus in ſeptimum ſecundæ $\frac{1}{m}$ dat ſeptimum tertiæ $\frac{1}{m}$, qui demum ductus in poſtremum ſecundæ m dat poſtremum tertiæ 1. Patet autem, eo ordine progrediendo facillime inveniri ea omnia producta, quæ evadunt admodum ſimplicia eliſis diviſionibus per multiplicationes. Et quidem ex conſideratione eliſionum earundem regula erui poteſt multo facilor pro inventione terminorum quartæ lineæ, in qua nusquam jam occurrant valores m in diviſoribus, quam proponemus, poſteaquam evolverimus formationem ipſius lineæ quartæ, & formulæ ex ea derivatæ, ac demonſtraverimus regulam propoſitam, ex qua nova lex ſimplicior eruitur.

10. In quarta linea primus terminus in numeratore debet habere primum terminum ſecundæ lineæ, detracta unitate, adeoque $\frac{1}{M}$ — 1, in denominatore primum terminum lineæ primæ d cum primo tertiæ $\frac{1}{M}$, hinc is erit $\frac{1-M}{d} = -\frac{M-1}{d}$. Secundus debet habere numeratorem M — 1, ob ſecundum terminum ſecundæ lineæ M, & denominatorem c ex ſecundo termino 1 lineæ tertiæ, & c primæ. Tertius ob $\frac{1}{m}$ in tertio termino ſecundæ lineæ, & $\frac{1}{m}$ tertiæ, b primæ, erit $(\frac{1}{m} - 1) : \frac{b}{m} = \frac{1-m}{b}$ $= -\frac{m-1}{b}$. Quartus ob quartum ſecundæ — 1, quartum tertiæ $-\frac{1}{m}$, primæ a, erit $(-1 - 1) : -\frac{a}{m} = \frac{2m}{a}$. Quintus ob m ſe-

ſecundæ lineæ, — 1 tertiæ, b primæ, erit $(m-1) : -b = -\frac{m-1}{b}$. Sextus ob — 1 ſecundæ, 1 tertiæ, c primæ, erit $(-1-1) : c = -\frac{2}{c}$. Septimus ob $\frac{1}{m}$ ſecundæ, $\frac{1}{m}$ tertiæ, b primæ, erit $(\frac{1}{m} - 1) : \frac{b}{m} = \frac{1-m}{b} = -\frac{m-1}{b}$. Poſtremus demum ob m ſecundæ, 1 tertiæ, a primæ, erit $\frac{m-1}{a}$.

11. Summa autem poſita in fine numeri 9 facile deducitur e quarta linea. Primus hujus terminus fit e quarto, & octavo illius $\frac{2m}{a} + \frac{m-1}{a} = \frac{3m-1}{a}$: ſecundus e tertio, quinto, ſeptimo $-\frac{m-1}{b} - \frac{m-1}{b} - \frac{m-1}{b} = -\frac{3m-3}{b}$: tertius e ſecundo, & ſexto $\frac{M-1}{c} - \frac{2}{c} = \frac{M-3}{c}$: quartus e ſolo primo $-\frac{M-1}{d}$.

12. Jam vero quod pertinet ad demonſtrationem regulæ, ea facile apparet ex parte 1 formulæ generalioris, quam propoſuimus num. 16 diſſert. 4, omiſſis ſecunda, & tertia, quæ continent errorem figuræ ſphæricæ, & diſtantiæ ſuperficierum, quæ quidem formula ibidem deducta eſt ex illa $\frac{m-1}{mia} + \frac{1}{mp}$. In ea autem habetur $\frac{1}{x^n} = \frac{m^n-1}{m^n a^n} + \frac{m^{n-1}-1}{m^{n-1} m^n a^{n-1}} + \frac{m^{n-2}-1}{m^{n-2} m^{n-1} m^n a^{n-2}} \ldots\ldots + \frac{m-1}{m m' \ldots m^n a} + \frac{1}{m m' \ldots m^n p}$, exprimente n non exponentem potentiæ ſed numerum accentuum, qui apponendi eſſent ſingulis valoribus.

13. In ea formula primo quidem patet, contineri tot fractiones, quot ſunt radii ſphæricitatum, ad quas radius lucis appellit, quarum ſingulæ habent ſingulos ſuperficierum radios in denominatore præter poſtremum terminum habentem in eo valorem p.

Porro eæ fractiones poſitæ ſunt ordine retrogrado reſpectu ſuperficierum ipſarum, cum in prima habeatur a^n in poſtrema a.

14. Numerator cujusvis fractionis eſt $m - 1$ pertinens ad illum ſuum radium ſphæricitatis a, denominator habet ipſum eum radium, & præterea prima fractio ſolum valorem m pertinentem ad ipſum illum a, ſecunda præcedentem cum ſuo ita, ut in quavis fractione denominator contineat factum ex omnibus præcedentibus, & ſuo; ac proinde in poſtremo habeatur factum ex omnibus ſimul, quod habetur etiam in fractione continente p.

15. Demonſtrata hoc pacto regula numeri 6, proferemus aliam faciliorem, ad quam ea reduci poteſt, quotiescumque radius poſt tranſitum per ſubſtantias quotcumque debet redire in eam primam, ut in aerem, ex qua ad eas delatus eſt. Dicto m valore pertinente ad ſolum ingreſſum in quamvis ſubſtantiam, formetur pro quavis ſuperficie, ad quam radius appellit fractio, quæ pro denominatore habeat radium ejus ſuperficiei, pro numeratore, ſi ibi habeatur reſractio, $m - 1$ pertinens ad illam ſubſtantiam, ad quam ea ipſa ſuperficies pertinet: ſi ibi habeatur reflexio facta extra ſubſtantiam binis ſuperficiebus terminatam, nimirum poſt numerum refractionum parem, computando refractiones vel ab initio, vel a fine lineæ, habeat num. 2; ſi habeatur reflexio facta intra ſubſtantiam, nimirum per imparem refractionum computatarum ab initio lineæ habeat $2m$, accepto m pertinente ad illam ſubſtantiam, nimirum ad ſubſtantiam ſuperficiei refractivæ proxime præcedentis. Signa autem in fractionibus eo ordine retrogrado acceptis, quæ pertinent ad reflexiones, alternando incipiendo a poſitivo, & in fractionibus, quæ pertinent ad reflexiones, alternentur incipiendo a poſitivo, & in fractionibus, quæ pertinent ad refractiones, alternentur itidem, ſed incipiendo a negativo, & procedendo per omnes fractiones, tanquam ſi etiam illæ, quæ ad reflexiones pertinent

tinent, pertinerent ad refractiones; nimirum ſi numerus omnium fractionum usque ad datam quampiam fractionem pertinentem ad refractionem, incluſa etiam ipſa, fuerit par; ponendum erit ſignum poſitivum; ſi impar, negativum.

16. Ope hujus regulæ facile determinatur fractio quævis etiam nondum determinatis præcedentibus: res tamen evadet facilior, ſi & hic procedatur ordine ſuo, & fiant tres lineæ: prima contineat radios ſuperficierum, ad quas lumen appellit, ponendo primum in fine lineæ poſtremo loco, tum reliquos ſiniſtrorſum ordine ſuo, & radii ſuperficierum pertinentium ad reflexiones deſignentur ſuffixo accentu: ſecunda ſub radiis, pertinentibus ad refractiones habeat illud m, quod pertinet ad eam ſubſtantiam, quam ea ſuperficies terminat, ſive in eam ingrediatur ibi lumen, ſive ex ea egrediatur, & ſub radiis reflexionum habeat 2, ſi adveniunt poſt radios refractionum numero pari; 2 cum m præcedenti, ſi poſt imparem: tertia contineat ſigna eo ordine alternata, nimirum incipiendo a ſigno —, & ſub terminis reflexionum indicatis ab accentu ponendo non ſigna, quæ ab ea alternatione proveniunt, ſed ſub eorum primo, qui oritur, +, ſub ſecundo —, & ita porro adhibita ſua peculiari alternatione pro ipſis.

17. In exemplo numeri 7 habebuntur ſequentes tres lineæ cum quarta continente ſeriem fractionum quæſitam.

d	:	c	:	b	:	$\grave{a}$	:	b	:	$\grave{c}$	:	b	:	a
M	:	M	:	m	:	$2m$	:	m	:	2	:	m	:	m
—	:	+	:	—	:	+	:	—	:	—	:	—	:	+

$$-\frac{M-1}{d}+\frac{M-1}{c}-\frac{m-1}{b}+\frac{2m}{a}-\frac{m-1}{b}-\frac{2}{c}-\frac{m-1}{b}+\frac{m-1}{a}=\frac{1}{x}$$

18. In quarto termino ſecundæ lineæ habetur $2m$, quia ea reflexio occurrit poſt numerum imparem refractionum computatarum ab initio lineæ, nimirum poſt tres, & præcedit in poſtrema refractione m: ſub eodem in tertia linea habetur $+$, quia ea reflexio eſt prima, quæ occurrat: in ſexto termino habetur 2, quia ea reflexio occurrit poſt numerum refractionum parem, nimirum poſt quatuor, & ſub ipſo —, quia eſt ordine ſecunda. In reliquis terminis a, & b habent m; c, & d habent M, ac ſigna incipiendo a ſigno — alternantur, computatis pro alternatione terminis omnibus.

19. Prona utique, & admodum expedita eſt hæc regula pro formandis fractionibus, ſed videndum, quo pacto ex priore illa deducatur. In primis ſi conſiderentur ſolæ refractiones ordine retrogrado ſumptæ; earum prima ſit in egreſſu, tum reliquæ alternatim habentur in ingreſſu & in egreſſu ita, ut exprimentibus m, m' valores m pertinentes ad ingreſſum in ſingulas ſubſtantias binis ſuperficiebus terminatas, præter radios ſphæricitatum ſingulos in ſingulis fractionibus, ubi nulla occurrat reflexio, debeat fractio prima habere pro denominatore $\frac{1}{m}$, ſecunda $\frac{1}{m} \times m = 1$, adeoque tertia $\frac{1}{m'}$, quarta $\frac{1}{m'} \times m' = 1$, & ita porro (*d*). Quare cum in omnibus numerator ſit $m - 1$ regulæ prio-

(*d*) Facile hinc illud deducitur, terminum ultimum diviſum per p fore ſemper $+\frac{1}{p}$, ſine ullo alio coefficiente, adhibito ſigno $+$, ubi nulla habeatur reflexio, vel reflexionum habeatur numerus par, ſigno — ubi earum numerus ſit impar. Cum enim tot egreſſus haberi debeant, quot ingreſſus; omnes coefficientes m denominatoris habebunt ſuum coefficientem $\frac{1}{m}$, adeoque omnium coefficientium pertinentium ad refractiones productum ſimul erit 1, omnium per-

prioris expoſitæ num. 6, & in paribus id m ſit idem hoc m, in imparibus ſit $= \frac{1}{m}$, remanebit is in prioribus cum ſuo ſigno $m - 1$ ob denominatorem 1, & in imparibus fiet $(\frac{1}{m} - 1) : \frac{1}{m} = 1 - m = -(m - 1)$, redeunte expreſſione eadem, ſed cum ſigno tantum mutato. Quamobrem ſi nullæ reflexiones occurrant; denominator in omnibus erit ſolus radius ſphæricitatis, & numerator $m - 1$ pertinens ad illam ſubſtantiam, ad quam pertinet ea ſuperficies, ſed ſigna præfigenda toti fractioni alternabuntur incipiendo a negativo.

20. Porro ſignum illud negativum præfigendum adveniet ex eo, quod valor $1 - m$ numeratoris mutabitur in $m - 1$, non ex ulla mutatione ſigni pertinentis ad denominatorem: factum ex omnibus m pertinentibus ad refractiones erit ſemper poſitivum, at id poſt primam reflexionem evadet negativum ob $m = -1$ in omnibus reflexionibus, & poſt ſecundam fiet iterum poſitivum, & ita porro: illi coefficientes denominatorum -1 non mutabunt quidquam denominatores ipſos, ſed ſolum eorum numerus impar mutabit ſignum fractioni ipſi præfigendum, quod eorum numerus par relinquet illæſum. Quare poſt primam reflexionem quævis fractio ad refractionem pertinens, remanebit quidem eadem, quæ fuiſſet ſine reflexionibus, ſed habebit ſignum contrarium ei, quod haberet, ſi ea reflexio non adfuiſſet, atque id accidet usque ad ſecundam reflexionem: inde ad tertiam reflexionem retinebuntur ſigna; a tertia ad quartam mutabuntur, & ita porro.

pertinentium ad reflexiones numero pari $+1$, numero impari -1; ac proinde cum debeat in formula numeri 12 habere pro coefficiente productum ſimul omnium ejusmodi valorum, habebit in primo caſu ſolum $+1$, & in ſecundo -1.

21. Jam vero ſervata regula, quam propoſuimus, ea mutatio inducetur per ſeſe, atque id in iis ſolis fractionibus, quæ conſequentur reflexiones complentes numerum imparem, usque ad reflexiones complentes numerum parem: nam eæ fractiones refractionum, quæ reſpondebant numero pari, inſerto jam numero impari fractionum pertinentium ad reflexiones, reſpondebunt utique numero impari, eæ vero, quæ reſpondebant impari, reſpondebunt pari: & e contrario inſerto numero reflexionum pari, quæ reſpondebant numero pari, vel impari, pergent itidem pari, vel impari reſpondere.

22. Sic in exemplo num. 17 terminus quintus eſt quartus inter refractiones, ſed ob unam reflexionem inſertam fit quintus: ut quartus ad refractiones pertinens deberet habere ſignum poſitivum, quod debet mutare ob denominatorem ſuum factum negativum ab illa reflexione, & mutabit utique, ſi inter terminos pro alternatione adhibendos computetur etiam ille quartus ad reflexionem pertinens, qui cum eum reddat quintum, efficit, ut negativum ſignum habeat, & inde, quid in reliquis omnibus accidere debeat, facile perſpicitur.

23. Jam vero licet fractiones reſpondentes reflexionibus computandæ ſint cum pertinentibus ad refractiones pro alternatione ſignorum apponendorum hisce poſterioribus, earum ſigna ab ea alternatione non pendent: omnium ejusmodi punctionum numerator habet $m - 1 = -2$, denominator autem in primo præter radium ſuæ ſuperficiei & denominatorem fractionis proxime præcedentis e pertinentibus ad refractiones conſideratas ſine reflexionibus habebit -1 toties ſumptum, quot habebuntur reflexiones usque ad ipſum incluſive: adeoque in iis, quæ complent numerum imparem reflexionum, habebitur fractio $\frac{-2}{-1} = +2$, in reliquis

$\frac{-2}{+1}$

$\frac{-2}{+1} = -2$; ut idcirco, quod pertinet ad ſigna, inſtituenda ſit nova alternatio ſignorum ipſorum incipiendo a ſigno poſitivo, præfigendo primæ fractioni pertinenti ad reflexiones.

24. Quoniam vero denominator fractionis complentis numerum parem earum, quæ ad ſolas refractiones pertinent, eſt 1 juxta num. 19, & fractionis complentis numerum imparem eſt $\frac{1}{m}$; in fractionibus reflexionum advenientium poſt numerum parem fractionum pertinentium ad refractiones denominator habebit ſolum numerum 2; in iis vero, quæ adveniunt poſt numerum imparem, habebit m, quod pertinet ad ſubſtantiam ſuperficiei refringentis proxime præcedentis. Et hoc quidem pacto accuratiſſime demonſtrata jam eſt regula ſuperior admodum expedita. Eam nunc applicabimus primo quidem ad unicam lentem, tum ad omnes caſus lentium duarum.

25. In unica lente habentur tantum duo radii a, b cum unico m. Radius luminis refringetur in utraque ſuperficie, & in utraque reflectetur. Juxta regulam, ut num. 17, habebuntur ſequentes 4 lineæ, in quarum prima radii ſuperficierum incipiendo a fine lineæ ordine retrogrado, nimirum ponendo in fine eas, ad quas appellit prius, in ſecunda ſui valores m ſingulis reſpondentes, in tertia ſigna, in quarta fractiones inde erutæ.

$$\begin{array}{cccccc} b & : & \grave{a} & : & \grave{b} & : & a \\ m & : & 2m & : & 2m & : & m \\ - & & + & & - & & + \end{array}$$

$$-\frac{m-1}{b} + \frac{2m}{a} - \frac{2m}{b} + \frac{m-1}{a}$$

Capta autem terminorum ſumma fiet $\frac{3m-1}{a} - \frac{3m-1}{b}$.

26. In

26. In binis lentibus habentur ſex caſus duplicis reflexionis, inter quas occurrit & is, quem habuimus etiam num. 7 & 17. Ipſum tamen hic itidem repetemus, ut habeantur ſimul omnes ſuo ordine propoſiti. Ii ſex caſus ſunt reflexiones factæ in ſuperficiebus 2 & 1; 3 & 1; 4 & 1; 3 & 2; 4 & 2; 4 & 3. Pro ſingulis apponentur quinque lineæ: prima continebit radios *a*, *b*, *c*, *d* ſuperficierum binarum lentium, qui ſcribi poterunt incipiendo a primo *a* poſito in fine lineæ, poſitis reliquis ſiniſtrorſum ordine ſuo usque ad radium ſuperficiei primo reflectentis: ante hunc ordine retrogrado habebuntur iidem præcedentes poſiti prius pro radio luminis progrediente, & ponendi iterum pro regrediente usque ad radium ſuperficiei ſecundo reflectentis: demum ante hunc ipſum iidem eum conſequentes ſcribentur omnes ordine directo usque ad radium poſtremum *d*, qui primum in ea linea locum occupabit: radiis autem illis binis pertinentibus ad reflexiones adſcribentur accentus, ut ſupra. Secunda linea habebit *m* ſub radiis *a*, & *b* accentu carentibus, M ſub *c*, & *d* itidem carentibus accentu, ſub utraque autem ex habentibus accentum habebit numerum 2 adjecto coefficiente literali *m* vel M, ſi is computando ab initio lineæ habuerit ante ſe numerum imparem radiorum accentu carentium, ſeligendo e valoribus *m*, M illum, qui fuerit ſubſcriptus radio proxime præcedenti e carentibus accentu. Tertia continebit ſigna alternata juxta regulam. Quarta fractiones omnes efformatas juxta eandem. Quinta demum earum ſummam collectam ordine valorum *a*, *b*, *c*, *d*.

27. Pro

27. Pro 2, & 1

$$\begin{array}{cccccccccccc} d & : & c & : & b & : & a' & : & b' & : & a \\ M & : & M & : & m & : & 2m & : & 2m & : & m \\ - & : & + & : & - & : & + & : & - & : & + \end{array}$$

$$-\frac{M-1}{d}+\frac{M-1}{c}-\frac{m-1}{b}+\frac{2m}{a}-\frac{2m}{b}+\frac{m-1}{a}$$

$$\frac{3m-1}{a}-\frac{3m-1}{b}+\frac{M-1}{c}-\frac{M-1}{d}$$

28. Pro 3, & 1

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} d & : & c & : & b & : & a' & : & b & : & c' & : & b & : & a \\ M & : & M & : & m & : & 2m & : & m & : & 2 & : & m & : & m \\ - & : & + & : & - & : & + & : & - & : & - & : & - & : & + \end{array}$$

$$-\frac{M-1}{d}+\frac{M-1}{c}-\frac{m-1}{b}+\frac{2m}{a}-\frac{m-1}{b}-\frac{2}{c}-\frac{m-1}{b}+\frac{m-1}{a}$$

$$\frac{3m-1}{a}-\frac{3m-3}{b}+\frac{M-3}{c}-\frac{M-1}{d}$$

29. Pro 4, & 1

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc} d & : & c & : & b & : & a' & : & b & : & c & : & d' & : & c & : & b & : & a \\ M & : & M & : & m & : & 2m & : & m & : & M & : & 2M & : & M & : & m & : & m \\ - & : & + & : & - & : & + & : & - & : & + & : & - & : & + & : & - & : & + \end{array}$$

$$-\frac{M-1}{d}+\frac{M-1}{c}-\frac{m-1}{b}+\frac{2m}{a}-\frac{m-1}{b}+\frac{M-1}{c}-\frac{2M}{d}+\frac{M-1}{c}-\frac{m-1}{b}+\frac{m-1}{a}$$

$$\frac{3m-1}{a}-\frac{3m-3}{b}+\frac{3M-3}{c}-\frac{3M-1}{d}$$

30. Pro 3, & 2

$$\begin{array}{cccccccccccc} d & : & c & : & b' & : & c' & : & b & : & a \\ M & : & M & : & 2 & : & 2 & : & m & : & m \\ - & : & + & : & + & : & - & : & - & : & + \end{array}$$

$$-\frac{M-1}{d}+\frac{M-1}{c}+\frac{2}{b}-\frac{2}{c}-\frac{m-1}{b}+\frac{m-1}{a}$$

$$\frac{m-1}{a}-\frac{m-3}{b}+\frac{M-3}{c}-\frac{M-1}{d}$$

31. Pro 4, & 2

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} d & : & c & : & b & : & c & : & d & : & c & : & b & : & a \\ M & : & M & : & 2 & : & M & : & 2M & : & M & : & m & : & m \\ - & : & + & : & + & : & + & : & - & : & + & : & - & : & + \end{array}$$

$$-\frac{M-1}{d}+\frac{M-1}{c}+\frac{2}{b}+\frac{M-1}{c}-\frac{2M}{d}+\frac{M-1}{c}-\frac{m-1}{b}+\frac{m-1}{a}$$

$$\frac{m-1}{a}-\frac{m-3}{b}+\frac{3M-3}{c}-\frac{3M-1}{d}$$

32. Pro 4, & 3

$$\begin{array}{cccccccccc} d & : & c & : & d & : & c & : & b & : & a \\ M & : & 2M & : & 2M & : & M & : & m & : & m \\ - & : & + & : & - & : & + & : & - & : & + \end{array}$$

$$-\frac{M-1}{d}+\frac{2M}{c}-\frac{2M}{d}+\frac{M-1}{c}-\frac{m-1}{b}+\frac{m-1}{a}$$

$$\frac{m-1}{a}-\frac{m-1}{b}+\frac{3M-1}{c}-\frac{3M-1}{d}$$

33. Hiſce formulis applicavi numeros reſpondentes illis binis lentibus, quarum prima erat convexo-convexa, & iſoſcelia ex vitro communi Bohemico, ſecundâ concavo-concava ex flint: radius ſphæricitatis illius erat 0.318, radii hujus 0.409, & 0.576, valor autem $m = 1.548$, $M = 1.582$, ex quibus per regulam generalem numeri 6 eruitur valor diſtantiæ, foci radiorum directe transeuntium ſine ulla reflexione proxime $= 1$, ut conſtabit etiam inferius numero hujus diſſertationis ultimo. Quamobrem habita ratione convexitatum, & cavitatum pro radiorum ſignis, erit

$a = 0.318$, $b = -0.318$, $c = -0.409$, $d = 0.576$, $m = 1.548$, $M = 1.582$.

34. Fa-

34. Facta ſubſtitutione eorum numerorum inveniuntur ſex valores x ii, quos hic apponimus (*e*) eodem ordine, quo ſuperiores formulæ poſitæ ſunt: $+0.049 : +0.052 : +0.171 : -2.591 : -0.073 : -0.082$, qui quidem non erunt penitus accurati, cum neglectus ſit error craſſitudinis, & figuræ ſphæricæ; adhuc tamen erunt ſatis proximi veris valoribus, cum uterque error exiguus eſſe debeat ob exiguam aperturam, & multo magis exiguam craſſitudinem, quæ præterea in regreſſu radiorum poſt primam reflexionem corrigit ex parte errores commiſſos in progreſſu, cum in iis binis caſibus contrario modo accipi debeat juxta ea, quæ dicta ſunt num. 12 diſſert. 4.

35. Porro conſiderando hosce numeros, facile apparet, illud lumen erraticum, quod circa diſtinctam imaginem ibi apparebat, huic cauſæ tribui non poſſe. Id quidem jam tum videbam, licet numeros haberem aliquantum erroneos; nam eorundem numerorum diſcrimen ab hic inventis accuratius, non eſt tantum, ut id conſectarium turbare poſſit. Sic autem ibi ea de re: *Ii valores exhibent focum nimis remotum a foco principali, & quidem omnes praeter quartum ita proximum lentibus objectivis, ut eorum lux jam per ſe debilis ad ocularem devenire debeat languidiſſima, & prorſus inſenſibilis.*

(*e*) In eadem illa epiſtola obvenerant erronei tertius numerus, quartus, & ſextus, ut etiam inter formulas, quas in ejus fine addideram, tertiæ, & quartæ formulæ poſtremi termini permutati fuerint, fortaſſe in deſcribendo, poſito altero loco alterius. Longe aliis diſtractus curis (ſcribebam enim Arimini ab ipſa Civitate evocatus ad inviſendum portum ſemiobſtructum, & ruentem, de quo per eos dies, & opuſculum conſcripſi paullo poſt editum, calculos, & ſcriptionem ipſam non potui accuratius revocare ad trutinam, & idcirco ibidem adjeci illud: hosce invenio numeros, niſi me ſupputatio fefellit. Eum nunc quidem diligentius, & iterato inſtitui. Adhuc tamen theoriæ magis fidendum eſt, quam executioni calculorum, quos quivis ad trutinam facile poterit revocare ope illius, ſi tutior eſſe velit.

Ejus quartæ combinationis lumen a foco virtuali admodum remoto advenit ad ocularem minus languidum ; ſed cum adhuc adveniat magis diſtractum , occupat ocularem totam , & debet exhibere totum campum illuminatum , non tantummodo affundi circa lunæ imaginem.

36. Focum quartæ combinationis dixi virtualem , quod quidem indicat ſignum negativum ei valori præfixum , & eodem pacto focus habetur virtualis in quinta , & ſexta , realis in primis tribus : adeoque is focus virtualis jacet citra lentem verſus objectum , a quo cum radii divergant , dilatantur ii quidem adhuc magis transgreſſi lentes ipſas objectivas , & delati ad locum foci directi in eo ſitu occupant ſpatium multo majus ipſa apertura objectivi , adeoque campum teleſcopii debent occupare totum. Dixi autem , eum focum eſſe nimis remotum , quia valor ejus diſtantiæ foci — 2 . 591 oſtendit , ipſum recedere citra lentes objectivas ad diſtantiam majorem duplo plus cum dimidio , quam ab iisdem diſtet focus radiorum directe transeuntium , in cujus loco apponitur diaphragma campum determinans. Porro ea major diſtantia efficit , ut id lumen adveniat minus languidum , quam lumen ad reliquas combinationes pertinens ; eſt enim ejus intenſitas in ipſo egreſſu e lentibus objectivis ad intenſitatem in ſitu ejus diaphragmatis , ut e contrario quadratum diſtantiæ illius foci ab eodem ad quadratum diſtantiæ ab objectivo , quæ ratio major eſt in radiis digreſſis ab ejusmodi foco propiore ipſi objectivo , quam in digreſſis e remotiore. Adhuc tamen id lumen pertinens ad quartam combinationem advenit magis diſtractum ad locum diaphragmatis ipſius , quam ſit in egreſſu ex objectivo , cum occupet ibi ſpatium majus in ratione duplicata illarum diſtantiarum a foco , quæ eſt ratio duplicata $3 . \frac{1}{2}$ ad 1 , ſive ratio ſimplex $12 . \frac{1}{4}$ ad 1 ; adeoque id lumen ibi & occupat ſpatium majus tota apertura diaphragmatis , quæ ſolet eſſe minor , quam apertura objectivi , & idcirco implet totum campum ,

pum, ac ultra illum excurrit, & eſt adhuc duodecuplo, eoque magis languidius ibi, quam ubi ex objectivo egreditur, quæ quidem evincunt, ab hac cauſa illud lumen erraticum ibi provenire non potuiſſe.

37. Ibidem autem adjeci etiam illud: *poſſent determinari & foci per quatuor reflexiones, ſed illas timere non poſſum ob tenuitatem.* Habentur utique radii, qui poſt quemcunque reflexionum numerum vel regrediantur ex objectivo compoſito (quin etiam e ſimplici) ſi ipſarum reflexionum numerus ſit impar, vel progrediantur, ſi ſit par. Quotiescumque enim ad ſuperficies refringentes advenit radius, præter illam ejus partem, quæ progreditur (& quidem ſi radius incidat in vitream ſuperficiem parum recedens a directione perpendiculari, eſt multo maxima), & exiguam partem, quæ irregulariter diſpergitur, pars aliqua retro reſilit reflexa. Hæ radiorum partes ſuos ſingulæ focos haberent, quos omnes exhiberet utique regula generalis propoſita num. 6, ſi rite ſingulis caſibus applicaretur.

38. Verum quo major habetur reflexionum numerus, eo languidius debet id lumen evadere: nam ea pars, quæ reflectitur e radio incidente ad perpendiculum in vitream ſuperficiem, eſt luminis totalis pars circiter $\frac{1}{40}$ juxta ea, quæ diximus in diſſert. 4. num. 74, quæ idcirco etiam ſi nihil diſperderetur, nihil per alias intermedias reflexiones deperiret, eſſet in ſecunda reflexione pars $\frac{1}{1600}$, in tertia $\frac{1}{64000}$, in quarta $\frac{1}{2560000}$, adeoque jam inſenſibilis. Quamobrem patet, ob ejus luminis tam ingentem tenuitatem nihil ab eo timeri poſſe, & adhuc multo minus a lumine progreſſo poſt reflexiones adhuc plures.

39. Hinc vero cum nec ab hiſce pluribus reflexionibus illud erraticum lumen repeti poſſit, nec a duplici reflexione, cujus ſex focos in hac diſſertatione conſideravimus; alteri cuipiam cauſæ

tribui debet, quam arbitror me deinde deprehendiſſe, deprehenſo diſcrimine inter diverſa ſtrata laminæ e flint, juxta ea, quæ propoſui in ea adnotatione ad diſſertationem 1, cujus mentionem hic fecimus num. 1. Adhuc tamen non erit inutilis expoſita theoria, quæ eorum focorum determinationem exhibet per formulas usque adeo ſimplices, ac usque adeo expeditas, & eleganti methodo definitas: earum pretium ii ſoli agnoſcent, qui focorum poſt tot refractiones, & reflexiones determinationem quærent methodis Dioptricæ communibus.

40. Poſſent utique admodum facile ope ejusdem regulæ hi etiam foci definiri, qui oriuntur e quatuor reflexionibus, qui quidem in duabus lentibus habentibus quatuor ſuperficies ſunt 31.

41. Eos determinat ordo reflexionum ipſarum: ſi enim ſuperficies deſignentur numeris 1, 2, 3, 4 eo ordine, quo occurrunt radiis directe progredientibus, reflexio ſecunda debet fieri in ſuperficie anteriore reſpectu primæ reflexionis, cum debeat excipere radios regredientes: tertia reflexio radiorum jam progredientium iterum poſt ſecundam debet fieri in ſuperficie poſteriore, quarta radiorum iterum regredientium in anteriore. Combinationes eorum quatuor numerorum ea lege acceptorum habentur 14, ubi prima reflexio fiat in ſuperficie 4: 11, ubi fiat in tertia: 6, ubi fiat in 2. Eas omnes apponemus hic eo ipſo ordine poſitas.

