Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Accademia Croata di Scienze ed Arti
INAF – Osservatorio Astronomico di Brera
Pontificia Università Gregoriana

EDIZIONE NAZIONALE
DELLE OPERE E DELLA CORRISPONDENZA
DI RUGGIERO GIUSEPPE BOSCOVICH

Volume I
Opere scientifiche
Opere di matematica e geometria

Opere varie

A cura di Luigi Pepe

EDIZIONE NAZIONALE DELLE OPERE
E DELLA CORRISPONDENZA DI
RUGGIERO GIUSEPPE BOSCOVICH

Commissione scientifica

Presidente: GIAN TOMMASO SCARASCIA MUGNOZZA (Presidente della Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL)
Vicepresidente: GIANFRANCO GHIRLANDA SJ (Magnifico Rettore della Pontificia Università Gregoriana**)**
Vicepresidente: TOMMASO MACCACARO (Presidente dell'Istituto Nazionale di Astrofisica; già direttore di INAF – Osservatorio Astronomico di Brera)
Segretario: EDOARDO PROVERBIO (Università di Cagliari)

ELIO ANTONELLO (INAF - Osservatorio Astronomico di Brera)
UGO BALDINI (Università degli Studi di Padova)
FABIO BEVILACQUA (Università degli Studi di Pavia)
VINCENZO CAPPELLETTI (Istituto di Studi Germanici)
PAOLO CASINI (Università degli Studi di Roma «La Sapienza»)
GUIDO CIMINO (Università degli Studi di Roma «La Sapienza»)
ŽARKO DADIĆ (Institute for the History and Philosophy of Science, Zagabria)
ALESSANDRA FIOCCA (Universita degli Studi di Ferrara)
PAOLO FREGUGLIA (Università degli Studi dell'Aquila)
PAOLO GALLUZZI (Università degli Studi di Firenze)
LIVIA GIACARDI (Università degli Studi di Torino)
ROGER HAHN (University of California, Berkeley)
GIOVANNI MICHELI (Università degli Studi di Milano)
GIOVANNI PAOLONI (Università degli Studi della Tuscia, Viterbo)
LUIGI PEPE (Università degli Studi di Ferrara)
CLARA SILVIA ROERO (Università degli Studi di Torino)
GIANCARLO SETTI (Università di Bologna)
RITA TOLOMEO (Università degli Studi di Roma «La Sapienza»)
MAURIZIO TORRINI (Università degli Studi di Napoli «Federico II»)
PASQUALE TUCCI (Università degli Studi di Milano)

EDIZIONE NAZIONALE
DELLE OPERE E DELLA CORRISPONDENZA
DI RUGGIERO GIUSEPPE BOSCOVICH

VOLUME I
Opere Scientifiche
Opere di matematica e geometria

Opere varie

A cura di Luigi Pepe

Enti patrocinatori della Edizione Nazionale delle Opere e della Corrispondenza di Ruggiero Giuseppe Boscovich:
- Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
- Accademia Croata di Scienze e Arti
- INAF – Osservatorio Astronomico di Brera
- Pontificia Università Gregoriana
- S.I.A. – Società Italiana di Archeoastronomia

Copyright © 2010 Edizione Nazionale delle Opere e della Corrispondenza di Ruggiero Giuseppe Boscovich

Pubblicato nel novembre 2010

Realizzazione: Edit 4 - via Brodolini 24 - 20054 Nova Milanese (MI)

per conto della Commissione Scientifica per l'Edizione Nazionale delle Opere e della Corrispondenza di Ruggiero Giuseppe Boscovich

Sede Legale: via L. Spallanzani 5a-7, 00161 Roma
Sede Operativa: via Brera 28, 20121 Milano

ISBN 978-88-96700-03-7

Tutti i diritti sono riservati a norma di legge
e a norma delle convenzioni internazionali

Indice

Introduzione p. 11

1. *Trigonometriae Sphaericae Constructio*, Roma 1737 p. 33

2. *De Circulis Osculatoribus*, Roma 1740 p. 43

3. *De Natura et Usu Infinitorum*, Roma 1741 p. 59

4. *De Cycloide et Logistica*, Roma 1745 p. 75

5. *Trigonometria Sphaerica*, Roma 1745 p. 151

6. *Dimostrazione facile d'una principale proprietà delle sezioni coniche*, Roma 1746 p. 183

7. *Metodo di alzare un infinitinomio a qualunque potenza*, Roma 1747 p. 201

8. *Riflessioni sul metodo di alzare un infinitinomio a qualunque potenza. Parte prima*, Roma 1748 p. 217

9. *Riflessioni sul metodo di alzare un infinitinomio a qualunque potenza. Parte seconda*, Roma 1748 p. 235

10. *Dimostrazione di un metodo dato da Eulero*, Roma 1749 p. 255

11. *Delle ovali cartesiane*, Brescia 1752 p. 277

12. *Aggiunta di due memorie*, Milano 1767 p. 299

13. *Epistolae Duo*, Bratislava 1782 p. 333

INTRODUZIONE

Ruggiero Giuseppe Boscovich fu ammesso come novizio tra i Gesuiti a Roma il 31 ottobre 1725; nell'anno 1727/28 frequentò presso il Collegio Romano il primo anno di retorica, nel triennio 1729-1732 vi compì il corso filosofico. Per due anni insegnò poi grammatica al Collegio e per altri due anni *humanae litterae* a Fermo. Ritornato al Collegio nel 1736-37 insegnò nuovamente grammatica e l'anno dopo *humanae litterae*. Nel triennio 1738-1741 compì il corso teologico. Nell'anno 1741-42 iniziò ad insegnare matematica al posto del suo maestro Orazio Borgondio. Boscovich mantenne questo insegnamento fino al 1760, supplito nel 1751-52 dal suo allievo Carlo Benvenuti (1716-1789) durante la sua missione per la misura del meridiano tra Roma e Rimini. Ritornato all'insegnamento nel 1753, pose mano definitiva al suo trattato di geometria e algebra, uscito nel 1754, e alla relazione sulla misura del meridiano (1755). Benvenuti, passato all'insegnamento filosofico, fu duramente censurato per aver professato il moto della Terra, mentre per Boscovich si aprivano altri orizzonti. Inviato a Lucca per la questione del lago di Bientina (1756), poi a Vienna (1757), fu di nuovo a Roma tra maggio 1758 e luglio 1759. La sua attività di professore di matematica al Collegio Romano era però alla fine. Dopo una serie di viaggi e di missioni in Europa (era a Londra nel 1760) si trasferì a Pavia e a Milano nel 1764 e tra l'Università pavese e il Collegio gesuitico di Brera in Milano trascorse gli anni movimentati che portarono alla soppressione della Compagnia e al trasferimento in Francia nel 1773[1].

Quindi, Boscovich rimase al Collegio Romano per quasi trentaquattro anni e fu professore di matematica per oltre venti. In questo periodo diede alle stampe le sue prime memorie, delle quali diverse di matematica pura, e tre delle sue opere maggio-

---

[1] U. Baldini, *Boscovich e la tradizione gesuitica in filosofia naturale: continuiità e cambiamento*, in *R. J. Boscovich, vita e attività scientifica (His Life and Scientific Work),* a cura di P. Bursill-Hall, Istituto dell'Enciclopedia Italiana, Roma, 1993, pp. 81-132. L. Pepe, *Matematica e fisica nei collegi del Settecento*, in «Studi Settecenteschi», 18, 1998, pp. 407-420. Si veda anche Idem, *Rinascita di una scienza: matematica e matematici in Italia (1715-1814*), Clueb, Bologna, 2007.

ri: *Elementa universae matheseos* (1754), *De litteraria expeditione per pontificiam ditionem* (1755), *Philosophiae naturalis theoria* (1759)[2].

Ricostruire la genesi delle prime memorie di Boscovich ha dunque un interesse molto grande, sia per seguire la sua evoluzione intellettuale, sia per avere un quadro degli insegnamenti scientifici nel Collegio Romano tra il 1730 e il 1760: un quadro che vede affiancati elementi di conservazione e d'innovazione.

Il Collegio Romano era stato al centro della formazione matematica dei Gesuiti a partire dall'insegnamento romano di Cristoforo Clavio (1564) fino a quello del suo allievo Cristoforo Grienberger (1636). I numerosi trattati di Clavio, che andavano dalla sua edizione degli Elementi di Euclide, all'Algebra, alla Geometria pratica, alla Sfera, alla Gnomonica, al Calendario, coprivano gran parte della matematica pura e di quella che si chiamava allora matematica mista. La matematica, è bene ricordarlo, nell'enciclopedia del sapere tardo scolastica, ereditata dai gesuiti, era una disciplina epsistemologicamente inferiore alla fisica: dava conto dei fenomeni, non della realtà delle cose; descrivere quest'ultima era invece compito della filosofia naturale, della quale la fisica era la parte generale. Perciò, non aveva senso parlare di matematica applicata alla fisica. Gli interessi della Compagnia, impegnata nelle missioni o anche in compiti didattici per la formazione delle classi dirigenti, spingevano verso le matematiche miste. Si trattava di insegnare a conoscere il calendario, il moto dei pianeti, a prevedere le eclissi, a tenere la rotta in nave, a progettare edifici, a lanciare le bombe, a provvedere ad artiglieria e fortificazioni e a schierare le truppe (come fecero i maestri gesuiti degli ufficiali degli eserciti cattolici durante la Guerra dei Trent'anni). Nel Collegio Romano, al tempo di Clavio e di Grienberger, si formarono i maggiori matematici gesuiti di quelle generazioni: Giuseppe Biancani (1566-1624), Paolo Guldino (1577-1643), Gregorio di Saint Vincent (1584-1667). Dal 1633 al 1661 la matematica al Collegio Romano fu però insegnata quasi sempre da non specialisti, in corrispoindenza della condanna di Galileo e di alcune opere di Descartes. Fu allora la Provincia veneta ad assumere la guida scientifica della Compagnia con Niccolò Cabeo, Giambattista Riccioli, Francesco Grimaldi, Daniello Bartoli e Paolo Casati[3]. Anche se qualcuno di essi fu richiamato a Roma, bisognò attendere l'insegnamento di Gilles François de Gottignies (1630-1689) per trovare sulla cattedra di matematica un vero specialista. Gottignies era stato allievo di Andrea Tacquet (1612-1660) e di Gregorio di Saint Vincent, conosceva l'algebra e la matematica del suo tempo e fu professore nel Collegio Romano di matematica fino a pochi anni prima della sua morte (1684). Dopo un breve passaggio sulla cattedra di

---

[2] *Catalogo delle opere a stampa di Ruggiero Giuseppe Boscovich*, a cura di Edoardo Proverbio, Roma, Accademia Nazionale delle Scienze, detta dei XL, 2007. P. Riccardi, *Biblioteca matematica italiana dalla origine della stampa ai primi anni del secolo XIX*, voll. 2, ristampa anastatica, Milano, Görlich, 1952.

[3] *Giambattista Riccioli e il merito scientifico dei Gesuiti,* a cura di M.T. Borgato, Olschki, Firenze, 2002.

matematica di Francesco Eschinardi e di F.A. Febei, questa fu occupata per vent'anni da uno studioso modesto, Antonio Baldigiani (1686-1697) e, dopo qualche altro avvicendamento, da Orazio Borgondio (1712- 1740)[4].

Borgondio, bresciano, era stato allievo in Collegio di Baldigiani ed aveva esordito con una dissertazione dei suoi allievi: *Motus telluris in orbe annuo* (Komarek, Roma, 1714), nella quale si sosteneva l'immobilità della Terra. Senza essere un matematco originale, Borgondio si dimostrò uno studioso informato. La sua attività di professore di matematica al Collegio Romano è documentata da cinque manoscritti che riguardano orologi solari (1720), elementi di meccanica (1721), elementi di astronomia (1722), il calcolo delle eclissi (1723), il caso irriducibile delle equazioni di terzo grado (1730)[5].

Quest'ultimo era un argomento di algebra che non faceva parte dell'ordinario piano di studi del Collegio. Esso riprendeva una vecchia questione nata con la formula risolutiva dell'equazione di terzo grado: questa vede comparire a volte, sotto una radice quadrata, un numero negativo, mentre una radice reale dell'equazione è sempre presente (se i coefficienti sono reali). Per eliminare il passaggio ai numeri immaginari erano state proposte varie strade, ma l'argomento continuò ad interessare i matematici del XVIII secolo. In definitiva, Borgondio si può considerare più l'erede di Gottignies che del suo maestro diretto Baldigiani[6].

L'attitudine di Gottignies e di Borgondio rispetto alle novità scientifiche del loro tempo fu simile: il primo si confrontò con la geometria cartesiana, il secondo con la meccanica newtoniana. Newton era citato nella dissertazione *De situ telluris* (1725), ove, però, veniva riaffermata l'immobilità della Terra. Le conoscenze di entrambi rimanevano quindi in superficie, dato che l'intento principale era la confutazione e non l'apprendimento. Del resto, a Borgondio doveva apparire assurdo lo stesso titolo dell'opera di Newton: *Philosophiae naturalis principia mathematica*. La filosofia naturale, per l'inferiorità epstemologica della matematica rispetto alla fisica, non poteva avere principi matematici, ma solo fisici o metafisici[7].

Ma le scienze, per opera dei veri scienziati, camminavano più velocemente del pensiero filosofico e superano tanti ostacoli epistemologici, anche perché i loro o-

---

[4] U. Baldini, *op. cit.*, pp. 131-132. R. G. Villoslada, *Storia del Collegio Romano dal suo inizio (1551) alla soppressione della Compagnia di Gesù (1773)*, in «Analecta Gregoriana», LXVI, 1954. J. Casanovas, *Boscovich's early astronomical studies at the Collegio Romano*, in *R. J. Boscovich, vita e attività scientifica*, cit., pp. 237-244.

[5] *Catalogo della biblioteca di scienze «Carlo Viganò»,* Vita e pensiero, Brescia, 1994, pp. 837-839 (nn. 16-19), pp. 848-849 (n. 41).

[6] U. Baldini, *op. cit.*, p. 111, scrive: «Vi sono numerose prove del fatto che lo studio dei manoscritti dei predecessori era in uso tra i matematici del Collegio Romano», e indica la collocazione di diversi manoscritti matematici di Gottignies ancora conservati in biblioteche e archivi.

[7] L. Pepe, *Note sulla diffusione delle Géométrie di Descartes in Italia nel secolo XVII*, «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche», 2, 1982, pp. 249-288.

biettivi sono più limitati, occupandosi essenzialmente di coerenze locali tra calcoli ed osservazioni. Nel 1728 James Brandley scoprì il fenomeno dell'aberrazione della luce, prima prova fisica del moto della Terra intorno al Sole, confermando la verifica sperimentale di Roemer della velocità finita della luce. La controvesia tra cartesiani e newtoniani sulla forma della Terra svolgeva a termine grazie alle misure del grado di meridiano: Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759) misurò la lunghezza di un grado di meridiano terreste in Lapponia nel 1736/37, pubblicando i suoi risultati nel 1738; Charles Marie de la Condamine (1701-1774) guidò la spedizione in Perù (oggi Equador) per misurare il grado di meridiano vicino all'equatore terrestre (1738). Il confronto tra queste misure dimostrò maggiore il grado di meridiano al polo: l'ipotesi newtoniana veniva confermata sperimentalmente ed essa si basava proprio sul fatto che la Terra, considerata come una massa fluida, ruotava intorno al proprio asse. Sicché i due moti della Terra, annuo e diurno, non erano solo un'ipotesi matematica. Agli inizi degli anni Trenta del Settecento, Eustachio Manfredi desiderava pubblicare, sul primo tomo dei *Commentarii* dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna, le sue osservazioni sull'aberrazione della luce che confermavano i risultati di Brandley. L'articolo rimase a lungo inedito con tutto il volume: a sbloccarlo nel 1731 fu il nuovo arcivescovo di Bologna Prospero Lambertini, assunto poi al Pontificato il 17 agosto del 1740 con il nome di Benedetto XIV (1675-1758)[8].

Se Newton aveva trovato per le sue opere matematiche già numerosi consensi in Italia agli inizi del Settecento e tali consensi erano aumentati con gli anni e l'esaurirsi della tradizione leibniziana, impiantatasi nell'Università di Padova nei primi due decenni del secolo, fu nel decennio 1730-1740 che la teoria newtoniana dell'attrazione, alla base del suo sistema del mondo, ebbe il definitivo successo nell'ambiente scientifico europeo più avvertito. Perdurava però la condanna ecclesiastica che si abbatté anche sulla più celebre divulgazione della teoria della luce e dell'attrazione: *Il Newtonianesimo per le dame* di Francesco Algarotti (Napoli [Venezia] 1737). L'ambiente gesuitico non era il meglio predisposto verso la filosofia newtoniana, sia per il suo mescolamento di fisica e matematica, sia per le conseguenze dei *Principia* sul sistema del Mondo: moto della Terra e conferma del Copernicanesimo. Tuttavia, non tutte le porte erano chiuse: intanto, i *Principia* non erano un libro posto all'Indice: lo aveva salvato la struttura matematica dell'opera, che sembrava rispondere al parere del cardinale Bellarmino circa la possibilità di

[8] E. Bortolotti, *La storia della matematica nella Università di Bologna*, Zanichelli, Bologna, 1947, pp. 156-158. Durante il pontificato di Benedetto XIV si giunse ad una parziale revoca delle proibizioni ecclesiastiche riguardanti il moto della Terra. Nell'*Indice* del 1758 veniva infatti mantenuta la condanna delle opere di Copernico, Galileo e Keplero, ma veniva tolta la proibizione di professare in qualsiasi modo l'ipotesi copernicana. Si veda in proposito: *Copernico e la questione copernicana, Opere della pubblica biblioteca di Ferrara*, a cura di L. Pepe, Corbo, Ferrara, 1993, p. 149.

trattare il moto della Terra come ipotesi matematica, cioè per dar conto più facilmente dei fenomeni celesti. Poi, i gesuiti non desideravano essere tagliati fuori dalle novità del sapere e non ignoravano quanto si dibatteva negli ambienti scientifici e nelle Accademie. Infine, proprio a Roma due ecclesiastici, Francesco Jacquier e Tommaso Leseur, avevano curato la prima edizione continentale postuma dei *Principia*, stampata a Ginevra nel 1739-42. È vero che nell'introduzione del terzo volume essi avevano dichiarato che trattavano il moto della Terra solo per rimanere fedeli al testo di Newton, pur non ignorando la condanna ecclesiastica; tuttavia, una strada era aperta. Con molta circospezione e non poca attenzione a questioni particolari, con professione di ubbidienza e anche grazie a qualche protezione nella Curia, si poteva scrivere a Roma di matematica e di fisica utilizzando argomenti e metodi dei *Principia*. Su questa strada non priva di ostacoli, almeno fino al nuovo Indice del 1758, si mise Boscovich[9].

Dal 1736 al 1739 si trovò a Roma per attendere agli studi di teologia Vincenzo Riccati (1707-1775). Questi, figlio del celebre Jacopo (1676-1754) il cui nome è legato ad una celebre equazione differenziale, era entrato nella compagni di Gesù nel 1726 e aveva appreso l'uso dei metodi analitici e infinitesimali in geometria e meccanica dal padre e nell'ambiente bolognese e padovana nel quale si era formato.. Riccati seguiva anche presso il Collegio Romano le lezioni di matematica di Borgondio. Ebbe modo quindi di conoscere e frequentare Boscovich, che da parte sua prese come guida il poco più anziano confratello nello studio dei metodi dell'analisi matematica[10].

L'elenco cronologico delle prime opere a stampa di Boscovich è strettamente legato ai suoi insegnamenti al Collegio Romano: la prima è una composizione letteraria: *Carmina* (1735), seguita da un'esercitazione astronomica: *De maculis solaribus* (1736), e da una dissertazione di alcuni suoi allievi sul moto di Mercurio secondo il sistema eliocentrico e geocentrico: *De Mercurii novissimi infra Solis transitu* (giugno 1737). Dopo di questa veniva la prima dissertazione matematica, legata proprio a temi astronomici.

1.
A. M. G. D. // TRIGONOMETRIAE // SPHAERICAE // Constructio. // DEMONSTRANDA A PP. SOCIETATIS // JESU. // Die … Septembris anno D. M. DCC.

---

[9] P. Casini, *Boscovich and the* hypotesis Terrae motus, in *R. J. Boscovich, vita e attività scientifica*, cit., pp. 229-235. L. Pepe, *Newton, il metodo delle flussioni e i fondamenti dell'analisi in Italia nel secolo XVIII*, in «Atti del Convegno'Storia degli studi sui fondamenti della matematica', Tip. Luciani, Roma, 1988, pp. 185-224.

[10] *Elogio del Sig. Ab. Conte Vincenzo Riccati*, in «Continuazione del Nuovo Giornale de' Letterati d'Italia», IX, 1776, pp. 114-194.

XXXVII. // [MARCA TIPOGRAFICA] // ROMAE, D. M. DCC. XXXVII. // Typis Komarek, in Via Cursus propo Plateam Sciarrae. // Superiorum Facultate[11].

4°; pp. VIII; tav. 1 f.t.