4,3,4,3 : 4,2,4,3 : 4,2,3,2 : 4,1,4,3 : 4,1,3,2 : 4,1,2,1.
4,3,4,2 : 4,2,4,2 : 4,2,3,1 : 4,1,4,2 : 4,1,3,1
4,3,4,1 : 4,2,4,1 : 4,1,4,1 :

3,2,4,3 : 3,2,3,2 : 3,1,4,3 : 3,1,3,2 : 3,1,2,1 | 2,1,4,3 : 2,1,3,2 : 2,1,2,1
3,2,4,2 : 3,2,3,1 : 3,1,4,2 : 3,1,3,1 | 2,1,4,2 : 2,1,3,1
3,2,4,1 : 3,1,4,1 : | 2,1,4,1 :

42. Et

42. Et quidem formulæ reſpondentes iis combinationibus, in quibus tam priores duæ reflexiones, quam poſteriores duæ fierent in ſuperficiebus proximis, ut in combinatione expreſſa per 3, 4, 4, 3, non continerent, niſi octo fractiones, quarum 4 pertinerent ad reflexiones, & quatuor ad refractiones; at combinatio remotiſſimis reflexionibus reſpondens 4, 1, 4, 1 haberet fractiones 16, quarum 12 pertinerent ad refractiones, & quatuor ad reflexiones: nam in illa quidem haberetur refractio in 1, 2, 3; tum reflexio in 4, 3, 4, 3, ac demum refractio in egreſſu in 4: in hac vero refractio in 1, 2, 3, reflexio in 4; refractio in 3, 2, reflexio in 1, refractio in 2, 3, reflexio in 4, refractio in 3, 2, reflexio in 1, refractio in 2, 3, 4.

43. ed omiſſis iis focis, qui proveniunt a quatuor reflexionibus, applicabimus formulas inventas pro binis ad caſum, in quo ſecunda ſuperficies ſit æqualis tertiæ, & cum ipſa congruat. In eo caſu habebuntur revera ſuperficies tantummodo tres, quæ non exhibebunt niſi tres combinationes: nimirum binæ reflexiones ibi habere poterunt in ſuperficiebus 2 & 1, 3 & 1, 3 & 2. Prima harum eruetur ex illarum prima, quæ reſpondet reflexioni factæ in prioribus binis ſuperficiebus, ſecunda harum ex illarum quarta, quæ reſpondet reflexioni factæ in binis extremis 4 & 1: demum harum poſtrema ex poſtrema illarum, quæ reſpondet reflexioni ibi factæ in binis poſtremis. Satis eſt in illis formulis habere binos radios ſuperficierum mediarum b, & c pro eadem; ac proinde ſi in hoc caſu tres ſphæricitatum radii dicantur a, b, c; ponendus erit in illis formulis valor b pro c, & c pro d, ac binæ fractiones intermediæ, quæ communem jam habebunt denominatorem, in unam ſummam colligendæ erunt.

44. Pri-

44. Prima formula pro primo caſu ex prima poſita num. 27 erit $\frac{3m-1}{a} - \frac{3m-1}{b} + \frac{M-1}{b} - \frac{M-1}{c} = \frac{3m-1}{a} + \frac{M-3m}{b} - \frac{M-1}{c}$.

45. Secunda formula pro ſecundo caſu ex tertia poſita num. 29 erit $\frac{3m-1}{a} - \frac{3m-1}{b} + \frac{3M-3}{b} - \frac{3M-1}{c} = \frac{3m-1}{a} + \frac{3M-3m}{b} - \frac{3M-1}{c}$

46. Tertia formula pro tertio caſu e ſexta poſita num. 32 erit $\frac{m-1}{a} - \frac{m-1}{b} + \frac{3M-1}{b} - \frac{3M-1}{c} = \frac{m-1}{a} + \frac{3M-m}{b} - \frac{3M-1}{c}$.

47. Porro hæ ipſæ formulæ immediate erui poſſunt ex regula generali numeri 6 pro quotcumque ſuperficiebus, dummodo notetur in tranſitu per ſuperficiem intermediam e prima ſubſtantia in ſecundam pro ſuo m ponendum eſſe $\frac{M}{m}$, & in tranſitu per eandem e ſecunda in primam $\frac{m}{M}$: ubi enim e ſubſtantia in aliam ſubſtantiam fit immediatus tranſitus, ratio ſinus incidentiæ ad ſinum anguli refracti componitur e rationibus, quæ haberentur in tranſitu e prima in quamvis tertiam, ut in aerem, & in tranſitu ex hac ipſa tertia in illam ſecundam. Eſt autem e prima ſubſtantia in aerem ratio $1 : m$, ex aere in ſecundam $M : 1$, adeoque ex prima in ſecundam $M : m$, cujus valor eſt fractio $\frac{M}{m}$, & eodem pacto oſtenditur in tranſitu e ſecunda in primam haberi e contrario rationem compoſitam e rationibus $1 : M$, & $m : 1$, ſive $m : M$, cujus valor $\frac{m}{M}$.

48. In primo caſu habetur ingreſſus per primam ſuperficiem, reflexio in ſecunda, reflexio in prima, progreſſus per ſecundam, egreſſus e tertia: hinc ut num. 7 formabuntur ſequentes

li-

lineæ, ubi ſecundus terminus quartæ lineæ habetur e numeratore $\frac{M}{m} - 1 = \frac{M-m}{m}$, & denominatore $\frac{a}{m}$, cæteri formantur ut num. 7 expoſito numeris 9, 10, 11.

$$\begin{array}{ccccccccc} c & : & b & : & a & : & b & : & a \\ \frac{1}{M} & : & \frac{M}{m} & : & -1 & : & -1 & : & m \\ \frac{1}{M} & : & \frac{1}{m} & : & -\frac{1}{m} & : & \frac{1}{m} & : & 1 \end{array}$$

$$-\frac{M-1}{c} + \frac{M-m}{b} + \frac{2m}{a} - \frac{2m}{b} + \frac{m-1}{a}$$

$$\frac{3m-1}{a} + \frac{M-3m}{b} - \frac{M-1}{c}$$

49. In ſecundo caſu habetur ingreſſus per primam, progreſſus per ſecundam, reflexio in tertia, regreſſus per ſecundam, reflexio in prima, iterum progreſſus per ſecundam, egreſſus e tertia. Hinc quinque lineæ

$$\begin{array}{ccccccccccccc} c & : & b & : & a & : & b & : & c & : & b & : & a \\ \frac{1}{M} & : & \frac{M}{m} & : & -1 & : & \frac{m}{M} & : & -1 & : & \frac{M}{m} & : & m \\ \frac{1}{M} & : & \frac{1}{m} & : & -\frac{1}{m} & : & -\frac{1}{M} & : & \frac{1}{M} & : & \frac{1}{m} & : & 1 \end{array}$$

$$-\frac{M-1}{c} + \frac{M-m}{b} + \frac{2m}{a} + \frac{M-m}{b} - \frac{2M}{c} + \frac{M-m}{b} + \frac{m-1}{a}$$

$$\frac{3m-1}{a} + \frac{3M-3m}{b} - \frac{3M-1}{c}$$

50. In tertio caſu habetur ingreſſus per primam, progreſſus per ſecundam, reflexio in tertia, reflexio in ſecunda, egreſſus e tertia. Hinc quinque lineæ

$$c : b : c : b : a$$

$$\frac{1}{M} : -1 : -1 : \frac{M}{m} : m$$

$$\frac{1}{M} : -\frac{1}{M} : \frac{1}{M} : \frac{1}{m} : 1$$

$$-\frac{M-1}{c} + \frac{2M}{b} - \frac{2M}{c} + \frac{M-m}{b} + \frac{m-1}{a}$$

$$\frac{m-1}{a} + \frac{3M-m}{b} - \frac{3M-1}{c}$$

51. Reſpondent utique ſibi ipſis formulæ diverſis hiſce methodis erutæ conſenſu neceſſario, ubicumque in eandem veritatem ex certis principiis inquiritur.

52. Ex illa ipſa regula generali facile deduci poſſunt formulæ reſpondentes omnibus aliis caſibus focorum pertinentium ad unicam, vel duas lentes, easque vel cum ſuperficie communi, congruente ſecunda primæ lentis cum prima ſecundæ, vel ſine ejusmodi congruentia. Omnes caſus hic enumerabimus incipiendo a ſimplicioribus, adjectis formulis ad eos pertinentibus, quarum aliquas hic ſupra jam propoſuimus, reliquæ vero eadem methodo ſunt erutæ. Radii ſphæricitatum erunt, ut hucusque a, b, c, d, & valores m, M reſpondebunt ingreſſui in ſubſtantiam primam, & ſecundam. In caſu unicæ lentis habebuntur ſoli duo radii a, b, in caſu duarum cum ſuperficie communi ſoli tres a, b, c, in caſu duarum lentium ſine communi omnes quatuor a, b, c, d.

53. Formulæ, quæ conſequuntur, pertinebunt ad radios, qui adveniant paralleli, ubi $\frac{1}{p}$ evaneſcit. Ubicumque autem in ſequentibus nominabuntur ſolæ reflexiones, præter ſolum caſum primum reflexionis factæ in prima ſuperficie, ſemper intelligi debent plures itidem refractiones habendæ in ingreſſu & egreſſu, ac in tranſitu per omnes ſuperficies intermedias, quæ radio occurrant.

Pro

Pro unica lente

Ex reflexione primæ ſuperficiei..... $\frac{2}{a}$

E ſolis duabus binarum ſuperficierum refractionibus.. $\frac{m-1}{a} - \frac{m-1}{b}$

Ex reflexione ſecundæ ſuperficiei..... $-\frac{2m-2}{a} + \frac{2m}{b}$

Ex binis reflexionibus..... $\frac{3m-1}{a} - \frac{3m-1}{b}$

Pro binis lentibus cum ſuperficie media communi.

E ſolis refractionibus omnium trium ſuperficierum $\frac{m-1}{a} + \frac{M-m}{b} - \frac{M-1}{c}$

Ex reflexione (*f*) in unica ſuperficie tertia. $-\frac{2m-2}{a} - \frac{2M-2m}{b} + \frac{2M}{c}$

Ex binis reflexionibus in ſuperficiebus

2, & 1 ... $\frac{3m-1}{a} + \frac{M-3m}{b} - \frac{M-1}{c}$

3, & 1 ... $\frac{3m-1}{a} + \frac{3M-3m}{b} - \frac{3M-1}{c}$

3, & 2 ... $\frac{m-1}{a} + \frac{3M-m}{b} - \frac{3M-1}{c}$

Pro binis lentibus ſine ſuperficie communi

Ex refractionibus ſolis omnium ſuperficierum $\frac{m-1}{a} - \frac{m-1}{b} + \frac{M-1}{c} - \frac{M-1}{d}$

Ex unica reflexione in ſuperficie

3 ..... $\frac{2m-2}{a} + \frac{2m-2}{b} + \frac{2}{c}$

4 ... $-\frac{2m-2}{a} + \frac{2m-2}{b} - \frac{2M-2}{c} + \frac{2M}{d}$

(*f*) Ubi habeantur duæ lentes, ſive habeant ſuperficiem communem, ſive ſecus, focus ex reflexione unica in ſuperficie prima, vel ſecunda, determinatur, ut in caſu lentis unicæ, cum ſecunda lens nihil turbet eam reflexionem. Quamobrem hic ex tribus unius reflexionis caſibus, pro poſtremo ſolo formulam exhibemus, & inferius ubi agetur de binis lentibus, cum 4 ſuperficiebus, exhibebimus tantum pro 3, & 4.

Ex binis reflexionibus in ſuperficiebus

$$\left\{\begin{array}{ll}
2,1 \ldots & \frac{3m-1}{a} - \frac{3m-1}{b} + \frac{M-1}{c} - \frac{M-1}{d} \\
3,1 \ldots & \frac{3m-1}{a} - \frac{3m-3}{b} + \frac{M-3}{c} - \frac{M-1}{d} \\
4,1 \ldots & \frac{3m-1}{a} - \frac{3m-3}{b} + \frac{3M-3}{c} - \frac{3M-1}{d} \\
3,2 \ldots & \frac{m-1}{a} - \frac{m-3}{b} + \frac{M-3}{c} - \frac{M-1}{d} \\
4,2 \ldots & \frac{m-1}{a} - \frac{m-3}{b} + \frac{3M-3}{c} - \frac{3M-1}{d} \\
4,3 \ldots & \frac{m-1}{a} - \frac{m-1}{b} + \frac{3M-1}{c} - \frac{3M-1}{d}
\end{array}\right.$$

54. Si radii convergant ad diſtantiam p, ſatis erit omnibus formulis pertinentibus ad unicam reflexionem addere $-\frac{1}{p}$ reliquis omnibus $+\frac{1}{p}$ juxta adnotationem ad num. 19.

55. Si primæ formulæ pro binis lentibus, quæ exhibet focum directum, ſubſtituantur numeri adhibiti num. 33, obtinebitur illa ejus foci diſtantia, qua ibi uſi ſumus. Formula eſt $\frac{m-1}{a} - \frac{m-1}{b} + \frac{M-1}{c} - \frac{M-1}{d} = \frac{1}{x}$, exiſtente x diſtantia quæſita. Porro erat $a = 0.318$, $b = -0.318$, $c = -0.409$, $d = 0.576$, $m = 1.548$, $M = 1.582$. Hiſce numeris ſubſtitutis habetur $\frac{1}{x} = 1.72 + 1.72 - 1.42 - 1.01 = 3.44 - 2.43 = 1.01$, ſive proxime $= 1$, adeoque & $x = 1$.

AD-

DISSERTATIO V.

ADDITAMENTUM.

De ſecundis imaginibus viſis trans lentes, & apparenti ſatellite Veneris.

FAcile admodum acquirere poſſumus ideam quandam ſatellitis orti ex duplici reflexione, & poſiti ad latus objectivi viſi per radios directos, qua de re mentionem fecimus num. 4. Ea obtineri poteſt transpiciendo trans unicam lentem vitream objectum ſatis lucidum, & habens diametrum apparentem exiguam, poſitum in campo obſcuro, vel in immenſum minus lucido, uti eſt candelæ flammula, vel luna per noctem, aut ſol interdiu, atque id ita, ut apparens is ſatelles formam habeat objecto directe viſo ſimillimam, & ejus diametro apparenti utcumque minorem. Satis eſt ita collocare lentem, ut objectum cadat extra ipſius axem. In lentibus convexis hæc imago ſecundaria jam apparebit ad eandem partem cum primaria reſpectu centri ipſius lentis, jam ad oppoſitam, eritque jam directa, jam inverſa, pro diverſa poſitione mutuæ lentis oculi, & objecti: in lente concava apparebit ſemper inter imaginem primariam & centrum, eritque ſemper directa, & ſemper minor, quam primaria: ſi conjungantur binæ lentes, in quibus habentur ſex combinationes duplicis reflexionis, apparent in quibusdam poſitionibus ſex ejusmodi ſecundariæ imagines.

Diximus apparere ſex in quibusdam poſitionibus, nam in quibusdam aliis eæ evaneſcunt, vel quia coeunt cum primaria, quod utique fit, ubi objectum ſitum ſit in axe lentis, vel quia exeunt extra aperturam lentis, quod accidit in lentibus convexis objecto ſito nimis procul ab eodem axe, vel demum, quia abeunt in lucem quandam confuſam, aut etiam

penitus evaneſcunt, quod accidit, ubi focus radiorum bis reflexorum, a quibus pingi deberet ejusmodi imago in fundo oculi, abeſt nimis parum ab oculo.

Omnis harum ſecundariarum imaginum theoria, ut & primariarum, nimirum earum poſitio, magnitudo, diſtinctio, claritas pendet a theoria focorum, qui dantur per formulas numeri 53 hujus diſſertationis, datis ſphæricitatibus lentium, & diſtantia objecti reſpectu ipſarum, ac poſitione oculi reſpectu lentium ipſarum. Sed ad definiendam poſitionem, & magnitudinem imaginum tam primariarum, quam ſecundariarum, oportet determinare loca focorum etiam pro radiis diſcedentibus a punctis objecti ſitis extra axem, & ad habendam diſtinctionem imaginis, oportet, radii exeuntes e quovis unico objecti puncto adveniant ad oculum nullo vitio laborantem parum abludentes a parallelis, qui quidem pro myope debent advenire divergentes nonnihil, pro presbyta convergentes, ut imago intuenti maxime diſtincta appareat. Seu focum virtualem habeat lens, radiis advenientibus ad oculum tanquam ſi diſcederent ab ipſo foco in quo, niſi ante intercipiantur ab oculo, realem imaginem efformant; debet locus ejus imaginis diſtare ſatis procul a cornea pupillæ prætexta. Si imago ab una lente, vel pluribus pingeretur in ipſa pupilla; objecti viſio haberi non poſſet, ſed confuſa quædam & inordinata lux: quia tunc non haberetur ille vel accuratus, vel proximus paralleliſmus radiorum pertinentium ad ſingula objecti puncta neceſſarius in appulſu ad oculum ipſum ad habendam diſtinctionem imaginis.

Id quidem neceſſarium eſt ad habendam eam diſtinctionem, in imagine objecti viſivel trans unicam, vel trans plures lentes, ſive per radios ſolum refractos, ſive per bis etiam reflexos. In ipſo teleſcopio,

pio, cujuscumque generis ipſum ſit, illud omnino ad habendam diſtinctionem requiritur, ut radii digreſſi ex unico objecti puncto egrediantur ex ultima oculari ita accurate, vel proxime paralleli, ut ad oculum ante ipſam applicatum cum ejusmodi diſpoſitione deveniant. Si coirent in ipſa cornea pupillæ prætexta, & ibi imaginem efformarent; imago in fundo oculi nequaquam haberetur, ſed quædam confuſa lux, radiis, qui ad omnia objecti puncta pertinent, ſimul conjunctis, & confuſis. In fig. 26 diſſertationis primæ uniuntur quidem verſus L, ubi applicatur pupilla, funiculi diverſi radiorum e diverſis objecti punctis prodeuntium; ſed radii digreſſi ab eodem puncto uti ſunt CG, CG', vel AI, AI', adveniunt paralleli inter ſe, ut idcirco in eo loco, in quo applicatur pupilla, fiat mixtio quædam radiorum omnium provenientium ab omnibus objecti punctis, quæ confuſum lumen efformat, non imaginem: imago pingitur in oculi fundo a radiis progreſſis, quorum funiculi ſinguli ab humoribus oculi, potiſſimum a cryſtallino uniuntur ibidem. Lumen quod collectum cernitur, non quidem in pupilla, quæ eſt merum foramen, ſed in cornea prætexta pupillæ hominis aſpicientis ſolem, vel lunam trans teleſcopium, non eſt ejus imago, ſed quædam confuſa lux, quæ continet permixtos ſimul radios omnes digreſſos e punctis omnibus lunaris, vel ſolaris diſci.

Ejus luminis pars inde reflexa ad lentem ocularem, poteſt ab ipſa iterum reflecti ad locum pupillæ, & abire in fundum oculi in locum diverſum ab eo, ad quem abeunt radii directi efformantes imaginem primariam: poſſunt ibi & ii efformare imaginem ſecundariam, & exhibere quendam velut ſatellitem; ſed notanda ſunt tria: primo quidem id etiam haberi per binas reflexiones alteram in cornea, alteram in oculari, ut illa ſecundaria imago trans lentem viſa, de qua ſuperius egimus, habetur per binas reflexiones

in

in binis ſuperficiebus ejusdem lentis: deinde ſecundam ejusmodi reflexionem tam fieri poſſe in prima, quam in ſecunda ſuperficie ocularis vitri, & pro utraque requiri ſuam particularem curvaturam ad rem obtinendam: poſtremo non eſſe ſatis, ut radii ab oculari remiſſi adveniant ad pupillam, ſed oportere, ut redeant ad ſenſum paralleli, ad quod requiritur peculiaris quædam curvatura ejus lentis ocularis determinanda per curvaturam corneæ, & diſtantiam ipſius lentis a cornea. Sine ejusmodi conditione habebitur intra oculum lux quædam ſecundaria, ſed non habebitur imago diſtincta, qualis ex. gr. requiritur ad exhibendam phaſim Veneris.

Si vitrum objectivum pingeret ſecundariam imaginem in eadem diſtantia, in qua pingit primariam, hæc, ut illa, videri poſſet trans ocularem: at id haberi non poteſt: nam num. 53 hujus diſſertationis formula radiorum bis refractorum ſine reflexione eſt $\frac{m-1}{a} - \frac{m-1}{b}$, & bis etiam reflexorum $\frac{3m-1}{a} - \frac{3m-1}{b}$. Illa ad hanc eſt ut $m - 1$ ad $3m - 1$, ſive poſito $\frac{3}{2}$ pro m, fit ratio $\frac{1}{2}$ ad $\frac{7}{2}$, ſive 1 ad 7: & ea pro quavis lente erit e contrario ratio diſtantiæ a lente ipſa foci radiorum bis reflexorum ad diſtantiam foci tantummodo refractorum. Quare imago ſecundaria objectivi vitri erit ſeptuplo propior ipſi, quam primaria, adeoque poſita procul a foco lentis ocularis, quæ idcirco ejus radios ad oculum parallelos non transmitteret.

Imago primaria vitri objectivi per ocularem viſa poſſet reddi dupla ita, ut haberetur imago ejus primariæ primaria, & imago ejus ſecundaria efformata per duplicem reflexionem ipſius ocularis. Verum ſi habeatur ocularis unica, &, ut ſolet eſſe, ſatis acuta; non poterit apparere diſtincta oculo ipſa ejus imago ſecundaria.

Haud

Haud difficulter demonſtratur, hanc ejus ſecundariam imaginem debere pingi inter ipſam & oculum in diſtantia, quæ ſit pars ſexta diſtantiæ lentis ipſius ab oculo, quæ diſtantia eſt ita parva, ut eam diſtinctam videre non poſſit, niſi qui enormiſſime ſit myops.

Ubi plures ſunt lentes, disquiſitio evadit paullo complicatior: haberi autem ſimul debet etiam ratio magnitudinis hujus imaginis ſecundariæ, poſitionis & claritatis, quæ complicatiorem reddunt quæſtionem. Fuſiorem ea omnia diſſertationem requirunt, quam habemus in promptu, omnia determinantem geometrice, ſed quoniam in longum res abit, eandem alias alibi proferemus.

MONITUM.

IN adnotatione ad num. 98 Diſſertationis primæ innui, remedium unicum colorum a lentibus ocularibus inductorum eſſe compoſitionem ipſarum ocularium, id remedium eſt incommodum admodum, ubi unica adhibetur ocularis, quia ea ad habendum ingens augmentum debet habere focum ſibi proximum, quod in lente compoſita exigit nimis immodicam curvaturam ocularis convexæ, cujus focum concava triplo longius amandat. At ſi adhibeantur tres, inveni poſtea illud, quod hic proponam, quod quidem elegantem habet etiam ſyntheticam demonſtrationem. Si prima, ac ſecunda ocularis, incipiendo ab objectivo, ita ſint collocatæ, ut focus radiorum parallelorum hujus congruat cum foco illius radiorum diſcedentium a diſtantia objectivi, ut in communibus teleſcopiis fieri ſolet, ſint autem ſimplices, ex eadem materia, & utcumque diverſæ diſtantiæ focalis; radii delati a puncto objecti ſito extra axem, & tranſeuntis per medium objectivum, æquivalenter irrefracti, filum rubeum, & violaceum, ſeparata a prima lente juxta illam

adnotationem, conjungentur quam proxime a ſecunda in ſuo foco radiorum parallelorum ultra ipſam ſito: quamobrem ſi tertia lens oculo proxima ſit compoſita more Dollondiano, & ejus focus citerior radiorum parallelorum congruat cum ulteriore ſecundæ, quod ad diſtinctionem requiritur, prodibunt ea fila parallela inter ſe, & ita ad oculum delata unientur in ejus fundo, correcta illa ſeparatione eorum colorum, quam oculares inducunt. Porro ſi ſecunda, & tertia lens habeant diſtantiam focalem quantumvis majorem, quam prima, nec augmentum turbatur, nec diſtinctio. Licebit igitur mederi ei malo, factis lente ſecunda, & tertia diſtantiæ focalis triplo, & quadruplo ſi libet majoris, quam ſit diſtantia primæ, ſed æqualium inter ſe, & facta compoſita ex diverſis diſtantiis more Dollondiano ſola tertia, habebitur remedium ſine nimia curvatura partis convexæ.

ERRATA.

ERRATA.

PAG.	LIN.	ERRATA	CORRIGE
15	6	habitur	habebitur
19	1	$-\frac{k}{p}$	$-\frac{k^2}{p}$
27	17, 19	dr	$-dr$
28	21	dr	$-dr$
35	13	$=\frac{1}{p}$	$+\frac{1}{p}$
40	17	$(4+\frac{4}{M}$	$(4+\frac{4}{M})$
41	14	$\frac{E-H}{C}$	$\frac{E-H}{c}$
	20	G	g
42	13	rg'	rg
	14	Bl	B &c.
46	23	remo'e	remoto
47	21	cum	tum
49	18	$\frac{dm}{dM}$	$-\frac{dm}{dM}$
54	26	$=\frac{1}{a}$	$=\frac{1}{2}a$
56	25	diſtractio	diffractio
57	10	A, & B	A in B
89	5	$dM.dm$	$dm.dM$
99	11	uſi	ſio
	12	ococatus	evocatus
104	29	. Cum	cum
105	23	illat	illud
106	13	plana	plano
131	13	collientis	colligentis
143	2	$b-x\,dx$	$b-x\,dx$
149	33	gradus	minuti
153	20	KE	KF
154	3	$\frac{dm'}{m}=dm'\times MH$	$\frac{dm'}{m}\times MH$
156	18	ad XV	ad XY
160	23	quem	quem pertinent
180	18	$\frac{m'-1}{f''}$	$\frac{m'-1}{f}$
188	3	heterogeneos	homogeneos
	19	CO'C	C'OC
189	20	punctum H	punctum K
190	21	in e	in e^2
193	3	CO'C	C'OC
	25	$IN^2:LO^2.=$	$IN^2.LO^2=$
	28	ea	in ea
194	6	$2a=$	$2a-$
195	22	idcirco RM	idcirco RM''
196	7	$=C^2$	$=c^2$
197	5	NT''	N''T''
	24	ad H	ad H'
198	6	puncto K	puncto R
199	11	Rm etc.	Rm
200	11	D'CI	D'C'I
	17	XAX	X'AX
205	5	evertit	everrit
209	7	AN	6AN
211	21	ut ipſi	ipſi
216	15	$(2a-\frac{4ar^2}{c}$	$(2a-\frac{4ar^2}{c})$
222	3	AP', AP'	AP', AP
226	9	IM'' etc.	IM''; ex.
	30	RM', RM''	RM, RM''
227	4	IM	RM
	21	m,m,m''	m,m',m''
236	10	$\frac{1}{ru}$	$\frac{1}{nu}$
238	23	$\frac{m-1}{m}$	$\frac{m-1}{m^1}$
239	2	$x-x'$	$x'-x'$
240	16	$\frac{m''-1}{m}$	$\frac{m''-1}{m''}$
243	10	ex	ex ea
245	5	$\frac{2}{3}$ pro	$\frac{1}{2}$ pro
248	19	ſubſtantiæ	diſtantiæ
262	8	omnibus in	omnibus m
268	23	$+p$	$\pm p$
270	23	punctionum	fractionum
277	24	$\frac{8}{8}\frac{1}{0}\frac{0}{0}$	$\frac{8}{8}\frac{1}{0}\frac{0}{0}$
279	18	habere	haberi
282	1	$c:b$	$c:B'$
285	5	objectivi	objecti
	16	mutuæ	mutua

In præfatione PAG. 2 LIN. 2 *pro* expolitur *pone* exponitur

PAG. 45 LIN. 21 *poſt* inter ſe *adde*, ac ab alio puncto ſito extra ipſum axem D'C, E'A itidem paralleli inter ſe.

PAG. 54 LIN. 25 *poſt* $\frac{MX^2}{SA}$ *adde* $-AX$, ſive per idem lemma quamproxime $\frac{MX^2}{SA}$.

PAG. 136 LIN. 6 *poſt* inclinationis *adde*, radii, & cujuscumque inclinationis

PAG. 145 LIN. 9 *poſt* refractio *adde*, videlicet refractio

PAG. 179 & 180 *pro* ς *pone ubique* ϱ

PAG. 266 LIN. 26 *dele* alternando *cum reliquis conſequentibus uſque ad* alternentur *lineæ ſequentis*

PAG. 271 LIN. 10 *poſt* habebit *adde* $2m$, adhibito illo

In tabula diſſertationis 2 Fig. 6 comple quadrantem BHE usque ad N, & produc PG usque ad FH

Ibi Fig. 7 *adde* C in centro quadrantis

In tabula diſſert. 3 Fig. 1 inter G, et B *fac* L'' cum binis accentibus.

Ibi in Fig. 8 *pone* I*i* in occurſu rectarum DH, EH cum A*a*.

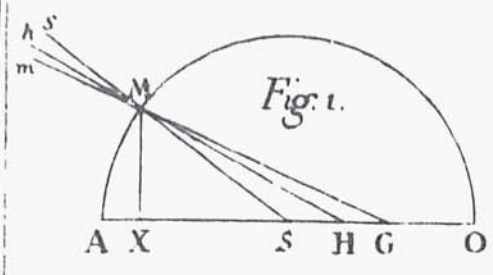


Fig: 1.

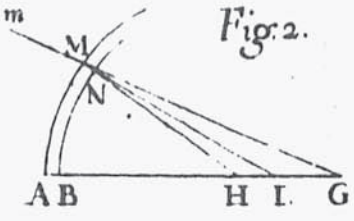


Fig: 2.

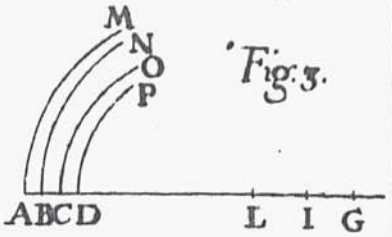


Fig: 3.

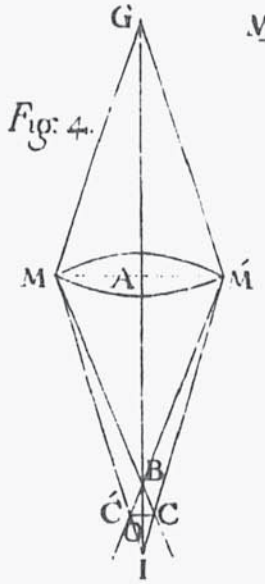


Fig: 4.

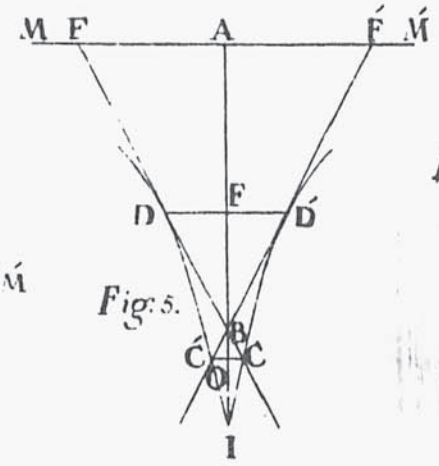


Fig: 5.

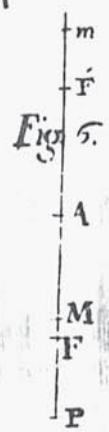


Fig: 6.

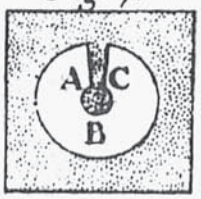


Fig: 7.

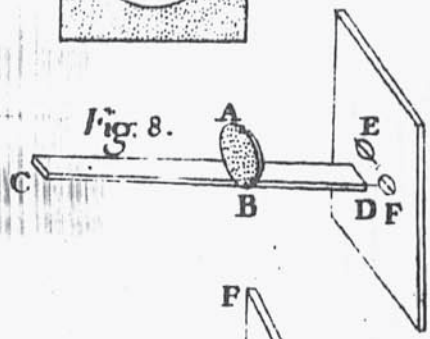


Fig: 8.

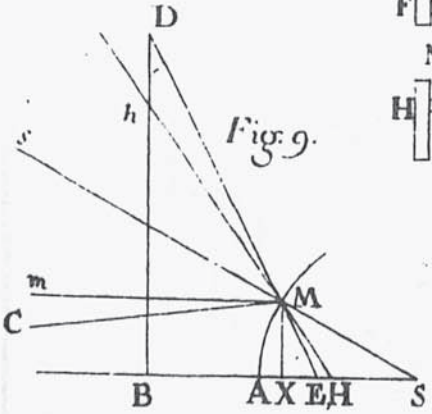


Fig: 9.

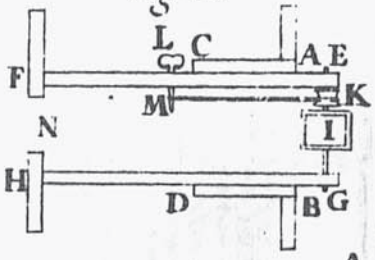


Fig: 10.

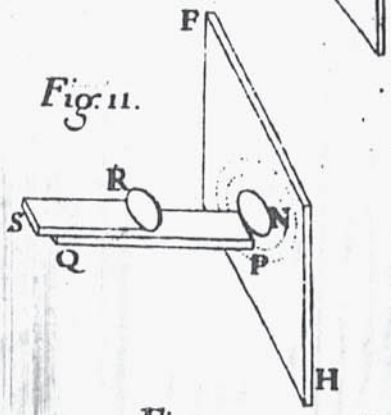


Fig: 11.

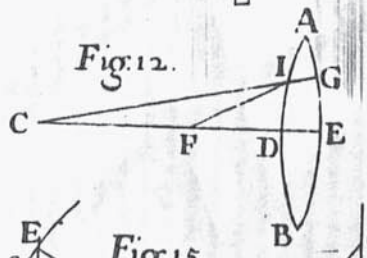


Fig: 12.

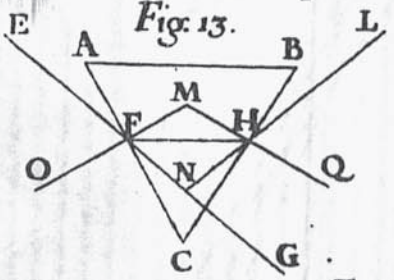


Fig: 13.

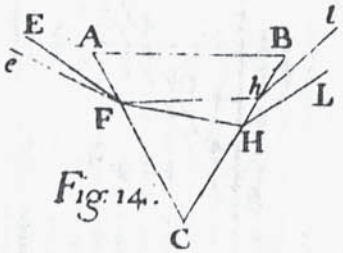


Fig: 14.

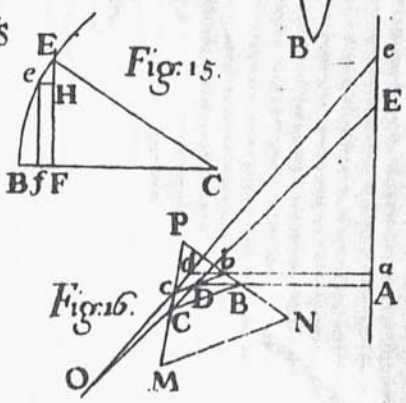


Fig: 15. Fig: 16.

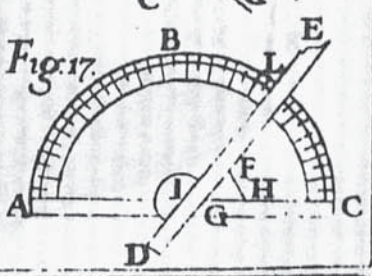


Fig: 17.

Tab. II pro Dissert. I.

Fig. 18.

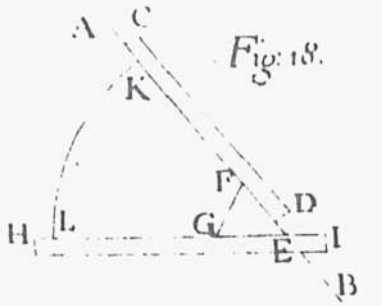


Fig. 19.

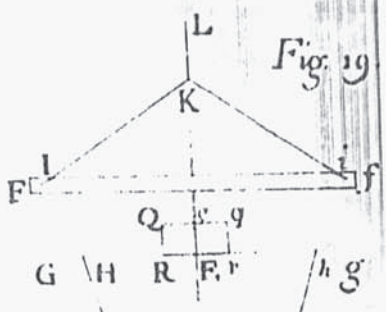


Fig. 20.

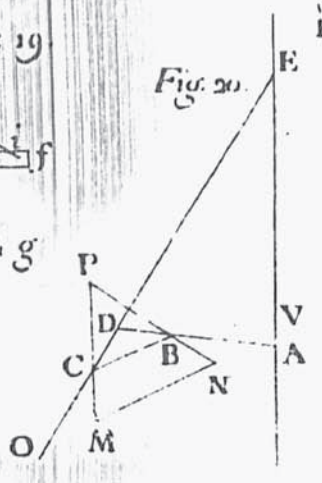
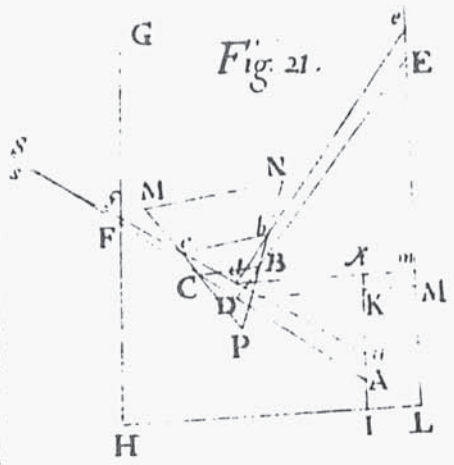


Fig. 26.

Fig. 21.



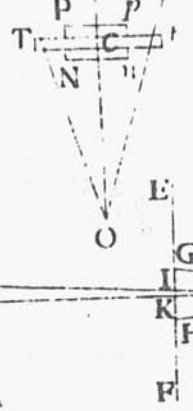
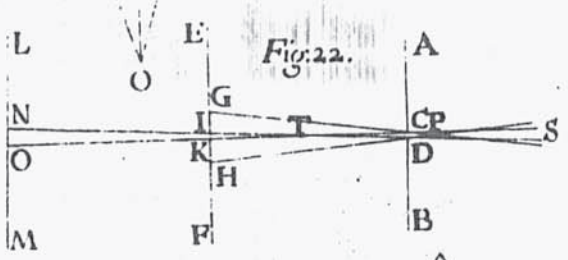


Fig. 22.



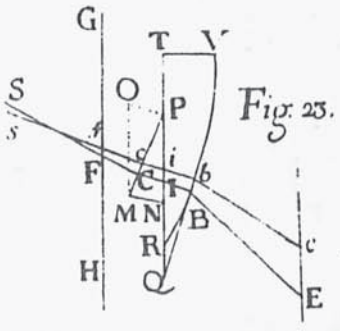


Fig. 23.

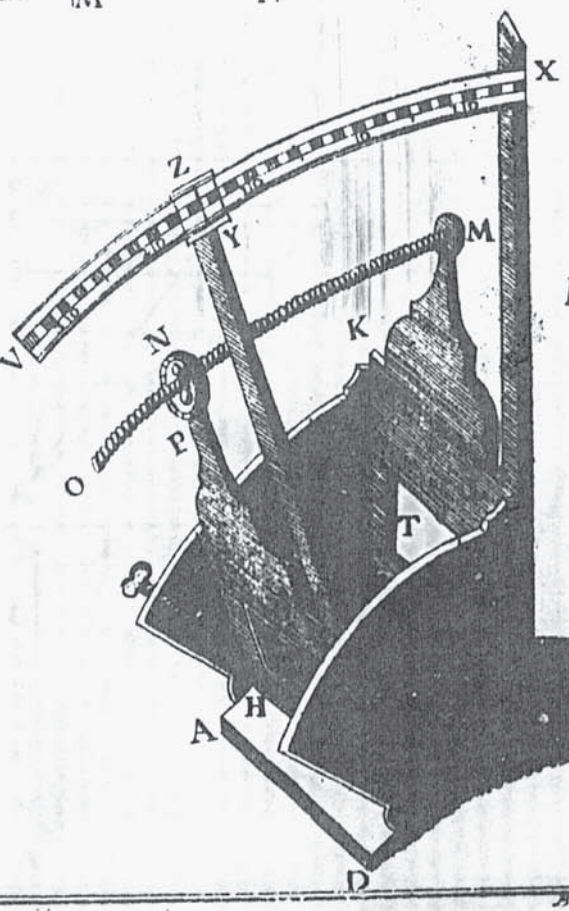


Fig. 25.

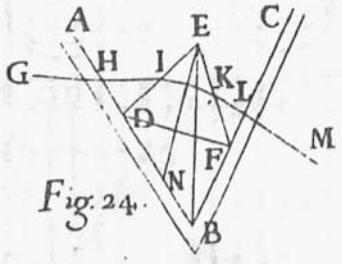


Fig. 24.

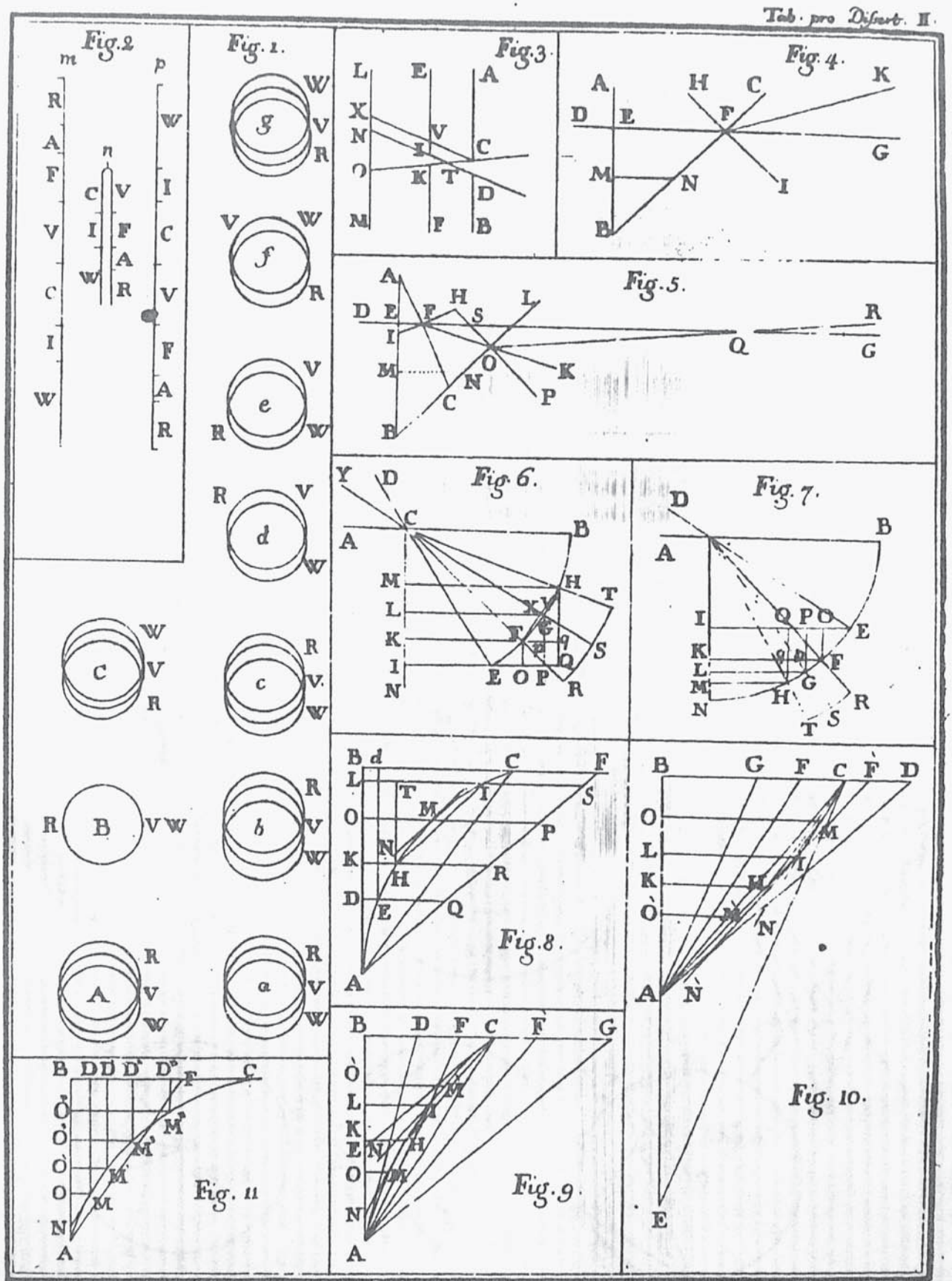
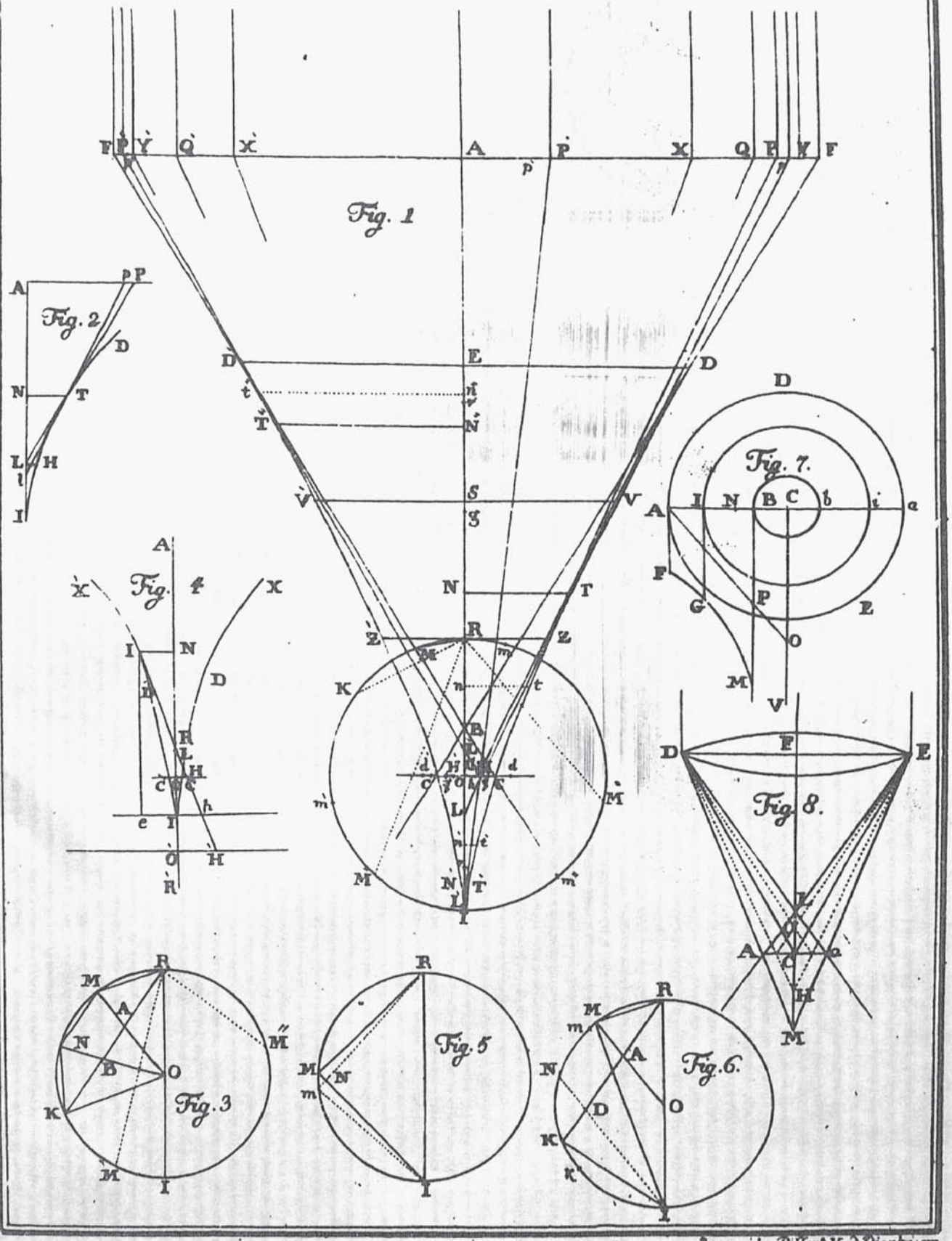


Fig. 2
Fig. 1.
Fig. 3
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11

Tab. pro. Dissert III



Boscovich, Dissert. V. ad Dioptricam.

1.**86**

Memorie sulli cannocchiali diottrici del P. Ruggiero Giuseppe Boscovich della Compagnia di Gesù, Milano, 1771

MEMORIE
SULLI
CANNOCCHIALI DIOTTRICI
DEL PADRE
RUGGIERO GIUSEPPE BOSCOVICH
DELLA COMPAGNIA DI GESÙ.

LABORATORIO DI FISICA IN ARCETRI
371
MUSEO DI FISICA E STORIA NAT. DI FIRENZE
R. ISTITUTO DI STUDI SUPERIORI MUSEO DEGLI STRUMENTI ANTICHI DI ASTRONOMIA E DI FISICA VIA RICASOLI 3

IN MILANO)o(MDCCLXXI.
Nella Stamperia di Giuſeppe Marelli.
Con licenza de' Superiori.

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA DELL'UNIVERSITA' - FIRENZE
Inv. 11585
Antico
640

AL SIGNOR

GIO. FRANCESCO FROMOND

CREMONESE

a Londra.

ECco il trattato de' Cannocchiali breve, affatto elementare, ma compito inſieme, e ſucoſo, che Voi cotanto deſideravate. Se poco dopo aver concepito il vivo deſiderio di trovare una mano maeſtra, che accoſtumata a toccar fondo in fatto di Ottica non iſdegnaſſe di metterſi a portata di tutto il mondo, vi è venuto fatto di appagarlo pienamente, ſappiatene grado al celebre P. Boſcovich, il quale ha dettato, o a dire più dirittamente, ha

laſciato ſcorrere dalla penna queſto bel compendio, che oltre al pregio non comune di contenere in poche pagine una ſufficiente teoria delle coſe già conoſciute, ne ha un altro aſſai ſingolare di comprendere alcune ſcoperte del Chiariſs. Autore, parte non mai pubblicate, e parte da Lui accennate di fuga altrove, e propoſte ſenza dimoſtrazione. Io veramente altro non ci ho di mio, che l'amichevole ſorpreſa d' inviarvelo ſtampato; ma ſe vorrete ad ogni modo che io abbia pur alcun merito, avrò quello di coſpirare con voi a pro di un numero grandiſſimo di perſone, le quali doleanſi altamente, che non pochi letterati oltremontani ſcrivano moltiſſimo ſu di queſto ſoggetto, ſenza ricordarſi che la più parte degli uomini, o per corto intendimento, o per altre cagioni, non può ſentir addentro ne' fini artificj dell' Analiſi, e della Geometria, e inſieme non può pur a meno di non venir preſa da eſtrema vagbezza allorchè ode ragionare de' Cannocchiali Dollondiani, o ne fa uſo, di ſaper chia-

ra-

ramente in che propio conſiſtano la novità del ritrovamento, il merito dell' inſigne artefice, da cui hanno il nome, e coſa manchi tuttavia alla loro perfezione. Felice Voi! che potrete guſtare con maggior dolcezza che forſe neſſun altro Italiano la pratica delle dottrine ſparſe in queſto opuſcolo, toccando in ſorte a ben pochi di eſſer atti, ſiccome lo ſiete Voi, ad eſeguire con iſcrupoloſa eſattezza, e ſempre nuova eleganza ogni maniera di ſtromenti ottici; ed a pochiſſimi venendo dalla natura conſentito il gran privilegio di non aver meſtieri dell' opera altrui per recare a fine compoſtiſſime inſieme, e dilicatiſſime macchine, ſiccome è ſtato largamente a Voi conceduto di farlo con facilità ed iſpeditezza ſorprendente. Queſto ſaggio della direzione ed aſſiſtenza che l'Autore vi ha promeſſo, vi incoraggiſca ad arricchire la prediletta voſtra ſcienza con nuove ed utili produzioni. Ve ſe ne proteſterà non poco tenuta la glorioſa Patria voſtra, perciocchè non avrà gran fatto da invidiare

*a qualche ſiaſi famoſa Città, dove colla pratica dell' ottica tocchiate quel ſegno, a cui è ſalito un voſtro Concittadino * colla teoria delle Matematiche pure, ed applicate. Ciò eſſa ha luogo non pur di ſperare, ma di certamente prometterſi, perchè ſe in breve tempo, e preſſocchè ſenza ſcorta ſiete giunto a tale di deſtar maraviglia ne' maeſtri dell' arte, coſa non dovremo attendere quindi a non molto da Voi? che avendo poc' anzi viſitate le natie contrade degli Huygbens, degli Hartſoeker, de' Leeuwenhoekii, ora vi trovate in quelle de' Barrowii, degli Smith, e de' Newtoni: contrade, in cui la teoria, e la pratica dell' Ottica ebbero già la culla, ed ora ſono creſciute a quel ſegno, a cui gli uomini poteano bramare bensì, ma non luſingarſi giammai di condurle. Parmi di vedere, ſiccome Voi conſultare anſioſo i valenti artefici che fioriſcono ſegnatamente in coteſta Città,*

---

* Il P. Ab. D. Guido Grandi.

*tà, pendere immobile dalla loro bocca, berne avidamente i precetti, ed i conſiglj, e farne ricco teſoro nella memoria: così gli artefici all' oſſervare le opere voſtre, ſeco ſteſſi rallegrarſi in mirare la felicità dell' imitazione, e le ricche aggiunte fatte alle loro ſcoperte; e direi quaſi trapelare dagli atti, e dal viſo loro miſto al godimento un lampo di geloſia, ſe nel cuore di que' generoſi maeſtri poteſſe annidare la geloſia, paſſione, che naſce o dall' ignoranza, o dall' invidia, o dall' ingordigia. Su via, Amico, non vi ſtancate, coll' eſempio di così dotte guide, e così perfetti modelli, di farvi ſtrada a conſeguire un luogo diſtinto ne' glorioſi faſti delle ſcienze, e delle arti liberali; che ſe nuovo non ſarà in eſſi il nome dell' onorevole voſtra famiglia *, nuovo ſarà ſenza fallo,*

* Fra i varj Scrittori che conta queſta famiglia, il P. D. Cl. Fromond M. Camald. P. P. nello ſtudio di Piſa, uomo aſſai noto nella Rep. Lett., era Zio del Sig. Gio: Franceſco.

fallo, almeno nella Patria voſtra, l' argomento per cui avrete meritato d' eſſervici regiſtrato. Amatemi, e credetemi.

Milano 1771.

Voſtro A. A.

C. G. C.

AVVISO DELL' AUTORE.

Queſto breve trattatino non è ſtato fatto ad altro oggetto, che per dare una giuſta idea della natura, e qualità principali de' Cannocchiali a perſone, che aveſſero ſolo una tenuiſſima tintura della geometria; onde non conteneva, che la ſola prima parte, e queſta per lo più priva di ogni dimoſtrazione rigoroſa di quanto vi ſi affermava. Dopo è ſtata aggiunta la ſeconda, che contiene tre brevi Memorie diſtaccate, tendenti a giuſtificare non tutto, ma le coſe più eſſenziali propoſte nella prima, onde anche in varj luoghi ſi è notato al fin della pagina, dove ſi dimoſtra dopo quello, che ſi è ivi affermato, ma queſto ancora parcamente, per non imbarazzar troppo interrompendo la ſerie naturale delle idee, che ſi preſentano nel teſto.

Nella prima parte ſi dà un' idea netta delle quattro qualità principali, che devono conſiderarſi in ogni cannocchiale e ſono la diſtinzione, l'ingrandimento, la chiarezza, e il campo; e per ottener queſto fine ſi è ſcelta la forma più comune de' Cannocchiali Diottrici: ma ſi è avuto principalmente in mira

un

un oggetto intereſſantiſſimo, come lo è la vera ſorgente de' colori, che appariſcono all' occhio in ogni ſorte di cannocchiali, quando eſſi hanno campo, e ingrandimento conſiderabile. Si fa vedere, che eſſi non naſcono dagli oggettivi, a' quali principalmente ſi ſono attaccati i Geometri, e ſi è applicato il rimedio dell' unione delle due ſoſtanze dal Dollond in que' cannocchiali, che in oggi ſi chiamano acromatici. Si fa vedere, che queſto nome non può convenire, ſe non ſi rimedia al male cagionato dalle oculari: ſi determina queſto male, e ſe ne propone il rimedio, ma ſenza la dimoſtrazione del principale fondamento di eſſo rimedio.

Come queſta è la parte la più eſſenziale di queſto trattatino, e contiene un argomento poco conoſciuto, e trattato, così principalmente per giuſtificare, e ſchiarire queſto punto, ſi è voluta aggiunger dopo una Memorietta, che conteneſſe ancora la dimoſtrazione, ed è la ſeconda delle tre, che compongono la ſeconda parte. La prima di eſſe tre ſi è premeſſa per iſchiarire, e giuſtificare una coſa, che ſi era propoſta prima, ma ſolamente accennata, e non ſi trova ne' comuni trattati de' cannocchiali, benchè intereſſi molto, principalmente

l'ap-

l' applicazione di eſſi cannocchiali agl' iſtromenti aſtronomici, e geodetici, e ſerve per avere una giuſta idea di quello, che accade a' raggi partiti da un punto d'oggetto ſituato fuori dell' aſſe. Si erano già ſteſe queſte due Memoriette con idea di farle ſervir di nota a due paſſi più eſſenziali, e biſognoſi di ſchiarimento, quando venendo richieſta la deduzione da una formola ſemplice delle proprietà principali delle lenti, e de' loro ſochi, ſi è aggiunto l'ultimo paragrafo, il quale contiene il fondamento di varie verità ſuppoſte nella parte prima, e nelle prime due Memoriette della ſeconda. Eſſa contiene ricavato con molta ſemplicità, e brevità quello, che d'ordinario gli Ottici dimoſtrano con metodi molto più lunghi, e complicati.

Per queſto ſi è detto, che la ſeconda parte contiene tre brevi Memorie diſtaccate. Le verità che ſi contengono in ciaſcuna di eſſe, hanno tutto l'ordine, che vi ſi richiede: la relazione di quelle di una a quelle dell' altra, non ne ha altro, che quello del tempo, in cui è venuto il penſiero di aggiugnerle. Ad ogni modo così, come ſtanno, ſi crede, che ſieno molto utili per acquiſtare una cognizione molto più eſteſa, e preciſa di ciò

che

che ſi appartiene alle lenti, e a' cannocchiali, di quello, che ſi trovi negli altri libri elementari, e l'accennare qualche dimoſtrazione, il ſupporne delle altre in un paragrafo precedente, e dimoſtrarle ne' ſeguenti, che pare contrario al buon ordine, e non ſi dovrebbe permettere in un trattato compito ſcientifico, qui ſerve molto per non confondere colla moltiplicità degli oggetti, e tener ſempre in viſta il filo principale.

L'eſſerſi aggiunti dopo i paragrafi della ſeconda parte, come Memoriette diſtaccate, ha portato ancora un' altra, che ſenza di queſto, ſarebbe irregolarità, ed è il ſupporſi delle notizie maggiori ne' paragrafi ſeguenti, che ne' precedenti. Nell' ultima non ſi è potuto omettere l'uſo delle formolette algebraiche: ma anche in queſte ſi è adoprata unicamente la parte la più elementare ſolamente, e tale, che ſia a portata di tutti quelli, che ſtudiano i primi elementi di Fiſica. Solo in una nota per trovar un minimo ſi è adoprata una ſempliciſſima formoletta differenziale. Queſte coſe ſi ſono premeſſe qui per giuſtificare l'ordine adoprato, e dar un'idea di quello, che ſi trova in queſt' opuſcolo.

PAR-

PARTE PRIMA.

Notizie elementari della natura e proprietà principali de' Cannocchiali Diottrici.

§. I.

Della forma più comune di un Cannocchiale Diottrico.

1. Cannocchiale Diottrico ſi chiama quello, che è compoſto di ſole lenti di materia traſparente, come di vetro, o criſtallo ſenza ſpecchio alcuno, che debba riflettere la luce.

2. La coſtruzione la più comune per uſo degli Aſtronomi ha un oggettivo conveſſo, e una ſola lente oculare pur conveſſa, ſituati in modo, che il loro foco comune ſtia fra l'uno, e l'altra: queſta ſorte di cannocchiali roveſcia l'og-

l'oggetto: per raddirizzarlo ſi ſogliono aggiungere due altre lenti oculari, e ne' cannocchiali più comuni eſſe ſi fanno uguali alla prima co' fochi pure, che coincidono.

3. Nella figura 1. l'oggettivo è SS', la prima oculare TT', le altre due VV', XX', la retta DQ è l'aſſe, che incontra l'oggettivo, e le oculari in C, G, R, H. Il foco comune all' oggettivo (per foco ſe non aggiungo altro intendo quello de' raggi paralleli), e alla prima lente è F: L ſta un poco ſotto al foco della TT', eſſendo il foco de' raggi divergenti da C, ed è foco comune delle VV', TT': P è foco della XX'.

4. Nella prima ſorte de' cannocchiali ſi mette l'occhio in L, nella ſeconda in P. Si forma un' immagine dell' oggetto in F, e nella ſeconda ſorte di cannocchiali ancora in O.

§. II.

Delle coſe che vanno conſiderate in un Cannocchiale.

5. QUattro coſe vanno conſiderate in un cannocchiale. La diſtinzione, l'ingrandimento, la chiarezza, il campo.

6. La diſtinzione non va confuſa colla chiarezza.

rezza. Eſſa ſi chiama anche terminazione, e conſiſte nel non confonderſi i raggi, che vengono da un punto d'oggetto, co' raggi, che vengono da un altro, ove dentro l'occhio ſi forma l'immagine dell' oggetto.

7. L'ingrandimento conſiſte nella grandezza della immagine medeſima rapportata a quella, che ſi avrebbe ſenza il cannocchiale coll'occhio nudo.

8. La chiarezza conſiſte nella quantità della luce partita da una data particella dell' oggetto, e raccolta nella particella corriſpondente della ſua immagine nell'occhio, preſa relativamente a quella quantità, che ſi avrebbe, ſe l'oggetto ſi guardaſſe immediatamente coll' occhio nudo.

9. Il campo conſiſte nella quantità dell' oggetto, che ſi vede per mezzo del cannocchiale.

§. III.

Della diſtinzione.