Gli interessi di Boscovich verso l'astronomia di osservazione e, poco dopo, verso la geodesia domandavano approfondimenti di trigonometria sferica dei quali abbiamo qui una prima documentazione di livello elementare. Un triangolo sferico è la porzione di superficie sferica compresa fra tre cerchi massimi, che si dicono lati del triangolo. Gli angoli sono quelli formati dalle tangenti ai cerchi nei vertici del triangolo. I triangoli sono rettangoli od obliqui, questi si riducono a rettangoli mediante un cerchio perpendicolare al lato opposto. Lo studio dei triangoli sferici si traduce facilamente in relazioni tra grandezze familiari della trigonometria piana: seni, tangenti, secanti.

2.
A. M. G. D. // DE // CIRCULIS // OSCULATORIBUS // DISSERTATIO // Habenda a PP. SOCIETATIS JESU // In Collegio Romano // Anno MDCCXL. Augusti. Die 3 hora // [MARCA TIPOGRAFICA] // ROMAE, ex Typographia Komarek in Via Cursus. // SUPERIORUM PERMISSU.

4°; pp. XII; tav. 1 f.t.

Tre anni separano la *Trigonometria sferica* da questa dissertazione. Nel frattempo Boscovich aveva diretto gli allievi affidati alla sua cura su temi astronomici più impegnativi. Nel 1738 avevano dissertato sull'aurora boreale, nel 1739 di un nuovo telescopio e degli argomenti degli antichi a favore della sfericità della Terra e ancora sulla forma della Terra. Con una strategia che rimarrà invariata nei due decenni del suo insegnamento ufficiale nel Collegio Romano, Boscovich affidava i temi più delicati rispetto all'ortodossia a dissertazioni sostenute dai suoi allievi.

Se la Terra non è sferica come si ricavava ormai dall'ipotesi newtoniana, confermata dai viaggi per la misura dei meridiani di Maupertuis e di La Condamine, ha interesse domandarsi qual è il cerchio che approssima meglio un meridiano terrestre nell'intorno di un punto dato. Boscovich, agli inizi del suo insegnamento matematico al Collegio Romano, preferì affrontare solo il problema geometrico della determinazione del cerchio osculatore di una conica, prima di far cimentare i suoi allievi (C. Molinari, G. Candiani, C. Cavriani) in una dissertazione circa la questione del diverso valore della gravità in diversi punti della Terra, che si spiegava con lo schiacciamento ai poli e quindi con l'ipotesi del moto diurno della Terra secondo la meccanica newtoniana: *De inegualitate gravitatis in diversis Terrae locis* (primo

[11] A. M. D. G., cioè *Ad Maiorem Dei Gloriam*.

agosto 1741). In questa dissertazione, sono discusse, sia pure i forme ambigue, le conseguenze dei *Principia* di Newton e delle misure di Cassini e di Maupertuis, che negavano entrambi la sfericità della Terra.

3.
A. M. G. D. // De Natura, et usu Infinitorum, // et Infinite parvorum // DISSERTATIO // HABITA // In Collegio Romano Societatis // JESU // A PP. ejusdem Societatis. // Anno MDCCXLI, Mense Julio, die 28 // [MARCA TIPOGRAFICA] // ROMAE, ex Typographia Komarek in Via Cursus. // Superiorum Facultate.
4°; pp. 12; tav. 1 f.t.

Gli argomenti di due dissertazioni del 1741 dirette da Boscovich, sul moto dei proiettili e sulla differenza della gravità in diversi luoghi della Terra, potevano essere ricavati dall'attrazione newtoniana. La traiettoria parabolica dei proiettili è conseguenza della gravità e delle leggi di Newton della meccanica; la principale causa della differenza di gravità in diversi luoghi è dovuta allo schiacciamento polare, conseguenza dell'attrazione newtoniana e della forza centrifuga derivante dal moto diurno della Terra. Dal punto di vista matematico, queste spiegazioni sono enormemente facilitate dall'uso del calcolo differenziale, o comunque di metodi infinitesimali. A ogni modo, per la forma della Terra occorrono calcoli complicati, che diedero luogo ad un famoso libro di A.C. Clairaut, *Théorie de la figure de la Terre, tirée des principes de l'hydrostatique* (Parigi 1743). Boscovich, pur tra mille *distinguo* e senza impegnarsi in questioni generali, non ignorava trattarsi di argomenti esposti con metodi infinitesimali nei *Principia* di Newton.

L'utilizzo disinvolto degli infiniti e degli infinitesimi era stato sempre guardato con sospetto negli ambienti gesuitici, sin dagli anni delle critiche di Guldino agli indivisibili di Cavalieri, confermate in questa memoria di Boscovich (pp. 3-4). D'altra parte, la preferenza esplicita di Newton per i metodi dimostrativi degli antichi e l'adattamento ad essi dei metodi infinitesimali era rassicurante. Questi non erano estranei alla tradizione gesuitica di Guldino (*Centrobaryca*, 1635-41) e di Tacquet (*Cylindricorum et annularium liber*, 1659)[12]. Boscovich critica in questa memoria l'opera di Pietro De Martino (1707-1746), *Philosophiae naturalis institutionum libri tres* (Napoli, 1738) e soprattutto la sua *De luminis refractione et motu brevis lucubratio* (Napoli, 1740) e propone un uso molto cauto di metodi infinitesimali, che

[12] L. Pepe, *Sulla trattatistica del Calcolo infinitesimale in Italia nel secolo XVIII*, in Atti del Convegno «La storia delle matematiche in Italia», Cagliari, 1982, Tip. Monograf, Bologna, 1984, pp. 145-227.

comunque vengono nuovamente sdoganati nell'insegnamento del Collegio Romano[13].

Nel 1742 Boscovich fu coinvolto in una prima perizia esterna: sul modo di riparare i cedimenti strutturali verso l'esterno del timpano della cupola di San Pietro. Nello stesso anno i suoi allievi si cimentarono in tre dissertazioni astronomiche delle quali una in particolare toccava il moto della Terra intorno al Sole: *De annuis fixarum aberrationibus*. L'anno dopo tra le dissertazioni da lui supportate intervengono notevoli problemi meccanici: il moto di un corpo sotto l'azione di forze centrali, i solidi di massima attrazione, le questioni riguardanti le forze vive. I metodi infinitesimali, in questo ambito, sono uno strumento matematico essenziale.

4.

ANDREAE TACQUET // SOCIETATIS JESU // ELEMENTA EUCLIDEA // GEOMETRIAE // PLANAE, AC SOLIDAE; // ET SELECTA // EX ARCHIMEDE // TEOREMATA: // EJUSDEMQUE // TRIGONOMETRIA PLANA. // Plurimis Corallariis, Notis, ac Schematibus // quadraginta illustrata // A GUILIELMO WHISTON. // Quibus nunc primum accedunt // Trigonometria Sphaerica Rogerii Josephi Boscovich S. J. // et Sectiones Conicae Guidonis Grandi, Annotationibus // satis amplis Octaviani Cameti explicatae. // TOMUS PRIMUS. // [MARCA TIPOGRAFICA] // ROMAE, MDCCXLV. // Suntibus Venantii Monaldini Bibliopolae in Via Cursus. // Typis Hieronymi Mainardi in Platea Agonali. // Superiorum facultate.

8°; pp. XXVI, 326, (2); tavv. 6 f.t.

ANDREAE TACQUET // SOCIETATIS JESU // TRIGONOMETRIA PLANA. // NEC NON // TRIGONOMETRIA SPHAERICA // Rogerii Boscovich // Ejusdem Societatis Jesu, // et // SECTIONES CONICAE, // Guidonis Grandi // Cum amplissimis Annotationibus, // et Additamentis // Octaviani Cameti // TOMUS SECUNDUS. // [MARCA TIPOGRAFICA] // ROMAE, MDCCXLV. // Suntibus Venantii Monaldini Bibliopolae in Via Cursus. // Typis Hieronymi Mainardi in Platea Agonali. // Superiorum facultate.

8°; pp. 226, (22); tavv. 14 f.t.

Nota: le ultime 22 pagine non numerate contengono le tavole dei logaritmi dei numeri naturali e delle funzioni trigonometriche. Sono dovute a Boscovich due parti del Tomus Secundus: *Trigonometria Sphaerica*, pp. 39-59; *De Cycloide et Logistica*, pp. 173-226. Quest'ultima è stata anche stampata separatamente.

---

[13] Una lettura in parte modernizzante di questa dissertazione è stata proposta da Jean Dhombres, *Boscovich aux prises avec le calcul différentiel: art nouveau des inégalités et pratiques anciennes*, in *R. J. Boscovich, vita e attività scientifica cit.*, pp.437-465.

Diventato professore di matematica al Collegio Romano nel 1741, Boscovich aveva intanto il problema di mettere tra le mani dei suoi studenti un testo di riferimento. La vecchia *Geometria* di Tacquet (stampata per la prima volta nel 1654) sembrava ancora utile: era stata ristampata ad Amsterdam nel 1725 con le note di un allievo di Newton, William Whiston (1667-1752), e con la prefazione di P.V. Musschenbroek (1693-1761), uno dei principali intrerpreti e divulgatori della filosofia newtoniana nell'Europa continentale. Newton stesso aveva costantemente preferito i metodi della geometria greca, quando applicabili, ai metodi analitici: la separazione tra metodi analitici e geometrici era considerata un pregio didattico ed epistemologico anche da studiosi padroni di entrambi gli approcci.

Questa edizione romana è una delle migliori riedizioni del classico libro di Tacquet. Il Primo tomo contiene: la *Praefatio* all'edizione di Cambridge del 1703, nella quale si riporta il giudizio di Isaac Barrow sulla Geometra di Tacquet «elegantissima», la dedica di P.V. Musschenbroek datata Treviri 1724, l'avvertenza (*Monitum*) che precede l'edizione di Cambridge del 1722 nella quale si riafferma l'interesse per i metodi classici della geometria euclidea, anche in presenza dei nuovi metodi analitici, aggiungendo però che i metodi analitici sono essenziali per molte questioni (p. XIX).

Il secondo volume è quasi completamente nuovo rispetto alle edizioni seicentesche del Tacquet. La sola parte del matematico belga è la trigonometria piana. Essa inizia con la definizione di seno, tangente e secante, prosegue con il calcolo dei seni di alcuni angoli notevoli, espressi in gradi sessagesimali. Viene poi trattata la risoluzione dei triangoli rettangoli e dei triangoli qualsiasi con diversi esempi. La trigonometria sferica non presenta nuove difficoltà concettuali per chi conosce la trigonometria piana: si trattava solo di prendere confidenza con i triangoli sferici. Boscovich, quindi, se la sbrigava in poche pagine[14].

Il secondo tomo contiene anche la *Sectionum conicarum synopsis* di Guido Grandi (nella versione latina uscita a Napoli nel 1737) e la già ricordata appendice di Boscovich sulla cicloide e la curva logaritmica.

5.
DE // CYCLOIDE ET LOGISTICA // AUCTORE // P. ROGERIO JOSEPHO // BOSCOVICH // SOCIETATIS JESU // MATHESEOS PROFESSORE // In Collegio Romano. // [MARCA TIPOGRAFICA] // ROMAE, MDCCXLV // Suntibus

[14] Per una presentazione storico critica della trigonometria sferica si può fare riferimento ad: A. Agostini, *Le funzioni circolari e le funzioni iperboliche. Trigonometria piana e sferica*, in *Enciclopedia delle Matematiche Elementari e complementi*, vol. II, Parte I, Hoepli, Milano, 1937, pp. 545-615.

Venantii Monaldini Bibliopolae in Via Cursus. // Typis Hieronymi Mainardi in Platea Agonali. // Superiorum facultate.

8°; pp. 56, (21); tav. 1. f.t.

Note:
p. 8: De Cycloide
p. 23: De Logistica
p. 57 nn.: Tabula I
p. 62 nn.: Tabula II

Le molteplici proprietà dei logaritmi rendevano inutile la giustificazione della logistica o curva logaritmica. Per quanto riguardava la cicloide, Boscovich faceva osservare che essa era una delle prime curve che si incontrano dopo le sezioni coniche: un punto sul bordo di un cerchio che ruota senza strisciare descrive infatti una cicloide. La studio di questa curva aveva una storia che Boscovich considerava degna di essere raccontata con molti dettagli. Vi compaiono numerosi riferimenti ad opere di Roberval, Torricelli, Mersenne, Galileo, Viviani, Cavalieri, Wallis (p. 4) e anche ad opere più antiche Niccolò Cusano e Charles Bovelles (1479-1567), al quale Wallis aveva attribuito la scoperta della cicloide. Invece, Boscovich tace su un protagonista della storia di questa curva: Blaise Pascal (1623-1662). Questi, in un'opera polemica comparsa nel 1658 con il titolo *Histoire de la roulette, appelée autrement trochoide ou cycloide*, aveva attribuito l'invenzione della curva a Marino Mersenne, nel 1615; ma è ben nota l'avversione dei Gesuiti a quello che era stato uno dei loro critici più radicali[15].

La notevole proprietà meccanica della cicloide (isocronismo) si trova presentata a p. 20; a p. 23 sono citati Newton e Philippe de La Hire (1706). La cicloide era già stata oggetto di una dissertazione presso il Collegio Romano, per le sue proprietà meccaniche, sotto la guida di Orazio Borgondio: *De cycloide et motu gravium cycloidali* (Roma, Komarek, 1733).

Per quanto riguarda la logistica (si noti che come il grafico delle funzioni logaritmica e esponenziale danno luogo alla stessa curva), la relazione tra le ordinate e le ascisse è stabilita a p. 27, il fatto che la sottotangente della logistica è costante (Leibniz, 1684) è affermato a p. 31. Non mancano riferimenti appropriati a Neper e a Briggs (p. 53) nonché alla compilazione e all'uso delle tavole (pp. 53, 56)[16].

---

[15] Un'ampia presentazione storico-critica delle cicloidi si trova in G. Loria, *Curve piane speciali algebriche e trascendenti*, Hoepli, Milano, 1930, vol. II, pp. 76-98. Per un contributo specifico si veda P. Costabel, *La «Cycloide» de R. Boscovich*, «Revue d'Histoire des Sciences», XV (1962), pp. 31-42.

[16] Per le proprietà della curva logaritmica il primo riferimento è ancora Loria, *op. cit.*, II, pp. 184-194.

Nel 1742, iniziò a Roma la pubblicazione di un *Giornale de' letterati* con il sottotitolo di «Novelle letterarie oltremontane». Si trattò, all'origine, di un'iniziativa autonoma dello stampatore e libraio Pagliarini che intendeva pubblicare essenzialmente estratti di lavori recenti (ultimi dieci anni) stampati fuori d'Italia. Presentando il giornale, che doveva avere cadenza annuale, si faceva notare come i Greci, che avevano considerazione solo delle proprie produzioni, erano stati conquistati dai Romani, che invece aggiunsero alla loro letteratura quella greca. Diversi estratti riguardavano opere scientifiche dagli atti accademici di San Pietroburgo alle *Philosophical Transactions* della Royal Society. Da notare nel primo volume un estratto del libro di Maupertuis intitolato *La figura della Terra*, le osservazioni sulle aberrazioni delle stelle fisse fatte a Parigi da Pierre Lemonnier, notizie di una cometa apparsa nel mese di marzo. A proposito delle orbite delle comete si legge: «La teorica del Signor Newton ci farà un giorno conoscere con esattezza il tempo delle loro rivoluzioni». (p. 20). Anche sulle altre questioni i *Principia* di Newton portavano chiarimenti definitivi, ma si trattava di mettere in discussione l'ipotesi copernicana. Già questo primo volume conteneva un *Supplemento* nel quale si dava notizie anche di libri stampati a Roma. Il secondo volume del *Giornale de' letterati* (1743) e il terzo (1744) proseguono sulla stessa linea: nel titolo compare ancora la dizione «Novelle Letterarie» e non vi è nessuna dedica, segno che lo stampatore si faceva carico delle spese. Nel quarto volume del *Giornale*, stampato nel 1745, scompare invece il riferimento alle «Novelle letterarie» e compare la dedica al card. Silvio Valenti, segretario di Stato di Benedetto XIV. Nella prefazione lo stampatore presenta la nuova veste, promettendo articoli più lunghi, un respiro ancora internazionale, ma senza trascurare opere italiane. Il riferimento era al *Giornale de' letterati* stampato a Roma da Ciampini e Nazari nel secolo precedente (1668-1683). Nel volume del 1745 si trovano in particolare un teorema di Clairaut riguardante l'integrazione delle equazioni differenziali (pp. 36-40) e una notizia sulla misura del meridiano condotta da La Condamine in America meridionale (pp. 195-108). Con il numero seguente iniziò la collaborazione di Boscovich al *Giornale*.

6.
Dimostrazione facile d'una principale proprietà delle // Sezioni Coniche, la quale non dipende da altri // Teoremi Conici; e Disegno d'un nuovo meto- // do di trattare questa Dottrina.// Articolo XIX: pp. 189-193; Articolo XXIII: pp. 241-243; Articolo XXXIII: pp. 311-316, tav. 1, f.t.
In: GIORNALE // DE' LETTERATI // PER L'ANNO // MDCCXLVI // DEDICATO // All'E.mo, e R.mo Principe // IL SIGNOR CARDINALE // SILVIO VALENTI // SEGRETARIO DI STATO // [marca tipografica] // In Roma MDCCXLVI // APPRESSO LI FRATELLI PAGLIARINI // Mercanti Librari e stampatori a Pasquino // Con licenza de' Superiori.

Le questioni affrontate nelle dissertazioni boscovichiane di questi anni riguardanti la meccanica celeste e l'ottica, sulle comete (1746) e sull'iride (1747) ponevano in primo piano proprietà delle sezioni coniche. Queste curve piane possono essere descritte, senza fare ricorso alle sezioni del cono o alla geometria analitica, come i luoghi dei punti per i quali è costante il rapporto delle distanze da una retta (direttrice) e da un punto (fuoco) che non le appartiene: se tale rapporto (eccentricità) è minore di 1 siamo di fronte ad un'ellisse, se è maggiore ad un'iperbole, se è uguale ad una parabola[17].

Questa proprietà delle coniche, che si trova già nel libro VII delle *Collezioni matematiche* di Pappo, è stata rivisitata varie volte. Boscovich cita come riferimento l'opera *Lineae tertii ordinis newtoniane* (Oxford, 1717) del matematico scozzese James Stirling (1692-1770); alla trattazione analitica di questi volle sostituirne una puramente geometrica. Queste definizioni per le coniche e le loro proprietà furono oggetto di un'estesa trattazione geometrica nel terzo tomo degli *Elementa universae matheseos* (1754)[18].

Oltre a questo lavoro di Boscovich, il volume del *Giornale* contiene anche estratti della *Historia critica philosophiae* di Jacob Brucker e degli *Annali d'Italia* di Ludovico Antonio Muratori, una presentazione degli *Elementa artis logico critica* di Antonio Genovesi, alcune *Lezioni di fisica sperimentale* dell'abate Nollet, una recensione dell'*Arimmetrica binomica e diadica* di Francesco Saverio Brunetti (cappellano del Papa), un estratto da una *Ricerca della misura delle forze de' corpi in moto* di Giacomo Jurin, un *Esame della curva elastica* di Francesco Jacquier, con uso del calcolo differenziale (pp. 162-168).

7.
Metodo di alzare un'infinitinomio a qualunque potenza: // del P. Ruggiero Giuseppe Boscovich della Compagnia // di Gesù, Professore di Mattematica // nel Collegio Romano // Articolo XXXI: pp. 393-404, tavv. 2 f.t.
In: GIORNALE // DE' LETTERATI // PER L'ANNO // MDCCXLVII // DEDICATO // All'E.mo, e R.mo Principe // IL SIGNOR CARDINALE // DOMENICO PASSIONEI // SEGRETARIO DE' BREVI // [marca tipografica] // IN ROMA MDCCXLVII // APPRESSO LI FRATELLI PAGLIARINI // MERCANTI LIBRARI E STAMPATORI A PASQUINO // CON LICENZA DE' SUPERIORI.

---

[17] G. Lazzeri, *Teoria elementare delle sezioni del cono e del cilindro rotondi*, in *Enciclopedia delle Matematiche Elementari e complementi*, Vol. II, Parte II, Hoepli, Milano, 1979, pp. 73-102, si veda in particolare p. 85. J.L. Coolidge, *A history of conic sections and quadric surfaces*, Clarendon Press, Oxford 1945.

[18] Si veda Edizione Nazionale delle Opere e della Corrispondenza di Ruggiero Giuseppe Boscovich, Sezione Opere, vol. II, *Elementa Universae Matheseos. Elementi di geometria*, a cura di L. Pepe, Roma-Milano 2010, in particolare pp. 16-18.

Questo volume del *Giornale* (vedi le seguenti opere 8 e 9) contiene anche una lunga memoria di Boscovich nella quale si fa uso del calcolo differenziale con le notazioni di Leibniz: *Dimostrazione d'un passo spettante l'angolo massimo e minimo dell'Iride, cavato dalla prop.* IX *della* 2^a *parte del libro* II *dell'*Ottica *di Newton* (pp. 165-193).

8. e 9.
Parte prima delle Riflessioni sul metodo di alzare un'infi- // nitinomio a qualunque potenza del P. Ruggiero Giu- // seppe Boscovich della Compagnia di Gesù, da lui pro - // messe in questo Giornale nel Dicembre del 1747 // Articolo III: pp. 12-27.
Parte seconda delle Riflessioni sul metodo di alzare un'in- // finitinomio a qualunque potenza del P. Ruggiero Giu- // seppe Boscovich della Compagnia di Gesù, da lui pro - // messe in questo Giornale nel Dicembre del 1747, e Gen- // naro dell'anno corrente // Articolo XII: pp. 84-99, tavv. 2 f.t.
In: GIORNALE // DE' LETTERATI // PER L'ANNO // MDCCXLVIII // DEDICATO // All'E.mo, e R.mo Principe // IL SIGNOR CARDINALE // SILVIO VALENTI // CAMERLENGO DI S. CHIESA // E // SEGRETARIO DI STATO // [marca tipografica] // IN ROMA MDCCXLVIII // APPRESSO LI FRATELLI PAGLIARINI // MERCANTI LIBRARI E STAMPATORI A PASQUINO // Con licenza de' Superiori.

Queste memorie segnano un ulteriore avvicinamento di Boscovich ai metodi del calcolo infinitesimale, che avvenne soprattutto attraverso la lettura delle opere di Newton e degli autori inglesi. La grande attenzione di costoro ai metodi geometrici trovava un alleato nel ricorso alla manipolazione delle serie di potenze trattate analiticamente come polinomi di grado infinito. Alla laboriosa espressione generale della potenza di una serie di polinomi sono legate le brevi memorie pubblicate di seguito. Boscovich ritornava sull'importanza dei metodi geometrici, ma senza ignorare quelli analitici, in un'altra memoria sullo stesso numero del *Giornale*: *Soluzione geometrica di un problema spettante l'ora delle alte e basse maree e suo confronto con una soluzione algebraica del medesimo data dal Sig. Daniele Bernoulli* (pp. 130-144).

Negli anni Quaranta del Settecento Boscovich ebbe modo di familiarizzarsi con i metodi della geometria cartesiana, del calcolo delle serie e delle flussioni di Newton, del calcolo differenziale e integrale di Leibniz e dei Bernoulli. In questo studio fu largamente aiutato dalle notevoli opere che venivano messe a disposizione degli studiosi: i quattro volumi dell'*Opera omnia* di Johann Bernoulli (1742), i due volumi di *Opera* di Jacob Bernoulli (1744), i tre volumi degli *Opuscula mathematica* di Newton (1744), i due volumi del *Commercium philosophicum et mathematicum* di Leibniz e Johann Bernoulli (1745), il *Treatise of fluxions* di Colin Maclaurin (1742), anche nella sua traduzione francese del gesuita Esprit Pezenas (1692-1776), stampa-

ta a Parigi nel 1749, l'*Introductio in analysin infinitorum* di Eulero (1748), le *Istituzioni analitiche* di Maria Gaetana Agnesi (1748).

10.
Dimostrazione di un metodo dato da Eulero per divide- // re una frazione razionale in più frazioni più semplici // con delle altre riflessioni sulla stessa materia del Padre // Ruggiero Gius. Boscovich della Compagnia di Gesù. // Articolo VII: pp. 78-96.
In: GIORNALE // DE' LETTERATI // PER L'ANNO // MDCCXLIX // DEDICATO // All'E.mo, e R.mo Principe // IL SIGNOR CARDINALE // SILVIO VALENTI // CAMERLENGO DI S. CHIESA // E // SEGRETARIO DI STATO // [marca tipografica] // IN ROMA MDCCXLIX // APPRESSO LI FRATELLI PAGLIARINI // MERCANTI LIBRARI E STAMPATORI A PASQUINO // Con licenza de' Superiori.

A dispetto di quanti vogliono Boscovich ostile ai metodi analitici, sta anche questa breve memoria che documenta come egli sia stato uno dei primi lettori in Italia dell'*Introductio in Analysin Infinitorum* di Eulero (Losanna, voll. 2, 1748), l'opera che ha rivoluzionato l'uso dei metodi analitici nel Settecento. Il problema è abbastanza antico: si tratta di decomporre una funzione razionale in somma di funzioni razionali 'semplici', aventi cioè come denominatore un polinomio di primo grado o sue potenze e al numeratore un numero. Riuscire a fare un'operazione del genere, possibile solo con l'impiego dei numeri immaginari, consente notevoli semplificazioni analitiche, ad esempio nella teoria dell'integrazione.

In questo volume del *Giornale* sono contenuti due gruppi di lettere inedite di Galileo Galilei a Federico Cesi, fondatore dell'Accademia dei Lincei (pp. 56-64, 99-104). Inoltre vi compare la traduzione del giudizio sulle *Instituzioni analitiche* di Maria Gaetana Agnesi, dato da Dortous de Mairan e Grandjean de Fouchy all'Academie des sciences (pp. 361-365).

Con il passare degli anni gli articoli scientifici sul *Giornale* diminuirono e crebbero invece quelli di storia civile ed ecclesiastica e gli scritti di antiquaria, che celebrarono a Roma nella seconda metà del secolo i massimi trionfi. Il volume del 1750, dedicato al cardinale Valenti, contiene una recensione dell'*Esprit des loix* di Montesquieu e una lettera di Boscovich su un obelisco di Augusto. Il volume del 1751, ancora dedicato al cardinale Valenti, riporta una notizia su Giovanni Bernoulli (pp. 182-190). Per gli anni 1752 e 1753 venne stampato un solo volume, con dedica al cardinale Valenti: in esso si segnalano pochi lavori scientifici, tra i quali una rivendicazione a Giulio Carlo Fagnano dei risultati sulla lemniscata, che Colin Maclaurin nel suo trattato delle flussioni non gli aveva correttamente attribuito.

Il *Giornale* per l'anno 1754 è dedicato al cardinal Enrico Enriquez, legato di Romagna, e contiene molti lavori di storia civile ed ecclesiastica; così il volume per l'anno 1755, dedicato al cardinale Neri Corsini. Per gli anni 1756 e 1757 venne pub-

blicato un solo volume dedicato al cardinale Giuseppe Spinelli, prefetto di Propaganda Fide: in esso si trova un problema di ottica risolto con il calcolo differenziale da Tommaso Perelli, professore di astronomia nell'Università di Pisa. L'ultimo volume del *Giornale* per gli anni 1758 e 1759 è dedicato al cardinale Andrea Corsini e stampato nel 1760.

Nel 1758 si concludeva anche il pontificato di Benedetto XIV, che aveva attutito di molto la censura sulle opere scientifiche. Nel suo tempo, Roma era stata sede di ecclesiastici illuminati con alte cariche: il cardinale Silvio Valenti Gonzaga, segretario di stato, il cardinale Domenico Passionei, bibliotecario, Francesco Saverio Brunetti, cappellano. Anche religiosi di differenti ordini, spesso divisi da latenti ostilità come i Minimi, gli Scolopi, i Gesuiti, i Somaschi, trovarono a Roma il modo di collaborare: collocazione ampiamente condivisa per le loro pubblicazioni fu appunto il *Giornale de' letterati.*

11.
NUOVI ISTROMENTI // PER LA // DESCRIZIONE DI DIVERSE CURVE // ANTICHE E MODERNE // E di molte altre, che servir possono alla speculazione // de' Geometri, e all'uso de' Pratici. /7 COL PROGETTO // DI DUE NUOVE MACCHINE PER LA NAUTICA // ED UNA PER LA MECCANICA, // E con alcune Osservazioni sopra de' Poligoni rettilinei regolari // DEL CONTE GIAMBATTISTA SUARDI // BRESCIANO // [MARCA TIPOGRAFICA] // IN BRESCIA: MDCCLII. // Dalle Stampe di Gian-Maria Rizzardi. // CON LICENZA DE' SUPERIORI.
4°, pp. (12), Ritratto del Doge di Venezia Francesco Loredan, 283; tavv. 33 f.t.

A documentazione degli interessi analitici di Boscovich negli ultimi anni quaranta del secolo XVIII si possono esibire ancora queste due sue lettere al conte Giambattista Suardi (1711-1767) a proposito delle *Ovali* di Cartesio, datate rispettivamente 16 marzo e 27 aprile 1748 (G. Suardi, *op. cit.*, pp. 62-80). Boscovich studiava queste curve prima con metodi geometrici, poi con i metodi della geometria analitica, giungendo correttamente a determinare l'equazione delle ovali, curve algebriche piane di quarto grado (si veda p. 75). Le sue opere di riferimento sulle *Ovali* furono il secondo libro della *Géométrie* di Descartes e il primo libro dei *Principia* di Newton (prop. 97).

Una peculiarità di quest'opera, magnifica dal punto di vista tipografico, è che essa è all'origine della falsa attribuzione della *Versiera* a Maria Gaetana Agnesi. Dopo quattro pagine dedicate alle concoidi, l'autore così presentava nell'Articolo Terzo (p. 5) l'*Origine e descrizione organica della Concoide della Contessa Agnesi:* «Non è da tralasciare che la concoide che la celebre Contessa Maria Gaetana Agnesi produsse nelle sue *Instituzioni Analitiche* (lib. I, cap. 5, probl. 4), non è stata, che si

sappia prima da altri conosciuta». La figura del Suardi è stata oggetto di recente attenzione[19].

12.
DELLE // PROGRESSIONI E SERIE // DEL P. FRANCESCO LUINO // Della Compagnia di Gesù // Coll'aggiunta // DI DUE MEMORIE // DEL P. RUGGIERO GIUSEPPE BOSCOVICH // della medesima Compagnia // [marca tipografica] // IN MILANO MDCCLXVII // Presso Giuseppe Galeazzi Regio Stampatore // Con licenza de' Superiori, e Privilegio.

4°, pp. XXII, 267.

Note:
p. V: Dedica a Carlo conte di Firmian.
p. 237: AGGIUNTA // DI DUE MEMORIE // DEL PADRE // RUGGIERO GIUSEPPE BOSCOVICH // DELLA COMPAGNIA DI GESÙ // Pubblico Professore di Matematica // Della Regia Università di Pavia.
p. 238: MEMORIA PRIMA // Metodo di evitare i logaritmi negativi.
p. 252: APPENDICE // Su i logaritmi delle quantità negative.
p. 257: Metodo di alzare un infinitinomio a qualunque potenza indefinita.
p. 265: IL FINE.

Francesco Luino (1740-1792), nato a Luino, sul Lago Maggiore, entrò nel Collegio dei gesuiti di Brera, dove fu allievo per le matematiche di Giovanni Antonio Lecchi e conobbe Boscovich, allora professore a Pavia (1764). Il volume *Delle progressioni e serie*, stampato a Milano nel 1767, appare come l'ideale continuazione del programma didattico di Boscovich. Dagli *Elementa matheseos* (Tomo II) Luino riprende nell'*Introduzione* l'uso delle regole dell'algebra e la risoluzione delle equazioni algebriche; nel *Libro Primo* tratta delle proporzioni e delle progressioni geometriche e aritmetiche (Libro I). Nuovo è il contenuto del Libro II: formazione e somma delle serie, serie che nascono dalle frazioni algebriche, metodo di Vincenzo Riccati per sommare le serie (1756), ma esso rientrava tra gli argomenti dei tomi previsti degli *Elementa universae matheseos*. Così Boscovich non ebbe difficoltà a fare aggiungere nel frontespizio dell'opera il suo nome prestigioso e a fornire due memorie stampate in appendice. La prima contiene un artificio tecnico per eliminare i logaritmi negativi, ed è più interessante per la nota finale nella quale si discutono i logaritmi dei numeri negativi, prendendo in esame la definizione di Eulero dei logaritmi in campo complesso, ma non aderendo ad essa, in nome anche di quanto

[19] A. D'Amico Finardi, G. Mirandola, *Il conte Giambattista Suardi e la «penna geometrica»*, in *Associazione Subalpina Mathesis, Seminario di storia delle matematiche «Tullio Viola», Conferenze e seminari*, 2006-07, a cura di L. Giacardi, M. Mosca, O. Robutti, Kim Williams Books, Torino, 2007, pp. 53-72.

d'Alembert aveva scritto nella voce *Logarithme* dell'*Encyclopedie*. La seconda memoria ripropone, in forma semplificata, il contenuto degli articoli di Boscovich sul *Giornale de' Letterati* di Roma (1747-1748). Essa riguarda l'espressione dell'analitica della potenza ennesima di una serie di potenze.

I rapporti tra Boscovich e Luino si interruppero quando questi, supplente di Louis Lagrange a Brera, non volle assumere una posizione chiara nel conflitto tra Lagrange e Boscovich sulla gestione dell'Osservatorio di Brera[20].

13.
EPISTOLA LXIII // Clarissimi Stepling ad Virum Cla- // rissimum P. Rogerium Boscovich S. J. // Philosophum et Mathematicum in // paucis Excellentem // [in fine] Pragae, 18 April. 1755: pp. 394- 397.
EPISTOLA LXIV // Viri Clarissimi Reverendi Patris // Rogerii Boscovich S. J. Ad Claris- // simum Stepling // [in fine] Romae, 7 Iunii 1755: pp. 398-415.

Questo scambio di lettere, relativo ad alcuni passi degli *Elementa universae matheseos* di Boscovich, avvenne poco dopo la pubblicazione dell'opera (1752-54), ma fu stampato a Bratislava solo nel 1782, nella raccolta di lettere scientifiche dell'exgesuita Joseph Stepling (1716-1778). Questi fu professore di matematica e di astronomia a Praga dal 1747 al 1759 Autore di una *Miscellanea Philosophica* (Praga 1759), dopo la soppressione dei Gesuiti rimase a dirigere l'Osservatorio astronomico della città e divenne professore dell'Università di Praga.

Stepling poneva a Boscovich due questioni. La prima riguardava l'algebra: un problema geometrico impossibile non si può mai tradurre in un'equazione di grado dispari superiore al secondo che ha sempre una radice reale? La seconda riguardava quale rapporto aveva l'angolo di contingenza, formato da una circonferenza e dalla sua tangente, con quello formato da una parabola e dalla sua tangente.

Si trattava di un problema geometrico – rispondeva Boscovich – che si può porre in modo algebrico e avere soluzione; questa, però, può entrare in contraddizione con i dati geometrici. In proposito egli fornisce un esempio di un problema che si traduce in un'equazione di primo grado. Altre volte un problema geometrico che non ha soluzione si traduce in un'equazione algebrica che non ha soluzioni reali: viene dato un esempio che conduce ad un'equazione di secondo grado. Per tali problemi Boscovich rimandava all'annunciato quinto tomo dei suoi *Elementa universae matheseos*, destinato ad ospitare le applicazioni dell'algebra alla geometria.

Nella sua lettera Boscovich trattava anche dell'angolo di contingenza, cioè della regione tra una curva e la sua tangente, che non gode delle proprietà delle grandezze archimedee e quindi non è un vero e proprio angolo. Infine, informava il corrispon-

[20] Un'accurata biografia di Francesco Luino si trova nel *Dizionario Biografico degli Italiani* (U. Baldini), vol. 66 (1006), pp. 518-522.

dente di aver misurato un arco di meridiano a nord di Roma, invitandolo ad un'impresa analoga. Il suo risultato, che doveva essere stampato entro l'anno (1755), sembrava infatti in contrasto con una misura effettuata in Francia, nell'ipotesi dello schiacciamento polare della Terra.

La corrospondenza Boscovich-Stepling fornisce un esempio della diffusione degli *Elementa universae matheseos* nei paesi cattolici di lingua tedesca. Si conoscono diversi allievi più o meno diretti di Boscovich in questo ambito. Tra essi vanno ricordati:

- Karl Scherffer (1716-1783), professore di matematica a Graz (1748-50) e poi di matematica e di fisica a Vienna (1750-1773), che collaborò alla stampa di diverse opere di Boscovich tra le quali la *Theoria* (1758).
- Johann Baptist Horvath (Keresztély János Horváth, 1732-1799), ungherese, professore dell'università di Trnava (Nagyszombat, in Slovacchia), autore di diverse opere elementari di matematica, fisica e metafisica che ebbero notevole diffusione: *Physica Generalis, Physica Particularis*, *Institutiones Logicae* (1767, 1813), *Elementa/Institutiones Matheseos* (1772, 1782), *Institutiones Metaphysicae* (1767, 1817)[21].

Con la stampa romana degli *Elementa universae matheseos* (1754) si esauriva sostanzialmente l'attenzione di Boscovich verso la matematica pura. Gli restavano estranei i progressi notevolissimi dei metodi analitici nello studio delle equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali e del calcolo delle variazioni che si venivano compiendo tra il 1740 e il 1760 ad opera di d'Alembert, Eulero, Daniele Bernoulli e di un giovanissimo Giuseppe Luigi Lagrange (1736-1813). L'aggiornamento matematico di Boscovich, iniziato in ritardo, come egli confidava all'allievo Francesco Puccinelli, fu interrotto da una serie di incarichi di perizie che gli giunsero da diversi Stati[22].

Egli ricevette, senza soluzione di continuità, incarichi per la riparazione del porto fluviale del Tevere a Fiumicino (1752), la misura del meridiano a nord di Roma (1751-55), la questione delle acque lucchesi (1756), una missione a Vienna, dove fece stampare le lezioni di ottica dell'astronomo Lacaille (1757) e pubblicò la sua opera più celebre, *Philosophiae naturalis theoria* (1758). Quando partì per Vienna, la sua cattedra di matematica al Collegio Romano venne assegnata per supplenza a suo

---

[21] Stefen J. Harris, *Boscovich, the «Boscovich Circle» and the Revival of the Jesuit Science*, in *R. J. Boscovich vita e attività scientifica cit.*, pp. 527-548.

[22] *Ruggiero Giuseppe Boscovich. Lettere per una storia della scienza (1763-1786)*, a cura di R. Tolomeo, Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL, Roma, 1991, in particolare p. 62. Si veda anche Edizione Nazionale delle Opere e della Corrispondenza di Ruggiero Giuseppe Boscovich, Sezione Corrispondenza, vol. IX/2, *Carteggi con Francesco Puccinelli, Leonardo e Giovanna Stecchini*, a cura di R. Tolomeo, Roma-Milano 2009, in particolare p. 58.

fratello Bartolomeo, che si considerava egli stesso inadatto. Ritornato a Roma per circa un anno tra il 1758 e il 1759 Ruggiero si sentiva ormai sul piede di partenza. Nel settembre del 1759 partiva per Parigi: durante il viaggio incontrò a Bologna Francesco Algarotti e a Marsiglia Esprit Pezenas. Giunto a metà novembre nella capitale francese, centro allora degli studi matematici, strinse amicizia con Clairaut e conobbe diversi accademici tra i quali d'Alembert con il quale ebbe un primo rapporto cordiale: «Trovai infinitamente più umano di quello che credevo, e mi fece molte cortesie ed espressioni»[23].

Conobbe anche Buffon e Madame du Boccage, rimanendo a Parigi fino a marzo 1760. Da qui passò a Londra, dove soggiornò per la restante parte dell'anno. Vi incontrò i matematici Thomas Simpson e Edward Waring, ma anche lo scienziato americano Benjamin Franklin e il pittore Joshua Reynolds. Visitò Cambridge, Oxford e Greenwich, dove incontrò l'astronomo James Brandley. A fine anno partì per i Paesi bassi austriaci; fu poi in Lorena e in Germania. Nel biennio 1761-63 compì il suo viaggio a Costantinopoli e nell'est Europa, inizialmente progettato per osservare il transito di Venere. A dicembre 1762 era a Cracovia e tra gennaio e maggio 1763 a Vienna. Ormai Boscovich non desiderava più tornare a Roma e quindi accettò di buon grado la cattedra di matematica all'Università di Pavia, che gli fu offerta dal governo austriaco. Il trasferimento in questa Università (1764) non lo ricondusse però agli studi matematici, per la notevole arretratezza, all'epoca, delle strutture scientifiche di quell'Università. Preferì invece stabilirsi a Milano, dove attese alla fondazione dell'Osservatorio astronomico di Brera. Qui favorì gli studi matematici di un promettente allievo, Francesco Luino, e gli approfondimenti teorici nel campo dell'idrodinamica del confratello Giovanni Antonio Lecchi (1702-1776). Ormai, però, i suoi interessi principali si erano spostati risolutamente nei campi dell'astronomia e dell'ottica, mentre i suoi studi di matematica pura divenivano sempre più occasionali e circoscritti; né era ormai in grado di affrontare, su questo terreno, la competizione delle nuove leve scientifiche: Lagrange, Condorcet, Laplace, Monge.

---

[23] G. Paoli, *Ruggiero Giuseppe Boscovich, nella scienza e nella storia del '700*, Accademia nazionale delle Scienze detta dei XL, Roma, 1988. Per il giudizio su d'Alembert cfr. p. 114. Si veda anche: L. Pepe, *Boscovich and the mathematical historiography of his time. An unpublished letter by d'Alembert*, in *R. J. Boscovich. Vita e attività scientifica*, cit., pp. 491-509.