10. LA diſtinzione ſi avrebbe perfetta, ſe l'impreſſione de' raggi partiti da ogni punto d'oggetto ſi faceſſe nell'occhio in un ſol punto, e ad ogni punto di quello corriſpondeſ-

ſe un punto diverſo nella immagine formata in queſto.

11. Alla diſtinzione potrebbe ridurſi ancora un' altra perfezione conſiſtente nella ſomiglianza della immagine a quella forma, che avrebbe l'oggetto ridotto ad una ſuperficie piana perpendicolare all' aſſe: per queſta conviene, che le parti dell' immagine ſieno proporzionali alle parti della ſteſſa forma. Si vede il difetto di queſta qualità in certi cannocchiali, che hanno un campo troppo grande, e un troppo grande ingrandimento, con troppa curvatura nelle oculari: eſſi forzano l'oggetto facendo comparire curvilinee ancora le ſue parti diritte. Di queſta qualità de' cannocchiali, e di queſto loro difetto non parleremo qui, contentandoci di eſporre quello, che appartiene alla diſtinzione in quanto proviene dall' unirſi a far l'impreſſione in un ſol punto dell'immagine tutti i raggi partiti da un ſol punto d'oggetto.

12. Queſta diſtinzione rimane alquanto turbata da varie cauſe fiſiche indipendenti dal cannocchiale; alcune delle quali qui ſolamente accenneremo. Quando anche tutta la luce partita da un punto dell'oggetto arrivaſſe ad un unico punto del fondo dell' occhio, l' impreſſione ſi

ſten-

ſtenderebbe a qualche diſtanza, agendo la luce ſulli corpi in diſtanza; in oltre urtata la fibra in un punto trema tutta. Si aggiunge, che quando anche la forma di un occhio perfetto foſſe tale da radunar in un punto tutti i raggi partiti da un punto, e paſſati per la pupilla; niun occhio è di una perfezione totale, come niun pomo, niun tronco, niun criſtallo, niun' opera della Natura ſi trova mai colla figura, che eſſa affetta in un tal prodotto, totalmente perfetta, alterandola mille circoſtanze irregolari nell'atto, che ſi genera, e quando creſce. Indipendentemente da queſto, mentre il raggio cammina per aria, riceve mille piccoli ſtorcimenti da' vapori che incontra, i quali mutano la ſua direzione con mutazione piccola, ma tale, che baſta a impedire l'unione perfetta in un punto.

13. Anche per queſte cagioni accade, che l'unione de' raggi partiti da un punto dell' oggetto non ſi fa in un punto, ma in uno ſpazietto, e l'impreſſione loro ſi ſtende ad uno ſpazietto ancora più grande; onde ne deve naſcere una ſoprappoſizione d'impreſſioni de' raggi appartenenti a' punti diverſi dell'oggetto vicini fra loro, e però una qualche confuſione, o ſia indiſtinzione: ma laſciate queſte da parte, par-

leremo di quella, che può naſcere dal cannocchiale medeſimo, ſuppoſta perfetta la figura dell' occhio, e diritta la via de' raggi per aria.

14. Per avere in tal caſo una diſtinzione perfetta, converrebbe, che tutti i raggi partiti da un punto medeſimo dell'oggetto, che paſſando attraverſo dell' oggettivo, e delle oculari arrivano all'occhio, vi arrivaſſero con direzioni parallele fra loro: per li miopi vi devono arrivare un poco divergenti, per li presbiti un poco convergenti.

15. A tal oggetto baſta conſiderare due ſoli raggi, i quali venendo da un punto d'oggetto aſſai lontano, vengono ſenſibilmente paralleli. Sieno queſti partiti da un punto ſituato nell'aſſe, uno de' quali venga per l'aſſe medeſimo DC, l'altro quaſi parallelo per AE, eſprimendo E quel punto ſituato dentro la lente, in cui la via del raggio, che viene, ſi incontra colla via, per cui parte dopo le due refrazioni avute nelle due ſuperficie, prodotta indietro: nella medeſima maniera in appreſſo ſenza delineare le due ſuperficie di ogni lente, e le due refrazioni, eſprimeremo il raggio, come ſe ſi rompeſſe in un unico punto.

16. Il primo raggio attraverſerà tutte le

lenti

lenti in mezzo per C, G, R, H. Eſſendo F il foco della lente TT', il ſecondo raggio AE rifranto in E anderà per EFI alla lente TT', da cui rifranto in I anderà per la retta I*i* parallela all' aſſe GR : rifranto in *i* dalla lente VV' anderà nell' aſſe in O foco di eſſa, e ricevuto in *i'* dalla lente XX', che ha il ſuo foco pure in O, uſcirà per una direzione *i' i''* pure parallela all' aſſe.

17. Una ſimile coſa accaderà a' raggi venuti da un punto ſituato fuori dell' aſſe, ma con qualche diverſità. Tra tutti i raggi partiti da un punto ſituato fuori dell' aſſe non vi ſarà alcuno, che paſſi per l'oggettivo ſenza rifrangerſi: vi ſarà bene * ſempre uno di eſſi, che uſcirà colla medeſima direzione, con cui vi è venuto, ritrovando all' uſcire una curvatura uguale, e contraria a quella, in cui è entrato; e ove quel punto di oggetto non ha una gran diſtanza apparente dall' aſſe, ſi dimoſtra facilmente, che queſto raggio ſarà quello, che tende nel venire ad un punto dell' aſſe, il quale punto dalla ſuperficie di un oggettivo ugualmente conveſſo da ambe le parti voltata verſo

* Nella ſeconda parte al §. 7. ſi ſpiegano più chiaramente, e ſi dimoſtrano le coſe qui propoſte di fuga.

l'oggetto è diſcoſto proſſimamente per un terzo della groſſezza di eſſo oggettivo, e nell' uſcire ha la direzione che avrebbe, ſe foſſe partito da un punto diſtante dalla ſuperficie oppoſta pure per un terzo di eſſa groſſezza; onde le due direzioni rieſcono così vicine fra loro per la poca groſſezza del vetro, e per la grande obbliquità del raggio, che ove non ſia neceſſaria una preciſione ſcrupoloſa, ſi poſſono pigliare per una ſola, la quale paſſi pel punto di mezzo di eſſa groſſezza: generalmente poi, ove anche le due conveſſità ſieno diſuguali; pure le due direzioni ſi potranno conſiderare, come ſe foſſero una ſola, che paſſaſſe pel detto punto di mezzo.

18. Quindi il raggio obbliquo D'C potrà conſiderarſi, come irrefratto, e facilmente ſi dimoſtra, che tutti i raggi partiti dal punto iſteſſo dell'oggetto, e arrivati all'oggettivo con direzioni ſenſibilmente parallele anderanno ad unirſi proſſimamente in un punto F' ugualmente lontano dall' oggettivo formando in FF' l'immagine dell' oggetto ſimile ad eſſo in quel ſenſo, di cui ſi è parlato al principio di queſto paragrafo. Il raggio CF' rifranto in G' dalla lente TT' anderà in L, dove è il foco della lente TT' per li raggi partiti dalla diſtanza CG,

il quale eſſendo foco della lente VV', eſſo raggio ſarà da queſta rifranto in R' in modo da uſcir parallelo all'aſſe per R'H', ove dalla lente XX', che lo riceverà così parallelo ſarà rifranto per H'P al foco ſuo. Gli altri ſuoi compagni partiti da F', che è diſtanza del foco della lente TT' verranno via pur ſenſibilmente paralleli a G'R' fino alla lente VV', indi verranno ad unirſi con eſſo verſo O' in faccia ad O, e divergendo da eſſo O' diſtante dalle due lenti VV', XX', quanto il foco loro comune O, verranno verſo P per linee ſenſibilmente parallele alla H'P.

19. Così collocato l'occhio in L, o in P, ſi avrà la condizione richieſta per la diſtinzione, che i raggi partiti da un punto d'oggetto arriveranno all' occhio paralleli ſenſibilmente fra loro; onde nel fondo di eſſo dipingeranno l'immagine del medeſimo con queſta diverſità, che quella parte dell'oggetto, la quale guardata da C compariva a ſiniſtra colla direzione CD' ſotto l'angolo viſuale DCD', guardata da L deve comparire a deſtra ſotto l'angolo viſuale DLN, e guardata da P comparirà pur a ſiniſtra ſotto l'angolo viſuale DPH', vedendoſi in L roveſciato l'oggetto da un cannocchiale aſtronomico

di una ſola oculare, e in P di nuovo raddirizzato dal comune con tre. Da quelli angoli poi dipende l'ingrandimento, di cui parleremo più innanzi.

20. Queſta è la teoria comune, a cui per la diſtinzione ſi aggiunge, che ſpinto il ſiſtema delle lenti verſo l'oggettivo, la prima lente TT' riceverà i raggi FG, FI da un punto più vicino, che non è il ſuo foco, onde li manderà un poco divergenti, e però la lente VV' gli unirà in un punto più lontano da ſe, che non è il ſuo foco O, e la lente XX' ricevutili da un punto più a ſe vicino li traſmetterà divergenti: all'oppoſto tirato in fuora un poco eſſo ſiſtema, i raggi per la ragione oppoſta uſciranno un poco convergenti, ſervendo il primo mezzo per la diſtinzione de' miopi, e il ſecondo de' presbiti. Così pure, ſe l'oggetto ſia troppo vicino; il foco F ſi ſcoſterà dall'oggettivo, onde per avere la diſtinzione converrà tirare in fuora il ſiſtema delle oculari. Ma noi parleremo della diſtinzione riſpetto a un occhio ben conformato, che richieda i raggi ſenſibilmente paralleli, e di un oggetto aſſai lontano per mandarli tali all' occhio.

21. Nella teoria ſuddetta ſi ſono ſuppoſte

due

due coſe, le quali ſono vere proſſimamente, e non eſattamente; e la mancanza della eſattezza in detti due punti rende imperfetta la diſtinzione. La prima ſi è, che tutte le parti di un raggio arrivato a una ſuperficie refringente ſi rifrangano inſieme per una retta medeſima; la ſeconda, che la figura sferica, la quale ſi dà alle lenti, ſia capace di radunare in un ſol punto, o di far uſcire paralleli fra loro tutti i raggi partiti da un punto, o arrivati ad eſſa ſimilmente paralleli. La prima coſa non è vera, perchè ogni raggio di luce è compoſto di innumerabili fili, ciaſcuno de' quali ha il ſuo colore innato, e il ſuo determinato grado di refrangibilità in modo, che i fili di colore roſſo ſi rifrangono in parità di incidenza meno di tutti, e i violacei più di tutti. Da ammendue queſti capi ne naſce un errore, per cui, ove ſi forma l'immagine nel cannocchiale, e al fine anche nell'occhio, i raggi partiti da ogni punto d'oggetto in vece di radunarſi in un punto, ſi radunano in uno ſpazietto tale, che ſoprapponendoſi gli uni agli altri, quelli, che vengono da diverſi punti vicini dell' oggetto, ne naſce l'indiſtinzione.

22. L' errore della figura sferica è confi-

derabilmente minore di quello della diverſa refrangibilità, e nelle piccole aperture è incomparabilmente minore: ammendue hanno le formole ſue, che gli eſprimono, dati i raggi delle due ſfericità, l'apertura della lente, e la qualità refrattiva, e diſtrattiva del vetro. Laſciato da parte il primo, ſi può conſiderare il ſecondo, tanto ne' raggi, che vengono da un punto dell' aſſe, quanto in quelli, che vengono da un punto ſituato fuori dell' aſſe iſteſſo: l'error de' primi è un ſolo, de' ſecondi ſono due, uno analogo a quel de' primi, e l'altro particolare, il quale non ſuole comunemente eſſere conſiderato, e lo deve eſſere in ogni conto.

23. L'error de' raggi, che vengono da un punto dell' aſſe, conſiſte nella diverſità de' fochi corriſpondenti alle diverſe ſpecie de' raggi. Se i roſſi ſi radunano in un punto F, i violacei devono radunarſi più preſto in un punto *f* più vicino per eſſere più refrangibili. Quindi ſe i roſſi eſcono dalla prima lente TT' paralleli all' aſſe per I*i*, i violacei eſcono un poco convergenti: e però la ſeconda lente VV' deve farli convergere più preſto, sì perchè ſono più refrangibili, sì perchè già vengono un poco convergenti, e la terza XX' li fa convergere ancora più.

24. Ne' raggi, che vengono da un punto preſo fuori dell'aſſe vi è in primo luogo il medeſimo errore: ſe ſi conſideri F` come foco appartenente a' roſſi, tutti i roſſi, che venendo da eſſo punto, urtano nell'oggettivo SS', ſi radunano in F', e i violacei in un punto più vicino *f'*; onde già per queſto capo naſce lo ſteſſo diſordine: ma vi è un altro capo ancora. Del medeſimo raggio CG`, che è paſſato pel mezzo dell' oggettivo ſenſibilmente irrefratto, il filo roſſo va per una retta G`LR' a incontrar l'aſſe in L, e il filo violaceo per G'*lr* in un punto più vicino *l*; onde il faſcetto di tutti i roſſi forma una funicella di raggi paralleli, che vengono colla direzione G`L, e quello de' violacei una funicella di raggi non ſolo un poco convergenti fra loro, ma in oltre colla direzione G'*l* diverſa dalla precedente G'L. Queſto ſecondo errore fa, che la ſteſſa parte dell' oggetto ſi vede co' ſuoi raggi roſſi nella direzione LG'N, e co' violacei nella direzione *l*G'*n*, ſcoſtandoſi gli uni dagli altri con un angolo viſuale LG'*l*, o ſia NG'*n*.

25. Dalla ſeconda lente il raggio roſſo G'R' eſce per R`Q' parallelamente all'aſſe, e il violaceo G'*r* per *r*Q'Q convergente a un punto

to Q di eſſo aſſe, e dalla terza il primo eſce convergente all' aſſe per la retta H'P, ed il ſecondo anche più convergente per *hp*, il cui incontro coll' H'P, producendoſi ammendue indietro in *m*, M, ſe ſia *u*, ſarà P*up*, o ſia M*um* l' allontanamento de' raggi violacei da' roſſi dopo la terza lente.

26. Da queſto ne naſcono i colori, che ſi vedono verſo l'eſtremità del campo di que' cannocchiali, che ingrandiſcono aſſai, ed hanno un grande campo, imperocchè la grandezza dell' angolo N G'*n* dipende da queſti due elementi; ne' vetri comuni, ove la refrazione ſia piccola, la differenza delle refrazioni del roſſo e violaceo è $\frac{1}{27}$ della refrazione del primo. Quindi N G'*n* ſarà proſſimamente la venſetteſima parte di C G' N, che è la refrazione del roſſo. Ora queſto è uguale a' due G'C L, G'L C, interni, e oppoſti, il primo de' quali, come ſi vedrà or ora, determina il campo del cannocchiale, e il ſecondo eſſo campo ingrandito dal medeſimo cannocchiale *. L'angolo M*um* ſi trova un poco minore del primo N G'*n* nel caſo eſpoſto delle tre oculari uguali. Se ſi guardi un oggetto piccolo lucido verſo il lembo

* Si dimoſtrerà al §. 8. quello, che ſi afferma qui.

lembo del campo, come ſarebbe Giove, o Venere; ſi vedrà per queſta ragione roſſo verſo il centro del campo, e violaceo verſo il lembo. Sia il campo di mezzo grado, onde Giove poſto al lembo ſarà lontano minuti 15 dall' aſſe: ſia l'ingrandimento 40. Sarà $GCG' = 15'$, $GLG' = 40 \times 15' = 600$; onde $CG'N = 615'$, il quale diviſo per 27. dà 23'. Quindi in tal caſo i raggi violacei anderebbero in fuora più, che i roſſi per 23 minuti, cioè per più di 2 terzi della groſſezza della Luna apparente a occhio nudo.

27. Ne' cannocchiali comuni generalmente non ſi vedono tanto ſeparati queſti colori, perchè quelli, che hanno molto ingrandimento, hanno meno campo, ma pure ſe ne vedono in tutti, e molto più ſi riconoſcono, ove ſi fa paſſare attraverſo a un cannocchiale l'immagine del Sole. Se il Sole occupa la parte interiore del campo, il ſuo lembo vicino al margine di eſſo campo ha un colore violaceo molto vivo; ſe all' oppoſto eſſo occupa una ſola parte del campo, andandone fuora il reſto, ſi vede il lembo medeſimo roſſo aſſai vivo. In tutti i limiti fra gli oggetti più lucidi, e meno lucidi vicino al margine del campo, ſe il lucido ſta

verſo

verſo il centro, ſi vede il limite violaceo co' violacei di eſſo, che ſcorrono ſul meno lucido, e all' oppoſto ſe il lucido ſta verſo il margine del campo, ſi vede il limite roſſo co' roſſi di eſſo, che rimangono indietro abbandonati da' ſuoi violacei. Queſto effetto ſi vede non ſolo ne' cannocchiali diottrici, ma anche in quelli di rifleſſione, ove il campo ſia un poco grandetto, d' onde anche colla ſola eſperienza ſi ricava, che queſto effetto naſce dalle oculari, e non dall' oggettivo, da cui ne naſce un effetto molto diverſo, che cagiona della confuſione, e non queſti colori ſenſibili all' occhio.

28. Per altro da queſto errore iſteſſo non ſolo ne vengono ne' cannocchiali di ogni genere i ſuddetti colori ſenſibili, ma ne viene ancora della confuſione tanto maggiore, quanto ſi va più lontano dall' aſſe: imperocchè così i raggi violacei delle parti dell' oggetto più vicine al centro del campo ſi ſoprappongono a' roſſi delle parti più lontane, e per queſto ancora principalmente vi è ſempre una maggiore diſtinzione verſo il centro del campo, che verſo il lembo.

29. Al primo errore de' cannocchiali diottrici ordinarj, che è comune a tutti i punti dell' oggetto veduto, rimediò in gran parte il Dol-

lond adoprando due ſoſtanze, che diſugualmente diſtraggono i diverſi colori a pari refrazione, come lo ſono il *flint*, e il *crown*, o qualunque vetro comune in cambio di queſto. Trovo che ove gli angoli refringenti ſieno piccoli, il vetro comune torcendo il raggio roſſo per un numero di gradi, torce il violaceo incirca due minuti per grado di più, mentre il flint aggiunge al violaceo quaſi 3 minuti di refrazione di più per ogni grado. Formando l'oggettivo SS' di una lente conveſſa di vetro comune, e di una concava di flint, ma meno concava, fece, che prevalendo la refrazione formata dal conveſſo in dentro alla formata dal concavo in fuora, vi rimaneſſe della refrazione neceſſaria, perchè i raggi ſi radunaſſero, e formaſſero l'immagine dell' oggetto; ma diſtraendo il concavo in fuora i violacei da' roſſi in quella ſua refrazione minore tanto, quanto il conveſſo gli aveva diſtratti in fuora in quella ſua refrazione maggiore, ſi trovaſſero ammendue riuniti con una refrazione comune. Ove il conveſſo di queſte lenti compoſte torce in dentro il roſſo per *6* gradi, ivi torce il violaceo per gradi *6* min. 12, ma il concavo torce in fuora il primo per gradi 4, e però il ſecondo per gradi 4, e min.

pur

pur 12., onde rimangono torti ammendue per gradi 2, e vanno ammendue ad unirſi in F. Se ſi prenda per miſura della qualità diſtrattiva di una ſoſtanza quel numero di minuti per grado, che nelle piccole refrazioni ſi aggiunge alla refrazione del violaceo ſopra quella del roſſo; baſterà per togliere con due lenti queſto errore della diverſa refrangibilità il far, che due lenti iſoſceli di due ſoſtanze abbiano i raggi di ſfericità proporzionali alle qualità diſtrattive; e in vece delle iſoſceli ſi poſſono per queſto ſolo fine adoprare le ſcalene equivalenti: deve poi farſi conveſſa quella, che ha minore qualità diſtrattiva.

30. A queſta, che ſi chiama correzione dell' errore della diverſa refrangibilità, unì il Dollond la correzione dell' errore della figura ſferica, la quale non laſcia più la libertà di fare ammendue le lenti iſoſceli: data la diſtanza focale, che uno vuole, la quale determina una delle quattro ſfericità delle due lenti, le due correzioni ne determinano altre due: vi rimane la quarta arbitraria, la quale ſi può determinare in infinite maniere, che tutte diano quella diſtanza focale, e correggano que' due errori.

31 Ma oltrecchè quella determinazione di

raggi

raggi della sfericità colle formole trovate da' Geometri fa la correzione proſſima, e non accurata, perchè ſi diſprezzano nel calcolo molte piccole quantità; l'unione non ſi fa di tutti i colori inſieme con due ſoſtanze, ma di due ſoli, come ho dimoſtrato in una mia diſſertazione impreſſa nella ſeconda parte dell'ultimo tomo delle memorie dell'Accademia di Bologna, e per unirne più vi vogliono più ſoſtanze *. E' ben vero, che uniti i due eſtremi, rimangono gli altri molto meno diſuniti, e l'errore nato dall'oggettivo rimane aſſai piccolo. Per queſto i cannocchiali Dollondiani fanno un effetto molto maggiore di quello de' comuni; ma non arrivano a fare quello che fanno i catadiottrici, ne' quali in vece di una lente di vetro ſi adopra per oggettivo uno ſpecchio di metallo, in cui i raggi tutti ſenza ſeparazione di colori ſi ri-

* In quella memoria ho date le formole, che determinano i rapporti delle sfericità di 3 lenti di tre diverſe ſoſtanze, neceſſarj per unire i colori eſtremi con quel di mezzo, ma non ho ancora trovato tre ſoſtanze di qualità corriſpondenti ad eſſe formole tali da poterſene ſervire. Eſſa è ſtata riſtampata in Vienna con altre 4 in un volume, tra le quali la prima è quella, che ſi cita giù al num. 34.

riflettono allo ſteſſo angolo. Fa in oggi il Dollond de' Cannocchiali Diottrici di 3 piedi, che ingrandiſcono a 150 doppj il diametro dell'oggetto, al quale effetto vi vogliono i comuni di 70 piedi: ma i catadiottrici di Short di 3 piedi arrivano a ingrandire a 400 doppj, tanto è maggiore la loro forza.

32. Con tutto il rimedio, che il Dollond ha trovato, ed eſeguito ne' ſuoi cannocchiali diottrici, col fare l'oggettivo compoſto di due ſoſtanze, vi rimangono quelli altri due errori, un piccolo, a cui, ſe ſi voglia, ſi può rimediare mutando un poco le ſfericità delle lenti, che compongono l'oggettivo, e l'altro grande, al quale non ſi può rimediare in conto alcuno coll'oggettivo, ma vi vuole un rimedio applicato alle oculari medeſime, ſulle quali ſi è troppo poco meditato fin' ora almeno in ordine all'impedire i colori, che naſcono principalmente da eſſe. Il primo appartiene tanto a' punti dell'oggetto ſituati nell'aſſe, quanto a quelli, che ſono fuori di eſſo, ed il ſecondo ſolamente a queſti, ed è quello, di cui ſi è parlato al num. 24, e il quale è il più eſſenziale, e il meno avvertito fin' ora.

33. Si concepiſca, che all' oppoſto i raggi par-

partiti da un punto dell' aſſe immenſamente lontano, e però ſenſibilmente paralleli all' aſſe arrivino alla lente oculare, o alla prima di tutte eſſe, quando ſono più d' una. I fili roſſi ſi radunerebbero in quell' iſteſſo punto F, da cui partendo ſi ſupponeva, che ſarebbero uſciti paralleli all' aſſe: per conſeguenza i fili violacei, che ſono più refrangibili, ſi dovrebbero unire in un punto φ più vicino alla lente TT'. Quindi acciò eſcano paralleli all' aſſe tutti i fili tanto roſſi, quanto violacei, conviene, che i roſſi partano da F, e i violacei da φ: al modo iſteſſo perchè eſcano tutti paralleli fra loro tanto i roſſi, quanto i violacei de' punti d' oggetto ſituati fuori dell' aſſe, conviene, che partendo i primi dal punto F', partano i ſecondi da un punto corriſpondente φ' più vicino.

34. Per ottener queſto intento, baſta combinare in modo le due lenti delle due ſoſtanze, le quali formano l' oggettivo, che eſſe non ſolo correggano l' errore della diverſa refrangibilità facendo, che i violacei ancora in vece di unirſi in *f* ſi uniſcano in F; ma che facendo un effetto ancor più grande, facciano unire i violacei in un punto φ più lontano, che i roſſi, e tanto più lontano, quanto richiede tutto il

ſiſtema delle lenti oculari. Quando la lente concava della ſoſtanza più diſtraente ſia anche più concava di quello, che biſogna per rifrangere inſieme colla conveſſa ugualmente i fili roſſi, e i violacei; farà rifrangere i violacei più, che i roſſi: le formole de' fochi ben maneggiate daranno la preciſa quantità neceſſaria per queſto, come ho fatto vedere in altra mia Memoria ſtampata nella prima parte del medeſimo tomo ultimo dell' Accademia di Bologna.

35. Queſto rimedio però non corregge in modo alcuno l'error maggiore, che naſce dalle oculari per li punti ſituati fuori dell' aſſe, lontani conſiderabilmente dal centro del campo, di cui ſi è parlato al num. 24. Come tanto i fili roſſi, quanto i violacei del raggio D`CG' paſſano per l'oggettivo SS` ſenſibilmente irrefratti, non può eſſo impedire, che in G` ſi dividano, inclinandoſi i primi meno per G`LR`, e i ſecondi più per G`*lr*, col fare un' aberrazione NG`*n*, la quale introduca i colori nel fin del campo aſſai ſenſibili, ove il campo ſia grande, e notabile l'ingrandimento, e inſieme v'introduca della confuſione, giuſta il num. 28. Quindi in tutti i cannocchiali Dollondiani fatti dal medeſimo Dollond, che mi

ſono

ſono capitati alle mani, formati coll' oggettivo compoſto, e colle oculari tutte ſemplici, e conveſſe, benchè alcune di queſte foſſero di flint, altre di crown, ogni volta, che il campo, e l'ingrandimento erano grandi, ho ſempre veduti verſo il lembo del campo queſti colori ſenſibiliſſimi, e molto più gagliardi, e vivi, che ne' cannocchiali comuni, per la quale coſa ancora, oltre al non unirſi da eſſi tutti i colori, ma due ſoli, credo, che non debba attribuirſi ad eſſi il nome di *Acromatici*, che già è in uſo, ma che queſto nome debba riſerbarſi per quelli, i quali con tre ſoſtanze uniſcano i colori eſtremi col medio, nel quale caſo reſteranno ſenſibilmente uniti tutti, e inſieme porgano rimedio a queſto diſordine de' colori cagionati dalle oculari.

36. Quindi per rimediare inſieme agli errori dell' oggettivo, e delle oculari, converrà adoprare la congiunzione delle diverſe ſoſtanze fatta a dovere ancora in queſte. Se ſi adopra una oculare ſola, baſterà formare di più ſoſtanze tanto l'oggettivo, quanto l'oculare, in modo, che l'uno, e l'altra ſia capace di radunare in un ſol punto tutti i fili di qualunque colore ſieno, i quali arrivino ſenſibilmente paralleli

fra loro alla ſua prima ſuperficie. Allora l'oggettivo radunerà tutti i raggi provenienti da un punto d'oggetto tanto i roſſi, quanto i violacei in F, o in F': tutti i raggi partiti da F uſciranno paralleli fra loro: faranno lo ſteſſo tutti i raggi partiti da F', perchè non ſolo uſciranno paralleli fra loro tutti i fili roſſi, e i violacei fra loro, ma venendo rifranto ugualmente tanto il filo roſſo venuto per CG', quanil violaceo, le funicelle de' roſſi, e de' violacei, uſciranno ammendue per la medeſima direzione G'LR'. Per altro per l'oculare baſterà adoprare una compoſizione, che corregga il ſolo errore della diverſa refrangibilità, la quale correzione anche ſola rimedia a quel primo difetto de' colori introdotti dalle oculari. L'altro errore della figura sferica nelle oculari è piccoliſſimo, perchè eſſo nelle piccole aperture ſcema in modo da divenire inſenſibile, e i raggi partiti da un punto d'oggetto, e arrivati a tutti i punti dell' oggettivo uniti da eſſo in F, e incrocicchiati ivi, trovano preſto l'oculare vicina; onde non urtano, che in una parte piccola della ſua apertura.

37. Se ſi mettono più oculari, ſi rimedierà pure a tutto inſieme, quando ſi faccia ogni

ocu-

oculare di più ſoſtanze : ma queſto porta una ſpeſa maggiore, e una moltiplicazione di vetri, che fa perdere de' raggi. Si può per altro rimediare inſieme a tutto col fare una ſola lente oculare compoſta, e le altre ſemplici. Se le prime due ſieno ſemplici, baſta come io trovo * fare la terza X X' compoſta in modo, che rifranga ugualmente i raggi violacei, e i roſſi, che arrivino ad eſſa paralleli, per fare, che reſti rimediato ad ammendue inſieme i difetti delle oculari.

38. Se ſi voleſſe rimediare al ſolo primo diſordine cagionato dalle oculari; ciò ſi potrebbe fare anche colle oculari ſemplici di vetro comune. Determinato il loro ſiſtema, come ſi fa per li cannocchiali comuni, ſi potrebbe calcolare la diſtanza G F, in cui ſi unirebbero tutti i raggi roſſi, che urtaſſero parallelamente all' aſſe nella X X', e la diſtanza ſimile G φ dell' unione de' violacei: allora l'oggettivo dovrebbe comporſi in modo, che uniti i fili roſſi in F uniſſe i violacei in φ, rifrangendoli meno, che i roſſi. Ma queſto, come ſi è detto, non rimedia al ſecondo diſordine. Ad ammendue inſieme ſi può rimediare in infinite maniere, adoprando diverſo numero, e forma di oculari di-

* Si vedrà al §. 8. ciò, che appartiene a queſta materia.

verſamente collocate, e ad ogni modo ottenendo, che i raggi partiti dall' iſteſſo punto d'oggetto tanto roſſi, che violacei, o ſieno eſſi partiti da un punto dell' aſſe, o da un punto fuori dell' aſſe, eſcano paralleli fra loro, ma non tutte queſte combinazioni ſono ugualmente idonee ad adempire le altre condizioni, che vi vogliono in un cannocchiale, come ſono l'ingrandimento, e il campo. Baſta qui ſolo l'aggiungere, che comunque anche ſieno di diverſi fochi le tre lenti oculari, ſempre l'unica terza lente compoſta può rimediare a tutti i diſordini. Si darà più giù una delle combinazioni la più ſemplice, e la più idonea per ottener queſto fine. La determinazione dipende dal ſito del punto Q', in cui la ſeconda oculare uniſce il raggio roſſo G'R' col violaceo G'r. *

§. IV.

Dell' ingrandimento.

39. L'Ingrandimento dipende dall' angolo DCD' confrontato ne' Cannocchiali Aſtro-

* Queſto ſito ſi determina nel §. 8., e ſe ne ricava il rimedio. Queſta è la parte la più intereſſante delle preſenti Memorie.

Aſtronomici coll' angolo G L G', e ne' comuni coll' H P H'. Quell' oggetto, che guardato da C ſi vede ſotto l' angolo viſuale D C D', guardato da L ſi vede ſotto il G L G', e guardato da P ſotto l' H P H'; onde la ſua immagine dentro l'occhio avrà il diametro a tanti doppj maggiore di quella, che avrebbe, ſe ad occhio nudo foſſe guardato da C, a quanti doppj l'angolo G L G', o l'angolo H P H' è maggiore del D C D'.