NOTA EDITORIALE

La presente edizione è stata condotta sui seguenti esemplari:

1. *Trigonometriae Sphaericae Constructio*, Roma 1737.
Biblioteca dell'Istituto Nazionale di Astrofisica (INAF) Osservatorio Astronomico di Brera, Milano: 18O.66.4.

2. *De Circulis Osculatoribus*, Roma 1740.
Biblioteca dell'INAF Osservatorio Astronomico di Brera, Milano: 18O.66.5.

3. *De Natura et Usu Infinitorum*, Roma 1741.
Biblioteca del Museo Galileo – Istituto e Museo di Storia della Scienza, Firenze: MED 1790/ 06.

4. *De Cycloide et Logistica*, Roma 1745.
Biblioteca Nazionale Centrale di Roma: 14.8.a.4,2.

5. *Trigonometria Sphaerica*, in A. Tacquet, *Trigonometria plana nec nontrigonometria sphaerica*, Roma 1745, pp. 39-59, 1 tav. f.t.
Biblioteca del Museo Galileo – Istituto e Museo di Storia della Scienza, Firenze: FIA 072.

6. *Dimostrazione facile d'una principale proprietà delle sezioni coniche*, in *Giornale de' letterati*, Roma 1746, Articolo XIX (pp. 189-193), Articolo XXIII (pp. 241-243, 1 tav. f.t.), Articolo XXXIII (pp. 311-316, 1 tav. f.t.).
Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze: Palat. 16.6.2.25.

7. *Metodo di alzare un infinitinomio a qualunque potenza*, in *Giornale de' letterati*, Roma 1747, Articolo XXXI (pp. 393-404, 2 tavv. f.t.).
Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze: Palat. 16.6.2.25.

8. *Riflessioni sul metodo di alzare un infinitinomio a qualunque potenza. Parte prima*, in *Giornale de' letterati*, Roma 1748, Articolo III (pp. 12-27).
Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze: Palat. 16.6.2.25.

9. *Riflessioni sul metodo di alzare un infinitinomio a qualunque potenza. Parte seconda*, in *Giornale de' letterati*, Roma 1748, Articolo XII (pp. 84-99, 2 tavv. f.t.).
Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze: Palat. 16.6.2.25.

10. *Dimostrazione di un metodo dato da Eulero*, in *Giornale de' letterati*, Roma 1749, Articolo XII (pp. 84-99).
Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze: Palat. 16.6.2.25.

11. *Delle ovali cartesiane*, in *Nuovi istromenti per la descrizione di diverse curve antiche e moderne*, Brescia 1752, pp. 77-79 (1 tav. f.t.).
Biblioteca del Museo Galileo – Istituto e Museo di Storia della Scienza, Firenze: GDA 010.

12. *Aggiunta di due memorie*, in F. Luino, *Delle progressioni e serie*, Milano 1767, pp. 239-265.
Biblioteca del Dipartimento di Astronomia dell'Università degli Studi di Bologna: pi greco2 a-b4 A-2H4 2I4(-2I4) 2K6.

13. *Epistolae duo*, in J. Stepling S.J., *Litterarum Commercium*, Bratislava 1782, pp. 394-415.
Biblioteca Consorziale di Viterbo: *4, A-Rr8, Ss7.

TRIGONOMETRIAE SPHAERICAE CONSTRUCTIO



A. M. D. G.

TRIGONOMETRIÆ SPHÆRICÆ

Constructio.

DEMONSTRANDA A PP. SOCIETATIS JESU.

IN COLLEGIO ROMANO.

Die Septembris Anno D. M. DCC. XXXVII.



ROMÆ, M. DCC. XXXVII.

Typis Komarek, in Via Cursûs prope Plateam Sciarræ.
Superiorum Facultate.

PROPOSITIO I.

Conſtructionis fundamenta explicare.

SPHÆRICUM triangulum in ſphæræ ſuperficie conſtituitur a tribus arcubus circulorum maximorum, ideſt centrum habentium in Sphæræ centro. Quare ſi (*figura* 1.) trianguli AED latus quodvis AD ita producatur, ut circulum compleat, reliquorum laterum plana ipſum ſecabunt in diametris AO, DM, ſimulque concurrent in radio CE; & ſi per EG normalem circulo AOM agantur plana perpendicularia diametris AO, DM, ſphæra ſecabitur in circulis quorum circumferentias figura non exprimit, centra ſunt K, R, poli A, D. Planorum tamen inclinationes, ſive triangulorum ſphæricorum anguli menſurantur ab arcubus horum circulorum, nam angulorum EAD, EAM, atque EDA, EDO menſuræ ſunt anguli EKH, EKL, atque ERI, ERN, cumque ſint a polo A ad circumferentiam æquales ſunt arcus AL, AE, AH, & ſinus KL, KE, KH a centro K ad circumferentiam ejusdem circuli; nec alia de cauſa æquantur arcus DN, DE, DI, & ſinus RN, RE, RI. Quod ſi angulus EDA rectus eſſet punctum G caderet in diametrum DM: Sed quia in figura acutus eſt, cadit in IR citra diametrum, & GN quidem æquatur ſummæ GR, RE, vel factâ GQ æquali GR ſummæ GQ, QE; GI autem æquatur differentiæ earundem: ſi demum obtuſus foret caderet punctum G in RN ultra diametrum DM, & GN quidem æquaretur differentiæ, GI autem ſummæ rectarum GQ, QE, quo caſu angulus GQE æquaretur complemento anguli EDA ad duos rectos. At quia externus angulus ERN æquatur duobus internis RGE, REG, vel QGE, QEG, quorum, quì ad G ſunt recti; angulus REG, vel QEG eſt

differentia tam anguli ERG, quam ERN, ideſt anguli EDA acuti, vel obtuſi ab angulo recto.

Si (*Figura* 2.) tam circulus AOM, quàm arcus LA, AD, DN, & chordæ LH, NI normales diametris AO, DM æquentur terminis homologis figuræ præcedentis, eandemque poſitionem utrinque ſervent, etiam ordinata GE inſemicirculo LEH, & factâ GQ æquali GR, æquales erunt utrobique normales GE, atque æquabuntur triangula KEQ, ideoque angulus quidem EKH hujus figuræ æquabitur ſphærico EAD figuræ præcedentis, angulus autem EQG, vel æqualis erit angulo ſphærico EDA, ſi acutus fuerit, vel ejus complemento ad ſemicirculum ſi fuerit obtuſus, prout punctum G cadit in RI, vel in RN. Quod ſi permutatis lateribus fiat A T æqualis DN, ac diametro TZ ducatur NV normalis in X ſecans LH in P, unde ordinerur PS, capiaturque PB æqualis PX; omnia perinde hîc contingent, ac ſi infigura præcedenti completus fuiſſet circulus lateris ED, unde angulus HKS æquabitur præcedentis figuræ angulo AED, at angulus SBP rurſus exhibebit angulum EDA, vel ejus complementum ad duos rectos, prout punctum P inciderit in rectam XV, vel XN, ideoque SB parallela erit EQ, & PN æquabit ſummam, vel differentiam rectarum PB, BS. Demum, quia per conſtructionem TA æquatur ND, cui ob angulos rectos in R æquatur DI, etiam DT æquatur IA. Sed ob angulos rectos in X arcus NT æquatur TV. ergo etiam DT æquatur AV, & propterea quivis duorum æqualium arcuum AI, AV eſt differentia laterum AD DN, vel AD, DE præcedentis figuræ, atque arcus AN eſt eorundem ſumma. Ergo patent conſtructionis fundamenta quæ fuerunt explicanda.

PROPOSITIO II.

Datis tribus lateribus angulos invenire.

DEntur latera AE, ED, DA (*f.* 1.) quæruntur anguli EAD, EDA. In circulo AOM (*f.* 3. 4) capiatur arcus AL æqualis lateri AE, arcus AN æqualis ſummæ duorum laterum reliquorum, atque hinc inde arcus AI, AV æqualis eorundem differentiæ. Supra chordam LH perpendicularem diametro AO deſcribatur ſemicirculus HEL, ductiſque rectis NI, NV ab earum interſectionibus cum HL excitentur normales GE, PS. Erunt arcus HE, HS menſuræ angulorum EAD, AED figuræ primæ. Secetur alterutra chordarum NI, NV bifariam in R, vel X, factaque GQ, vel PB æquali GR, vel PX, ducatur EQ, vel SB. In figura 3. ubi punctum G cadit in RI, erit angulus EQG, vel SBP æqualis tertio angulo quæſito, ipſius autem complemento ad duos rectos in fig. 4, ubi punctum G. cadit in RN. Demonſtratio conſtat ex propoſitione 1. facta collatione figuræ 3. & 4. cum 2. ac 2. cum 1.

Co-

Corollarium.

DAtis altitudine poli, declinatione Solis, atque umbræ puncto observato in plano horizontali; dabitur distantia poli a vertice, distantia Solis a polo, ac distantia Solis a vertice. Capiatur in fig. 3. AL æqualis distantiæ poli a vertice: AN æqualis summæ distantiarum Solis a polo, & vertice: Al, AV æqualis earundem differentiæ; eritque HE quidem mensura temporis astronomici, quo punctum umbræ fuit observatum, HS verò mensura anguli, quo umbra in horizontem projecta declinat a lineâ meridianâ, quæ idcirco datur.

PROPOSITIO III.

Datis angulo, & duobus lateribus cætera invenire.

DEtur 1. angulus EAD (*fig.* 1.) interceptus lateribus AE, AD datis. In figuris propositionis 2. sumantur arcus AL, AD datis æquales, & circa chordam LH perpendicularem diametro AO descripto semicirculo, sumptoque arcu HE, qui mensuret angulum datum, ex E agatur EG perpendicularis LH, atque ex G agatur IN alteri diametro DM normalis in R. Erit DN tertium latus quæsitum ut ex dictis patet. Nec difficilius concluditur, quod si fiat AV æqualis AI, ductâque NV, ex puncto sectionis P ordinetur PS, erit arcus HS mensura anguli AED figuræ primæ, & si GR transferatur in GQ, determinabitur tertius angulus EDA.

Detur 2. angulus EAD (*fig.* 1.) non interceptus lateribus AE, ED datis. Casus iste ex genere duas, unam, vel nullam solutionem admittit. Nam si semicirculo AEO immoto ita moveatur semicirculus MED, ut diameter quidem DM circa centrum C revoluntur, circumferentia verò ipsius semper transeat per punctum E; arcus ED, ejusque, finus ER ita variabitur, ut minimus evadat cum radius CD per G tranfit congruentibus ER, EG; hinc inde augeatur, ac duplicem solutionem obtineat quandiu arcus ED minor est utroque arcu EA, EO; unicum valorem admittat cum ED mediæ quantitatis est inter EA, EO; nullum quando utrumque excedit, tunc enim non ipse arcus ED, sed ejus complementum ad semicirculum subtendere potest angulum acutum EAD. Oppositum contingeret si angulus EAD obtusus foret, ut patet in angulo obtuso EAL. Cum enim CD per G transit arcus EM est maximus: hinc inde ita decrescit, ut quandiu major est utroque AE, EO duas solutiones sortiatur, quando medius unam, quando minor nullam. His positis (*fig.* 5. 6.) fiat arcus AL æqualis dato lateri AE, atque arcus AT, vel OT æqualis alteri dato lateri ED. Tùm reliquis ut prius peractis sit HE mensura dati anguli EAD. demis-

missoque perpendiculo EG intra angulum EGQ aptetur EQ æqualis TZ sinui dati lateris ED in 1.fig.Quodsi EQ minor esset EG nullam quæstio admitteret solutionem. Tum centro G intervallo summæ, vel differentiæ EQ,QG inveniantur duæ intersectiones cum circulo AOL,a quibus per G extendantur chordæ NI, n i, illisque perpendiculares diametri DM, d m litteris D, d collocatis in semicirculo AHO,atque N,n in ea chordæ extremitate,quæ occurit post LAD, LAd,eruntque tria quæsiti trianguli latera LA,AD,DN,vel LA,Ad, dn. Oportet tamen ut latus DN, dn æquetur dato AT, non ipsius complemento, aut alteri arcui, quod indicio esset latus datum intra datum angulum aptari non posse. Reliqui demum anguli praxi jam expositâ invenimentur Q. E. F.

Corollarium.

SInt AL,AD (*fig.*3.)distantiæ duorum locorum a polo,atque a rcus HE mensuret differentiam longitudinum.Manifestabit arcus DN distantiam,& reliqui inventi anguli mutuam positionem. Sed si datâ poli altitudine observaretur tam altitudo Cometæ, quàm angulus, quem ad Cometæ nucleum facit circulus verticalis cum horario, bina data latera forent distantia tam poli, quàm Cometæ a vertice, & quia angulus ad Cometam non esset datis lateribus interceptus, quæstio solutionem admitteret ex secundo casu propositionis.

PROPOSITIO IV.

Circumferentiæ punctum invenire, a quo per duo data intra circulum puncta extensæ rectæ obscindant arcum bifariam divisum a diametro perpendiculari ad chordam, quæ data puncta conjungit.

INtra circulum HLO (*fig.*7.) dentur puncta G,& P,per quæ transeat corda HL perpendicularis diametro AO. Quæritur circumferentiæ punctum N,a quo per G,& P extensæ rectæ NI,NV abscindant arcum IV bifariam divisum a diametro AO.Ex G,& P ad partes contrarias agantur GE, PF perpendiculares circuli HEF diametro HL, quam secet in T recta EF, atque ex A per T extendatur AN. Erit N circumferentiæ punctum quæsitum. Probatur. Ut quæstioni satisfiat debet AN bifariam dividere angulum INV. Ergo chorda IV debet subtendere arcum bifariam divisum a diametro AO bifariam dividente arcum HAL, ideoque chorda IV debet esse parallela chordæ HL,& rectangulum IGN debet esse simile rectangulo VPN,nempe ut quadratum GN ad quadratum PN,sive,ob angulum GNP bifariam divisum,ut quadratum GT ad quadratum TP,

ideſt

ideſt,ob triangulorum TEG, TEP ſimilitudinem, ut quadratum GE ad quadratum PF. Atqui, ob circulum, rectangulum IGN æquatur HGL,id eſt quadrato GE,& rectangulum VPN æquatur NPL,id eſt quadrato PF. Ergo N eſt punctum quæſitum Q. E. F.

PROPOSITIO V.

Datis latere, & duobus angulis reliqua invenire:

DEtur 1. latus AE (*fig.* 1) interceptum anguli EAD, AED datis. In circulo AOL(*fig.*7.8.) capiatur arcus AL æqualis dato lateri, & circa chordam LH perpendicularem diametro AO deſcripto circulo HEF ſumantur arcus HE, HS qui datos angulos menſurent. Ex S ducatur HF ad LH normalis in P, atque ex E recta EF ſecans LH in T,& per præcedentem p.AN quidem extenſa per T ſummam reliquorum laterum AHN determinabit, NV verò extenſa per P manifeſtabit differentiam AV; inventiſque lateribus etiam tertius angulus ex dictis innoteſcet.

Detur 2. latus AE (*fig.*1.) non interceptum angulis EAD,EDA datis. In circulo AOL (*fig.*5.6) fiat arcus AL æqualis dato lateri, & circa chordam LH perpendicularem diametro AO deſcripto ſemicirculo,capiatur arcus HE menſurans datum angulum EAD, actoq; perpendiculo EG ad HL fiat angulus GEQ æqualis differentiæ alterius dati anguli EDA ab angulo recto,eritque angulus EQG æqualis dato angulo EDA,vel ejus complemento ad ſemicirculum. Centro G intervallo ſummæ GQE determinentur binæ interſectiones cum circumferentia circuli AOL, quæ ſi nuſquam occurrerent quæſtio repugnaret,ſi alicubi pateant,inde per G ducantur chordæ NI, n i,ac diametri DM, dm ad ipſas perpendiculares collocatis literis Dd in ſemicirculo AHO,atque N,n in ea chordæ extremitate,quæ occurrit poſt LAD,LAd, eruntque LA,AD, DN, vel LA,Ad, dn quæſita trianguli latera,atque inde tertius angulus ervetur.Oportet tamen, ut poſitio punctorum GR quæſtioni propoſitæ reſpondeat. Nam trianguli rectanguli EGR (*fig.*1.) cum conſtans ſit latus EG creſcit angulus ERG decreſcente baſi ER,qua creſcente decreſcit,donec evadat minimus quando ſinus ER æquatur radio EC, nempe quando arcus ED eſt quadrans. Ab hoc limite ita variatur angulus EDA, vel ERG,ut duas ſolutiones admittat dum minor eſt angulo EAD,unam dum medius eſt inter EAD,atque EAL ipſius complementum ad ſemicirculum, nullam dum utroque major. Quare ſi in fig. 6. 7. datus angulus æquatur EQG ubi punctum G cadit tam in RI,quàm in (r i) datur duplex ſolutio,ubi cadit quidem in RI, non autem in (r i) datur una tantum. Sed ſi in eisdem figuris datus angulus æquaretur

an-

anguli EQG complemento ad semicirculum, in fig. 6. casus repugnaret, in 7. quæstionem solverent latera LA, Ad, dn.

Corollarium.

SI AL (*fig.* 7.) sit complementum polaris altitudinis, arcuum verò HE, HS alter mensuret horam ante, vel post meridiem, alter angulum verticalis circuli cum meridiano invenierur tam distantia Solis a polo, ideoque declinatio, quam vera Solis supra horizontem altitudo, quæ observatio in longiori G nomone accurate instituta tam inclinationem eclipticæ ad æquatorem, quàm refractionis quantitatem determinabit. Sed si AL (*fig.* 7. 8.) sit complementum altitudinis solaris supra horizontem, atque arcuum HE, HS alter mensuret angulum in Sole factum a verticali circulo cum horario, alter horam ante, vel post meridiem, erit arcus AD, vel Ad complementum altitudinis polaris, arcus autem DN, vel dn distantia Solis a polo.

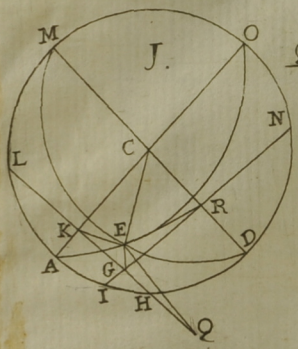
PROPOSITIO VI.

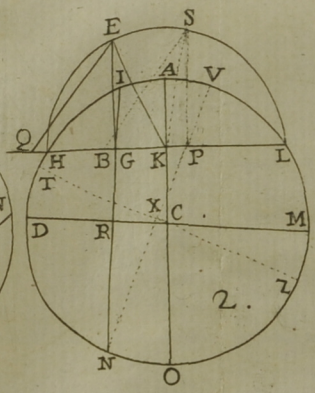
Datis tribus angulis latera determinare.

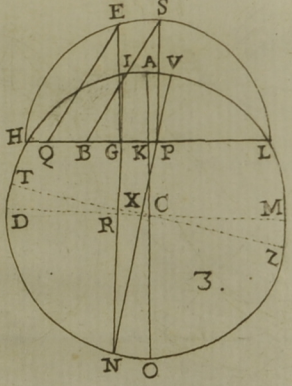
TRianguli AED (*fig.* 1.) dentur tres anguli, quæranturque latera singula. Fiat semicirculus HEL (*fig.* 3. 4.) cujus arcus HE quidem angulum EAD, HS autem angulum AED mensurent. Ductis EG, SP perpendicularibus ipsi HL fiant anguli GEQ, PSB æquales differentiæ tertii anguli dati a quadrante; & siquidem tertius angulus acutus fuerit centro G intervallo summæ GQ, QE & centro P intervallo summæ PB, BE, ut in fig. 3. sin obtusus extiterit eisdem centris, atque intervallo differentiæ earundem rectarum inveniatur communis intersectio N, ut in fig. 4. Quippe si nusquam hæ rectæ concurrerent quæstio repugnaret. Demum per tria puncta HLN descripta circuli circumferentia, ductisque diametris ad chordas HL; NG normalibus, quæsita latera erunt LA, AD, DN Q. E. F.

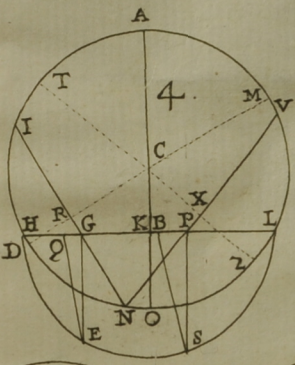
Corollarium.

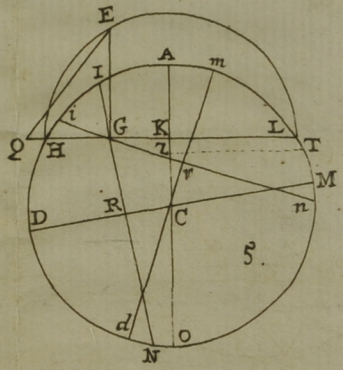
TRiangula rectangula faciliùs construuntur quàm obliquangula; quorum ideo distinctio omissa est; & quemadmodum sectionum conicarum proprietates tam in plana superficie, quàm in cono secto demonstrantur, ita quæ hactenus de triangulis sphæricis in plano ostensa sunt, etiam ex sphæræ sectione constant.