40. Queſta ragione di angoli ſi determina facilmente dipendentemente dalle diſtanze focali. L' angolo D C D' è uguale al G C G', il quale ſta all' angolo G L G' proſſimamente come L G' a C G', giacchè nella ragione di eſſe linee ſtanno i loro ſeni, che per la loro piccolezza ſono proporzionali proſſimamente ad eſſi; e però per eſſere L G', C G' proſſimamente uguali alle L G, C G, ſaranno quegli angoli, come queſte linee. Si dimoſtra poi * dalle formole de' fochi, che ſta L G. C G :: F G. F C; onde gli ſteſſi angoli ſaranno, come queſte linee, che ſono le diſtanze focali dell' oggettivo, e della prima oculare. L'angolo poi H P H' all'angolo G L G', o ſia R L R' ſtarà

* Se ne troverà la dimoſtrazione al §. 8.

ſtarà proſſimamente in ragion reciproca di H P ad R L a cagione delle R R`, H H` uguali.

41. Quindi ſi avranno i ſeguenti teoremi. *L'ingrandimento con una lente ſi avrà dividendo la diſtanza focale dell' oggettivo per la diſtanza focale di eſſa lente: e l'ingrandimento con tre comunque diſuguali, purchè* L *ſia foco della ſeconda, ſarà all' ingrandimento di una ſola, come la diſtanza focale di eſſa ſeconda alla diſtanza focale della terza la più vicina all' occhio.*

42. Si ricava facilmente da queſto teorema, che ove nel caſo del foco di V V' ſituato in L ſieno uguali di diſtanza focale la ſeconda, e la terza lente, comunque eſſe ſieno diſuguali dalla prima, l'ingrandimento di tutte e tre inſieme ſarà lo ſteſſo, che di una ſola.

43. Si ricava pure, che per avere un grande ingrandimento con una ſola oculare, conviene, che queſta ſia molto acuta, cioè abbia la diſtanza focale molto piccola, e che comunque ſieno aſſai più dolci le altre due, purchè ſieno uguali di diſtanza focale, l'ingrandimento reſterà lo ſteſſo.

44. Queſto corollario è molto utile, ove ſi voglia un notabile ingrandimento unito colla correzione degli errori della diverſa refrangibi-

lità

lità cagionati dalle oculari. E' difficile il lavorare bene un' oculare acuta composta alla Dollondiana di più sostanze. Come vi entra una lente concava di flint, se essa si unisce ad una convessa di vetro comune, allontana il suo foco alquanto più che a tre doppj rispetto a quello, che dà la sola convessa; onde converrebbe lavorarla acuta più, che a tre doppj di più: cosa, che dà troppa curvatura alle sue superficie, e però impedisce il dare una notabile apertura, la quale, come or' ora si vedrà, è necessaria per avere un campo sufficiente. Quindi si può fare di vetro semplice assai acuta la prima lente T T' facendo assai dolci le altre due, e tra esse la terza sola composta, la cui dolcezza permetterà, che se le dia quella apertura, che si richiede. Trovo, che questa combinazione salva tutto, ed è la indicata al num. 38., trovando, che Q' unione de' raggi G' R', G' *r* rosso e violaceo corrisponde appunto al foco O' della lente X X'; onde essa ricevendoli divergenti dal suo foco, ed essendo composta li deve rimandar paralleli.

45. La grande apertura nell' oggettivo semplice cagiona un grande errore della figura sferica; ma questo è molto più piccolo nelle oculari,

lari, che nell' oggettivo, conforme a quello, che ſi è detto al num. 36. Ad ogni modo ſi potrebbe rimediare anche ad eſſo, laſciando ancora iſoſcele la prima, e la terza lente, e deſtinando la combinazione delle due ſuperficie della ſeconda a queſto effetto; ma per ottener ciò, vi vorrebbe della deſtrezza nell' uſo delle formole generali. Credo coſa più opportuna il penſare nelle oculari al ſolo errore della diverſa refrangibilità eſpoſto di ſopra, e per eſſo far iſoſcele la parte conveſſa della lente terza compoſta, adattandole una concava idonea, e formare ſemplici, e iſoſceli le altre due. *

§. V.

Della chiarezza.

46. LA chiarezza dipende dalla quantità della luce, che partita da una particella dell' oggetto arriva a fare un' impreſſione in una particella del fondo dell' occhio, in cui ſi forma l'immagine di eſſa. Come tutta la luce, che partita da ogni qualunque punto dell' oggetto arri-

va

* Si dirà ſu queſto alcuna coſa di più preciſo al §. 8., ove ſi dimoſtrerà anche la congruenza de' punti O', Q' affermata nel numero precedente.

va a tutta l'apertura dell' oggettivo, viene ad unirſi ſenſibilmente in un punto nel foco dell' oggettivo in F, o F', eſce dalla lente proſſima all'occhio in un faſcetto di raggi paralleli fra loro aſſai riſtretto, ed entra per la pupilla nell'occhio; la quantità della luce, che arriva all'occhio da ogni particella d'oggetto, ſarà proporzionale all'area dell' apertura dell' oggettivo; ma queſta luce ſi ſpargerà per una particella del fondo dell' occhio tanto maggiore, quanto maggiore ſarà l' immagine di eſſa formata per mezzo del cannocchiale; onde quella parte di eſſa luce, che toccherà ad una data particella del fondo dell' occhio, ſarà a tanti doppj minore, a quanti ſarà maggiore la ſteſſa immagine.

47. Ora le aree delle aperture degli oggettivi, che ſogliono eſſere circolari, ſono in ragione duplicata de' diametri di eſſe, e le grandezze delle immagini ſono in ragione duplicata degli ingrandimenti lineari, ſpiegati nel precedente §. 3.; quindi la chiarezza ſarà in ragione compoſta della diretta duplicata del diametro dell'apertura dell' oggettivo, e reciproca duplicata dell'ingrandimento.

48. La quantità della luce, che entra per

la pupilla dell' occhio nudo, è determinata dall' apertura della pupilla medeſima, onde per avere nell' immagine veduta col cannocchiale la ſteſſa chiarezza, che ſi ha coll' occhio nudo, conviene, che il diametro dell' apertura dell' oggettivo ſia a tanti doppj maggiore del diametro della pupilla, quanto eſprime l' ingrandimento. Criſtiano Ugenio celebre tanto per le ſublimi teorie, quanto per la pratica nel lavorare cannocchiali, trovò con lunga ſerie di oſſervazioni, che quando anche il diametro dell' apertura dell' oggettivo, che viene anche ſotto il ſemplice nome di apertura, è almeno la quarta parte di quello, che richiede una tale proporzione, ſi ha una ſufficiente chiarezza, ma che con una minore apertura l' oſcurità diviene ſenſibile.

49. La pupilla ha incirca una linea di diametro, onde per avere una ſufficiente chiarezaa con un ingrandimento di 100 vi vogliono almeno 25 linee, cioè un poco più di 2 pollici di apertura, e per un ingrandimento di 200, ve ne vogliono 4.

50. Quindi volendoſi ingrandimenti maggiori, conviene dare maggiori aperture all' oggettivo: ma queſte fanno creſcere tanto gli errori della diverſa refrangibilità, quanto quelli

della

della figura sferica, giacchè ne' cannocchiali diottrici comuni, il diametro dell' error circolare nato dalla diversa refrangibilità si trova proporzionale al diametro dell' apertura, e dell' errore circolare nato dalla figura sferica si trova proporzionale al suo cubo.

51. Per questa ragione non si può dare a qualunque cannocchiale qualunque ingrandimento, dovendosegli dare quello, che richieda un' apertura, la quale non faccia essere troppo sensibili i suddetti errori, onde ne nasca la confusione. Si trova colla ragione, e colla esperienza, che ove gli oggettivi sieno semplici, a pari perfezione di materia, e di lavoro devono avere le lunghezze proporzionali a' quadrati degli ingrandimenti. Vi vuole una lunghezza maggiore a 9, a 25, a 100 doppj per aver un cannocchiale, che ingrandisca a 3, a 5, a 10 doppj di più. Questa regola appartiene a' soli cannocchiali di oggettivo semplice: gli oggettivi Dollondiani, che unisconо i raggi estremi, e lasciano poco disuniti i medii, correggendo insieme in grandissima parte l'errore della figura sferica, soffrono per questo aperture assai maggiori, e maggiori ingrandimenti: essi però, come si è detto al num. 21., non arrivano ancora

alla

alla perfezione de' cannocchiali di rifleſſione, ne' quali non vi è punto di errore analogo a quello della diverſa refrangibilità cagionato dall' oggettivo, giacchè tutti i raggi ſi riflettono allo ſteſſo angolo; e molto più perfetti ſono que' di Short, il quale ha trovato il modo di dare a' ſuoi ſpecchj la figura parabolica. Io ho un teleſcopio di un piede, e mezzo di foco, il quale ſoffre un' apertura di 4 pollici con un ingrandimento di 200 negli oggetti abbaſtanza illuminati, come lo è la Luna, o Venere: uno di tre piedi, come ſi è detto allo ſteſſo num. 21., ſoffre l'ingrandimento di 400.

§. VI.

Del campo.

52. IL campo è determinato dalla quantità dell' immagine formata dall' oggettivo in F, che può entrare per le oculari fino all' occhio. Perchè eſſo ſia ben terminato, e netto nel ſuo margine, ſi colloca ivi un diaframma, dall' apertura del quale dipende lo ſteſſo campo, purchè le lenti oculari non ſieno minori di quello, che ſi richiede per ricevere tutta l'immagine tramandata da eſſo.

53.

53. Queſta grandezza di oculari, o ſia delle loro aperture, ſi determina facilmente. Se il ſemidiametro dell' apertura del diaframma ſia F F', dovrà quello della prima lente eſſere almeno G G', della ſeconda R R', della terza H H'. Quindi nel caſo, che il foco O ſia comune alle lenti V V', X X', e il punto L ſia foco della V V', e foco della T T' per li raggi divergenti da C; dovrà eſſere almeno, come ſegue.

54. *L' apertura della prima oculare all' apertura del diaframma, come la ſomma delle diſtanze focali dell' oggettivo, e dell' oculare medeſima alla prima di queſte due.* Imperocchè ſta G G' ad F F' come G C ad F C. Sarà bene però, che queſta apertura ſia ancora un pochino più grande, per ricevere il raggio, che venuto da S' in F' dopo di eſſerſi ivi unito col C F, diverge un poco, e ſe ne ſcoſta andando di là da G' verſo T.

55. *L' apertura della ſeconda all' apertura della prima, proſſimamente come la diſtanza focale di quella alla diſtanza focale di queſta.* Imperocchè ſta R' R a G G', come R L a L G; ed L G diſtanza focale de' raggi, che partono da C punto molto lontano riſpetto alla

bre-

brevità della GF, è poco maggiore di eſſa GF.

56. *L'apertura della terza uguale all' apertura della ſeconda*. Imperocchè HH' è uguale alla RR'.

57. L'aſſoluta miſura del campo ſi avrà proſſimamente in gradi, e minuti, ſe ſi fa *come la diſtanza focale dell' oggettivo* * *al diametro dell' apertura del diaframma collocato nel ſuo foco, così* 3438 *al numero di minuti contenuto nel campo, il quale, ſe paſſa* 60, *diviſo per eſſo* 60 *darà i gradi co' reſidui minuti*. Imperocchè ſe ſi concepiſca un circolo col centro C raggio CF; il diametro intero dell' apertura doppio di FF' ſarà quell' arco, che determinerà l'intero campo doppio dell' angolo FCF'; e il raggio di ogni circolo è uguale all' arco di gradi 57, min. 17. $\frac{3}{4}$, 0, pigliando li $\frac{3}{4}$ per un intero, di minuti 3438.

58. Quindi ſi vede, che una centeſima parte della diſtanza focale dell' oggettivo baſta

per

* Si vedrà nel §. 7. che ſe l'oggettivo è iſoſcele, va aggiunta alla diſtanza focale la terza parte della groſſezza del vetro; ſe è ſcaleno, una parte di eſſa groſſezza, che ivi ſi determina. Qui ſi diſprezza eſſa groſſezza.

per l'apertura del diaframma, e per la grandezza della oculare nelli cannocchiali aſtronomici, acciò piglino l'intero diſco del Sole, e della Luna: giacchè una centeſima della detta diſtanza dà più di 34 minuti di campo, a' quali non arriva mai il diametro nè dell' uno, nè dell' altro diſco.

59. Si vede anche, che la grandezza del campo non dipende punto dalla grandezza, o dalla figura dell' oggettivo. Tutti i raggi provenienti da un punto dell'oggetto, che urtano nell' oggettivo, ſi radunano nel medeſimo punto F; onde, ſe ſi cuopra una parte di eſſo, reſtandone ſcoperta un' altra comunque piccola, e di figura comunque irregolare, mancheranno in F i raggi di quella parte di oggettivo, che manca, e però mancherà la chiarezza, ma non mancherà nulla al campo. Se l'oggettivo ſi rompe, e ne rimane un pezzo di ſufficiente grandezza; incaſtrato eſſo in un cartone, che ſuppliſca alle veci di quello, che manca, ſi vedrà la ſteſſa quantità dell'oggetto; anzi ſe quella ſuperficie, che reſta ſarà grande, quanto ſi era prima tutta la ſuperficie dell' apertura; la chiarezza ſarà pure la ſteſſa, e la diſtinzione ſarà parimenti la ſteſſa, ove l'oggettivo ſia

compoſto in modo da unir i colori in un punto, e negli oggettivi comuni ſarà quaſi la ſteſſa.

60. La neceſſità di una conſiderabile apertura nella lente oculare per avere un campo conſiderabile fa, che la medeſima oculare non ſi poſſa fare troppo acuta, cioè di curvatura troppo grande; perchè allora ſi piglierebbe una parte troppo grande della ſuperficie intera della ſfera, la quale coſa farebbe creſcere troppo l'errore della figura ſferica. Dall' altra parte l'ingrandimento, perchè ſia conſiderabile, richiede un'oculare molto acuta. Per ovviare a queſto incomodo, in vece di una ſola oculare TT', ſe ne ſogliono alle volte mettere due, una più dolce, e più grande, che cominci a far convergere il raggio CG' verſo l'aſſe, e l'altra più acuta, e più piccola meſſa più avanti, dove queſto già ſi è accoſtato all' aſſe medeſimo, e allora le due lenti fanno l'ufficio di una. Al modo iſteſſo ne fanno due in vece di una ſola VV', indi la XX' più acuta, e ſemplice, formando la combinazione di 5 oculari: ma trovo, che ſe le due, che devono far l'ufficio di una, ſi fanno proſſimamente uguali, e ſi mettano una accanto all' altra, ſi ha lo ſteſſo ingrandimento, che facendo la

ſe-

ſeconda di eſſe due più acuta, e più piccola.

61. L' inconveniente dell' acutezza della lente oculare ſi accreſce aſſai, quando eſſa ſi ha da fare compoſta di due ſoſtanze, che correggano l'errore della diverſa refrangibilità, come ſi è accennato al num. 44., dove ſe n'è data anche la ragione, e accennato il rimedio, conſiſtente nel fare la prima T T' di vetro comune ſemplice, e più acuta, indi la ſeconda V V' pure di vetro comune, e ſemplice, ma più dolce, e finalmente la terza X X' compoſta, ma ugualmente dolce, come lo è la ſeconda; onde la ſua parte conveſſa non debba eſſere di una così grande curvatura. Si può impiccolire la curvatura, e addolcire la parte conveſſa al doppio più, facendone due, le quali chiudano in mezzo la concava. *

62. Si vedrà tutto queſto meglio con un eſempio. Se ſi abbia a fare un cannocchiale comune di 3 piedi; eſſo non tollera neppure un' oculare di un pollice, che gli darebbe un ingrandimento di 36; e ſecondo M. Gentil nell' Aſtronomia di M. de la Lande al libro 14, appena ne tollera una di 17 linee, che non arriva a dargli

* Su queſto ſi dirà di più al §. 8., come ſi è pure accennato nella annotazione al num. 45.

un ingrandimento di 22. Allora l'apertura ſi può fare ſufficiente per un campo abbaſtanza grande: un pollice di apertura nel diaframma, che è $\frac{1}{36}$ della diſtanza focale dell' oggettivo dà un campo di minuti 96, o ſia di gradi 1 min. 36, operando ſecondo la regola del num. 57., e quell' apertura è abbaſtanza minore del raggio della ſfericità, il quale è quaſi uguale alla diſtanza focale di linee 17.

63. Ma il Dollond, come ſi è detto al num. 31., cogli oggettivi compoſti è arrivato a fare cannocchiali di 3 piedi di foco con 150 di ingrandimento ſenza turbare la diſtinzione, nè la chiarezza. Allora conviene, che un' oculare, la quale ſi adopri ſola, ſia più acuta anche di linee $3.\frac{1}{2}$. Se a queſta ſi diano linee 2 di apertura, ſi avrà un campo di 16 minuti: eſſe ſi potranno anche dare, maſſime, ſe in cambio di una ſe ne mettano due unite di 7 linee di foco ciaſcuna, le quali inſieme l'avranno di $3.\frac{1}{2}$. Ma ſe ſi dovrà adoprare una lente compoſta alla Dollondiana, converrà, che la conveſſa abbia una ſola linea di foco, la quale ſarà una lentina eccеſſivamente piccola, e ſuſcettibile di una apertura così ſtretta, che la piccolezza del campo ſarà intollerabile.

PAR-

PARTE SECONDA.

Schiarimento, e dimoſtrazioni di varj punti più eſſenziali della parte prima.

§. VII.

Del raggio obbliquo all' aſſe, che eſce colla direzione, con cui è entrato.

64. SI è toccato queſto punto al num. 17. Si diſtenderà qui più ampiamente, e ſi determinerà ogni coſa colle ſue dimoſtrazioni, eſſendo un punto, che intereſſa l'applicazione de' cannocchiali agli iſtromenti aſtronomici, e geodetici.

65. Sieno (fig. 2.) C, C` i centri della ſfericità delle due ſuperficie A D B, A D` B di una lente conveſſa da ambe le parti: e tra tutti i raggi, i quali arrivano con una data direzione F H obbliqua all' aſſe, ve ne ſarà uno, il quale dopo la prima refrazione in H, avendo attraverſato la lente per una retta H H`, avrà in H` una refrazione contraria, e uguale, e però uſcirà con una direzione H` F` parallela alla H F. Imperocchè ſtorcendoſi eſſi in dentro per

unirſi da tutte le parti, ve ne dovrà eſſere qualcuno, che ricuperi nella ſeconda refrazione la direzione perduta nella prima. E' coſa manifeſta, che ciò accaderà, ove i piani tangenti delle ſuperficie ſferiche in H, H' ſaranno paralleli fra loro, dovendo ivi ſuccedere quello, che ſuccede a' raggi, quando paſſano attraverſo alle laſtre piane di criſtallo.

66. E' facile a concepire, che detto raggio deve eſſere in un piano, che paſſi per l'aſſe CC' della lente, e ADBD' ſarà la ſezione della lente fatta per eſſo piano. Per trovarlo, ſieno GG' i concorſi di FH, F' H' coll'aſſe, il quale ſia ſegato in E da HH', e ſi tirino CH, C'H'. Dovendo queſte eſſere perpendicolari a' piani tangenti paralleli, ſaranno parallele fra ſe, e però ſi avrà EC: EC':: CH. C'H'. Si ha poi per la proporzionalità de' lati co' ſeni degli angoli oppoſti $\frac{EH \times \text{ſin. } EHC}{EC} = \text{ſin. } ECH$, $\frac{GH \times \text{ſin. } GHC}{GC} = \text{ſin. } GCH$. Eſſendo GCH lo ſteſſo angolo, che ECH, ſaranno uguali que' due valori, onde ſarà EH: GH:: ſin. GHC × EC: ſin. EHC × GC. Lo ſteſſo ſi avrà ſoſtituendo C', H', D', G' per C, H, D, G.

67.

67. Dalla prima di queſte proporzioni ſi ha, che eſſendo data la diſtanza CC', e i ſemidiametri delle sfericità CH, C'H', ſarà dato il punto E, che divide quella in ragione di queſti. Si vede poi, che il medeſimo punto ſtarà nel mezzo della groſſezza della lente, ove eſſa ſia iſoſcele.

68. Si vede pure, che nelle lenti conveſſo-conveſſe eſſo punto ſarà ſempre dentro la lente più vicino alla ſuperficie di minor raggio. La determinazione ſi ſtende anche alle lenti piano-conveſſe, concavo-conveſſe, piano-concave, concavo-concave, e ſi potrebbe adattar anche a' vetri piani da ambe le parti; ma per iſvolgere tutti i caſi, converrebbe moltiplicar le figure, o adoprare una formola algebraica, che deſſe ogni coſa co' valori mutati di poſitivo in negativo, e viceverſa, o creſciuti all' infinito.

69. Qui ſi poſſono accennare i riſultati i più rimarcabili. Nelle lenti concavo-concave ſtarà pure il punto E ſempre nella groſſezza del vetro; nelle piano-conveſſe, o piano-concave ſtarà nell' eſtremità di eſſa ſulla ſuperficie curva; ma nelle concavo-conveſſe anderà fuora dalla parte della ſuperficie più curva, e tanto

più lontano, quanto più ſi accoſterà all' uguaglità la ragion de' ſemidiametri, andando all' infinito nel caſo della uguaglianza. Nelle conveſſo-conveſſe, e piano-conveſſe vi ſarà ſempre un raggio, e ſarà un ſolo, che uſcirà colla direzione, con cui è entrato: in tutte le altre ve ne ſarà uno, finchè la direzione fa piccol angolo coll' aſſe, e fino a un limite di eſſo angolo, che può facilmente determinarſi, il quale nelle concavo-conveſſe è tanto minore, quanto la ragione de' ſemidiametri ſi accoſta più all' ugualità, non eſſendovi nel caſo di eſſa ugualità, che il ſolo raggio venuto per l' aſſe, che goda il privilegio di uſcire con quella direzione, con cui è venuto. I vetri concavo-conveſſi ſono meno idonei ad eſſere oggettivi di cannocchiali ad uſo di Aſtronomia, anche per queſto ſcoſtamento dalla lente del punto E, il quale ha in eſſi molto uſo.

70. Dalla ſeconda proporzione facilmente ſi ricava il ſito de' punti G, G'. Imperocchè l'angolo GHC è quello dell' incidenza, EHC è l'angolo rifranto; onde è data la ragion de' loro ſeni; ed eſſendo proſſime alla ragion d' uguaglianza le rette GC, EC nelle lenti, nelle quali la groſſezza è piccola riſpetto al ſemidia-

diametro CH, e il punto E cade col G dentro eſſa groſſezza, ſarà data la ragione della EH alla GH: eſſa è quella del ſeno di EGH angolo della data direzione coll' aſſe al ſeno di GEH: quindi ſarà noto queſt' angolo, e però anche l'angolo reſiduo EHG nel triangolo EGH. Il primo di queſti due darà il punto H, e il ſecondo il punto G per mezzo di eſſo H.

71. Nelle lettere accentate ſi avrà lo ſteſſo; giacchè alternandoſi nell'entrar, e uſcire le ragioni de' ſeni, quel di G`H`C`, che nell' uſcire è l'angolo rifranto, a quel di EH`C`, che ivi è l'angolo di incidenza, torna ad aver la ragion medeſima de' ſeni di GHC, EHC. Ma trovato G ſi trova G` più facilmente; giacchè per le HG, H`G` parallele ſta EG. EG`:: EH. EH`:: CH. C`H`.

72. Ne' vetri la ragion di que' ſeni è proſſimamente 3 a 2; onde ſarà EH. GH:: 3. 2. Se in oltre la direzione ſarà inclinata all' aſſe in un piccol angolo, come lo è ſempre nel caſo degli oggettivi; il punto H ſarà così vicino a D, che la ragione di EH a GH potrà pigliarſi per quella di ED a GD. Quindi ſarà GD $=\frac{2}{3}$ ED. Ove poi la lente ſia iſoſcele,

ſi avrà $ED = ED'$, e però tanto GD, quanto $G'D' = \frac{1}{7} DD'$, come ſi è affermato al numero 17.

73. Se FHG ſi prolunghi indefinitamente in I; la retta HI ſarà tanto vicina alla retta $H'F'$, e ammendue tanto vicine al punto E, che poſſono pigliarſi per una ſola retta tirata da quel punto d'oggetto, da cui vengono i raggi, pel punto E conſiderato come centro dell'oggettivo. Imperocchè la diſtanza di eſſe rette da E ſarà uguale alla piccola EG moltiplicata pel ſeno di quel piccolo angolo EGI, che la direzione del raggio FG fa coll'aſſe. Per queſto ne' cannocchiali applicati agli uſi aſtronomici, e geodetici, ſi ſuole chiamare *linea di fiducia* quella, che dall'incrociatura de' fili collocati ad uſo di micrometro nel foco dell'oggettivo, in cui ſi forma l'immagine dell'oggetto, va al centro di eſſo oggettivo, la quale linea prodotta anderebbe a quel punto d'oggetto, che è coperto da eſſa incrociatura: benchè realmente la vera linea di fiducia è quella, che paſſa per quel punto dato G'. Queſta proprietà di queſta linea è ſtata il fondamento dell'applicazione del cannocchiale a' quadranti, ſeſtanti, ſettori, ed altri ſimili iſtromenti in vece delle

an-

antiche pinnule, o diottre, e queſta è una delle ragioni, per cui l'andare il punto E ne' meniſchi, che ſono vetri concavo-conveſſi, fuori della lente, rende queſta forma meno idonea per ſervire di oggettivi de' cannocchiali, che ſi debbano applicare a' ſuddetti iſtromenti.

74. Vi ſono delle ricerche in Aſtronomia così delicate, che richiedono, ſi tenga conto della preciſa ſituazione del punto G'. Nel foco dell' oggettivo ſi ſuole collocare ad uſo di micrometro un filo mobile, o più fili paralleli fiſſi. Se ſi vuole miſurare con eſattezza il valor angolare di una data diſtanza di que' fili, paragonandola colla loro diſtanza dall' oggettivo, per vedere, che angolo ivi ſottende quella; conviene andare fino al punto G', il quale nelle lenti iſoſceli va, come ſi è detto, indentro fino ad un terzo della groſſezza. Nelle lenti ſcalene, cioè di ſfericità diſuguali, ſi trova facilmente il punto G' colle proporzioni eſpoſte. I ſemidiametri delle ſfericità CH, C'H' ſi poſſono trovare anche in una lente già lavorata con un metodo, che ſi trova nella Diſſertazione citata qui al num. 34. Dati eſſi, ſi troverà E, eſſendo anche proſſimamente

te DE. D'E:: DH. D'H' :: CH. C'H', ed eſſendo D'G' = $\frac{2}{3}$ D'E.

75. Queſto ſteſſo riguardo ſi deve avere, ove ſi voglia con queſto mezzo trovare coll'ultima eſattezza il campo del cannocchiale, il quale, come ſi trovi, ſi moſtra qui al num. 31. La ſcrupoloſa eſattezza è neceſſaria, ove ſi voglia far uſo del diaframma circolare per micrometro con un metodo, che io ho eſpoſto in una mia antica diſſertazione *De novo Teleſcopii uſu ad objecta cæleſtia determinanda* riſtampata negli Atti di Lipſia all'anno 1740. Ma fortunatamente vi ſono degli altri metodi per trovare detto campo, e detto valor de' micrometri coll' ajuto di oggetti o terreſtri, o celeſti veduti col cannocchiale medeſimo. Ad ogni modo è coſa utile l'avere ſvolto queſta teoria, perchè non rimanga ingannato, chi pur ſi voleſſe ſervire di quel metodo. Se il cannocchiale ſia di 3 piedi di foco, la groſſezza del vetro di due linee, che ſono $\frac{1}{72}$ di un piede; un terzo della groſſezza ſarebbe $\frac{1}{9 \times 72} = \frac{1}{648}$ della diſtanza focale. In un campo di gradi 2

=

= 7200'' ſi sbaglierebbe di 11 ſecondi coll' avere traſcurata queſta avvertenza. Lo sbaglio potrebbe eſſere doppio; ſe l' oggettivo foſſe piano-conveſſo, e anche maggiore in un meniſco.

76. Queſte rifleſſioni fanno vedere, che ſe in un cannocchiale ſi è ben determinato il valor del micrometro; nel levar l' oggettivo per pulirlo, convien badar di rimetterlo colla medeſima faccia verſo il micrometro iſteſſo, ſe eſſo oggettivo non è iſoſcele; giacchè le due diſtanze del punto G` dalla ſuperficie interna ſaranno diverſe nelle due poſizioni appunto in ragione de' ſemidiametri delle sfericità; onde ſi muterà il valor del micrometro.

77. La proprietà della linea di fiducia, che dalla incrociatura de' fili del micrometro paſſa per un punto ſituato nell' aſſe dell' oggettivo, rende neceſſaria un' altra precauzione, ove queſto ſi adatta agli iſtromenti Aſtronomici. O conviene, che detto aſſe paſſi appunto pel centro della lente oggettiva, nel qual caſo ſi chiama eſſa lente ben centrata, o conviene, movendo eſſo oggettivo per pulirlo, aver ſegnato nel ſuo lembo un punto, che corriſponda a un punto del lembo della buſſola, per poterlo rimettere nella poſizione di prima: altri-

trimente la linea di fiducia, che ſi deve far parallela al piano dell' iſtromento, non lo ſarà più, nè il valore della ſua verificazione riſpetto al principio della numerazione del lembo reſterà, qual' era.

78. Gli oggettivi mal centrati hanno anche l'imperfezione, che in eſſi l'errore della figura ſferica è maggiore; onde deve premere molto il ben centrarli. Se ſieno ben centrati ſi può conoſcere, facendo girare l'oggettivo intorno a ſe, e vedendo, ſe intanto un oggetto guardato col cannocchiale muta poſizione riſpetto a' fili del micrometro, la quale coſa ſe accade, l'oggettivo è mal centrato. Vi ſono degli altri metodi; ma in quella medeſima diſſertazione ve n'è uno facile, con cui ſi determina eſattiſſimamente il punto della ſua ſuperficie, per cui paſſa l'aſſe. Allora ſi può far un circolo intorno a quel punto, e toglier via il reſiduo, o cuoprir il reſto con carta nera, nel qual caſo converrà poi badar bene di rimettere ſempre eſſo oggettivo nella ſua buſſola nella poſizione medeſima, in cui era, quando l'iſtromento ſi è rettificato, perchè altrimente il centro di quella apertura laſciata muterebbe la diſtanza dal piano dell' iſtromento.

§.

§. VIII.

Del rimedio propoſto al num. 37., e 44. per impedire i colori, che naſcono dalle oculari.