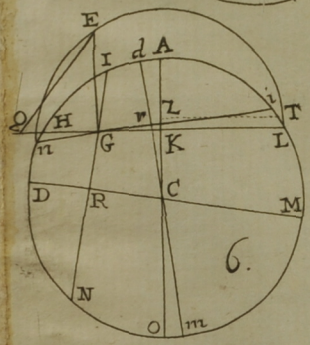

J.
M
O
N
L
C
R
K
E
D
A
G
I
H
Q

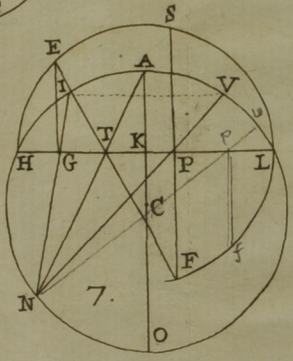

E
S
I
A
V
Q
H
B
G
K
P
L
T
X
C
D
R
M
Z
2.
N
O

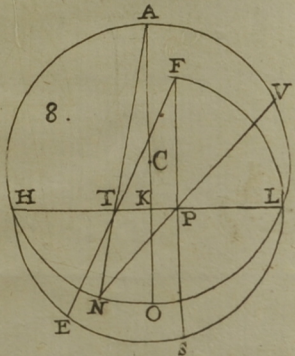

E
S
I
A
V
H
Q
B
G
K
P
L
T
X
C
M
D
R
Z
3.
N
O


A
T
4.
M
V
I
C
X
H
R
G
K
B
P
L
D
Q
Z
N
O
E
S


E
A
m
I
i
G
K
L
Q
H
Z
T
r
M
D
R
C
n
5.
d
O
N


E
I
d
A
Q
H
r
Z
i
T
n
G
K
L
D
R
C
M
6.
N
O
m


S
E
A
I
V
T
K
H
G
P
L
C
F
f
N
7.
O


A
F
V
8.
C
H
T
K
L
P
N
O
E
S

DE CIRCULIS OSCULATORIBUS



A. M. D. G.

DE

CIRCULIS OSCULATORIBUS

DISSERTATIO

Habenda à PP. SOCIETATIS JESU
in Collegio Romano

Anno MDCCXL. Augusti. Die 3. Hora



5341

ROMÆ, MDCCXL. Ex Typographia Komarek in Viâ Cursûs.
SUPERIORUM PERMISSU.

I.  Irculorum Oſculatorum cognitio quam neceſſaria ſit hiſce temporibus, norunt optimè, qui vel in præclariſſimis Recentiorum inventis perluſtrandis aliquam operam collocaverunt, vel in perveſtigandis naturæ arcanis ſuum ipſi exercuerunt ingenium. At non ita facile eſt genuinam ipſorum ideam animo concipere, quod cæteroquin eſt perneceſſarium, ne in eos errores incidat minus cautus Geometra, qui ſummis etiam viris aliquando exciderunt. Hic erit proinde totius diſſertationis ſcopus præcipuus : nimirum eo collimabimus, ut circulorum oſculatorum naturam liceat non tantum animo contemplari, ſed ipſis propemodum oculis uſurpare ; quod quidem præſtare conabimur definiendo ipſos oſculatores circulos pro conicis ſectionibus methodo prorſus Euclidea abſque ulla infinitè parvorum notione ; Unde ad cæteras curvas gradu facto breviſſimè inſinuabimus, quid de omnibus ſentiamus, & qua ratione iis uti liceat in methodo infinitorum.

II. Dicimus circulum Curvæ Oſculatorem in dato puncto eum, qui communem cum ea tangentem in eodem puncto ita habeat, ut cujuſcunque minoris eandem habentis tangentem, & ad eaſdem partes poſiti arcus aliquis utrinque circa punctum contactus ſit intra curvam, cujuſcunque verò majoris ſit extra. Si aliquis ejuſmodi circulus occurrat ; curvaturam dicimus circulari analogam. Si omnis circuli utcunque parvi eandem tangentem habentis arcus aliquis utrinque ſit extra curvam ; curvaturam dicimus omni circulari majorem. Si omnis circuli utcunque magni arcus aliquis ſit ſemper utrinque intra curvam ; dicimus curvaturam omni circulari minorem.

III. Sit jam *eBE* Hyperbola, Parabola, & Ellipſis, quarum diameter *DB*, ordinata ad ipſam *eME* parallela tangenti *HBP*, cujus pars *BP* ſit æqualis parametro ejus diametri : & , ſi diameter non ſit axis, angulus quidem *BME* ſit acutus, angulus *BMe* obtuſus : ordinatam verò *eME* productam, ſi opus ſit, ſecet in *F* recta indefinita conjungens puncta *DP* *Fig.* 1. 2. 3.

in Ellipsi, & Hyperbola, parallela autem diametro *DB* in Parabola: & patet ex Conicis, fore quadratum tam ordinatæ *ME*, quam *Me* utrinque æquale rectangulo sub *BM*, & *MF*, eo tantùm discrimine inter ipsas, quod in Hyperbola *MF* excedit parametrum *BP*, in Parabola ipsi æquatur, puncto nimirum *D* abeunte in infinitum in 2. fig., & rectis *BM*, *PF* evadentibus parallelis: at in Ellipsi in fig. 3., puncto *D* jacente ad partem oppositam, *MF* deficit a parametro *BP*; unde nomen Hyperbolæ, Parabolæ, atque Ellipsi factum.

Fig. 4. IV. At in circulo *BLR* si chordam *RB* quancunque secet chorda *iMI* parallela tangenti *HB* in *M*, & jaceat *MI* in angulo *RBP* obtuso, *Mi* in opposito acuto, ducanturque *IN*, *in* parallelæ tangenti *RH* per *R* ductæ, & occurrentes in *N*, *n* chordæ *RB* productæ, si opus sit; erit $MIq = BM^{x}RN$, & $Miq. = BM^{x}Rn$. Demonstratur. Quoniam ex prop. 36. El. 3. eruitur tangentes *HR*, *HB* esse æquales inter se; erit isosceles triangulum *HRB*, adeoque isoscelia etiam triangula *MIN*, *Min* ob horum latera ejus lateribus parallela. Quare & angulus $BMI = BNI$, & $MI = IN$. Rursus ob chordam *IMi* parallelam tangenti *BH* facile demonstratur, æquales esse inter se arcus *BI*, *Bi*, ac proinde etiam angulos *BRI*, *BIM* iisdem insistentes ad circumferentiam. Igitur in triangulis *BMI*, *INR* bini anguli æquales sunt, adeoque ipsa triangula similia, & *BM.MI* :: *IN.NR*. Quare ob $MI = IN$ erit $MIq. = BM^{x}NR$, & eadem prorsus demonstratione $Miq. = BM^{x}Rn$.

V. Si chorda *BR* evaderet diameter; tangentes *BH*, *RH* evaderent parallelæ, & ipsi *RB* normales. Quare tam *IM*, *IN*, quam *iM*, *in* congruerent, & tam *MIq.* quam *Miq.* evaderet æquale $BM^{x}MR$, quæ est circuli natura. At ubi *BR* per centrum non transit, ducta diametro *RL*, tangens *LQ*, quæ parallela est ipsi *RH*, incidet in chordam *RB* alicubi extra circulum in *Q*, & assumpta quacunque *BN* minore, quam sit *BQ*, ductaque recta *NI* parallela tangentibus *QL*, *HR*, ipsa incidet in circulum alicubi in *I*, unde ducta *IMi*, & *in* ut supra, redibit eadem figura & constructio; ac pariter assumpto ubicunque in chorda *RB* puncto *n*, licebit ducere rectas *ni*, *iMI*, *IN* cum eadem lege ac prius. Quoniam verò quotiescunque *BR* non est diameter, semper erit *RN* major quam *Rn*; erit pariter in iisdem casibus $BM^{x}RN$ majus quam $BM^{x}Rn$, & *MI* major quam *Mi*.

VI. Con-

VI. Conferatur fig. 1. cum 4., & distinctionis gratia sint in fig. 5. rectæ $\mathcal{Q}BD$, BP, MF, DPS eædem ac in 1., arcus circuli IBi rectæ HBP, ni, iMI, IN eædem ac in fig. 4., assumptaque $B\mathcal{Q}$ æquali parametro BP, ducatur $\mathcal{Q}S$ parallela tangenti BP, occurrens rectæ DPF in S, & recta BS, quæ ipsam MF secet alicubi in T; eritque $TF = M\mathcal{Q}$. Est enim, ob BP, MTF, $\mathcal{Q}S$ parallelas, $BP . TF :: PS . FS :: B\mathcal{Q} . M\mathcal{Q}$, & ob $BP = B\mathcal{Q}$, oportet esse $TF = M\mathcal{Q}$. Fig. 1. 4. 5.

VII. Hisce præmissis facile jam demonstratur, circulum iBL fore Hyperbolæ osculatorem, si ejus chorda sit $B\mathcal{Q}$, nempe si abscindat a diametro Hyperbolæ pertinente ad punctum B chordam æqualem parametro ejusdem diametri. Sit enim primo circulus utcunque minor, qui abscindat BR utcunque minorem, quam sit $B\mathcal{Q}$. Fiat BN ita minor rectâ $R\mathcal{Q}$, juxta n. 5., ut sit etiam minor recta $B\mathcal{Q}$ figuræ 4., & facta reliqua constructione ut supra, quoniam BN minor est, quam $R\mathcal{Q}$, addito communi BR, erit tota RN minor quam $B\mathcal{Q}$, adeoque minor, quam ipsi æqualis BP, & multo etiam minor quam MI. Igitur $BM^{\times}NR$, sive, per n. 4., MIq. minus quam $BM^{\times}MF$, vel per n. 3. quam MEq. in fig. 1. Punctum igitur I circuli intra Hyperbolam jacet, & multo magis totus arcus BI, adhuc imminuta BN, ac per n. 5. multo etiam magis erit intra circulum punctum i, & totus arcus Bi. Sit secundò circulus major abscindens chordam Br majorem chorda $B\mathcal{Q}$, ac fiat ut summa laterum $B\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}S$ ad latus $B\mathcal{Q}$ ita $\mathcal{Q}r$ ad Bn, & ductis ni, iMI juxta n. 5., ac ns parallela $\mathcal{Q}S$, dum occurrat rectæ BS in s, quoniam erit etiam $B\mathcal{Q}+\mathcal{Q}S . B\mathcal{Q} :: Bn+ns . Bn$; oportebit esse $\mathcal{Q}r = Bn+ns$, adeoque majorem rectis nM, MT simul, & additis $M\mathcal{Q}$, TF æqualibus per n. 6., erit Mr major quam $nM+MF$, ac ablata nM, erit nr major quam MF. Igitur & $MB^{\times}nr$, sive per n. 4. Miq. majus quam $BM^{\times}MF$, sive per n. 3. Meq. in fig. 1.; ac proinde punctum i extra Hyperbolam. & multo magis, adhuc imminuta MF, & aucta rn, erit extra Hyperbolam totus arcus Bi, ac multo etiam magis, per n. 5., punctum I, & totus arcus BI. Igitur cujuscunque minoris circuli arcus aliquis utrinque circa punctum B intra Hyperbolam jacet, & cujuscunque majoris arcus aliquis utrinque extra ipsam; ac proinde circulus, qui intercipit partem diametri $B\mathcal{Q}$ æqualem parametro, & habet communem cum Hyperbola tangentem ad easdem partes, est circulus Osculator per n. 2.

VIII. Ipse autem osculator circulus licet communem habeat cum Hyperbola tangentem, eandem in ipso puncto contactus secat ita, ut ex parte anguli acuti QBH jaceat intra Hyperbolam, ex parte obthsi QBP extra ipsam: quod sic facile ostenditur. In circulo, cujus chorda BQ, est $Mq. = BM \times \eta Q$. Igitur ob ηQ minorem quam BQ, sive BP, & multo minorem quam MF, erit $Mq.$ minus quam $BM \times MF$, sive quam Meq. in fig. 1.: adeoque omnia puncta i, & totus arcus Bi erunt intra Hyperbolam. Si autem capiatur QO ad QS in ratione BH ad BR figuræ 4. nempe in ratione MI ad MN figuræ 4. & 5., & recta BO secet in V rectam MF, & in L circulum; totus arcus BIL erit extra Hyperbolam, quam secabit in L, & post punctum L intra ipsam cadet. Nam, ob QOS, MVT parallelas erit $TM. VM :: SQ. OQ :: MN. MI$, & alternando $TM. MN :: VM. MI$; adeoque dum fuerit VM minor quam MI; erit TM minor quam MN, & additis æqualibus MQ, TF erit MF minor quam QN, ac $BM \times MF$ minus quam $BM \times QN$, sive Meq. figuræ 1. minus qua MIq., nimirum punctum I extra Hyperbolam. Punctis autem I & V coeuntibus in L, evadit punctum L tam ad Hyperbolam, quam ad circulum; ac deinde facta MI minore quam MV, punctum I intra Hyperbolam cadit.

IX. At si QB sit circuli diameter, quod accidet, si DBQ sit Hyperbolæ axis, evadit BH in fig. 4. infinita, quare & recta QO infinita evadit, ac recta BO congruit cum tangente BP, nec ullus arcus BL est extra Hyperbolam; sed circulus osculator jacet totus intra ipsam; quod sic etiam demonstratur. Sit BD latus transversum Hyperbolæ BIO, BP tangens æqualis lateri recto, & eidem æqualis BQ, ductaque QP & MF tangenti parallela, quæ ipsam QP secet in A, & Hyperbolam in I, concipiatur circulus cujus diameter BQ. Quoniam est $QM. MA :: QB. BP$ in ratione æqualitatis, & MA semper minor quam MF, erit & $BM \times MQ$ minus quam $BM \times MF$, sive ordinata ad circulum minor utrinque quam ordinata ad Hyperbolam, ac proinde totus circulus utrinque intra ipsam. Eum autem esse Hyperbolæ osculatorem patet etiam ex eo, quod quicunque minor multo magis intra ipsam jaceret; at cujuscunque majoris, cujus diameter sit BR, arcus aliquis utrinque circa punctum B sit extra ipsam. Ducta enim RT parallela QP, quæ secet BP in T, DP in V, per quodcun-

Fig. 6.

cunque punctum *F* inter *P* & *V* ducatur *MFS* occurrens rectæ *RT* in *S*, erit semper *MR* æqualis *MS*, & major quam *MF*, ac propterea erit ordinata ad eum circulum major quam ordinata ad Hyperbolam: recta vero *VN* parallela *PB* occurret alicubi in *O* simul & Hyperbolæ, & circulo, cum ibi rectæ *MF*, *MS* congruant, ac deinde ordinata ad circulum minor erit quam ordinata ad Hyperbolam, ac proinde reliquus circuli arcus jacebit intra ipsam.

X. Eadem demonstratio locum habet in Parabola, in qua semper *PFV* est axi parallela, & in vertice axis majoris Ellipseos, in quo punctum *D* jacet ad partem oppositam infra *Q*. At in axe minore Ellipseos, qui suo parametro est minor, cadit punctum *D* inter *B* & *Q*, & facile eadem methodo demonstratur circulum osculatorem jacere totum extra Ellipsim, sed circulum utcunque minorem jacere aliqua sui parte utrinque circa *B* intra eandem.

XI. Superiores quoque demonstrationes pro Hyperbolæ diametris factæ eadem methodo applicantur Parabolæ, & Ellipsi rite immutata figura ita, ut generaliter circulus sectionem conicam osculans in dato puncto sit is, qui communem cum ea tangentem habeat in eo puncto, & ex diametro ad idem punctum pertinente abscindat partem parametro æqualem. Et cujuscunque minoris circuli arcus aliquis utrinque circa contactum est intra curvam, majoris autem extra ipsam. At ipse quidem osculator circulus in vertice Hyperbolæ, Parabolæ, & axis transversi Ellipseos totus est intra curvam, adeoque inscriptus, sed ex inscriptis maximus; at in vertice axis conjugati Ellipseos totus est extra ipsam, ac proinde circumscriptus, sed minimus ex circumscriptis. In reliquis vero punctis curvam ipsam in communi puncto contactus ita secat, ut ex parte anguli acuti jaceat intra ipsam, ex parte anguli obtusi extra ipsam egressus transeat inter ipsam & tangentem, ac eam iterum secet in illo puncto *L*, quod determinatur, ut in n. 8.

XII. Ut autem stante parametro *BP*, & diametro *BD* jacente utcunque extra curvam, ut in fig. 1., curva est semper Hyperbola, dum puncto *D* in infinitum recedente, & evadentibus *BM*, *PF* parallelis, ut in fig. 2., Hyperbola mutatur in Parabolam, puncto autem *D* abeunte ad partes oppositas, ut in fig. 3., & rectis *BM*, *PE* jam convergentibus, curva *Fig.* 1. 2. 3.

curva evadit Ellipsis; cujus diameter *BD* vel major est parametro *BP*, vel æqualis, vel minor; ita eadem methodo numeri 8. facile demonstratur, punctum *L*, in quo circulus osculator sectionem conicam iterum secat, in Hyperbola quidem & Parabola jacere semper ex parte anguli obtusi *MBP*, in Ellipsi autem jacere ex eadem parte, dum diameter *BD* est major parametro *BP*: cadere in *D*, ibique iterum osculari Ellipsim, ubi diameter parametro æqualis evadit: diametro verò adhuc decrescente, abire in *l* ad partes oppositas.

Fig. 7. XIII. Juvat etiam contemplari variationes circulorum omnium habentium tangentem *BP*, ac centrum alicubi in *R* in recta *BR* indefinita normali ad Hyperbolam *BVD*, cujus centrum *C*, semidiameter *CB*, parameter æqualis portioni *BQ* diametri *CBQ*, axis *CVI* secans normalem in *I*. Sit primò *BR* minima, & circulus Hyperbolam contingit in *B*, ac totus intra Hyperbolam jacet. Aucta *BR*, & centro *R* abeunte in *I*, jam ipse circulus iterum Hyperbolam contingit in *D*, ubi arcus *VD=VB*. Centro abeunte ultra *I* in *r*, circulus Hyperbolam tangit adhuc interius in *B*, sed alicubi circa *D* in *H*, & *E* eandem secat, aliqua sui parte extra ipsam erumpens, diametrum autem *CBQ* adhuc secat in aliquo puncto *O* inter *B*, & *Q*. Aucto radio *Br*, puncta *H*, *E* ita recedunt a puncto *D*; ut puncto *O* abeunte in *Q*, punctum quidem *H* abeat in *B*, punctum vero *E* in *L*, & circulus jam Osculator Hyperbolam nullibi tangit, sed secat in *B*, & *L*. Demum adhuc aucto circulo, punctum *O* abit ultra *Q* in *o*, puncta sectionum *H*, & *E* in *b*, & *e*, & circulus ipse curvam ita contingit exterius in *B*, circa ipsum *B* utrinque jacens inter Hyperbolam & tangentem, ut in *b*, & *e* intra ipsam recidat.

XIV. Multa inde profluunt sane mira, & adnotatu dignissima. Primum quidem errant, si qui sunt, qui putent, ullum arcum circuli osculatoris utcunque parvum verè congruere cum arcu curvæ diversam habentis naturam & æquationem. Cum ipsa concurrit in unico puncto, & ex ea parte, ex qua curvitas crescit, circuli arcus subit inter curvam & tangentem, ex opposita, ex qua decrescit curvitas, arcus curvæ subit inter circulum & tangentem. Qua in re simile quid contingit circuli osculatoris arcui secanti curvam, dum

dum reliqui majores, vel minores circuli eam omnes contingunt, quod rectæ curvam in puncto flexus contrarii tangenti simul ac secanti, licet quivis circulus centrum habens in normali ex utralibet parte curvam tantum contingat. Imo ubi ante flexum contrarium curvitas minuitur in infinitum, arcus circuli curvam ibi osculantis abit in illam ipsam rectam, circulo in infinitum aucto, & curvitate, cum jam non possit decrescere, abeunte ad partes oppositas. Ubi autem in qualibet curva in axis vertice decrementum curvitatis mutatur in incrementum, vel viceversa; arcus circuli osculatoris utrinque est inter tangentem, & curvam, vel arcus curvæ inter tangentem & arcum circuli.