79. Sieno nella fig. 3. i punti T, G, G', T', *l*, L, V', *r*, R', R, V, O, gli ſteſſi, che nella 1., e ſia *l'* il foco de' raggi violacei paralleli della lente V'V, *e* il foco de' raggi ſteſſi divergenti da G, *e'* il foco per li raggi violacei, che partano da G'; Q' l'incontro de' raggi R'H' roſſo, *rh* violaceo della figura 1. Per li teoremi cogniti, che appartengono a' fochi, ſarà $Gl'.GR :: l'R.Re$. Naſce queſto dalla formola generale dimoſtrata anche da me nella diſſertazione citata al num. 31., per cui ſe la diſtanza focale de' raggi paralleli ſia b, la diſtanza del punto radiante p, la diſtanza focale de' raggi divergenti da eſſo r, ſi ha $\frac{1}{b}-\frac{1}{p}=\frac{1}{r}$, e però $r=\frac{p\,b}{p-b}$, * cioè $Gl'=GR-Rl'=p-b.GR=p::l'R=b.Re=r$. Queſta medeſima formola giuſtifica quello, che ſi è detto al num. 40., che ſta (fig. 1.) $LG.CG::FG.FC$, venendo ivi ad eſſere $LG=r$, $CG=p$, $FG=b$, $FC=p-b$, quan-

* Si dimoſtrerà giù al num. 115.

quantità proporzionali in vigor di eſſa formola.

80. Se ora (fig. 3.) oltre al raggio G' *l r* violaceo ne partiſſero da G' due altri per G' *l'* *r`*, e per G' R ; queſto ultimo tirerebbe innanzi ſenſibilmente irrefratto conforme a quello, che ſi è veduto al num. 73., e il ſecondo paſſando pel foco *l'* de' raggi paralleli uſcirebbe da *r`* parallelamente all' aſſe, venendo ad incontrare eſſo ultimo nel foco *e'*, in cui ad eſſi dovrebbe unirſi ancora il primo, dovendo rimanere il punto *e`* di fianco ad *e* nella ſteſſa diſtanza *e` r'* = *e* R ; onde uſcendo anche parallelo all' aſſe il raggio roſſo R' Q` paſſato per L foco de' roſſi, ſarà R' Q'. *r' e`* :: *r* R'. *r r'*.

81. Eſſendo poi L il foco de' raggi roſſi paralleli di ammendue le lenti TT`, VV', ed *l*, *l'*, i fochi de' violacei appartenenti quello alla prima, queſto alla ſeconda ; ſarà *l* L. L *l'* :: LG. LR ; giacchè per quello, che ſulli fochi delle lenti dimoſtrò già il Newton da principio, appena ſcoperta la diverſa refrangibilità de' raggi, ſtanno le diſtanze focali di due colori qualunque nella ragione reciproca delle qualità refrattive di eſſi ; onde ne' ve-

tri comuni ſono $Ll = \frac{1}{28} LG$, $Ll' = \frac{1}{28} LR$. *

Quindi ſarà come lL ad ll', così GL, a GR, ed eſſendo proſſimamente $Gl' = GL$ per la piccolezza della Ll' riſpetto ad eſſe, ſarà $lL . ll' :: Gl' . GR :: l'R . Re$ (num. 79.).

82. La ſteſſa piccolezza delle lL, Ll' riſpetto alla $G'L$, fa, che le tre $G'l$, $G'L$, $G'l'$ ſi poſſano conſiderare come parallele. Quindi ſe le prime due vengano ad eſſere incontrate in c, b da una retta parallela alla $V`V$ tirata da $l'$; ſarà $lL . ll' :: cb . cl' :: rR` . rr' :: R'Q' . r'e'$. Eſſendo dunque pel num. precedente anche $lL . ll' :: l'R . Re$, ſarà $R`Q' . r'e` :: l'R . Re$, onde eſſendo $r`e` = Re$, ſarà anche $R'Q' = Rl'$.

83. Quindi eſſendo Rl' proſſimamente $= RL = RO$, l'unione de' raggi $G'R'$ roſſo, $G'r$ violaceo ſeparati dalla prima lente TT' ſi farà in vigore della ſeconda VV' in un punto Q', che ſtarà (Fig. 1.) in O' di fianco ad O nella ſteſſa comune diſtanza focale delle due lenti VV', XX', conforme ſi è affermato al num. 44. Se dunque la lente XX' ſarà compoſta in modo da unir tutti in un punto i raggi roſſi, e violacei, che ad eſſa arrivino paralleli, rimanderà

* Si dimoſtrerà giù al num. 125.

pure per due rette parallele H'P, *bp*` i raggi Q'H', Q'*b* roſſo, e violaceo, che partiti da quel punto G' arrivino ad eſſa per Q'H', Q'*b*, ed eſſi entrati così paralleli nell' occhio ſi uniranno nel fondo di eſſo in un punto medeſimo, rimediandoſi così a quella ſeparazione fatta per NG'*n* dalla prima lente, e per M*u*m dalla terza.

84. Qui ſi può ora dimoſtrar facilmente anche quello, che ſi è avanzato al num. 26., riſervando nella nota la dimoſtrazione a queſto §., cioè, che l'angolo M*u*m è un poco minore di NG'*n*. Se per Q'*b* veniſſero alla lente ſemplice XX' due raggi uno roſſo, l'altro violaceo; uſcirebbe il ſecondo per la retta *bp*, e il primo per una *bp*` parallela alla H'P, dovendo ammendue i roſſi Q`H', Q'*b* uſcire paralleli a quello, che andaſſe per Q'H, e però paralleli fra ſe. Quindi prodotta eſſa *bp*` indietro in *m*', l'angolo M*u*m ſarebbe uguale ad *mbm*' differenza de' due Q'*bm*', Q'*bm*, o ſia delle due refrazioni Q*bp*, Q*bp*'. Ora l'angolo Q*bp*' è minore dell'eſterno *bp*'H, il quale è = H'PH = R'LR = GLG`, che è minore dell'eſterno CG'N. Quindi la refrazione Q*bp*' ſarà un poco minore della CG'N, e però qui la differenza delle refrazioni del roſſo, e vio-

la-

laceo $p'bp$ ſarà minore della $NG'n$, che ſi aveva ivi, come ſi era affermato in quel numero.

85. Queſto fa vedere, che i colori originati dalle lenti oculari devono eſſere minori, ove ſi ritenga tutta la combinazione terreſtre di 3 lenti, che ove ſe ne adopra una ſola, come ſi uſa nelle oſſervazioni aſtronomiche. Ma queſto vantaggio è piccolo, perchè Qbp' non differiſce da $bp'H$, che per l'angolo $bQH = rQ'R'$, il quale non è maggiore dell'$rG'R'$, o ſia $NG'n$, che in ragione proſſimamente di $R'G'$ ad $R'Q'$, cioè, ove le prime due lenti ſieno uguali, al doppio maggiore; onde eſſendo $NG'n$ aſſai piccolo, ſarà piccolo anche il ſuo doppio: così pure il CLG' non differiſce dal $CG'N$, che per l'angolo LCG' minore di eſſo in ragione dell' unità al numero dell' ingrandimento. Sarà conſiderabile queſto vantaggio ſolo, ove l'ingrandimento ſia piccolo, nel qual caſo anche l'errore intero, dopo il paſſaggio per una ſola lente, è già aſſai piccolo per ſe ſteſſo.

86. Queſta diminuzione di errore, che naſce dalla aggiunta delle altre due lenti, dà ſubito qualche ſperanza di fare qualche molto più conſiderabile diminuzione di queſto errore

coll' adoprare altre combinazioni di lenti, o altro numero di eſſe. Ma ſenza fare ulteriori ricerche, e combinazioni più complicate, ſi preſenta ſubito la maniera facile, e ſemplice di diſtruggerlo nulla meno di quello, che la compoſizione del Dollond diſtrugge quello dell' oggettivo, unendo il color violaceo col roſſo; fatta la qual unione, rimane molto poco diſunito da eſſi il verde, e gli altri intermedj. Baſta a queſt' effetto far compoſta la prima lente, ove eſſa ſi adopri ſola, come ſi è detto al num. 36., e ove per raddrizzare l'oggetto ſe ne adoprino tre, baſta far compoſta la ſola terza più vicina all' occhio, facendo ſemplici di vetro comune le due precedenti, come ſi è detto al num. 37.

87. In queſto modo ſi avrà quell' altro vantaggio, di cui ſi è parlato al num. 44, e 61., di poter fare la compoſta aſſai più dolce, facendo acuta la prima, che è la più vicina all' oggettivo, quanto richiede l'ingrandimento, e dolci le altre due, quanto richiede la facilità di lavorare la terza compoſta. Si è detto al num. 44., che ſi può fare la parte conveſſa della compoſta iſoſcele, e unirle una concava idonea, e al num. 61., che ſi può addolcire la parte

con-

conveſſa al doppio più facendone due conveſſe, che chiudano in mezzo una concava: ſi è pur detto, che è meglio nella compoſizione delle oculari badar a correggere il ſolo errore della diverſa refrangibilità ſenza badar a quel della figura ſferica, che in eſſe è piccoliſſimo. Ora per rimediare al ſolo errore della diverſa refrangibilità, che induce i colori, baſta * adoprare due materie, che abbiano diverſa qualità diſtrattiva di raggi, e far la concava di quella, che diſtrae più, ed una, o due conveſſe dell'altra: deve la conveſſa, quando è una, e iſoſcele, avere il raggio delle due ſfericità a quello della concava in ragione della ſua qualità diſtrattiva a quell'altra, e ſe ſon due, deve l'una, e l'altra eſſere dolce al doppio più di quello, che porti queſta proporzione.

88. Due ſono le materie le più cognite, più diſtraenti del vetro comune, il flint, e lo ſtraſs: il primo ha la qualità diſtrattiva a quella del vetro comune come 3 a 2, il ſecondo l'ha doppia. Quindi ſe ſi vogliono lenti iſoſceli, e ſi mette una ſola conveſſa; il ſuo raggio di ſfericità a quello del cavo flint deve

* Le coſe affermate qui, e nel num. 88. ſaranno dimoſtrate nel §. 9.

eſſere come 2 a 3: ſe ſi vogliono due, che chiudano il cavo; il loro raggio al raggio del cavo deve eſſere come 4 a 3., e in ammendue i caſi il foco anderà lontano, come anderebbe, ſe vi foſſe una lente ſemplice, di raggio un poco maggiore di *6*. Se ſi adopra pel cavo lo ſtraſs con una ſola lente conveſſa; dovrà queſta avere il raggio della ſfericità al doppio più piccolo: ſe ſi adoprano due, dovranno ammendue averlo uguale, e il foco anderà lontano un poco più, che adoprando una ſola di quelle due conveſſe del ſecondo caſo. Queſta ultima combinazione avrà un altro grande vantaggio, che le ſuperficie contigue combaciandoſi formeranno come una ſola lente, e non vi ſarà quella perdita di luce, che cagionano le rifleſſioni interne, che vi ſono ſempre, e ben ſenſibili, quando ſi paſſa dall'aria nel vetro, o dal vetro nell'aria, e che ſono proſſimamente nulle, ove ſi paſſa da un vetro ad un altro tanto meno differente di ſpecie di quello ſia l'aria, e il vetro. Se ſi voglia lo ſteſſo vantaggio nel flint; allora non poſſono eſſere iſoſceli le parti conveſſe ſue compagne: dovrà in ammendue una ſfericità eſſer quella della concava, l'altra al doppio più dolce, e

ſi avrà il foco un poco più lontano di quello ſi avrebbe con una ſola conveſſa di vetro comune, la quale aveſſe ammendue le ſuperficie uguali alle due più dolci delle conveſſe. Se ſi voglia una compoſta di un pollice di foco; ſi faccia la concava di un poco meno di mezzo pollice di raggio, le due ſuperficie interne delle due conveſſe di un raggio uguale a quel della concava, le due eſterne di un raggio al doppio maggiore. Ma così la ſuperficie interna diventa più acuta di quello, che ſarebbe, ſe le due conveſſe foſſero iſoſceli, nel qual caſo in vece di un poco meno di mezzo pollice verrebbe per ammendue le ſuperficie un poco meno di $\frac{2}{3}$, cioè di 8 linee.

89. Per altro, come i diverſi vetri hanno ſempre delle qualità refrattive, e diſtrattive diverſe, il miglior partito tanto per l'oggettivo, quanto per le oculari ſi è, il fare de' priſmetti delle materie, che ſi vogliano adoprare, e farne determinare le individue qualità; indi far fare i calcoli ſulle formole, che già vi ſono in tanti libri, come le ho ancor io nella diſſertazione citata al num. 34.: con eſſe ſi potranno fare le combinazioni le più vantaggioſe, per non avere raggi di ſfericità troppo

piccoli, e rimediare a que' gran colori, che naſcono dalle oculari, quando è grande il campo, e l'ingrandimento. Baſta qui l'avere ſcoperta, e ſpiegata queſta fortiſſima ſorgente di eſſi poco conoſciuta, o poco curata fin'ora, e averne indicati i rimedj, tra li quali per aver una coſa ſufficiente, il migliore partito ſarà l'adoprare per terza lente proſſima all'occhio una compoſta di due iſoſceli conveſſe di vetro comune, ed una iſoſcele concava di ſtraſs, farle tutte della ſteſſa sfericità, e combacianti.

90. Tre anni addietro feci adattare un' oculare così compoſta di flint, e vetro comune ad un cannocchiale in Torino da un bravo Cannocchialaro, e la coſa riuſcì a maraviglia: ſi vide un campo, che era ben grande, netto fino al margine, e ſenza colori, benchè foſſe conſiderabile l'ingrandimento. Detti la combinazione pel flint e ſtraſs al Sig. Canonico Gio: Franceſco Fromond Cremoneſe, che ſi diletta di queſti lavori, e ne fa degli eccellenti: mi ſcriſſe ultimamente, che la coſa gli era riuſcita ottimamente, e che ſi vedeva un effetto maraviglioſo. Se queſto metodo ſi rende più comune, e molto più ſe, come ho accennato al num. 31., ſi trovano tre ſoſtanze idonee a fare

l'unio-

l'unione de' colori eſtremi con quel di mezzo; allora i cannocchiali ſi potranno chiamare acromatici con molto maggior ragione, come ho detto al num. 35.

91. Aggiungerò ſolamente qui in ultimo due coſe: la prima, che il rimedio di fare l'oculare compoſta ſi può applicare anche a' cannocchiali, che hanno l'oggettivo comune. Così ſi leveranno ad eſſi tutti que' colori ſenſibili all' occhio, che vi cagionano le oculari: la ſeconda, che l'oculare compoſta ſi può adattare anche a que' cannocchiali, che ſi chiamano Galileani, e ſono compoſti di un oggettivo conveſſo, e di un' oculare concava, e deve ciò giovare infinitamente agli occhialini da teatro, ne' quali comunemente ſi vedono, ſe il campo è grandetto, de' grandi colori. Baſta fare di flint, o ſtraſs un conveſſo, e di vetro comune uno, o due concavi, ritenendo le miſure ſuddette: ſi avrà una lente compoſta cava, che piegherà nello ſteſſo angolo i colori eſtremi venuti dallo ſteſſo punto d'oggetto, facendo, che i coni di eſſi ſi voltino in funicelle di faſcetti ſenſibilmente paralleli in modo, che non ſolo ſieno paralleli i fili dello ſteſſo colore fra loro, ma lo ſia una funicella di un

co-

colore con quella di un altro, impedendo così que' colori, che naſcono dalle oculari ſemplici, e ſono generalmente quelli, che ſi vedono in ogni ſorte di cannocchiali, fino (num. 27.) in quelli di rifleſſione, quando hanno notabile ingrandimento unito con un campo notabile.

§. IX.

De' fochi delle lenti.

92. LE formole tutte per li fochi delle lenti, ove ſi diſprezzi l'errore della figura ſferica, ſi ricavano da una ſempliciſſima, che appartiene ad una ſola ſuperficie, e ſi trova col medeſimo metodo, che ſi è adoprato al num. *66.* Arrivi in H (fig. 4.) un raggio FH ad una ſuperficie ſferica refringente, il cui centro ſia C, e ſi concepiſca il ſemidiametro CH prodotto indefinitamente in I, indi nel piano CHF un altro raggio LD diretto al centro C, eſſendo G il concorſo delle due direzioni LD, FH, e l'arco ADB l'interſezione del piano ſteſſo CHF colla ſuperficie ſferica: ſia poi HE la direzione del raggio

gio rifranto, che incontri DG in E. Sarà $\frac{EH}{\text{fin. ECH}} = \frac{EC}{\text{fin. EHC}}$; $\frac{GH}{\text{fin. GCH}} = \frac{GC}{\text{fin. GHC}}$. Quindi eſſendo il ſeno di ECH lo ſteſſo, che di GCH, ſarà $EH : GH :: \frac{EC}{\text{fin. EHC}} : \frac{GC}{\text{fin. GHC}} ::$ EC × fin. GHC : GC × fin. EHC.

93. Ora l'angolo GHC = IHF è l'angolo d'incidenza, EHC l'angolo rifranto (io chiamo angolo rifranto quello, che comunemente chiamano angolo di refrazione, per diſtinguerlo dal GHE, che è la refrazione, eſſendo la differenza delle due direzioni, di quella, che aveva il raggio prima di torcere, e di quella, che ha acquiſtata dopo). La ragione de' loro ſeni deve eſſere coſtante: ſi faccia eſſa = m, cioè ſia come m ad 1, eſſendo m il valore, che naſce, ove ſi divida il ſeno di qualunque angolo d' incidenza pel ſeno dell' angolo rifranto ſuo corriſpondente: in oltre ſia il raggio DC = a, la diſtanza GD = p, la ED = x, onde reſta EC = $x - a$, GC = $p - a$, e ſe l' arco DH ſia piccolo, potrà pigliarſi la EH per ED = x, e la GH per GD = p. Quindi meſſi queſti valori nella proporzione trovata, ſarà $x . p :: m (x - a) . p - a$.

$p - a$. Onde moltiplicando gli eſtremi, e i medj $px - ax = mpx - mpa$, cioè $mpa = mpx - px + ax$, e però $\frac{1}{x} = \frac{m-1}{ma} + \frac{1}{mp}$.

94. Queſta è la formola pel foco E, in cui ſi devono radunare tutti i raggi F H, che ſi concepiſcano venire convergenti a un punto G dell'aſſe G D di una ſuperficie ſferica A D B. Accoſtandoſi il punto H al punto D in infinito, finchè ricada in eſſo, ſi accoſterà la formola in infinito all'eſattezza coll'accoſtarſi in infinito le E H, G H, alle E D, G D. Scoſtandoſi il punto H, la diſuguaglianza di eſſe rette ſuppoſte uguali cagiona un errore, che ſi chiama errore della figura ſferica, e queſt' errore medeſimo ſi determina con una formola, che dà la differenza di quelle rette per la diſtanza D H del raggio incidente dall'aſſe, la quale diſtanza, ove è maſſima, viene ad eſſere il ſemidiametro dell' apertura della ſuperficie. La formola per queſto errore è alquanto complicata, onde la laſceremo qui da parte, e ſolo faremo vedere, come dalla formola trovata naſcono le formole, e i teoremi i più intereſſanti, che appartengono alle lenti, diſprezzando ancora la loro groſſezza, che ſuole eſſere

aſſai

affai piccola riſpetto a' raggi delle ſfericità. Si può determinare facilmente coll'ajuto della formola ſteſſa trovata qui l'effetto, che naſce nella diſtanza del foco dalla groſſezza della lente; ma come anche queſto da una parte è piccolo, dall' altra rende le formole più complicate, lo traſcureremo ancor eſſo.

95. In primo luogo ſi noti, che nella ſuddetta formola a è il raggio della ſfericità, p la diſtanza dalla ſuperficie, a cui convergono i raggi, $m:1$ la ragione del ſeno di incidenza al ſeno dell' angolo rifranto, x la diſtanza del foco infinitamente proſſima alla vera per gli ultimi raggi, che ſi accoſtano infinitamente vicino all'aſſe, in cui alla fine ricadono. La formola è cavata da una figura, in cui i raggi convergono alla diſtanza p, urtano in una ſuperficie conveſſa verſo la via, per cui vengono, ſuperficie tale, che l'angolo d' incidenza ſia maggiore del rifranto, facendoſi la refrazione verſo il perpendicolo, come accade quaſi ſempre, quando ſi paſſa dal mezzo raro al mezzo denſo: i raggi in eſſa convergono verſo il punto E, che in tal caſo ſi chiama foco reale; ſe all' oppoſto divergeſſero cadendo eſſo dalla parte oppoſta riſpetto al punto D; ſi chiamereb-

be

be il medeſimo foco virtuale. Se i raggi veniſſero paralleli; il valore *p* ſarebbe infinito: ſe veniſſero divergenti, come accade ſempre, quando partono da un punto radioſo; eſſo valore ſarebbe negativo. Se la ſuperficie è piana; ſi deve conſiderare il raggio della sfericità *a* come infinito: ſe ſia concava verſo la parte, da cui vengono i raggi; ſi deve conſiderare come negativo, e tale è il raggio della ſeconda sfericità in una lente conveſſa da ambe le parti; giacchè il raggio, che vi arriva per la groſſezza interna della lente, la trova concava verſo quella parte, da cui viene, e non conveſſa. Finalmente ſe il valor *x* della formola rieſce poſitivo; il foco ſarà reale, e i raggi dopo la refrazione convergeranno: ſe eſſo riuſcirà infinito, uſciranno paralleli, andando l'E all' infinito: ſe riuſcirà negativo; giacerà E dalla parte oppoſta, moſtrando, che il foco è virtuale, non reale. Con queſte trasformazioni di poſitivo in negativo parla l'Algebra, a chi intende il ſuo linguaggio, e in una riga involge un intero trattato, ſvolgendoſi tutti i caſi colla ſola applicazione delle regole generali, che ſi danno appunto per intendere queſto ſuo maraviglioſo linguaggio.

96.

96. Si concepiſca ora una ſeconda ſuperficie refringente vicina alla prima, in cui urtino i raggi già rifranti da queſta: ſia il ſuo raggio di ſfericità a', la ſua ragion de' ſeni m', la ſua diſtanza dal punto di convergenza p', la diſtanza del nuovo ſuo foco x'. Si avrà anche in eſſa $\frac{1}{x'} = \frac{m' - 1}{m' a'} + \frac{1}{m' p'}$. Ma il ſuo p' ſarà già quello, che era x riſpetto alla prima, giacchè urtano i raggi in eſſa convergenti alla diſtanza x, verſo cui gli ha indirizzati la prima *. Quindi ſe per $\frac{1}{p'}$ ſi metta il valore di $\frac{1}{x} = \frac{m - 1}{m a} + \frac{1}{m p}$; ſi avrà $\frac{1}{x'} = \frac{m' - 1}{m' a'} + \frac{m - 1}{m m' a} + \frac{1}{m m' p}$.

97. Al modo iſteſſo per la terza ſuperficie ſoſtituendo $\frac{1}{x'}$ per $\frac{1}{p''}$, ſi avrà la formola per tre ſuperficie, potendoſi continuare quanto un vuole: ſi avranno i ſeguenti valori, da' quali

* Se la groſſezza della lente foſſe c; ſi farebbe $p' = x - c$ per tener conto di eſſa groſſezza.

li ſi vede ſubito la natura della progreſſione

Per una ſuperficie

$$\frac{1}{x} = \frac{m-1}{ma} + \frac{1}{mp}$$

Per due

$$\frac{1}{x'} = \frac{m'-1}{m'a'} + \frac{m-1}{m'ma} + \frac{1}{m'mp}$$

Per tre

$$\frac{1}{x''} = \frac{m''-1}{m''a''} + \frac{m'-1}{m''m'a'} + \frac{m-1}{m''m'ma} + \frac{1}{m''m'mp}$$

98. La formola vale anche per la rifleſſione, purchè ſi noti, che in eſſa l'angolo di rifleſſione è uguale all'angolo d'incidenza, ma cade dalla parte oppoſta del raggio di ſfericità. Quindi ivi $m = -1$; e però $\frac{1}{x} = \frac{-2}{-a} + \frac{1}{-p} = \frac{2}{a} - \frac{1}{p}$: ove i raggi vengono paralleli, diviene p infinito, e $\frac{1}{p} = 0$; onde $\frac{1}{x} = \frac{2}{a}$, ed $x = \frac{1}{2}a$, avendoſi negli ſpecchi cavi il foco alla diſtanza dallo ſpecchio della metà

tà del ſemidiametro, come ſi ſa altronde, e ſi trova con metodo diretto aſſai più facile.

99. La formola per le lenti ſi ricava dalla ſeconda delle eſpoſte, che ſerve per due ſuperficie; purchè ſi rifletta, che all' uſcire dalla ſteſſa ſoſtanza all'aria, il ſeno d'incidenza a quello dell'angolo rifranto deve avere la ragione medeſima, ma inverſa. Quindi $\frac{1}{m'} = m$, $mm' = 1$; onde eſſendo anche $\frac{m'-1}{m'} = 1 - \frac{1}{m'} = 1 - m = -(m-1)$ ſarà $\frac{1}{x'} = \frac{-(m-1)}{a'} + \frac{m-1}{a} + \frac{1}{p} = (m-1)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}\right) + \frac{1}{p}$.

100. Quindi ſe ſi concepiſca che i raggi arrivino convergenti alla diſtanza p, ad una lente, che abbia i ſemidiametri delle due ſfericità a, a', la ragione del ſeno d'incidenza al ſeno dell'angolo rifranto nel paſſare dall'aria alla ſoſtanza, di cui è formata la lente ſia m ad 1, e ſi chiami r la diſtanza del foco da eſſa lente, indi ſi faccia $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a'}$, cioè $f = \frac{a\,a'}{a'-a}$, ſi avrà la ſeguente formola $\frac{1}{r} = \frac{m-1}{f} + \frac{1}{P}$.

101. Da queſta col metodo adoprato per le ſuperficie, ſi avrà per più lenti una progreſſione ſimile, e aſſai più ſemplice *.

$$\frac{1}{r} = \frac{m-1}{f} + \frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{r'} = \frac{m'-1}{f'} + \frac{m-1}{f} + \frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{r''} = \frac{m''-1}{f''} + \frac{m'-1}{f'} + \frac{m-1}{f} + \frac{1}{p}.$$

102. E' mirabile la facilità, con cui ſi ricava da queſte formole tutto quello, che appartiene alle lenti o iſoſceli, o ſcalene, di vetro, o di qualunque materia, conveſſe, concave, variate comunque. Metteremo qui alcune delle coſe più intereſſanti, d'onde ne verrà ancora tutto quello, di che abbiamo avuto biſogno ne' paragrafi precedenti.

103. Laſciando da parte le coſe appartenenti ad una ſola ſuperficie per venir ſubito alle lenti; dalle formole ſi ricava queſto teorema.

Qua-

* Anche qui ſi diſprezza la diſtanza di una lente dall' altra, quando vi ſia, purchè ſia piccola. Una formola, che abbracci, e l'errore della figura ſferica, e ogni diſtanza di ſuperficie, cioè groſſezza di ogni lente, e diſtanza delle lenti, vi è nella diſſertazione citata al num. 34.

Qualunque ſia il numero delle lenti, o iſoſceli, o ſcalene congiunte inſieme, o i raggi arrivino convergenti, o paralleli, o divergenti; il foco reſterà al luogo iſteſſo, con qualunque ordine eſſe ſi mettano, e comunque qualunque numero di eſſe ſi volti verſo i raggi, che vengono, o con una ſuperficie, o coll' altra. Imperocchè ogni valore f reſterà lo ſteſſo, giacchè $\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}$ faranno lo ſteſſo valore, mutandoſi l'a in a', e viceverſa nella converſione, e inſieme ammendue di poſitive in negative, o viceverſa, col mutarſi nella converſione le loro direzioni in oppoſte: ſe la lente ſarà nella prima ſuperficie conveſſa col raggio 6, nella ſeconda conveſſa col raggio 10, ſarà $a = 6$, $a' = -10$, $\frac{1}{f} = \frac{1}{6} - \frac{1}{-10} = \frac{1}{6} + \frac{1}{10}$. Si volti: ſi avrà $a = 10$, $a' = -6$, $\frac{1}{f} = \frac{1}{10} - \frac{1}{-6} = \frac{1}{10} + \frac{1}{6}$. Eſſendo poi gli ſteſſi nelle voltature i valori $\frac{1}{f}$, lo ſaranno anche gli $\frac{m-1}{f}$, e però la ſomma di tutti queſti ſarà la ſteſſa, comunque ſi mettano alcuni pri-

ma, altri dopo nel valor d'ogni formola.

104. Solo convien badare, che queſta identità di foco ſi ha traſcurando l'errore della figura sferica, e della groſſezza, i quali errori ſi mutano non poco neile lenti di piccoli raggi, e grande apertura, e però groſſe aſſai a proporzione de' raggi: vi ſarà allora, ſe ſono aſſai ſcalene della notabile differenza nel ſito del foco voltandole; e ſe il numero delle lenti ſarà tale, che la ſomma delle groſſezze riſpetto alla diſtanza del foco ſia conſiderabile, vi potrà eſſere della conſiderabile differenza dopo le voltature.

105. Si renderà la formola più uſuale per ricavarne le proprietà delle lenti le più comuni, come ſono le conveſſo-conveſſe; ſe ſi faccia di valor poſitivo qualunque raggio di sfericità conveſſa, e negativo di concava: in vece di $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a'}$ ſi avrà $= \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}$, e ſe di più la diſtanza poſitiva ſia quella, che appartiene a' raggi divergenti, come lo ſono quelli, che vengono da un punto d'oggetto; in vece di $+\frac{1}{p}$ al fine ſi avrà $-\frac{1}{p}$, eſſendo $\frac{1}{r} = \frac{m-1}{f} - \frac{1}{p}$. Per altro queſta mutazione non ſerve a nul-

a nulla per chi è avvezzo a ben maneggiare i poſitivi, e negativi, baſtando per tutti i caſi quella prima maniera di conſiderare i raggi al principio convergenti, e le ſuperficie tutte conveſſe verſo la parte, da cui eſſi vengono: quella maniera è ſtata anche più opportuna per l'ordine delle deduzioni. In tutti i ſeguenti teoremi, che ſi ricaveranno da queſta nova formola, ſi preſcinderà ſempre dall' errore della figura sferica, e dall'effetto della groſſezza del vetro.

106. Se ne ricava in primo luogo facilmente il ſeguente teorema. *Ogni lente ſcalena ne ha una iſoſcele equivalente in ordine al foco.* Imperocchè ſe ſi faccia $\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{b}+\frac{1}{b}=\frac{2}{b}$; è manifeſto, che una lente co' raggi a, a' comunque diſuguali, e un' altra co' b, b uguali avranno lo ſteſſo f, e però lo ſteſſo $\frac{m-1}{f}-\frac{1}{p}$.

107. *Il raggio della iſoſcele equivalente ſi troverà dividendo il doppio prodotto de' raggi della ſcalena per la lor ſomma*, perchè $\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{a'+a}{a\,a'}=\frac{2}{b}$. Quindi $b=\frac{2\,a\,a'}{a'+a}$. Se i due rag-

gi dati ſieno 6, e 12 ; il raggio cercato ſarà $\frac{2\times 6\times 12}{6+12}=\frac{144}{18}=8$.

108. E' manifeſto, che il valor f delle formole è la metà del raggio di sfericità della lente iſoſcele equivalente. Giacchè eſſendo $\frac{1}{f}=\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{2}{b}$, ſarà $b=2f$.

109. *Queſto raggio ſarà medio armonicamente proporzionale fra li due raggi della ſcalena equivalente*. Perchè eſſendo $\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{2}{b}$, ſarà $\frac{1}{b}$ medio aritmeticamente proporzionale fra $\frac{1}{a}$, e $\frac{1}{a'}$; onde b ſarà medio armonico fra a, a'; giacchè è teorema noto, che i termini reciproci della continua proporzione aritmetica ſono in proporzione armonica, e viceverſa : 6, 8, 12 ſono in proporzione armonica, eſſendo $6 . 12 :: 8-6=2 . 12-8=4$.