XV. Licet ii duo arcus constituant angulum, tamen, ut inter circularem arcum, & rectam tangentem nulla alia recta duci potest, per 16. El: 3., ita inter arcum curvæ, & arcum circuli osculatoris nullus alius circulus transire potest. Nam ex ipsa definitione quicunque minor est utrinque intra curvam, quicunque major utrinque extra ipsam: ac circulus osculatore minor, qui intra curvam jacet utrinque circa punctum contactus, si sensim crescat, ubi evadit major, simul transilit & arcum curvæ, & arcum circuli osculatoris. Ut autem inter tangentem & arcum circuli innumeri arcus circulorum majorum transeunt, ita inter arcum Hyperbolæ & circuli Osculatoris infiniti arcus Hyperbolarum, & Ellipsium duci possunt. Si enim stante parametro *BP*, & angulo *MBP*, minuatur diameter *BD*, vel augeatur utcunque; circulus osculator manet idem ac prius: at aucta in primo casu, imminuta in secundo recta *MF*, augentur vel minuuntur ordinatæ ad Hyperbolam, & Hyperbolarum novarum arcus ex parte *BI* in primo casu, & ex parte *Bi* in secundo transeunt inter arcus primæ Hyperbolæ, & communis circuli osculatoris. *Fig. 5.*

XVI. Si sumatur arcus curvæ *BE* infinite parvus, sive potius indefinite parvus, ducaturque *AET* normalis ad tangentem *BA* occurrens in *T* circulo osculatori, erit ratio *AT* ad *TE* major quacunque data. Si enim arcus circuli osculatoris est intra curvam & circulus *BOR* utcunque major secet alicubi in *t* rectam *AT*; erit semper aliquis arcus curvæ *BE* inter arcus *BT*, *Bt* per definitionem circuli osculatoris, adeoque puncto *A* in infinitum accedente ad *B*, ac- *Fig. 8.*

cedent

cedent AT, AE ad se invicem magis quam AT, At; Cum autem ratio AT ad At, seu ductis ti, TI parallelis tangenti, ratio BI ad Bi sit eadem ac ratio iR ad IQ ob circuli naturam; accedentibus ex una parte punctis i I ad B, ac ex alia diametro BR ad diametrum BQ magis quam pro quavis differentia, accedit ratio AT ad At ad rationem æqualitatis pariter magis quam pro quavis differentia. Igitur multo etiam magis ratio AT ad AE accedit ad rationem æqualitatis ultra quoscunque limites; & proinde ratio AT ad TE fit major quacunque data; & similis esset demonstratio, si arcus circuli osculatoris extra curvam jaceret. Cum vero AT, ex natura circuli sit tertia proportionalis post QB finitam, & chordam BT infinitesimam primi ordinis, adeoque sit infinitesima secundi ordinis; erit intercepta inter arcum curvæ, & arcum circuli osculatoris infinitesima ordinis inferioris ad secundum, quod pariter demonstrari potest de quacunque recta finito angulo inclinata ad tangentem.

XVII. Cæterum in diversis curvis posset esse infinitesima quarti, quinti, & ulterioris ordinis, vel etiam intermedii inter secundum & tertium. Si enim producta QB ad arbitrium in D, ductaque DL parallela tangenti BA, quæ TA productæ occurrat in L, eandem AL secet in N curva quævis BN, & dato circulo BTQ, describatur curva BE hac lege, ut sit semper $LA.LN :: AT.AE$, adeoque $LA.AN :: AT.TE$; quotiescunque tangens curvæ BN finito angulo inclinabitur ad rectas BA, BD; erit semper TE infinitesima tertii ordinis; erit enim AN ejusdem ordinis ac AB, adeoque ejusdem cum chordâ BT, & cum AT infinitesimâ secundi ordinis ad TE sit ut LA ad AN, erit ut aliqua finita quantitas ad chordam BT infinitesimam primi ordinis. Si autem NA sit infinitesima secundi ordinis: erit TE infinitesima quarti: & generaliter si BN sit Parabola ordinis m ita, ut $AN = BA^m$, erit TE infinitesima ordinis $m+2$ eadem demonstratione; ac generalius quotiescunque tangens curvæ BN fuerit BA; toties TE erit ordinis inferioris tertio: quoties tangens fuerit BD; toties TE erit ordinis intermedii inter secundum & tertium. Si curva BN originem ducat non ex B sed ex alio puncto S; circulus Osculator non erit BTQ, sed alius cujus diameter ad diame-

metrum *BQ* ſit ut *BD* ad *DS*. Si curva *BN* originem ducat ex *D*, curvitas *BE* erit quavis circulari minor: Si eadem *BN* aſymptotica ſit ex parte *BQ*, curvitas *BE* erit quavis circulari major, quæ omnia ex eadem demonſtratione facilè deduci poſſunt.

XVIII. Poſſent etiam conſiderari inter arcum circuli oſculatoris, & arcum curvæ ſeries illæ angulorum, quas Newtonus conſiderat inter arcum curvæ & rectam tangentem, Princ. l. 1. ſect. 1. in ſcholio poſtremo. Curvæ enim *BN*, diverſam tangentem habentes, vel diverſum angulum contactus, conſtituunt diverſas ſeries angulorum arcuum *BT*, *BE*, quarum aliæ aliis inſeruntur, neque novit natura limitem.

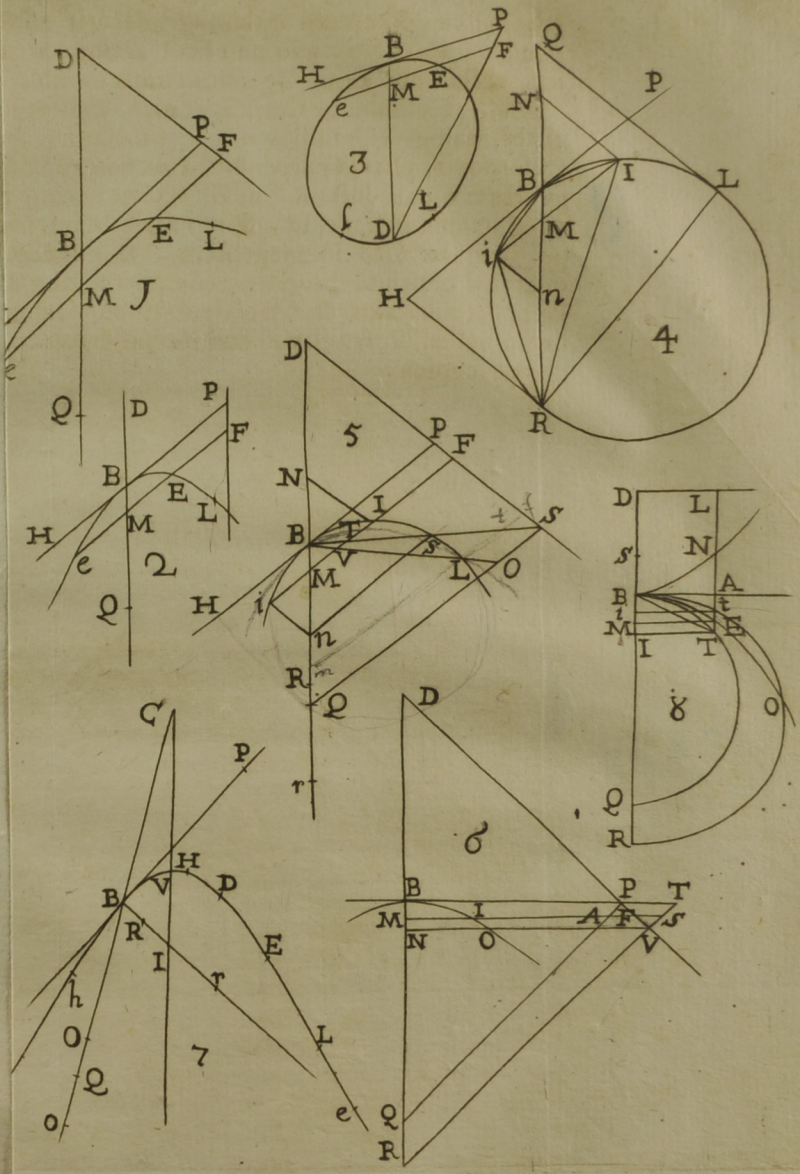
XIX. Quatuor potiſſimum Theoremata ſimili ſyntheſi pariter demonſtrari poſſent. 1. Nullum eſſe ullius curvæ arcum perpetuum, ad cujus omnia puncta curvatura ſit vel omni circulari major, vel omni circulari minor; ſed ſi in uno puncto circulus oſculator vel evadat nullus, vel infinitus; in reliquis numero infinitis fore finitum. 2. Quadratum ordinatæ *ME* applicatum ad abſciſſam *BM* ultimò æquari diametro circuli oſculatoris; unde fit, ut in curvis, ubi curvatura eſt circulari analoga, rectæ *AE* dato quovis angulo inclinatæ ad tangentem *BA* ſint inter ſe ultimo ut quadrata ipſius *BA*. 3. Duarum normalium ad eandem curvam concurſum ultimò, ubi puncta curvæ ad ſe invicem in infinitum accedunt, eſſe in centro circuli oſculatoris. 4. Centrum oſculatoris circuli curvæ genitæ alterius evolutione eſſe in puncto, in quo evolutam contingit recta, quæ evolvitur. Sed ea fuſiorem tractationem requirunt.

XX. Omnis uſus circulorum oſculatorum eo reducitur, ut omnium curvarum arcus indefinitè parvus uſurpari poſſit tanquam circularis, licet agatur de infiniteſimis ſecundi ordinis, eo fructu in Geometria, & Mechanica, quo pro curvarum arcubus ſubſtituuntur rectæ lineæ, ubi agitur de infiniteſimis primi ordinis. Cumque vires centrales pendeant ex intereepta inter arcum curvæ infiniteſimum & tangentem, in iis inveſtigandis arcus ipſe tutò habebitur pro circulari. Cavendum tamen diligenter, ne arcus curvæ confundatur cum arcu circuli oſculatoris, ubicunque opus ſit infiniteſimis tertii ordinis; niſi prius oſtenſum fuerit interceptam inter arcum

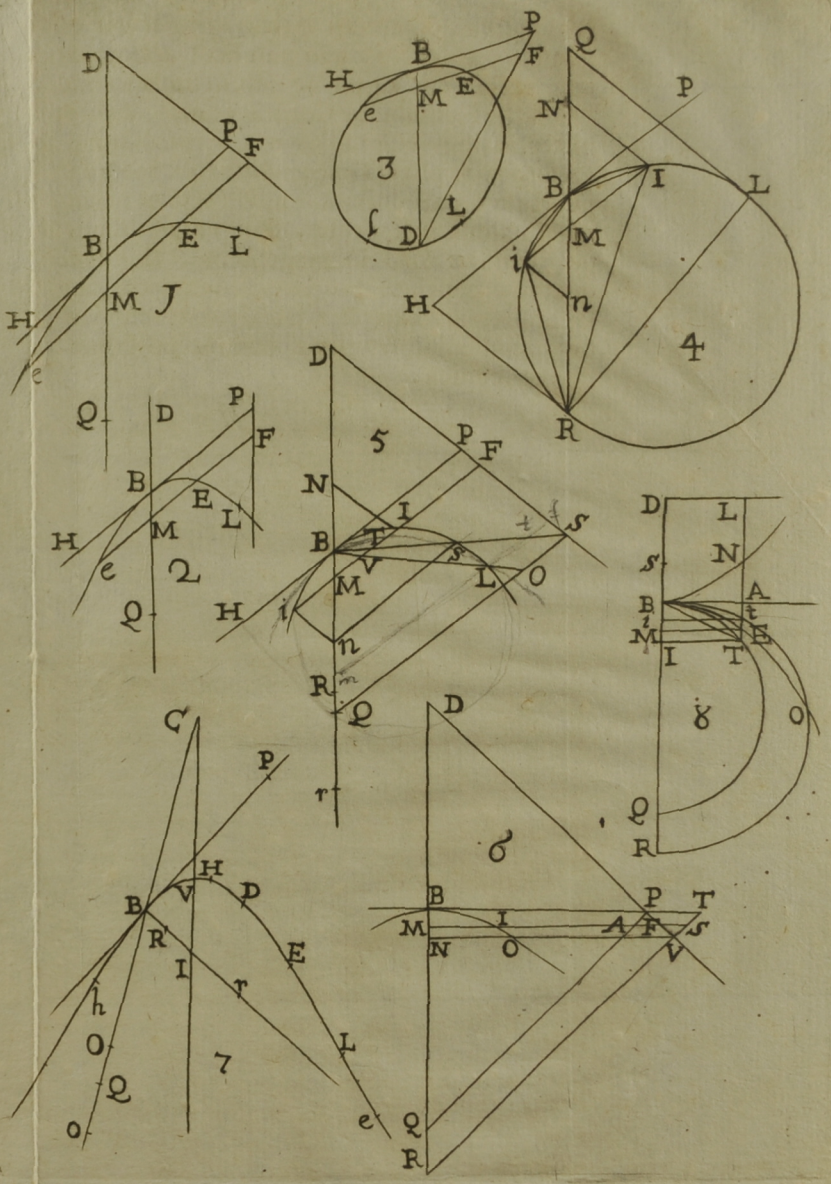
cum curvæ, & arcum circuli oſculatoris eſſe ordinis infra tertium, eo pacto, quo non licet arcum circuli confundere cum recta, ubi agitur de infinitesimis ſecundi ordinis.

XXI. Demum ex Conicis & n. 11. eruitur in omnibus Coni ſectionibus eſſe radios circuli oſculatoris. 1. In ratione reciproca triplicata perpendiculi ex centro in tangentem per punctum oſculi ductam. 2. Directè ut cubum normalis altero ex axibus interceptæ, & in Parabola ut cubum etiam perpendiculi ex foco in tangentem. 3. Eundem radium eſſe quartam continuè proportionalem poſt dimidium latus rectum alterius axis & normalem ad eundem axem terminatam; unde fluit facillima conſtructio Evolutæ pro quavis ſectione conica.

FINIS.



D
P
F
B
E
L
M
J
e
Q
H
B
P
F
M
E
e
3
L
D
Q
N
P
B
I
L
M
i
n
H
4
R
D
P
F
B
E
L
M
H
e
2
Q
D
5
P
F
N
I
B
T
S
V
s
M
L
O
H
i
n
R
Q
r
D
L
s
N
A
B
t
M
E
I
T
8
O
Q
R
C
P
H
B
V
D
R
E
I
r
h
O
L
7
Q
o
e
D
6
B
P
T
M
I
A
F
s
N
O
V
Q
R



J
2
3
4
5
6
7
8

DE NATURA ET USU INFINITORUM

ET INFINITE PARVORUM



A. M. G. D.

De Natura, & usu Infinitorum, & Infinite parvorum DISSERTATIO

HABITA

In Collegio Romano Societatis JESU

A PP. ejusdem Societatis.

Anno MDCCXLI., Mense Julio, die 28.



BIBLIOTECA dell' ISTITUTO di FISICA dell' UNIVERSITA' - FIRENZE
Inv. 13444
Antico n. 225a

ROMÆ, ex Typographia Komarek in Via Cursus.

Superiorum Facultate.

POSTA MILITARE
12.9.18
D.

Lesbo za

1. 

Uanta ſit infinitorum utilitas, ſive ea ſint infinitè magna, ſive infinitè parva, nemo non novit, qui tot præclariſſima Recentiorum inventa perſpexerit, ac diligentius perpenderit ingenioſiſſimas methodos ad implexa quæque, atque abdita pari cum brevitate, ac facilitate enodanda, & in lucem proferenda excogitatas. At niſi eorum natura probe ſit cognita; non minus eſt utilitate tanta errandi quoque periculum, ſive in analyſi eorum uſus occurrat, ſive in geometria: nec ita pauca ſunt ea, in quibus ſummi etiam viri vel lapſi ſunt, vel hæſerunt diu ob minus cautam iis utendi rationem. Nos hic pauca quædam ex iis, quæ afferri poſſunt ſane multa, tum quæ ad naturam, tum quæ ad uſum pertineant, indicabimus potius, quam pertractabimus.

2. Innituntur hæ methodi diviſibilitati ſpatii in infinitum, cui quidem ea etiam innituntur omnia, quæ a Veteribus demonſtrata ſunt ope inſcriptorum, & circumſcriptorum. Ea autem tam multis, ac tam perſpicuis geometricis demonſtrationibus evincitur, ut nulli jam Geometræ dubitare de ipſa liceat. Indiviſibilium hypotheſis in errores inducit apertiſſimos, ac indiviſibilium methodus Cavalleriana, niſi ita adhibeatur, ut pro indiviſibilibus indefinitè parva ſubſtituantur; in abſurda quamplurima incurrat, neceſſe eſt.

3. Eorum vitio *Galileus* invenit puncti æqualitatem cum circumferentia cujuſcunque circuli, *dialogo* 1. Rectangulum *ADEC* cum circuli quadrante *AE*, & recta *DC* gyrent circa axem *CE*, & F. 1
generent cylindrum, hæmiſphærium, ac conum, quæ omnia ſecentur communi ſectione *KIHG*. Demonſtravit facile circulum ge-

nitum ab *HG*, æquari zonulæ, genitæ a recta *KI*: unde intulit abeuntibus punctis *GH* in *C* & & *KI* in *A*, ciculum abire in punctum *C*, & zonulam in circumferentiam circuli radio *CA* descripti, ac proinde punctum æquale esse circunferentiæ ipsi. Id vero absurdum inde profluit, quod superficies tanquam lineis, & punctis contexta consideratur, cum iis terminetur tantum, non etiam constet. Zonulæ *KI* area, non perimeter æqualis est areæ circuli *GH*. Dum areæ sunt aliquæ; æquales sunt. Punctis iis in *A*, & *C* abeuntibus, evanescunt areæ: circuli peripheria evanescit, perimeter vero zonulæ tam interior, quam exterior definit in circuli periphæriam descripti radio *CA*.

F.2. 4. *Cavallerius* vero æqualitatem parallelogrammorum *AC*, *AF* super eadem basi *AD*, & intra easdem paralellas *DA*, *FB* demonstraverat ope indivisibilium per fila *GI*, *HM* basi *AB* paralella & numero æqualia inter se & longitudine. Objecit optimè *Guldinus* eodem argumento etiam duo plana rectangula ejusdem latitudinis *AD*, & constituta intra eadem plana *AD*, *FB* paralella, debere æqualia, esse utcunque alterum iis normaliter insistat, alterum obliquum sit, & longissimè productum: nam sectiones *GI*, *HM*, basi paralellæ, & æquales essent inter se, & eodem numero. Qua difficultate, ut se *Cavallerius* expediret, confugiendum fuit ad texturam, ut ait, filorum æqualium, in suo casu similem utrobique, in casu *Guldini* rariorem in plano inclinato: quod idem profecto est, ac recurrere ad distantiam sectionum *GI*, *gi*, & *HM*, *hm*, sive rejectis indivisibilibus superficiem constituentibus, considerare parallelogramma *gI*, *bM* indefinitè parva, & ea metiri per longitudinem simul, ac latitudinem.

5. Nec deest nobis methodus demonstrandi directè divisibilitatem spatii in infinitum ex ipsa falsa hypothesi indivisibilium, quæ se ipsam destruit, quam proferre liceret, nisi jam satis apud Geometras in aperto esset posita divisibilitas ipsa. Neque nos deterret *Petri de Martino* Neapolitani Astronomi gravior censura, qua *Clavium* nostrum, ac *Tacquetum* perstrinxit acrius quam par erat in dissertatione hoc anno edita, quam in formam epistolæ datæ ad *PP. Le Seur*, & *Jaquier* summos viros nobisque amicissimos, vulgavit, ac disseminandam curavit, quod affirmaverint e falso aliquando directè demonstrari verum: ubi cum de lucis refractione ita fusius egisset, ut qui duo præcipui erant totius dissertationis cardines, nimirum velocitas lucis major in medio densiore, & minimum quoddam, quod sibi investigandum proposuerat, neutrum, nostro quidem judicio, demonstravisset; adjecit

super-

ſupereſſe ſibi expediendam *rem ſane mirabilem, quæ ſcilicet potuerit Fermatius eo pervenire, quo Carteſius, quamvis oppoſita contrariaque via inceſſerit*, nimirum ut erueret conſtantem ſinuum rationem alter ex hypotheſi majoris velocitatis luminis in medio denſiore, alter minoris: tum *Erunt*, inquit, *qui ad amovendum miraculum, dicent licere interdum Geometris directa demoſtratione ex falſo verum colligere. de qua re videndi ſunt Cardanus, Clavius, et Andreas Tacquet. Sed apagete meditationes iſtas ut futiles, & Mathematicis omnino indignas..... Pudet opinionem iſtam ita late graſſari..... Fortaſſe id peculiari diſſertatione alias perſequemur. Interim tamen cohibere me non poſſum, quin irrideam eos, qui &c.*

6. Miramur ſane hominem a nemine laceſſitum ita in doctiſſimos viros, & de re mathematica optimè meritos exarſiſſe, ita ſe abripi paſſum, ut ne injuriis quidem parceret *Mathematico omnino indignis*. Meminiſſe poterat tot ac tam præclara ſummorum virorum de utroque teſtimonia, quæ ubique extant; Ut *Clavium* omittamus Geometriæ reſtauratorem diligentiſſimum, extat recentiſſimum de *Tacqueto* judicium Clariſſimi *Wiſtoni*, ac Celeberrimi *Muſſchembroekij*, quorum alter ſæpius in Anglia edenda curavit ſuis illuſtrata notis elementa illa ipſa, ad quorum calcem eſt appendix, in quam tam immoderate *Martinus* invehitur, Alter ea recudi juſſit in Hollandia, ac ſuis Auditoribus propoſuit publicè.