110. Eſſendo $\frac{a'+a}{a\,a'}=\frac{2}{b}$, ſarà $a'b+ab=2\,a\,a'$. Quindi $2\,a\,a'-a'b=ab$, ed $a'=\frac{ab}{2a-b}$, e però ſi avrà la ſeguente regola.

Se dato il raggio di una ſuperficie, ſi cerchi il com-

compagno, che dia una lente equivalente ad una iſoſcele data; ſi moltiplichi il primo raggio dato pel raggio della iſoſcele: queſto ſteſſo ſi ſottragga dal doppio di quello, e quel prodotto diviſo per queſto reſiduo darà il raggio ſecondo cercato. Sia il raggio dato 6, quello della lente iſoſcele equivalente 8, l'altro cercato ſarà $\frac{6\times 8}{2\times 6-8} = \frac{48}{12-8} = \frac{48}{4} = 12$.

111. Quindi ſi vede, che ogni lente ne ha infinite equivalenti, e dati due raggi di una, e un raggio dell'altra qualunque ad arbitrio, ſi potrà trovar ſubito l'altro, che con eſſo formi una lente equivalente: vi ſarebbe la ſua formola particolare, ma il problema ſi ſcioglie facilmente co' due precedenti: prima ſi trovi (num. 107.) l'iſoſcele equivalente alla data, indi (num. 110.) il compagno del raggio dato, il qual dia la ſcalena cercata equivalente all' iſoſcele trovata. I raggi della lente data ſieno 6, e 12, il raggio dato della cercata 5. Il raggio della iſoſcele equivalente ſarà 8 come ſopra: indi il compagno del $5 = \frac{5\times 8}{2\times 5-8} = \frac{40}{2} = 20$; onde le lenti di 6 con 12, e di

5 con 20, ſaranno ammendue equivalenti della iſoſcele di 8, e però anche fra loro.

112. Se una delle due ſuperficie ſia piana, ſi faccia uno de' due raggi, come a', infinito, e ſvanendo $\frac{1}{a'}$, ſi avrà (num. 107.) $\frac{1}{a} = \frac{2}{b}$, e però $b = 2a$. *Quindi una lente piano-conveſſa ſarà equivalente di una iſoſcele, che abbia il raggio doppio di quello della ſua ſuperficie curva.*

113. Se i raggi arrivano paralleli, la diſtanza p ſarà infinita; onde ſe la diſtanza del foco, che ſi ha in tal caſo ſi dica h; ſi avrà $\frac{1}{h} = \frac{m-1}{f}$, e ſe eſſa in ciaſcuna delle lenti ſeguenti ſi chiami h', h'' &c.; ſi avranno le ſeguenti formole per li raggi divergenti $\frac{1}{r} = \frac{1}{h} - \frac{1}{p}$, $\frac{1}{r'} = \frac{1}{h'} + \frac{1}{h} - \frac{1}{p}$, $\frac{1}{r''} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} - \frac{1}{p}$, e così in poi. Quel valore h, ſi chiama aſſolutamente la *diſtanza focale* della lente.

114. Conſiderando prima una lente ſola, ſe ſarà $p = h$, ſarà $\frac{1}{r} = 0$, e però r infinito, onde

onde *ſe i raggi partono dal foco de' paralleli, uſciranno paralleli*. Queſta naſce da una proprietà più generale: devono i raggi, ſe tornano indietro, aver da per tutto le medeſime refrazioni, e rifleſſioni contrarie a quelle, che avevano avuto, e però ſcorrere la ſteſſa ſtrada, per cui ſono venuti; onde ſe partono dal foco di qualunque punto radiante, dando indietro, devono tornare a quello ſteſſo punto radiante, che ſarà allora lor foco.

115. Eſſendo $\frac{1}{r} = \frac{1}{h} - \frac{1}{p} = \frac{p-h}{ph}$, ſarà $r = \frac{hp}{h-p}$, e ſi avrà queſto teorema. *Se data la diſtanza focale de' raggi paralleli, ſi cerchi la diſtanza del foco de' raggi partiti da una diſtanza data; ſi troverà moltiplicando le due diſtanze date, e dividendo il prodotto per la loro differenza, e il foco ſarà reale, o virtuale, ſecondo, che il punto radiante ſarà più lontano dalla lente, o più vicino, che il foco de' raggi paralleli*. Sia la diſtanza focale 8, e i raggi partano dalla diſtanza 12, ſarà $r = \frac{8 \times 12}{12-8} = \frac{96}{4} = 24$. Ma ſe la diſtanza ſia 6, ſarà $r = \frac{6 \times 8}{}$

$\frac{6 \times 8}{6-8} = \frac{48}{-2} = -24$; onde eſſendo r negativo, i raggi uſciranno divergenti da un punto lontano per 24. Si vede poi anche da queſta formola, che fatto $h = p$, ſarà r infinito.

116. Se ſarà $p = 2h$, ſarà $r = \frac{2h^2}{h} = 2h$; onde ſi ha queſto teorema: *Se la diſtanza del punto radiante ſarà doppia della diſtanza focale aſſoluta, convergeranno i raggi ad un foco, che avrà pure la ſteſſa diſtanza dalla lente doppia della focale*. Quindi ſe una lente ſi accoſti, o ſcoſti da un lume, finchè ſi veda l'immagine diſtinta in una diſtanza uguale a quella del lume; la metà di quella diſtanza ſarà la diſtanza focale aſſoluta. Ma queſto richiede un andar a tentone, finchè ſi trovi una tale uguaglianza: la coſa ſi farà meglio col teorema ſeguente.

117. Eſſendo $\frac{1}{r} = \frac{1}{h} - \frac{1}{p}$, ſarà $\frac{1}{h} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}$, e però $h = \frac{pr}{p+r}$. Quindi *la diſtanza focale ſarà uguale al prodotto delle due diſtanze del punto radiante, e del foco de' ſuoi raggi, diviſo per la loro ſomma*: ſe ſi cerchi la diſtanza focale aſſoluta, ſi prenda il foco di un punto

to radiante qualunque, e ſi miſuri la diſtanza dalla lente di ammendue, indi ſi moltiplichino eſſe diſtanze, e ſi divida il prodotto per la lor ſomma. Se la diſtanza del punto radiante ſiaſi trovata 12, del foco 4; la diſtanza focale aſſoluta ſarà $= \frac{4 \times 12}{4+12} = \frac{48}{16} = 3$.

118. Il miglior punto radiante ſarà in una camera ſufficientemente oſcurata una carta bianca ſu d'un buco di fineſtra battuta dal Sole, con de' fili, che l'attraverſino. Fiſſata la lente in una diſtanza da eſſo ben miſurata, ſi vedrà coll'ultima eſattezza la diſtanza del ſito, in cui i fili compariranno diſtinti co' lor peluzzi. Il ſito per far l'eſperienza conviene non ſia più corto del quadruplo della diſtanza focale aſſoluta; perchè la minima ſomma $p + r = p + \frac{hp}{p-h} = \frac{p^2 - ph + ph}{p-h} = \frac{p^2}{p-h}$ ſi avrà quando [illegible] $p = 2h$, come ſi può dimoſtrar facilmente, onde ivi anche $r = 2h$. *

119.

* Invertendo la formola per aver piuttoſto un maſſimo, con eſpreſſion più ſemplice, ſi ha $\frac{p-h}{p^2} = \frac{1}{p} - \frac{h}{p^2}$, e differenziando $-\frac{dp}{p^2} + \frac{2hpdp}{p^4} = 0$, e però $p^4 = 2hp^3$, cioè $p = 2h$.

119. Se ſi cerchi la diſtanza focale di due lenti unite; ſi avrà dalla formola $\frac{1}{r'}=\frac{1}{h}+\frac{1}{h'}$, fatto $\frac{1}{p}=0$. Sarà in quel caſo $r'=\frac{hh'}{h'+h}$, e però ſi avrà queſto teorema. *Il foco di due lenti inſieme ſi avrà moltiplicando le lor diſtanze focali, e dividendo il prodotto per la lor ſomma.* Se la diſtanza di una ſia 12, dell' altra 4, la diſtanza focale di ammendue unite ſarà $\frac{12\times 4}{12+4}=\frac{48}{16}=3$.

120. Con queſto teorema ſi potrà determinare la diſtanza focale di una lente concava, unendola con una conveſſa più acuta. Si determini la diſtanza focale r' di ammendue unite conſiderate come una ſola, e della conveſſa h: ſi troveranno come ſopra coll' immagine de' fili, che vi ſarà, dovendo ammendue avere un reale, e però formar l'immagine. Si avrà $\frac{1}{h'}=\frac{1}{r'}-\frac{1}{h}$, e però $h'=\frac{hr'}{h-r'}$, il qual valore ſarà negativo, giacchè allontanandoſi il foco della conveſſa per l'union della concava, ſarà r' maggior di h: onde ſi avrà quel foco h' negativo, che ſi cercava, col ſeguente teorema.

Il prodotto delle diſtanze focali della ſola conveſſa, e delle due unite ſi divida per la lor differenza, e ſi avrà l'intento. Sia la diſtanza focale della ſola conveſſa 4, di ammendue unite 12, ſarà il foco della concava $\frac{4\times 12}{4-12}=\frac{48}{-8}=-6$, cioè virtuale di *6*.

121. Tutti queſti teoremi ſervono per tutte le lenti di qualunque materia ſieno: per aver poi il valore aſſoluto del foco dati i raggi delle ſfericità di una lente, convien ſapere quale è il valore *m* eſprimente la ragion de' ſeni nella ſteſſa ſoſtanza. Eſſo è diverſo nelle diverſe ſoſtanze per una medeſima ſorte di raggi, e nella ſteſſa ſoſtanza per li diverſi raggi, maſſimo per li violacei, che ſono più refrangibili, minimo per li roſſi, che ſono i meno refrangibili. La differenza di queſti è piccola, e ne' vetri non differiſce molto la ragion de' ſeni per li raggi medii da 3 a 2, onde ivi $m=\frac{3}{2}=1.\frac{1}{2}$, e in qualche vetro queſto è il ſuo valor accurato. Allora eſſendo nelle lenti iſoſceli $\frac{1}{f}=\frac{1}{b}+\frac{1}{b}=\frac{2}{b}$, ed $\frac{1}{h}=\frac{m-1}{f}$, ſarà

que-

queſto valore $= \frac{1}{2} \times \frac{2}{b} = \frac{1}{b}$. Quindi $h = b$; onde ſi ha il ſeguente teorema. *Nelle lenti iſoſceli di vetro la diſtanza focale è proſſimamente uguale al raggio della sfericità.*

122. Si noti quel *proſſimamente*, perchè, come ſi è detto, il valore m è diverſo per diverſa ſpecie di colori, e in pochi vetri il valore m anche per li raggi di media refrangibilità è accuratamente $\frac{3}{2} = 1.\frac{1}{2}$. Quindi nelle lenti lavorate ſulla ſteſſa patina, ma di diverſe paſte di vetri ſi trovano alquanto diverſe le diſtanze focali con maraviglia di quelli, che non ſapendo le teorie, credono eſſenziale alle lenti il radunare i raggi paralleli alla diſtanza del ſemidiametro della sfericità. Eſſendo nelle lenti iſoſceli $\frac{1}{h} = \frac{m-1}{f} = \frac{2(m-1)}{b}$, ſarà $m-1.\frac{1}{2} :: b.h$; onde ſi ha queſto teorema. *Il raggio della sfericità ſta alla diſtanza focale, come il valore di* $m-1$ a $\frac{1}{2}$. In moltiſſimi vetri la ſuddetta ragione è 100 a 155, onde ivi $m = 1.55$, $m-1 = 0.55$: eſſendo $\frac{1}{2} = 0.50$, ſarà in que' vetri il raggio della sfericità alla diſtanza focale come 55 a 50, o ſia come 11 a 10.

Nel

Nel flint ſi trova ſpeſſo la ragione de' ſeni di 10 a 16, onde $m = 1.6$, $m - 1 = 0.6$, e il raggio della sfericità alla diſtanza focale come 6 a 5. 123. Se ſi abbia accurato il raggio della sfericità di una lente iſoſcele, e ſi miſuri con eſattezza la ſua diſtanza focale; ſi avrà all' oppoſto il ſuo valor $m - 1$ nella ſuddetta formola, in cui allora ſaranno dati i valori h, b, e però anche $m - 1 = \frac{b}{2h}$. Indi ſi avrà la ragion de' ſeni m. Il valor $m - 1$ denota la qualità refrattiva delle lenti; perchè ne' priſmi di piccol angolo facilmente, ove ſi tratta de' priſmi, ſi dimoſtra, che ſe l'angolo ſi dica a, la refrazione u; ſi ha $u = (m-1)a$. Indi la qualità refrattiva ſi determina aſſai meglio coll' ajuto de' priſmi; giacchè è aſſai difficile il determinare colle immediate miſure accurati i raggi delle sfericità. Quindi piuttoſto trovato il valore h, e il valore $m - 1$, ſi troverebbe nelle lenti iſoſceli il raggio $b = 2(m-1)h$. Ma non è facile neppure il conoſcere, ſe una lente ſia iſoſcele ſenza l'ajuto di certi fochi rifleſſi, de' quali ho parlato nella diſſertazione citata al num. 34., e per mezzo di eſſi uniti col foco diretto ho moſtrato, come in una lente qualun-

que

que ſi poſſa trovare tanto la qualità refrattiva $m-1$, quanto l'uno, e l'altro raggio di ſfericità.

124. Si ricava dalla ſteſſa formola, che le diſtanze focali per li diverſi colori nella ſteſſa lente ſono in ragione reciproca delle qualità refrattive eſpreſſe da' loro $m-1$; giacchè $h = \frac{b}{2(m-1)}$, il quale valore, per eſſere coſtante $\frac{b}{2}$, è a tanti doppj maggiore, o minore, a quanti doppj è minore all'oppoſto, o maggiore il valore $m-1$.

125. *Se vi ſieno due lenti della ſteſſa ſoſtanza; in ammendue la diſtanza focale de' raggi di un colore qualunque a quella di un altro ſarà nella ſteſſa ragione:* perchè ſarà nella reciproca delle medeſime qualità refrattive di quella ſteſſa ſoſtanza relative a que' diverſi colori.

126. *E' manifeſto, che una ſola lente di qualunque materia, e forma eſſa ſia, non potrà mai unire in un punto ſolo i raggi, che abbiano refrangibilità diverſa;* giacchè nella formola $\frac{1}{r} = \frac{m-1}{f} - \frac{1}{p}$, i valori f, p ſaranno ſempre gli ſteſſi, e il valore $m-1$ diverſo per que' due colori.

127.

127. *Neppure ciò ſi può ſperare con più lenti conveſſe unite, o della ſteſſa ſoſtanza, o di diverſe, ſe uno di que' due colori è rifrangibile più, che l' altro da ogni ſoſtanza*: perchè nella formola $\frac{m-1}{f}+\frac{m'-1}{f'}+\frac{m''-1}{f''}$ &c. $-\frac{1}{p}$, ogni termine ſarà poſitivo, e ogni termine maggiore pel colore, che ha il ſuo *m* maggiore, fuori che l'ultimo $\frac{1}{p}$, che rimane lo ſteſſo. Quindi la loro ſomma ſarà maggiore, e però l'unità diviſa per quella diſtanza del foco ſarà maggiore, ed eſſa diſtanza minore.

128. *Si può ſperare una tale unione con più lenti altre conveſſe, altre concave, maſſime ſe abbiano diverſi valori m per lo ſteſſo colore, e diverſe differenze di eſſo ne' diverſi colori.* Imperocchè ſi può ſperare, che le differenze de' valori poſitivi, e negativi appartenenti a diverſi termini $\frac{m-1}{f}$ ſi diſtruggano, e la ſomma de' termini rimanga la ſteſſa. Per vedere ſe la coſa ſia fattibile, e in che maniera, vi vorrà la ſoluzione del ſeguente problema.

129. *Trovare i rapporti, che vi vogliono per unire due colori diverſamente refrangibili con due*

lenti. Sia nella prima lente la ragione per li meno refrangibili m; per li più $m+dm$, indicando dm la differenza de' due valori m appartenenti a que' due colori, e così nella ſeconda vi ſieno m', ed $m'+dm'$. Si avrà pel primo colore la formola $\frac{1}{r'} = \frac{m-1}{f} + \frac{m'-1}{f'} - \frac{1}{p}$, e pel ſecondo $= \frac{m+dm-1}{f} + \frac{m'+dm'-1}{f'} - \frac{1}{p}$. Acciò queſto ſecondo valore rimanga lo ſteſſo; dovrà eſſere quell'eccesſo $\frac{dm}{f} + \frac{dm'}{f'} = 0$. Come f, f' ſono (num. 108.) le metà de' raggi di ſfericità delle lenti iſoſceli equivalenti, converrà, che una ſia di valor contrario all' altra, e però una conveſſa, e l'altra concava, ove lo ſteſſo colore ſia più refrangibile da ammendue le ſoſtanze, e però i valori dm, dm' poſitivi ammendue. Indi converrà, che i numeri eſprimenti i valori f, f' ſieno in ragione de' valori dm, dm'; onde ſi avrà per ſoluzione del problema il ſeguente teorema. *Due lenti, che abbiano le equivalenti, una conveſſa, e l'altra concava, e i raggi delle loro ſfericità proporzionali alle differenze de' due valori eſpri-*

menti

menti nelle lor ſoſtanze la ragione del ſeno d' incidenza al ſeno dell' angolo rifranto per due colori partiti da uno ſteſſo punto radiante, daranno lo ſteſſo foco per ammendue que' colori.

130. Queſto teorema non baſta per l' intera ſoluzione del problema, richiedendoſi in oltre, perchè i due colori ſi uniſcano, che il valore r' ſia poſitivo, onde il foco ſia reale, non virtuale. Per ottenere queſto effetto converrà, che il valore $\frac{m-1}{f}+\frac{m'-1}{f'}$ ſia poſitivo, e maggiore di $\frac{1}{p}$, e per li raggi, che vengano da una diſtanza immenſa, in cui $\frac{1}{p}$, ſi poſſa aver per nullo pigliandoſi i raggi per paralleli, come ſi fa, ove ſi tratta degli oggettivi de' cannocchiali, baſterà, che quel primo valore ſia poſitivo: converrà in oltre, che non ſia troppo piccolo, acciò $\frac{1}{r'}$ eſſendo troppo piccolo, la diſtanza focale r' non ſia in quel caſo grande più del dovere. Se quel valore poi foſſe $=0$, allora reſterebbe $\frac{1}{r'}=-\frac{1}{p}$, e il foco coinciderebbe col punto radiante di-

ſtrutta ogni refrazione, andando i raggi, come ſe le lenti non ci foſſero, nel qual caſo eſſe ſarebbero totalmente inutili.

131. Per vedere, dove anderà il foco nella formola $\frac{1}{r'} = \frac{m-1}{f} + \frac{m'-1}{f'} - \frac{1}{p}$, ſi metta in luogo di f' il ſuo valore $-\frac{dm\,f}{dm'}$, e ſi avrà $\frac{m-1}{f} - \frac{m'-1}{f} \times \frac{dm}{dm'} - \frac{1}{p}$. I primi due termini ſi elideranno, ove ſia $\frac{dm}{m-1} = \frac{dm'}{m'-1}$, dovendo allora eſſere $(m'-1) \times \frac{dm}{dm'} = m-1$. Ora la ragione $\frac{dm}{m-1}$ è la qualità diſtrattiva nel ſenſo, in cui l'abbiamo denominata al num. 29.; giacchè $m-1$ (num. 123.) moltiplicato per li piccoli angoli de' priſmi, o delle tangenti alla ſuperficie della lente nell'entrare, e uſcire, è uguale alla refrazione, e dm è la differenza di detto valore per li raggi di due diverſi colori, onde $\frac{dm}{m-1}$ eſprime negli angoli piccoli la parte di tutta la refrazione, per cui quella di un co-

lore

lore più refrangibile ſupera l'altra del meno refrangibile, e però eſprime, quanto in parità di refrazione una tal ſoſtanza ſepari un di que' colori dall'altro. Quindi ſi avrà queſto teorema. *Con due lenti di due materie, che abbiano le qualità diſtrattive uguali, non ſi potrà togliere la differenza della refrazione di due colori diſugualmente refrangibili, ſenza diſtruggere la refrazione.*

132. Così ſi vede chiaro, che non ſi può togliere l'errore della diverſa refrangibilità de' raggi con due lenti di una medeſima paſta di vetro. Il Newton credette, che la qualità diſtrattiva in queſto ſenſo foſſe la medeſima in tutte le ſoſtanze in modo, che il valore $m - 1$ de' roſſi a quel de' violacei foſſe in tutte come 27 a 28, onde in tutte il valore $\frac{d\,m}{m-1}$ foſſe $=$ $\frac{1}{27}$. Il Dollond dopo varie oſſervazioni trovò, che in varie ſoſtanze era vero proſſimamente quello, che aveva detto il Newton: ma nel vetro flint, eſſendo il valor m quaſi uguale a quel del vetro comune, il ſuo $d\,m$ a quello di eſſo era proſſimamente come 3 a 2, e in un altro vetro chiamato ſtraſs ſi è trovato doppio. Quindi

queſte ſoſtanze ſono idonee per ottener l'intento. Nella formola $\frac{m-1}{f} - \frac{m`-1}{f} \times \frac{dm}{dm`}$ converrà, che il primo termine ſia poſitivo, e conſiderabilmente maggiore del ſecondo negativo: e come $m`$ differiſce poco da $m$, lo ſarà, ſe ſia $\frac{dm}{dm`}$ una frazione conſiderabilmente minore della unità: quindi eſſendo detto valore nel flint $= \frac{2}{3}$, nello ſtraſs $= \frac{1}{2}$; eſſe ſoſtanze ſaranno al caſo.

133. Se ſi piglia $m`$ per $= m$, di cui è poco maggiore; la diſtanza focale della lente conveſſa $= \frac{m-1}{f}$ a quella delle due unite $= \frac{m-1}{f} - \frac{m-1}{f} \times \frac{dm}{dm`}$ ſarà come 1 ad $1 - \frac{dm}{dm`}$, cioè nel flint come 1 ad $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, e però come 3 ad 1: nello ſtraſs come 1 ad $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, cioè come 2 ad 1. *Quindi il flint concavo fa andar incirca a 3 doppj più lontano il foco della prima lente, lo ſtraſs ſolo al doppio:* l'eccesſo di $m`$ ſopra m nel flint, e

ſtraſs

ſtraſs farà, che l'allontanamento ſia un poco maggiore. Conviene, come ſi è detto al luogo ſuo nel §. 8., trovar bene i valori m, m', dm, dm', o almeno in queſti due ultimi il ſolo rapporto $\frac{dm}{dm'}$, per far i calcoli più eſatti. Come ſi trovino i valori m, m', e però dm, dm' ſi è accennato al num. 123. Per averli con quel metodo ne' diverſi colori, ſi poſſono in una camera ſufficientemente oſcura gettar de' colori primigenii, e ſemplici ſeparati con un priſma ſu d'una carta, che abbia de' fili neri, pigliando poi la diſtanza eſatta da una lente di eſſa carta, e della immagine ſua diſtinta formata da eſſa lente. Ma come non è facile l'avere con eſattezza ſufficiente per una ricerca così delicata la ſfericità della lente iſteſſa, ſi poſſono adoprare de' priſmi, e mettere in opera que' metodi, che ho diffuſamente ſpiegati nella mia diſſertazione nominata al num. 34., ove vi ſono inſieme le formole, e i metodi neceſſarj per calcolare le diverſe forme di lenti compoſte per avere la correzione tanto dell' errore della diverſa refrangibilità, quanto di quello della figura ſferica. Qui baſta l'aver dati i principj, ſulli quali ſi

ſonda tutta la teoria degli oggettivi Dollondiani, e delle lenti oculari compoſte, come quelli, che io propongo per levar que' colori, che cagionano le ſemplici, e ſono l' unica, o la principale origine de' colori ſenſibili de' cannocchiali.

134. Aggiungerò ſolamente qui in ultimo due coſe: la prima, che per unire un binario di colori baſtano due lenti di due ſoſtanze, nelle quali i valori $\frac{d\,m}{m-1}$ ſieno notabilmente diverſi. Se la ragione de' valori $\frac{d\,m}{m-1}$ nelle due ſoſtanze foſſe la ſteſſa per tutti i binarj di colori; unitine due, ſi unirebbero tutti: ma io ho trovato, che quella ragione è diverſa, e che perciò con due ſoſtanze non ſi uniſcono, che due, come ho accennato al num. 31., ove ho detto di avere ſvolta tutta queſta materia nella diſſertazione ivi citata.

135. La ſeconda coſa ſi è ciò, che è correlativo a quanto ſi è detto al num. 31., e 128., che la correzione della diverſa refrangibilità determina la ſola relazione fra' valori f, f', che ſono le metà de' raggi delle iſoſceli equivalenti, laſciando libere le relazioni fra li a, b, ed a', b'

raggi

raggi delle ſcalene, una delle quali reſta determinata dalla correzione dell'errore della figura ſferica, l'altra reſta pure libera. Ma anche queſte coſe le ho ſvolte a lungo con altre molte nelle diſſertazioni già tante volte citate.

AGGIUNTA I.

METterò ancora la dimoſtrazione delle combinazioni propoſte per formare l'oculare compoſta: ma come richiedono un poco più di complicazione di termini, le metterò qui a modo di aggiunta.

Dalle formole propoſte in queſto paragrafo facilmente ſi deducono le formole della lente oculare compoſta, la quale abbia da correggere il ſolo errore della diverſa refrangibilità propoſte al num. 88. La lente concava ſi faccia iſoſcele, e ſi metta in ſecondo luogo, e gli ſi abbia da unire una ſola conveſſa da metter la prima: ſi faccia la ragione delle qualità diſtrattive $\frac{dm'}{dm} = n$, e ſia il raggio delle ſfericità della concava $= -1$. Sarà $f' = -\frac{1}{2}$ (num. 108.). Quindi $f = -\frac{dm}{dm'} \times f'$ (num. 129.)

129.) $= \frac{1}{2n}$. Indi (num. 131.) $\frac{1}{r'} = \frac{m-1}{f} - \frac{m'-1}{f} \times \frac{dm}{dm'}$ (per li raggi paralleli) ſarà $= 2n(m-1) - 2(m'-1)$. Queſte formole daranno tutto anche pel caſo, in cui ſi adoprino due lenti conveſſe uguali; giacchè quelle due potranno conſiderarſi, come un' unica equivalente, in cui il valor f ſia al doppio minore, che eſſo nelle ſemplici, la quale coſa facilmente ſi ricava dalla formola del num. 101., in cui $\frac{1}{r'} = \frac{m-1}{f} + \frac{m'-1}{f'} + \frac{1}{p}$; giacchè facendo z quello, che è f della compoſta, ſi avrà lo ſteſſo r, ove ſia $\frac{m-1}{f} + \frac{m-1}{f'} = \frac{m-1}{z}$, ſe ſi tratti della ſteſſa ſoſtanza, in cui $m' = m$. Fatto in oltre $f' = f$, ſarà $\frac{1}{f} + \frac{1}{f} = \frac{1}{z}$, e però $z = \frac{1}{2} f$. Quindi determinato il valor f di queſta conveſſa, quando è ſola $= \frac{1}{2n}$, ſaranno gli f delle due, che le equivalgono $= \frac{1}{n}$. Queſte poi ſi potranno mettere con qualunque or-

ordine ſi voglia, ſenza mutare la diſtanza focale (num. 103.), e però ſenza turbare le ragioni delle loro sfericità.

Si debba in primo luogo far iſoſcele anche la conveſſa: quando eſſa è ſola, ſarà $f = \frac{1}{2n}$, e però il raggio della sfericità (num. 108.) $a = 2f = \frac{1}{n}$: onde eſſendo pel flint $n = \frac{3}{2}$, per lo ſtraſs $= 2$; ſarà ivi $a = \frac{2}{3}$, qui $= \frac{1}{2}$: pel caſo di due conveſſe uguali ſi avrà ivi $a = \frac{4}{3}$, qui $= 1$. Quindi ſi ha la regola ſeguente.

Se ſi abbia a unire una ſola conveſſa, e iſoſcele con una iſoſcele, e concava di flint; il raggio della sfericità di quella al raggio di queſta ſi faccia come 2 a 3; ſe due conveſſe uguali, ſi faccia il loro raggio al raggio della concava come 4 a 3: ma ove ſi adopri la concava di ſtraſs, ivi ſi prenda il raggio la metà più piccolo, qui uguale.

Già qui ſi vede, che adoprando lo ſtraſs in mezzo a due conveſſe, queſte ſi poſſono fare iſoſceli, e combaciarſi le ſuperficie interne per l'uguaglianza di tutti i raggi, la quale forma per queſto è la più comoda per le

ocu-

oculari compoſte. Per aver la congruenza negli altri caſi convien andar innanzi col calcolo.

Eſſendo $\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{f}=2n$ per una ſola conveſſa, e dovendo per la congruenza della ſeconda ſuperficie conveſſa colla concava eſſere $a'=1$, ſarà $\frac{1}{a}=2n-1$, cioè pel flint $3-1=2$, per lo ſtraſs $4-1=3$. Quindi ſi avrà queſta regola. *Se ſi abbia da unire una ſola conveſſa con una concava iſoſcele in modo, che le ſuperficie interne ſi combacino; ſi faccia il raggio della ſeconda conveſſità uguale a quello della concava, indi pel caſo del flint quel della prima la metà di eſſo, per lo ſtraſs un terzo.*

Per due conveſſe uguali, ſarà $\frac{1}{f}=n$, indi $\frac{1}{a}=n-1$, cioè pel flint $=\frac{1}{2}$, per lo ſtraſs $=1$. Quindi la regola. *Se ſi abbiano da adoprare due conveſſe uguali con una iſoſcele concava in modo, che le facce interne ſi combacino, ſi faccia, come prima, il raggio delle interne conveſſità uguale al raggio delle concavità; indi il raggio delle eſterne nel caſo del flint doppio, nel caſo dello ſtraſs uguale.*

Ri-

Rimane a vedere, quale ſarà la diſtanza focale, della compoſta in queſti caſi riſpetto a' raggi delle ſfericità. Il valor $\frac{1}{r'} = 2n(m-1) - 2(m'-1)$, facendo m, ed $m' = \frac{3}{2}$, come lo ſono proſſimamente per tutti i vetri, e per tutti i colori, ſarà $= n - 1$, cioè pel caſo del flint $= \frac{1}{2}$, per quello dello ſtraſs $= 1$, e ivi $r = 2$, qui $= 1$. Quindi ſi avrà queſta regola generale pel caſo e di una ſola conveſſa, e di due equivalenti ad una. *La diſtanza focale nel caſo del flint ſarà doppia del raggio delle ſfericità della concava, e nel caſo dello ſtraſs uguale ad eſſo.*

Avendoſi già per tutti i caſi la ragione di ogni ſfericità delle conveſſe al raggio della concava; ſi ha la ragione della diſtanza focale a qualunque raggio per ogni caſo. Per dar un eſempio, quando vi ſarà una ſola iſoſcele conveſſa col flint, il ſuo raggio era $\frac{2}{3}$ del raggio della concava, e però eſſo alla diſtanza focale come $\frac{2}{3}$ a 2, cioè come 1 a 3: collo ſtraſs quello era $= \frac{1}{2}$, queſta $= 1$, e però quello a queſta come 1 a 2. Quindi il flint manda il foco a tripla diſtanza, lo ſtraſs a dupla.

Al

Al modo ſteſſo ſi ſvolgono facilmente tutti gli altri caſi. Reſta da avvertir due coſe: la prima, che eſſendo l'*m*' nel flint, e ſtraſs quaſi ſempre un poco più grande dell'*m* de' vetri comuni, il foco anderà un poco più lontano di quello portino queſte regole. Per avere i valori delle ragioni eſatti, convien avere eſatti per ogni individua ſoſtanza i valori *m*. La ſeconda ſi è, che qui ſi è diſprezzata la groſſezza delle lenti. Ove queſta ſia conſiderabile riſpetto a' raggi delle sfericità, vi ſarà una notabile variazione nell' effetto da quello, che danno queſte regole.

Aggiunta II.

NOn ſarà fuor di propoſito il dire alcuna coſa anche de' cannocchiali Galileani, i quali ſono formati di un oggettivo conveſſo, e una ſola oculare concava: queſta è la forma, che ſi ſuol dare a' cannocchialetti da teatro, che ſono tanto in uſo. Per non moltiplicar figure, ſia in eſſi (fig. 1.) SS' l'oggettivo, TT' l'oculare. Queſta riceve i raggi partiti dallo ſteſſo punto d'oggetto non dopo della loro unione in F, F', ma prima che

ſi

ſi uniſcano, onde conviene concepire la loro convergenza al punto L, e ad un altro, il quale non vi è nella figura, ma ſi deve concepire di fianco ad eſſo L nella CG' prodotta. Quindi in eſſi non vi è l'immagine, e però non vi ſi può adattar il micrometro.

Anche in eſſi vi è il male degli altri nato dal non convergere i raggi roſſi, e violacei a un punto ſteſſo, ſe l'oggettivo non è compoſto. Vi è anche l'altro de' colori nati dalle oculari: imperocchè il raggio CG' arrivato alla oculare concava in G' ſi torce, ma in fuora colla direzione divergente da F, la quale divergenza fa, che l'oggetto ſituato a ſiniſtra ſi veda pure a ſiniſtra ſenza quella inverſione cagionata dalla oculare conveſſa: ma ſe l'oculare non è compoſta; eſſa piegherà più i raggi violacei, che i roſſi coll' indurre la ſeparazione de' colori analoga affatto a quelli della conveſſa. Queſti non ſi ſcanſano, ſe non componendo l'oculare con una conveſſa di vetro comune, e una concava di flint o ſtraſs nella maniera accennata al num. 88.

La diſtinzione ſi avrà col riceverſi i raggi appartenenti allo ſteſſo punto d'oggetto da una oculare concava, mentre convergono

al

al ſuo foco, onde eſſa li manderà via paralleli fra loro, condizione neceſſaria per la diſtinzione, la quale ſarà ajutata dalla compoſizione dell' oggettivo, e della oculare.

L'ingrandimento ſi concepirà, ſe ſi concepiſce una retta FG', la quale farà coll' aſſe FG un angolo maggiore dell' F'CG in ragione proſſimamente di CG' a FG': detta ragione appunto, come nel caſo della oculare conveſſa, ſi dimoſtra eſſer quella, che ha la diſtanza focale CL dell' oggettivo alla GL dell' oculare; onde la prima diviſa per la ſeconda dà l'ingrandimento.

La chiarezza dipenderà dall'apertura dell' oggettivo, da cui dipende la quantità de' raggi appartenenti allo ſteſſo punto d'oggetto, che paſſati per l'oggettivo, e riſtretti dall' oculare in faſcetti di fili paralleli entrano nella pupilla.

In ordine al campo, vi è il gran male, che eſſo dipende non dall' apertura della oculare, come quando eſſa è conveſſa, ma dalla ſola apertura piccoliſſima della pupilla. Il raggio CG' non è piegato co' ſuoi compagni indentro verſo L, ove collocata la pupilla lo poſſa ricevere, per quanto ſia grande la ſua di-

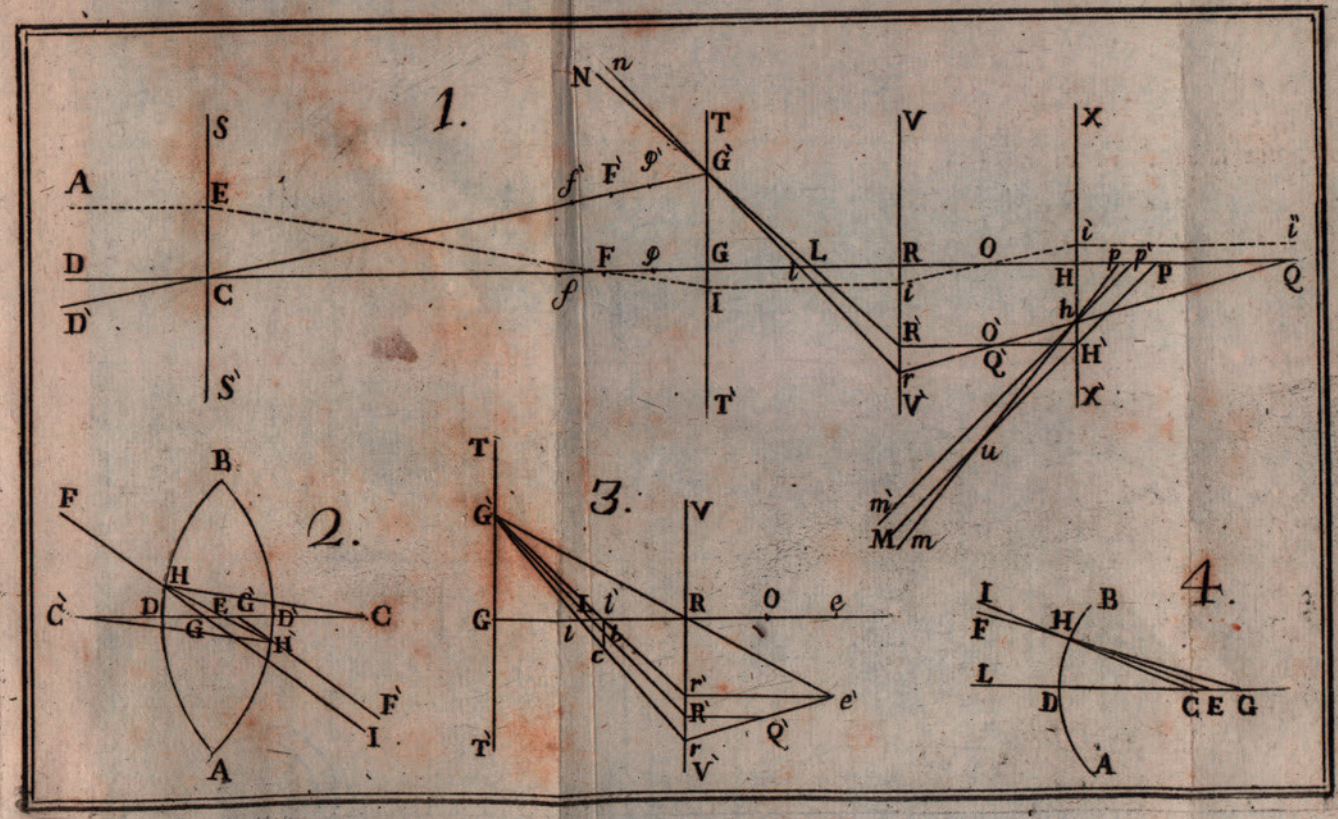
diſtanza GG' dall' aſſe; ma in fuora. Non può eſſo entrare nella pupilla coll' aſſe medeſimo, ſe l'intervallo GG' non è piccolo, quanto la pupilla iſteſſa. Quindi il campo non è più grande di quello ſia l'angolo, che il diametro della pupilla può ſottendere nel centro C dell' oggettivo, e ciò accoſtando la pupilla in modo da toccar l'oculare, da cui ſe eſſa ſi ſcoſta, ſi deve ſcemare il campo per la divergenza del raggio CG' piegato in fuora.

Ritenendo la miſura di una linea pel diametro della pupilla, *ſi divida il numero* 3438, *che ſono i minuti dell' arco uguale al raggio, per la diſtanza* CG *dell' oculare dall' oggettivo ridotta in linee, e ſi avrà il campo in minuti*. Un cannocchialetto da teatro, che abbia 3 pollici di lunghezza avrà il campo di minuti $\frac{3438}{36} = 95.\frac{1}{2}$, e però maggiore di un grado, e mezzo: ma un cannocchiale Galileano di piedi 20, che fanno linee 2880, non avrà il campo, che di minuti $\frac{3438}{2880} = 1.\frac{1}{5}$ così piccolo, che ſi rende inuſuale. Can-

noc-

nocchiali Galileani lunghi aſſai non ſono di niun uſo, ed è gran fortuna, che ſi ſia trovato poterſi fare le oculari conveſſe contro a quello, che lo ſteſſo Galileo aveva creduto da principio.

Pag. 23. lin. 18. dopo la parola -- tutti -- ſi aggiunga -- La ſeconda non è vera, perchè i raggi, che arrivano ad una ſuperficie sferica più vicini all' aſſe, vanno ad unirſegli in un punto più lontano, che i più lontani da eſſo.


1.
S
A
E
D
C
D'
S'
N
n
T
G'
f'
F'
φ'
F
φ
G
L
f
I
T'
V
X
R
O
i
i'
H
p
p'
P
Q
h
R'
O'
Q'
H'
X'
r
V'
u
m'
M
m
2.
B
F
H
C'
D
E
G'
D'
C
G
H'
F'
I
A
3.
T
G'
G
T'
V
R
O
e
i'
i
L
b
c
r'
R'
e'
Q'
r
V'
4.
I
B
F
H
L
D
C
E
G
A

1.**94**

An account of a new Micrometer and Megameter,
"Philosophical Transactions", Vol. LXVII, London, 1777, pp. 248 seg.

XXXV. *Account of a new Micrometer and Megameter By the Abbé* Boſcovich, *&c.*

Read June 19, 1777. HAVING heard that the Abbe ROCHON had exhibited a kind of micrometer, which, by means of a priſm of rock cryſtal whoſe angles could be varied, gave two images of the ſame object, and changed their diſtances by the circular motion of one of the two parts which compoſed it; I told ſome of my friends, and among others the celebrated Abbé FONTANA, that I ſaw very well how the thing was done; but that a conſiderable improvement would be made in it if the diſtance from the priſm to the focus of the eye-glaſs were made

---

Mémoire ſur un nouveau Micrometre et Mégametre. Par M. l'Abbé Boſcovich, *Directeur d'Optique de la Marine.*

QUAND j'ai ſcu que M. l'Abbé ROCHON avoit fait voir une eſpece de micrometre, qui, par le moyen d'un priſme de criſtal de roche à angles variables, donnoit deux images du même objet, et en changeoit les diſtances par un mouvement circulaire d'une des deux parties qui le compoſoient; je dis à quelques-uns de mes amis, et entre autres au célebre M. l'Abbé FONTANA, que je voyois bien comment cela ſe faiſoit; mais qu'il y auroit beaucoup plus à gagner, ſi l'on rendroit variable la diſtance du priſme au foyer de la lunette: j'ai

made variable. I added that the ſame effect might be produced without the double refraction of the rock cryſtal, with a priſm made of common glaſs, only ſmaller than the aperture of the object-glaſs. The rays which paſs through the priſm would then form an image which would be ſeen out of its natural place; and thoſe which paſs without would give another image, in the ſame place it would have appeared in, if the priſm had not been there.

A few days after, the Abbé FONTANA was told, that the Abbé ROCHON had thought of another micrometer with a priſm of rock cryſtal, which, approaching more or leſs to the focus of the object-glaſs, had the advantage of producing a very great effect, and might be achromatic; that having accordingly had his inſtrument executed, and made ſeveral obſervations with it, he had prepared a paper on the ſubject, to be read at the next meeting

---

ajouté que l'on pouroit avoir le même effet ſans la double réfraction du criſtal de roche, en faiſant un priſme à verre ſimple, mais plus petit que l'ouverture de l'objectif. Les rayons qui paſſent par le priſme, formeroient alors une image déplacée de ſa poſition naturelle, et les autres qui paſſeroient dehors, donneroient l'autre image, à la même place qu'elle auroit, s'il n'y avoit point de priſme.

Quelques jours après on a annoncé à M. FONTANA que M. l'Abbé ROCHON avoit imaginé un autre micrometre à priſme de criſtal de roche, qui, s'approchant plus ou moins du foyer de l'objectif, avoit l'avantage de produire un effet très grand, et de pouvoir être acromatique: qu'ayant fait executer ſon inſtrument, et fait avec lui pluſieurs obſervations, il avoit préparé un mémoire ſur

meeting of the Academy. This the Abbé FONTANA immediately told me, and I repeated what I had ſaid to him the firſt time on the effect of this micrometer; adding at the ſame time the preciſe meaſure of the ſcale for the meaſure of the ſame effect, and the facility of obtaining the ſame thing without the rock cryſtal; mentioning likewiſe other advantages which might be derived from the common glaſs priſm not covering the whole aperture of the object-glaſs; and, amongſt others, that of being able to meaſure much greater angles by this means than by the double refraction of the rock cryſtal.

The Abbé ROCHON did accordingly read his paper to the Academy, and mention has been made of it in the public prints: he has therefore the merit of having thought of the ſame thing, at the ſame time with, or perhaps before

---

ſur cet objet, pour lire à la prochaine ſéance de l'Academie. Mr. l'Abbé FONTANA eut la bonté de m'en avertir immédiatement; ce fut pour lors que je lui répétai ce que j'avois eu l'honneur de lui dire la premiere fois ſur l'effet de ce micrometre, en y ajoutant la meſure préciſe de l'échelle pour la meſure du même effet, et la facilité d'obtenir la même choſe ſans le criſtal de roche, avec d'autres avantages que l'on pouvoit tirer du priſme à verre ſimple, ne couvrant pas toute l'ouverture de l'objectif, et entre autres celui de pouvoir meſurer par ce moyen des angles beaucoup plus grands, que par la double réfraction du criſtal de roche.

M. l'Abbé ROCHON a réellement lu à l'Academie ſon mémoire, et on en a fait mention dans les gazettes: ainſi il a le merite d'avoir imaginé la même choſe, dans

before me, without any knowledge whatever of my ideas on the ſubject; he has been the firſt who announced it to the world, who had it executed, and who made uſe of it: I have therefore no pretenſions whatſoever on that head; he has the merit of a great diſcovery, and aſtronomy has the ſole obligation of it to him.

But the Abbe ROCHON has only made uſe of the double refraction of the rock cryſtal for his micrometer, and I am aſſured he has ſaid, that his priſm could give him no more than ſix degrees. Now it is well known, that pieces of rock cryſtal, large enough and pure enough for theſe purpoſes, are extremely rare; beſides, the difficulty of working them is great, that ſubſtance being harder than glaſs, and requiring the utmoſt attention in cutting, in order to obtain the difference deſired between the two refractions. I think therefore, that it will be doing an eſſential

---

dans le même tems, peut être avant moi, et abſolument ſans avoir eu aucune connoiſſance de mes idées ſur le même objet; de l'avoir annoncé le premier au public, de l'avoir éxécute, et de s'en être ſervi le premier: ainſi je n'ai rien à prétendre de ce côté là: il a le merite d'une belle découverte, et l'aſtronomie lui en a toute l'obligation.

Mais M. l'Abbé ROCHON n'a employé, pour ſon micrometre, que la double refraction du criſtal de roche; et on m'a aſſuré qu'il a dit, que ſon priſme ne pouvoit lui donner que juſqu'à ſix degrés. On ſait bien que les pieces aſſéz grandes de cette matiere, et aſſéz pures, ſont très rares; outre la difficulté de la travailler, etant plus dure que le verre, et quelle attention il faut avoir pour la bien couper afin d'avoir la difference des deux refractions que l'on veut. Ainſi

je

eſſential ſervice, to propoſe another micrometer of common glaſs, to explain the theory of it, and to extend it to much larger angles, which may render it applicable to the optical inſtruments made uſe of in the navy, in taking geographical latitudes and longitudes.

I had already made a priſm of this ſort, and ſhewed the Abbé FONTANA its effect for the double image of the Sun on his excellent little achromatic glaſs: the two images were procured by applying this priſm to the object-glaſs with the hand, in ſuch a manner that it covered only one-half of it: puſhing it more or leſs forward, occaſioned a change in the brightneſs of the light of the two images, and ſhewed that they might be made equally clear. By changing the inclination of this piece, the diſtance between the two images was varied, which did not alter when

---

je crois rendre un ſervice encore plus conſiderable, en propoſant cette autre eſpece de micrometre à verre ſimple, en developpant ſa théorie, en l'etendant aux angles beaucoup plus grands, ce qui donne le moyen de l'appliquer auſſi aux inſtrumens d'optique, que la marine doit employer pour obſerver les latitudes et longitudes géographiques.

J'avois déja fait faire un priſme de cette eſpece; et fis voir au même M. l'Abbé FONTANA ſon effet pour la double image du Soleil, ſur ſon excellente petite lunette acromatique: on avoit les deux images, en l'appliquant à la main ſur l'objectif, de maniere qu'il n'en couvroit que la moitié. En le pouſſant plus ou moins avant, on changeoit la vivacité de la lumiere des deux images, où l'on voyoit qu'on pouvoit les réduire à une clarté egale; en variant l'inclinaiſon de cette piece on varioit la diſtance des deux images, qui n'avoit aucune varia-

when its diſtance from the object-glaſs was varied without the glaſs. This piece was a common priſm, which gave a refraction a little greater than the apparent diameter of the Sun: I added another to it afterwards, of the ſame kind and equal, both of them having circular baſes. Turning one of the two parts upon its axis, will vary the angle from 0, to double each in particular, which occaſions the two images to approach to, or recede from, each other. A much ſlower variation is obtained by the greater or leſs diſtance of the priſm from the object-glaſs; but there is a particular reaſon for which one cannot give it too large a one, the contraction of the pencil of rays belonging to each point of the object, not allowing that diſtance to be very great, for fear of weakening too much the direct image towards the middle of the field, by the inter-

---

tion en changeant, hors de la lunette, ſa diſtance à l'objectif. Cette piece etoit un ſeul priſme ſimple, qui donnoit une refraction un peu plus grande que le diametre apparent du Soleil: j'y ai fait ajouter après un autre ſemblable et egal; l'un et l'autre ayant les baſes circulaires: en tournant ſur ſon axe l'une des deux parties, on variera l'angle depuis zero, juſqu'au double de chacun en particulier, ce qui fait approcher et eloigner les deux images entre elles: on obtient une variation beaucoup plus lente par l'eloignement plus grand ou plus petit du priſme à l'objectif; mais il y'a une raiſon particuliere pour laquelle on ne peut pas lui en donner un trop grand; car le retreciſſement du pinceau de rayons appartenans à chaque point de l'objet, ne permet pas de l'en eloigner trop, ce qui, vers le milieu du champ, affoibliroit trop l'image directe, en interceptant une trop grande

interception of too great a part of the ſame pencil, which in the end would occaſion its being altogether loſt.

I have in hand, making for me, a rude machine in which one of the pieces may be turned by the hand upon its axis, to make the diſtance between the two images ſomewhat larger than that which is intended to be meaſured, as for inſtance the diameter of the Sun; and by the help of a moveable ſcrew, one may carry the priſm, thus compoſed, to a diſtance from the object-glaſs, by a motion ſimilar to that of the ſmall mirror of the teleſcope. I have had it adapted to an ordinary glaſs of about four feet, where its effect, for the Sun's diameter, muſt be much greater than an inch of motion in a minute; for the other planets one may have ten or fifteen lines in a ſecond, or even more. Generally the ſcale is the whole length of the glaſs for the total refraction of the priſm, which likewiſe

---

grande partie du même pinceau, et à la fin la feroit perdre totalement.

Je fais faire actuellement une machine groſſiere, dans laquelle on peut tourner une des deux pieces à la main, ſur ſon axe, pour rendre la diſtance des deux images un peu plus grande que celle que l'on veut meſurer, comme du diametre du Soleil; et à l'aide d'une vis de rapel, on peut eloigner le priſme, ainſi compoſé, de l'objectif, par un mouvement ſemblable à celui du petit miroir des teleſcopes. Je l'ai fait adapter à une lunette ordinaire de près de quatre piés, où ſon effet, pour le diametre du Soleil, doit être de beaucoup plus d'un pouce de mouvement par minute; et pour les autres planetes ou peut avoir 10 ou 15 lignes par ſeconde, et plus encore. Généralement l'échelle eſt toute la longuer de la lunette pour

wiſe is the caſe in the Abbé ROCHON'S priſm, for the difference of the two refractions. But one may vary the angle by applying the priſm without the glaſs near the object-glaſs, and turning one of the parts upon its axis. In that caſe, the ſcale of the exceſs of the ſum of the refractions of the two parts of the priſm above the difference, will be in length no more than half the circumference of a circle, though the circle may be made as large as one pleaſes; but the difference of the diſtance of the images, will not be proportional to the difference of the arcs run through by the index. In order to determine the relation which the motion of the index bears to the variation of the diſtance between the two images, one muſt have the ſolution of a geometrical problem, which is eaſily gained by ſpherical trigonometry; but it will be always better to deter-

---

la refraction totale du priſme, ce qui eſt le même pour la difference des deux réfractions dans le priſme de M. l'Abbé ROCHON. Mais on peut varier l'angle en appliquant le priſme hors de la lunette, à côte de l'objectif, en faiſant tourner une des deux parties ſur ſon axe. Alors l'échelle de l'excès que la ſomme des réfractions des deux parties du priſme a ſur la difference, n'aura pour ſa longueur que la demi circonference d'un cercle, quoiqu'on puiſſe faire ce cercle auſſi grand que l'on veut; mais la difference de la diſtance des images ne ſera pas proportionelle à la difference des arcs parcourus par l'index. Pour déterminer la rélation du mouvement de l'index avec la variation de la diſtance des deux images, il faut réſoudre un probleme de géométrie, et j'en ai la ſolution bien ſimple par la trigonométrie ſphérique; mais il vaudra toujours beaucoup mieux déterminer

ce

determine this relation by an actual terreſtrial obſervation of a divided ruler, obſerved at a given diſtance.

When the angle happens to be a large one, the colours would naturally be ſuch as would greatly deform one of the two images of the object, namely, that given by the rays that paſs through the priſm; but this is eaſily remedied, at leaſt in a great meaſure, by making each priſm of two pieces, one of common and the other of flint-glaſs. One may multiply the compoſed achromatic priſms with variable angles by making the one give degrees from 5 to 5, or from 2 to 2, and the other the minutes. One may put two on the outſide near the object-glaſs, which will change the diſtance of the images by the circular motion, and give the angle required a little larger than the real one; and another within which will

---

ce raport par une obſervation actuelle terreſtre d'une regle diviſée, et obſervée à une diſtance donnée.

Quand il s'agit d'un grand angle, on auroit des couleurs qui déformeroient beaucoup une des deux images de l'objet, c'eſt à dire celle qui eſt donnée par les rayons paſſés à travers du priſme: on les evite aiſément, au moins en grande partie, en compoſant chaque priſme de deux pieces, une de verre commun, et l'autre de *flint-glaſs*. On peut multiplier les priſmes compoſés acromatiques et à angles variables, en faiſant que l'un donne les degrés de 5 en 5, ou de 2 en 2, et l'autre les minutes: on peut en mettre deux dehors, près de l'objectif, qui changeront la diſtance des images par le mouvement circulaire, et donneront l'angle cherché un peu plus grand que le véritable; et un autre dedans, qui donnera

will exactly give the ſeconds. I have already thought of the inſtruments requiſite for obtaining all theſe objects with accuracy, as well as for the application of a variable priſm to the common ſailor's octant, and have by me the ſolution of the neceſſary problems: this will be the object of a work I am preparing. In the mean time I publiſh this, to give others an opportunity of hitting on ſomething better concerning the mechanical conſtruction of theſe inſtruments.

---

donnera, avec toute préciſion, les ſecondes. J'ai déja imaginé les inſtrumens néceſſaires pour avoir avec exactitude tous ces objets, comme auſſi pour l'application d'un priſme variable à l'octant de marine ordinaire, ayant auſſi la ſolution des problemes neceſſaires. Tout cela ſera l'objet d'un ouvrage que je prépare ſur cette matiere. En attendant je publierai dans les differens journaux ce Proſpectus, pour donner plutôt à tout le monde le moyen d'imaginer ſur la forme mechanique des inſtrumens, quelque choſe de mieux que ce qui m'eſt venu dans l'eſprit ſur ce ſujet nouveau, et bien intereſſant.

Indice dei nomi e delle opere citati nei testi

Il numero in grassetto indica il codice con il quale l'Opera è stata contrassegnata nel "Catalogo delle Opere a stampa di R.G. Boscovich" (vedi Indice Generale). Dopo il "nome", la pagina è quella in cui lo stesso "nome" si trova citato nel testo delle singole Opere. Le opere citate nei testi, sono date nelle note, corrispondenti alla pagina in cui l'opera è citata.

1-**59**
Boscovich, Giuseppe Ruggiero, 29[1]
Cartesio, 4, 7, 39
Dollond, John, 50[2]
Galileo, 49, 55, 56
Hevelius, 55
Huygens, 51[3], 55, 56[4]
Newton, Isaac, 4, 5, 7, 27[5], 28, 29, 30, 40, 53[6]
Pezenas, Esprit, 50
Riccioli, 55
Suardi, Battista, 4[7]

---

[1] Boscovich, G.R., *Dissertatione de Lumine, Pars secunda,* Romae, 1748.

[2] "A description of a contrivance for measuring small angles", by Mr. John Dollond, communicated by M. James Short, *Philosophical Transactions, […],* Vol.XLVIII, Part I, London, 1754, pag. 178.

[3] Christiani Hugenii, *Opuscula Postuma, T. I, qui continet Dioptricam […],* Amstelodemi, 1728, Part. I, pag. 150 sg.

[4] Christiani Hugenii, *Cosmotheoros,* Hagae, 1498, pag. 135 sg.

[5] Newton, Isaac, *Opticks, II Ed.,* London, 1718, Part. I, Lib. I, Prop. VII, pag. 71 sg.

[6] Newton, Isaac, v. nota 68.

[7] Suardi, Giambattista, *Nuovi istrumenti per la descrizione di diverse curve antiche e moderne*, Brescia, 1750, [lettere di Boscovich in data 16 marzo 1748 e 27 aprile 1748 sulle "Ovali cartesiane", pag. 62-79].

1-**62**
Il *De Micrometro Objectivo* di Ruggiero Boscovich apparve nella prima edizione latina viennese dell'*Opticae* di Lacaille del 1757 (pag. 145-150), nella successiva ristampa del 1766, e nell'edizione latina di Venezia del 1773 (pag. 200-207). L'operetta era preceduta da un "Auctarium Theoria Micrometri Obiectivi", a firma di Carolo Benvenuti e di Rogerius Josephus Boscovich.

1-**75**
Clairaut, Alexis, 550[8]

1-**76** e 1-**77**, vedi 1-**82**

1-**82**
L'Opera 1-**82** comprende cinque Dissertazioni (1.**82**/I-V). Le prime due (1.**82**/I e 1.**82**/II) corrispondono, con minime variazioni e per la presenza di note, alle Opere 1.**76** e 1.**77** del "Catalogo", inviate e pubblicate nei "Commentari" bolognesi prima della pubblicazione delle *Dissertationes quinque*, come si evince dalla nota (*d*), pag. 10, della "Dissertatio I" di quest'ultima Opera (si vedano le note 54 e 55). Le pagine di riferimento sono quelle dell'Opera *Dissertationes quinque* (1-**82**).

1-**82** / I
Abat, 84 (nota *q*)
Boscovich, Ruggiero, 11[9]
Cartesio, 2, 3
Clairaut, 10[10], 11, 26, 48, 84
Conti, Stefano, 92
Dollond, John, 5, 6, 10[11], 34, 35, 41
Eulero, 5[12]
Klingenstierna, 6, 12[13]
Liechtenstein, principe, 10
Maskeline, 10
Narducci, Nicola, 92

[8] "Memoire sur les moyens de perfectionner les lunettes d'approche, par l'usage d'Objectifs composes de plusieurs matières differémment réfringentes", par M. Clairaut, *Mémoires de l'Academie des Sciences, Année MDCCLVI,* Paris, 1762, pag. 380-437; "Second Mémoire sur les moyens […]", *Mémoires […], Année MDCCLVII,* Paris, 1762, pag. 524-550.

[9] Boscovich, "Extrait d'une lettre […]", cit. nella nota 37.

[10] Clairaut, "Memoire", MDCCLVI e MDCCLVII, citate nella nota 6.

[11] Dollond John, "An Account of some Experiments concerning the different Refrangibility of Light", *Philosophical Transactions,Vol. 50, for the Year 1758,* London, 1759, pag. 733-743.

[12] Eulero, Leonard, *Mem. Acad. Berlin*, 1747, pag. 274-296.

[13] Klingenstierna, opere citate nella nota 6.

Newton, Isaac, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 32[14], 71[15], 86
Snellius, 2

1- **82** / II
Abat, 116
Beccaria, Giovanbattista, 133
Blair, 103[16]
Bonaccorsi, cardinale, 99
Clairaut, 102[17], 186
d'Alembert, 102[18], 175[19]
Dollond, John, 108, 157
Klingenstierna, 147, 157
Morton, 186
Newton, Isaac, 107, 108, 147, 155, 157
Scherffer, 186

1-**82** / III
Boscovich, Ruggiero, 229[20]
Newton, Isaac, 188, 229[21]

1-**82** / IV
Boscovich, Ruggiero, 233[22]
Bouguer, 254
Huygens, 251[23]

1-**82** / V
Boscovich, Ruggiero, 259[24]
Scherffer, Karl, 260[25]

[14] Newton, Isaac, *Opica,* Lib. I, Part. I, Exper. VIII.
[15] Newton, Isaac, *Optica,* Lib. I, Part. II, Prop. VIII, Exper. XVI.
[16] Cit. nella nota * del testo.
[17] Clairaut, "Second Memoire", MDCCLVII, cit. nella nota 6.
[18] D'Alembert, *Opuscules Mathematiques,* Tomo III, Paris, 1764.
[19] Vedi nota (*d*) del testo.
[20] Boscovich, Ruggiero, *Dissertatio de Lumine,* Romae, 1748.
[21] Newton, Isaac, *Optica*, Part. I, Lib. I, Parag. VII.
[22] Cfr., Diss. 1-**82** / I, § 130.
[23] *Memoires Academie des Sciences,* Paris, 1755, pag. 462.
[24] Cfr., Diss. 1-**82** / II, § 170.
[25] Cfr., lettera di Boscovich a Scherffer in data 20 ottobre 1764.

1-**86**
Boscovich, Ruggiero, 60[26]
Dollond, John, 32, 52, 68, 101
Fromond, Giovanni Francesco, 72
Galileo, 114
Gentil, 51
Huygens, 44
Lalande, 51[27]
Newton, Isaac, 101

1-**94**
Fontana, Abate, 789, 790, 791, 793
Rochon, Abate, 790, 791, 792, 796

[26] Boscovich, Ruggiero, *De novo telescopio usu ad objecta coelestia determinando,* Atti di Lipsia, 1740.
[27] Lalande, *Astronomie,* Libro XIV.