7. Quid? quod & eam ſententiam tam graviter notat, quam pauci falſam, nemo, ut arbitramur, futilem dicet, nemo Mathematicis indignam. Quid? quod præter occaſionem omnem eam nominat; niſi forte illud non vidit, longe aliud eſſe demonſtrare aliquid ex falſo, licet falſum ſit, ac deducere ex falſo ita, ut ſi id falſum eſſe deprehendatur, tota demonſtrationis vis corruat. Alterum *Tacquetus* affirmat, & quidem etiam probat, toties contingere, quoties ex contradictorio directè infertur contradictorium, alterum, quod unum erat ad rem, toties uſuvenit, quoties falſæ hypotheſes ad vera phænomena explicanda adhibentur: cujus rei in Fratre ſuo *Nicolao* exemplum habet, qui licet & ab ingenio, & ab eruditione merito commendatus, tamen, quod ſummis etiam viris nonnunquam contingit, in eum errorem lapſus, ut putaret arcum minimum circuli deſcendendo percurri eodem tempore, ac ejus chordam; inde intulit verum iſochroniſmum oſcillationum minimarum in circulo.

8. Nec illa huc transferat ex poſtremo ſuæ diſſertationis numero: *Quanquam autem ex una hypotheſi falſa, recte ratiocinando nonniſi falſum deducatur, licet tamen aliquando eruere verum ex duabus*

bas hypotheſibus falſis, ſi ſcilicet hypotheſes illæ tales ſint, ut altera alteri medeatur, id quod cum Fermatio ſorte obvenerit, deſinamus mirari, quare is errando ad veritatem offenderit; dicendo nimirum a Fratre ſuo verum colligi ex duplici hypotheſi falſa, quarum prima æquale faciat ad ſenſum tempus per dimidium arcum minoris oſcillationis tempori per chordam ſuam, altera tempus per dimidium arcum majoris, tempori per ſuam chordam: nam primò quidem ſi id ipſius Fratri contigit, ſi ſepiſſimè contingit aliis, ſi tam facilem ſolutionem admittit; nullum erat miraculum, quod amoveretur. Deinde ſæpiſſime ex duplici, ſæpe etiam ex unica falſa hypotheſi recte ratiocinando verum deducitur. Sic ex unica hypotheſi falſa, quod tempus deſcenſus per arcum *e:g:* graduum trium, ac tempus per ſuam chordam æqualia ſint, rectè ratiocinando deducitur hoc verum, tempus per arcum trium graduum majus eſſe tempore per radium circuli: nam eo majus eſt tempus per utrunque. Et ut Geometrica omittamus, ex ipſis Logices elementis conſtat, ex vero non niſi verum inferri, ex falſo verum & falſum. Si hominem procul videas, & Brutum Animal eſſe cenſeas per errorem; ex falſa hypotheſi quod Brutum ſit, optime inferes & vivens eſſe, & mortale, & ea omnia, quæ homines communia habemus cum Brutis.

9. Rogamus autem hominem, ut juſtam hanc quærelam noſtram, minus moleſte ferat, & in diſſertatione, quam meditari ſe affirmat, humanius agat. Nos vero ſi eam ediderit, paratos eſſe noverit ita defenſionem ſuſcipere, ut quæ ipſi exciderint minus vere dicta, proferamus in medium, cum iis, quæ in hac ipſa diſſertatione de refractione luminis nobis plurima diſplicent; aſperioribus tamen dicendi formulis abſtineamus. Nec id grave futurum eſſe arbitramur doctiſſimis viris, quibus ea diſſertatio inſcripta eſt, ad quos novimus non antea tranſmiſſam eſſe, quam typis editam, & evulgatam.

10. Sed ut ad propoſitum redeamus; quantitates infinitè parvas conſtantes, & in ſe ipſis determinatas nullas eſſe cenſemus, & demonſtrari poſſe arbitramur ex eo, quod ſi recta linea dividi poſſet in partes æquales numero infinitas; infinitum per unitatis ablationem poſſet finitum evadere. Nam inter primam & ultimam particulam interiacerent partes numero infinitæ, ac pariter inter ſecundam, vel tertiam, vel decimam & ipſam ultimam; non vero numero infinitæ inter ultimam & decem, vel viginti particulis ab ea diſtantem. Si jam intelligantur auferri eæ omnes, ac ſolæ, inter quas & ultimam ſunt partes numero infinitæ; oportebit

bit reliquas, dempta ultima, esse numero infinitas; aliter postrema ex iis, quæ ablatæ sunt, ablata non fuisset: at non computata reliquarum prima, finitus erit earundem numerus; aliter & ipsam auferri oportuisset.

11. Infinitum autem absolutum, sive infinite magnum in extensione nullum esse posse, nec tuto concipi sic demonstramus. F. 3. Sit angulus quicunque *ABC*, lateribus, si fieri potest, in infinitum productis, quem secet bifariam recta *BD* in infinitum pariter producta. Quoniam anguli *CBD*, *DBA* superimpositi congruerent; patet, areas infinitas lateribus comprehensas æquales esse. Ex quocunque puncto *C* lateris *CB*, ducatur *CD* paralella ipsi *BA* occurrens rectæ *BD* in *D*, producaturque, donec sit *DE* ipsius *DC* dupla, ducaturque *BE*, quæ pariter in infinitum produci intelligatur: Sint autem infinitæ numero *cde* ipsi *CDE* parallelæ. Quoniam triangula *cBd*, *dBe* sunt semper ut bases *cd*, *de*; patet fore semper aream *dDEe* duplam areæ *cCDd*; quare & omnium illarum arearum summæ in eadem ratione erunt: nimirum area infinita interiacens lateribus *BE*, *BD* dupla erit areæ infinitæ *CBD*, adeoque etiam dupla areæ *DBA*, sive pars dupla totius, quod est absurdum.

12. Infinitè parva igitur, & infinite magna ita tantum admittimus, ut sint indefinita, sive quæ a nobis concipiuntur minui, vel augeri ultra quoscunque limites, ut in determinandis rationibus, & affectionibus quantitatum finitarum, possit facile quæstio reduci ad absurdum, licet opus non sit, ut quoties eorum usus occurrat, ea reductio fiat; sed ut canones quidam generales demonstrentur per reductionem ad impossibile, quibus deinde elementorum more uti liceat. Omnem igitur quantitatem in se determinatam finitam dicimus, & omnem rationem inter quantitates in se determinatas, si sint ejusdem generis, dicimus rationem finitam. Quantitatem quæ concipitur decrescere ultra quoscunque limites, infinite parvam, quæ concipitur augeri ultra quoscunque limites, infinitam. Quantitatem autem, quæ concipitur variari intra aliquos limites determinatos, appellamus pariter finitam; cum finitâ aliquâ sit major, aliquâ minor. Rationem quacunque data minorem dicimus eam, quam habet quantitas infinite parva ad finitam, vel finita ad infinitam, & viceversa quavis data majorem; Illa enim concipitur decrescere in infinitum, hæc in infinitum augeri.

13. Jam ad ordines distinguendos dicimus assumi posse, quam libuerit quantitatem indefinite parvam, & appellari infinite parvam

vam primi ordinis. Ea ſemel ad arbitrium conſtituta, reliquæ, quæ ad ipſius variationem variantur, in certas claſſes ſic facile tribuentur. Quæ ad ipſam habuerit rationem finitam, erit pariter primi ordinis. Si autem fuerit ut finita aliqua, ad infinite parvam primi ordinis, ita ea ad aliam; hæc erit ordinis ſecundi: Si fiat ut finita ad infinitesimam ordinis primi, ita infinitesima ſecundi ad aliam, erit ea ordinis tertii, & ita porro. Si autem ſit ut infinitesima primi ad finitam, ita hæc ad aliam, ea dicetur infinita ordinis primi: Et ita pariter diſtinguetur in ordines infinitæ quoque quantitates. Præter autem hos ordines, erunt ordines intermedii: nam media proportionalis inter finitam, & infinitesimam primi ordinis, erit ordinis intermedii ſive ordinis $\frac{1}{2}$. Generaliter autem ſi fuerit z infinitesima ordinis primi, a quæcunque quantitas finita; erit $\frac{z^m}{a^{m-1}}$ quantitas ordinis m: & ſi fuerit $m = o$; erit ea quantitas finita: ſi m fuerit numerus poſitivus; erit infinite parva, & quidem ordinis intermedii, ſi vel fractus ſit, vel aliquam fractionem contineat: ſi demum m fuerit valoris negativi; erit ea quantitas infinita ordinis m, & intermedii pariter, ſi fractionem contineat.

14. Si jam rectangulum, cujus alterum latus ſit finitum, alterum recta infinitesima primi ordinis, dicatur infinitesimum primi ordinis in genere ſuperficierum, quod erit maxime commodum; quadratum infinitesimæ primi ordinis, erit ordinis ſecundi; & generaliter ſi in quacunque dimenſione m infinitesimum primi ordinis dicatur factum ex infinitesima primi ordinis unius dimenſionis, & finita dimenſionis $m-1$; dimenſio m quantitasis infinitesimæ primi ordinis erit ordinis m, Inde autem exponens ordinis Producti ex quantitatibus quotcunque, & quoruncunque ordinum erit ſumma exponentium ordinum omuium compræhenſis etiam exponentibus negativis: nimirum Factum ex infinitesimis primi, ſecundi, ac quarti ordinis, erit ordinis $1+2+4$., ſive ſeptimi: Factum ex infinitesima tertii, infinita ſecundi, & finita, erit ordinis $3-2+0$, ſive ordinis primi: ratio vero inter infinitesimas ejuſdem ordinis erit ſemper finita.

15. Eodem fere pacto & æquipollentias in ſuas claſſes partiri licet. Quantitates æquipollentes dicimus illas, quarum ratio accedit ad rationem æqualitatis ultra quoſcunque limites. Hujuſmodi ſunt eæ omnes, quæ differunt quantitate ordinis inferioris ad ſuum. Si ipſæ ſint ordinis m, & differentia ordinis $m+n$, dicimus æquipollentiam ordinis n. Patet autem quantitates utcunque æquipollentes fore æquales inter ſe.

16. Sit

16. Sit exemplum in circulo *ADB*, cujus diameter *AB*, centrum *C*. Si chorda *BD* dicatur infinitesima primi ordinis; erit sinus versus *IB* infinitesima secundi; cum sit *AB*. *BD*:: *BD*. *BI*. Ducta *IG* normali ad *BD*, erit *BG* ordinis tertii; est enim *AB*. *BD*:: *BI*. *BG*. Ducta tangente *DE*, & facta *BO* = *BI*, erit *OE* ordinis quarti est enim ex circuli natura *CI*. *CB*:: *IB*. *BE*, & inde *CI* *IB* :: *IB*. *OE*. Inde vero facile eruitur, arcum *DB* & rectas *DI*, *DB*, *DE* fore æquipollentes, ac proinde omnes primi ordinis, arcus *AD* & *ADB* fore æquipollentes, æquipollentia primi ordinis, chordam *DB*, & sinum *DI*, æquipollentia secundi, ac in angulo *DCB* infinitesimo primi ordinis, ducto arcu *DB*, & recta normali *DI*, fore tam arcum, chordam, & sinum, quam rectas *CB*, *CI* æquipollentes æquipollentia ordinis secundi, rectas *CO*, *CE* æquipollentes æquipollentia ordinis quarti. In aliis vero curvis si ejusmodi sint, ut circulum ad *B* osculatorem habeant, posita chorda infinitesima ordinis primi, si *CB* sit normalis ad curvam; erit semper *IB* infinitesima secundi ordinis; si osculatorem circulum non habeant, poterit esse cujuscunque ordinis inferioris ad primum: In omnibus autem curvis chorda, arcus, & sinus infinitesimi aliqua æquipollentia æquipollent. At si sinus versus *BI* in circulo dicatur infinitesima ordinis primi; erit chorda innfinitesima ordinis $\frac{1}{2}$, & *OE* ordinis secundi. Ubi notent, qui forte putent infinite parvas quantitates esse in se determinatas, si abscindi intelligant rectam *BI* æqualem infinitesimæ ordinis primi, inveniri non posse, quid futura sit chorda *BD*. F. 4.

18. Quæ de infinitè parvis dicta sunt, in infinitis locum habent. Sit angulus *ABC*, lateribus indefinitè productis, quem secet bifariam recta indefinita *BD* tangens parabolam *BE* descriptam diametro, ac parametro *BA*. Si recta *CDE* parallela *BA*, secet rectas *BC*, *BD* & curvam *BE* in *C*, *D*, *E*, ac rectam *AQ* parallelam *BC* in *Q*, & puncto *E* in infinitum recedente, dicantur *BD* infinita ordinis primi, erunt *BC*, *DC*, pariter ordinis primi, *DE* ordinis secundi ob *AB*, *BD*, *DE* continue proportionales; area *ABCQ* erit infinita ordinis primi, area *BCD* infinita secundi, area *EDB* infinita tertii: & generalius omnia determinari possunt si altiores parabolæ adhibeantur, vel aliæ curvæ quæcunque, & sive *BD* ponatur augeri in infinitum, sive minui, sed singula persequi non est hujus loci. Oportet tamen omnia determinare, & in ordinem elementorum digerere ad vitandos paralogismos. F. 5

19. Notandum autem est hic iterum infinitum absolutum admitti non posse: si enim ita in infinitum recedat recta *CDE*, ut nus-

nusquam jam sit, sed spatium infinitum relinquatur, oporteret aream infinitam EDB esse infinities majorem aream infinitâ DBC, adeoque & aream infinitâ anguli ADB, cujus tamen pars est. Possunt solum conferri areæ BDE, DBC terminatæ rectâ CDE, vel areæ CBI, IBR terminatæ arcu CIR, & illarum ratio augetur semper ultra quoscunque limites, harum ratio est semper ratio æqualitatis: Sed non licebit eas considerare ut absolutè infinitas ubi nullus jam est terminus. Videntur autem eodem modo solvi posse plura paradoxa circa series infinitas, & circa spatia plusquam infinita, quæ non admittimus. Eædem nimirum series, & eadem spatia, si in infinitum augeantur, diverso modo comparata inter se, diversissimas rationes habent, ac proinde comparari possunt si numeri terminorũ, vel areæ partes certa lege assumantur finitæ in infitum: non possunt autem per modum unius simul tuto considerari.

F.6. 20. Hinc etiam stantibus punctis A, B & puncto D in infinitum recedente ratio AD ad BD accedit ad rationem æqualitatis ultra quoscunque limites: sed nunquam potest evadere ratio æqualitatis, & ut nullæ sunt ultimæ partes minimæ; ita nullæ sunt ultimæ magnitudines infinitæ, nec ulla ultima ratio BD ad DA, cum ea nec æqualitatis esse possit inter inæquales, nec inæqualitatis dum ad æqualitatem accedit ultra quoscumque limites; nisi nomine ultimæ rationis intelligatur non ea, quam aliquando assequantur, sed ea ad quam accedunt magis, quam pro quacunque differentia; quod semper intelligendum est in Newtoniana methodo primarum, & ultimarum rationum.

21. Jam quod ad usum spectat; omnis usus hujusmodi quantitatum est in comparandis inter se quantitatibus finitis, & determinandis earum rationibus, & affectionibus. Et si quando infinitum absolutum concipitur, ut in Ellipsi, quæ altero foco in infinitum recedente fit Parabola: tum tolum res bene procedit, cum eo concipiendi modo utimur, ad finitas quantitates comparandas inter se, quæ cum sint quid in se determinatum; determinatam habere debent rationem vel æqualitatis, vel inæqualitatis. Sunt tamen hic etiam sui canones, quibus neglectis, in errores inciditur.

22. Licet autem in usu infinitesimarum videatur aliquid contemni; nihil verè contemnitur. Id evincitur nonnullis theorematis, quæ facilem demonstrationem admittunt: ejusmodi est hoc. Quantitates finitæ æquales accuratè sunt; si earum æquipollentes æquales sint: sivè si duabus quantitatibus finitis, auferantur vel addantur utcunque quantitates decrescentes in infinitum; ubi eæ sic imminutæ vel auctæ æquales demonstrentur; oportet omnino

æqua-

æquales ſint; & errores omnes ex infinitesimis neglectis orti ſe ita neceſſario compenſabunt, ut nullus ſit error. Id theorema per reductionem ad impoſſibile facile demonſtratur. Hinc fit gradus, ad eas quantitates finitas, quarum eodem modo imminutarum vel auctarum invenitur ratio aliqua: oportet enim eſſe accuratè in ea ratione. Tum eruitur, quantitates infinitesimas reſpectu finitarum poſſe ſemper contemni ſine ullo erroris periculo, & contemni poſſe infinitesimas ordinum inferiorum reſpectu ordinum ſuperiorum, ac proinde æquipollentes quantitates pro æquipollentibus tuto ſubſtitui ſive multiplicatio fiat, ſive diviſio, ſive additio, nec ullum eſſe errandi periculum in rationibus finitarum quantitatum.

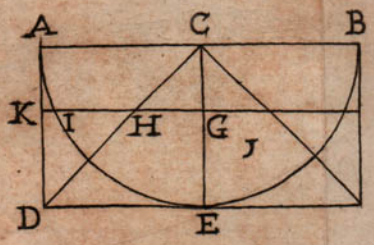
23. Verum in ſubtractione non ſemper licebit pro æquipollentibus quantitatibus æquipollentes ſubſtituere ſine erroris periculo, niſi conſideretur cujus ordinis ſit æquipollentia, & certi canones conſtituantur, ut innoteſcat cujus ordinis quantitas reſidua ſit poſt ſubtractionem. Neque enim, ſi e duabus quantitatibus variabilibus, licet finitis, altera ſubtrahatur ab altera, & æquipollens primæ ab æquipollenti ſecundæ, reſidua æqualia ſunt vel æquipollentia, niſi pro caſu, quo primæ illæ quantitates finitæ, neque æquales evadant, neque ad æqualitatem accedant ultra quoſcunque limites, vel quo earum differentia inter ſe, ad differentias ab æquipollentibus illarum loco ſubſtitutis rationem habeat quavis data majorem.

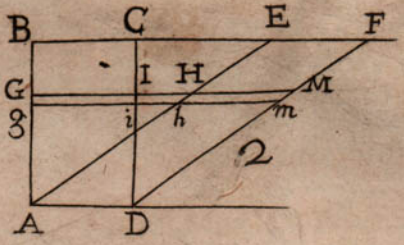
24. Ejuſmodi exempla plurima occurrunt in methodo de maximis & minimis. Sit Parabola cubica EAH, cujus axis IAB, vertex A, parameter BD, cubus ordinatæ EI æqualis ſemper abſciſſæ AI ductæ in quadratum BD. Sit autem ipſa BD normalis ad axem AB, ductaque EC ad ipſam normali, quæ occurrat in F rectæ AF ipſi BD parallelæ, & poſita $DC = x$, $CE = y$, $DB = a$, $BA = b$, quæratur minima, vel maxima CE. Erit $EI = CB - a - x$, $FE = AI = y + b$. Quare ob $EI^3 = AI \times DB^2$, erit $a^3 - 3aax + 3axx - x^3 = aay + aab$, ſive $\frac{a^3 - aab - 3aax + 3axx - x^3}{aa} = y$, & differentias, ſeu fluxiones capiendo $\frac{-3aadx + 6axdx - 3xxdx}{aa} = dy$. Poſito autem $dy = 0$ evadit $3aa - 6ax + 3xx = 0$, ſive $aa - 2ax + xx = 0$, vel $x - a = 0$, $x = a$. Denotat igitur calculus punctо C abeunte in B, evadere CE minimam, quod falſum eſt, nam ea perpetuo decreſcit. Fons erroris eſt is. Methodus maximorum, & minimorum innititur huic principio. Quantitas variabilis, ubi minima eſt, vel maxima, tranſit a creſcendo ad decreſcendum vel viceverſa, & ſi ita tranſeat, maximum ibi vel minimum eſſe oportet. Ut ita tranſeat, duæ infinite proximæ æqua- F. 7.

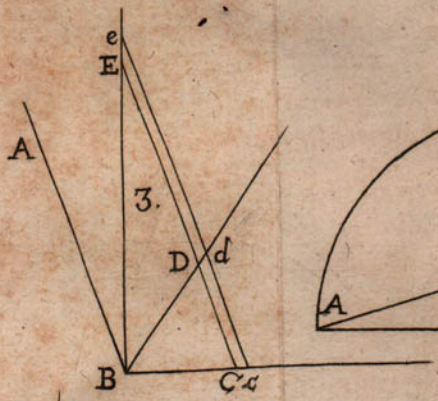
æquales erunt inter se, adeoque ejus variabilis differentia seu fluxio ibi nulla. Quoniam igitur minima quæritur y; oportebit ipsius differentiam esse nullam, adeoque nullam, & differentiam quantitatis $\frac{a^3 + aab - 3aax + 3axx - x^3}{aa}$. Hujus quantitatis differentiam, sive incrementum dum capimus etiam more *Newtoni*; contemnimus aliquid: posito enim prius $x - \frac{1}{2}dx$, tum $x + \frac{1}{2}dx$, erit tertii termini differentia seu fluxio $-\frac{3aadx}{aa}$, quarti $+\frac{6axdx}{aa}$, postremi autem erit $-\frac{3xxdx}{aa} - \frac{2dx^3}{8aa}$. Dum igitur ponimus $-\frac{3xxdx}{aa}$ pro differentia quantitatis $-x^3$; contemnimus $\frac{2dx^3}{8aa}$, quantitatem ordinis tertii, posita dx ordinis primi: jure quidem respectu $\frac{3xxdx}{aa}$, quæ est quantitas primi ordinis: jure etiã respectu totius formulæ $-\frac{3aadx}{aa} + \frac{6axdx}{aa} - \frac{3xxdx}{aa}$, donec tota est ordinis primi, & $-3aa + 6ax - 3xx$ est finita quantitas. At quoniam ex natura curvæ, puncto C abeunte in B evadit ea quantitas $= o$: jam id male contemnitur, & fit $dy = \frac{-2dx^3}{8aa}$; quod etiam inde colligitur, quod factis $BC = Bc = \frac{1}{2}dx$, sint $FE = fe = \frac{AF^3}{BD^2} = \frac{dx^3}{8aa}$, sive differentia inter CE, ce, non nulla, quod requirebatur, sed $-\frac{2dx^3}{8aa}$, nimirum infinities minor, quam circa alia puncta curvæ. In Leibniziano autem more differentias capiendi contemnitur $-\frac{dx^3}{aa}$, ut ineunti calculum patebit: id vero eodem recidit: tunc enim cB est dx, & $fe = dy = -\frac{dx^3}{aa}$.

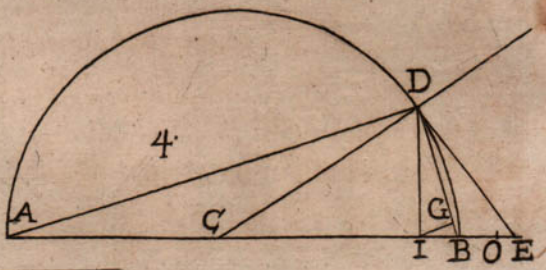
25. Idem vero semper accidet in punctis flexus contrarii. Accidet vero & in aliis casibus, ut in pluribus syntheticè etiam solutis problematis experti sumus, quotiescunque subtractione opus est in quantitatibus variabilibus, quæ alicubi evanescunt; tunc enim æquipollentium substitutio fieri non potest. Quoniam autem ea variabilis quantitas positivis constans, & negativis, non prorsus evanescit, sed evadit infinitesima alicujus ordinis, tunc æquipollentes licebit substituere, si certi ordinis sit æquipollentia. Sed ea fusiorem tractionem requirunt, & integra elementa, quæ fortasse dabimus aliquando, si per tempus licebit.

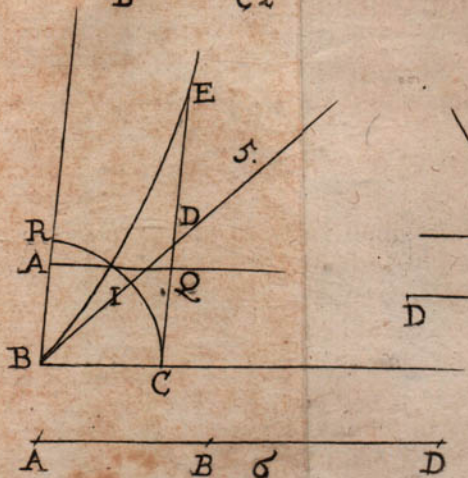
LAUS DEO.

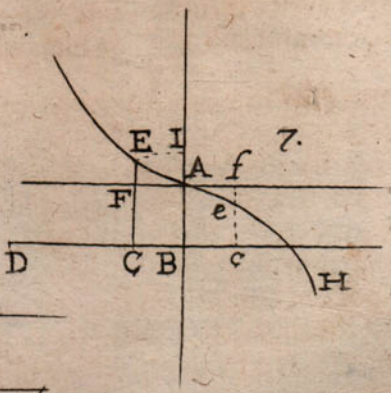

A
C
B
K
I
H
G
J
D
E


B
C
E
F
G
I
H
M
g
i
h
m
2
A
D


e
E
A
3.
D
d
B
C


D
4.
A
C
G
I
B
O
E


E
5.
D
R
A
I
Q
B
C
A
B
O
D


E
I
7.
A
f
F
e
D
C
B
c
H

DE CYCLOIDE ET LOGISTICA



DE CYCLOIDE ET LOGISTICA

AUCTORE

P. ROGERIO JOSEPHO BOSCOVICH

SOCIETATIS JESU

MATHESEOS PROFESSORE

In Collegio Romano.



ROMÆ, MDCCXLV.

Sumtibus VENANTII MONALDINI
Bibliopolæ in Via Cursus.

Typis HIERONYMI MAINARDI in Platea Agonali.
Superiorum facultate.

DE CYCLOIDE ET LOGISTICA

AUCTORE

P. ROGERIO JOSEPHO BOSCOVICH

Soc. Jesu Publico Matheseos Professore in Collegio Rom.

POST conicas sectiones peropportunum videtur Tyronibus e sublimioribus curvis unam aut alteram, quarum mentio frequentior occurrat, & usus præstantior, ita proponere, ut præcipuæ earum affectiones accurata illa Veterum methodo, at quantum fieri potest, contracta demonstrentur; quarum ope ad penitiores quosdam Geometriæ velut recessus, a Recentioribus demum contractiore methodo patefactos, pervadant. Selegimus eam in rem binas ceteris omnibus longe utilissimas Cycloidem, & Logisticam, quarum illam etiam Trochoidem, hanc Logarithmicam nominant.

Et logisticæ quidem vix credibile dictu est, quanta sit utilitas, tum in præstantissimo logarithmorum usu, quorum in Arithmetica, & Trigonometria summum est commodum, ac pene necessitas, rite intelligendo, tum in calculo integrali constituendo, & solvendis problematis, quorum innumera sane omnem finitam geometriam transcendentia ita hujus curvæ opem implorant, ut sine ea rite construi non possint. Cyclois autem, quæ quotidie omnium oculis obversatur (ea enim est curva, quam clavus progredientis rotæ describit in aere motu duplici, & æquali simul delatus, altero rectilineo cum axe rotæ, altero circulari circa ipsum axem,

in unum quendam tertium ſimul coaleſcentibus) ita ſummorum Geometrarum ingenia diu torſit, ac exercuit, ita doctiſſimorum virorum contentionibus, atque expoſtulationibus inclaruit; ut nulla ſane alia in Geometricis faſtis inſignior ſit curva; unde etiam effectum eſt; ut præclariſſima de cycloide theoremata inventa ſint, & affectiones plurimæ, tum quæ ad geometriam, tum potiſſimum, quæ ad mechanicam pertinent, ſubinde detectæ.

Primum quidem anno elapſi ſæculi 43. lis acerrima Torricellium inter, & Robervallium exorta eſt de primo curvæ ipſius inventore, ac de primo dimenſionis auctore, quam videre eſt in epiſtolis poſt Robervallii opuſcula editis in collectione operum Mathematicorum & Phyſicorum, quæ Pariſiis prodiit anno 1693. Robervallius inventorem ejus curvæ primum agnoſcit Merſennum, quem affirmat jam ab anno 1615. eam curvam *Trochoidem* appellaſſe latine, gallice la *Roulette*, & plurimis per Galliam geometris propoſuiſſe conſiderandam. Se autem primum anno 1634. deprehendiſſe tum aream areæ circuli genitoris triplam, tum alia multa, & ex iis pleraque cum amicis communicaſſe. Torricellius Galilæo inventionem tribuit. Contendit, eum jam ab anno 1599. adhuc juvenem de hac curva cogitaſſe, cui & cycloidis nomen indiderit, quod adhuc viget; & ejus aream tum geometrica contemplatione diu fruſtra quæſiviſſe, tum mechanica dimenſione, materialibus nimirum figuris ad ſtateram appenſis, inveſtigaſſe; ubi cum fato quodam inveniſſet ſemper minorem, quam triplam circuli genitoris, metu irrationalitatis abſteritum omnem inveſtigationem omiſiſſe: eandem tamen poſtea & aliis, & ſummo geometræ Cavallerio nequidquam propoſuiſſe. Se autem a Viviano adhuc Adoleſcente edoctum methodum ducendi tangentes, in areæ ipſius determinationem caſu incidiſſe, quam nec ſperaret omnino, nec quæreret; inventam vero circuli genitoris triplam, & ſex diverſis demonſtrationibus confirmatam tranſmiſiſſe in Galliam: quæ ſimul omnia in ſequenti anno 1644. primus omnium typis vulgavit. Et ea quidem lis eo uſque progreſſa eſt; ut in apertas inimicitias exarſerit, altero alterum plagii accuſante tam in epiſtolis ad amicos datis, quam etiam in publicis, ac typis editis monumentis.

Verum quod ad inventorem pertinet, multo antiquiorem ejus curvæ conſiderationem apud Geometras extitiſſe demonſtrat Valliſius in epiſtolis 20. & 22. earum, quæ habentur tertio tomo ejus operum Oxonii editorum, quarum poſterioris mentio fit etiam in Tranſactionibus Anglicanis ad annum 1697. Oſtendit enim & Bovillum inter opera ſua Mathematica edita annis, 1501., 1503., 1510. ibi maxime, ubi de circuli

quâ-

quadratura agit, conſiderare curvam, quam rotæ progredientis punctum quodlibet, potiſſimum in peripheria aſſumptum, percurrit aſcendendo, ac deſcendendo: & Cardinalem Cuſanum in opuſculo ab eo conſcripto ſub Nicolai V. Pontificatu, cui inſcribitur, & exſcripto a Joanne Scoblant anno 1454., ac a ſe in Bibliothecam Savilianam Oxonienſem illato, delineaſſe curvam, quam punctum generat aſſumptum in peripheria rotæ progredientis ſimul, & revolutæ, ejuſque baſi, ut & Bovillum, ad circuli quadraturam perficiendam uſum; quam ipſam delineationem Valliſius diligenter ex codice exſcriptam ad Leibnitium poſtulantem tranſmiſit.

Et ſane omnino facile fieri potuit, ut plures, alii aliorum inſcii, illud, quod in rotarum motu quotidie oculis offerebatur, geometrica conſideratione dignum exiſtimarent: quod idem ſane etiam in theorematum inveſtigatione, ac demonſtratione potuit contingere; ut nimirum eaſdem, in eodem quodam communi veluti campo naturæ conſepultas veritates, ambo inde eruerent proprio uterque marte Torricellius, & Robervallius; cum potiſſimum diverſa methodo in demonſtrationibus ſint uſi. Quidquid autem de inventionis primatu ſit, illud omnino conſtat, tangentes cycloidis, & areæ dimenſionem primum omnium, ut diximus, typis vulgaſſe Torricellium anno 1644., Robervallio meditationes ſuas adhuc in ſuis, & amicorum privatis ſcriniis aſſervante.

Torricellio autem e vivis mox erepto, aliæ non minus graves controverſiæ anno 1658. excitatæ. Propoſuit ſuppreſſo nomine Paſchalius problemata, quæ ad arearum, & ſolidorum cycloidalium, quæ earum revolutione generantur, dimenſionem, ac ad horum omnium gravitatis centra pertinebant, ampliore promiſſo præmio binis, qui primi ante Kal. Octobris ea ſolviſſent, & ad Carcavium Pariſios, interpoſita Notarii publici auctoritate, tranſmiſiſſent. Multi ea occaſione, ut ſolet, in cycloidem inquiſiverunt, & inventa ſua tranſmiſerunt Pariſios; & eos inter Valliſius, cujus querelas videre eſt in præfatione opuſculi de Cycloide, eique adnexa epiſtola ad Hugenium, quas inſequenti anno edidit, non tantum præmio deſtitutus, ſed ne reſponſo quidem accepto: quo eodem anno bini quoque e noſtra Societate Geometræ Lalovera & Fabrius, ſuas eorundem problematum ſolutiones, aliaſque de cycloide meditationes typis ediderunt, eademque occaſione Wrennius primus omnium rectam cycloidis perimetro, ejuſque partibus æqualem demonſtravit; quanquam id quoque a ſe prius inventum Robervallius affirmat, ſed ne cum amicis quidem communicatum. Wrennio autem ipſi videtur Valliſius ibidem adjudicare primam

mam inventionem ſectoris cycloidalis abſolute quadrabilis, quæ tamen paſſim Hugenio, & potiore jure tribuitur, ut & alterius quoque areæ cycloidalis quadratura, ex qua alterius ſegmenti a Leibnitio aſſignati quadratura pendet.

Ante Valliſianum opuſculum hiſtoria Trochoidis eodem anno prodierat Gallico idiomate conſcripta a Detonvillio ſupreſſo nomine. In ea plura contra Torricellium jam ab aliquot annis vita functum, ac contra Laloveram plagii damnatos congeſta, plura ex tranſmiſſis occaſione præmii, ne nominatis quidem auctoribus, deſumpta, Valliſius conqueritur, & pro Torricellio ſatis efficacem apologiam contexit, Laloveræ adhuc ſuperſtiti, ſuam defenſionem permittens, quam eodem ipſe tempore publici juris fecit juſto volumine, quo multa ſummo Geometra digniſſima proferens, & ſolutionem problematum edidit, multis adjectis, & methodum ſuam multo generaliorem expoſuit.

Atque hæc prima quædam cycloidis quaſi adoleſcentia extitit, contentioſa illa quidem, & rixis, ac jurgiis plus æquo indulgens. Reliqua ætas pacatior. Hugenius in illo celeberrimo opuſculo, quod de Horologio oſcilatorio vulgavit anno 1673. cycloidem ſui evolutione ſe ipſam gignere demonſtravit, ac ejus iſochroniſmum in ſpatio non reſiſtente cum omnium admiratione detexit, quo nimirum fit, ut grave per inverſam delatum cycloidem, utcumque inæquales arcus ab infimo puncto computatos, æquali ſemper tempore percurrat, eo ſcilicet tempore, quod ad tempus liberi deſcenſus per altitudinem æqualem diametro circuli genitoris eſt, ut ſemicircumferentia circuli ad diametrum. Quamobrem illam horologiis perficiendis aptiſſimam judicavit.

Eandem curvam iſochronam eſſe in ſpatio quoque reſiſtente, dummodo reſiſtentia ſit vel in ratione momentorum temporis, vel in ratione ſimplici velocitatum, demonſtravit Newtonus principiorum l. 2., quæ primum edita ſunt anno 1687.

Eandem in gravium deſcenſu brachiſtochronam eſſe, ſive quod idem ſonat, eſſe curvam celerrimi deſcenſus, ſed in ſpatio non reſiſtente, primus omnium invenit Jo: Bernoullius anno 1696., ut nimirum a dato puncto ad datum punctum non in eadem verticali linea poſitum deſcendat grave celerius per arcum cycloidis inverſæ originem habentis in ſuperiore puncto, quam vel per rectam, vel per ullam aliam curvam; atque id ipſum jam a ſe inventum in Actis Lipſienſibus Geometris indagandum propoſuit, inſequenti anno ſuam ſolutionem, ac demonſtrationem exhibiturus, quam & exhibuit. Idem autem alia methodo Jacobus Frater, alia Leibnitius, alia

alia Hoſpitalius demonſtrarunt. Eadem vero demonſtratione Bernoullius oſtendit eam fore viam luminis perpetuo refracti in ſua de refractione ſententia, & poſito certo quodam nexu denſitatis medii, cum celeritatibus, quas corpus acquirit cadendo libere ex eadem altitudine, quæ applicatio ad lumínis refracti propagationem facile aliis etiam ſententiis de refractionis cauſa accommodari poteſt.

Infinita ſegmenta ejus curvæ quadrabilia, & quæ Hugeniano illo, atque Leibnitiano tanquam extremis limitibus continentur, atque infinitos, qui inde fluunt, ſectores quadrabiles deprehendit idem Jo: Bernoullius, & exhibuit in Actis Lipſienſibus anno 1699., ac tum ipſe cum Jacobus Frater inſequentibus annis infinitas alias cycloidales areas geometrice quadrabiles exhibuerunt.

Parentius autem anno 1708. (ut habetur in Hiſtoria Academ. Pariſ. ad eundem annum), novam cycloidis affectionem detexit, quod nimirum dum grave per cycloidem deſcendit, & tum ea gravitatis parte, quæ ipſi curvæ normalis eſt, tum vi centrifuga arcus minimos perpetuo premit; preſſio computata ex viribus prementibus, & ex preſſionis tempore, ſit ſemper ubique æqualis, celeritate ſcilicet viribus ipſis ubique proportionali, adeoque tempore, quo virium actio durat in ſingulos arcus, eo minore, quo majores ſunt vires.

Demum Guido Grandus in notis, quæ adjectæ ſunt operibus Galilæi editis anno 1718. ſub finem, novum detexit cycloidis uſum (qui tamen & ex binis locis primi libri Principiorum Newtoni inter ſe collatis facile deducitur) in exponendis temporibus deſcenſuum corporis libere deſcendentis, ubi vires decreſcunt in ratione reciproca duplicata diſtantiarum a centro, cujuſmodi eſt Newtoniana gravitas; modo cycloidis axis ſit illa ipſa recta, quæ jungit initium deſcenſus cum centro virium. Iis enim temporibus ordinatæ ad axem ſunt in ea hypotheſi proportionales.

Atque hæc ferme ſunt præcipua ſaltem, quæ de cycloidis natura, affectionibus, applicatione ad mechanicam huc uſque prolata ſunt, demptis & ſolidorum menſuris, & gravitatis centris, & comparatione cum aliis curvis, quæ & minoris ſunt utilitatis, & paucis exponi non poſſunt. Quibus illud accedit, quod ex ipſa fere prima curvæ geneſi habetur transformatio circularis curvæ in rectam lineam, ac viceverſa; unde ſponte propemodum fluit ſolutio duplicis problematis, quorum utrumque fruſtra a Veteribus olim quæſitum, & per geometricas curvas incaſſum etiam quærendum impoſterum, circuli nimirum, & ſectoris cujuslibet

circularis quadratura, ac anguli sectio non in tres tantum æquales partes, quod etiam per conicas sectiones fit, sed in ratione quacumque etiam irrationali. Præterquamquod ipsa circularium arcuum extensio in rectas summum in universa matheſi usum habet.

Tam nobilis curvæ elementa, quæ tam multis hisce, tamque præclaris ejus usibus apud Auctores suos intelligendis necessaria sunt, hic exponemus primo loco quam breviſſime licebit. Explicabimus genesim: trademus methodum ducendi tangentes per quævis puncta: dimensiones perimetri, & areæ exhibebimus utramque demonstratione eadem fere, & nobis saltem nova: eamque sui ipsius evolutione gigni docebimus. Ac ne tot præstantiſſimi ejus usus penitus prætermittantur; ostendemus demum ejus ope circuli quadraturam, & angulorum sectionem, ac Hugenianum illum tam celebrem isochroniſmum demonstrabimus. Sed aggrediamur rem ipsam.

De Cycloide.

Fig. 1. 1. *Definitio.* Circulo LPM revoluto supra rectam AB tangentem, ita ut arcus LP succeſſive congruant cum segmentis AL ejus rectæ sibi æqualibus, describat punctum P lineam APB: eam dico *Cycloidem*: rectam AB terminatam binis appulsibus puncti P, dico *Baſim*: rectam ED perpendicularem baſi bifariam sectæ in E, & cycloidis perimetro occurrentem in D, dico *Axem*, & punctum D *Verticem*, chordas Pp baſi parallelas, *ordinatas axi*.

Fig. 2. 2. Fig. 2. exprimit inſtrumentum, quo cyclois facile describitur. Lamina tenuis EFTI ita advolvitur cylindro C, ut totam ejus superficiem rotundam accurate tegat, & altero sui extremo E adhæreat ipsi cylindro, altero extremo I adhæreat regulæ solidæ rectangulæ AG, cujus craſſities IA sit major latitudine IH ipsius laminæ, seu craſſitie cylindri, & in cujus superficie superiore sit crena IHR ad ipsam laminam recipiendam ita excavata, ut & craſſitiem, ac latitudinem lamellæ adæquet, & reliqua superficies ABRH sit rectangulum. Cylindro autem in E in ipsa commiſſura lamellæ adnectitur ſtylus EP ad angulos rectos planis baſium cylindri, ita ut ultra cylindrum promineat per intervallum æquale rectæ AH. Patet cylindro revoluto, ſtylum P generare cycloidem; quia ob arcum TE a contactu cylindri cum plano TH æqualem rectæ TH, ſive ei parti laminæ, cum qua sibi advoluta congruebat initio motus, cycloidem generat punctum E, & lineæ quas puncta PE generant, ſublata diſtantia PE

tia PE ſemper eadem, & earum planis perpendiculari, congruerent.

3. Corol. 1. *Baſis cycloidis æquatur peripheriæ circuli genitoris, & axis diametro ejuſdem.*

Patet primum; quia inter binos appulſus puncti P ab A ad B tota peripheria ſucceſſive congruit cum ipſa recta AB. Fig. 1.

Patet ſecundum; quia ob AE dimidiam AB, adeoque æqualem ſemicircumferentiæ, puncto L appellente ad E, arcus LP fiet ſemicirculus. Quare P jacebit in extremo puncto diametri tranſeuntis per E, quæ diameter cum ſit perpendicularis (*a*) tangenti AE, congruet cum recta ED, ejuſque extremum punctum erit in cycloidis perimetro; adeoque in ipſo puncto D, ad quod tum appellit P. (a) 16.1.3.

4. Corol. 2. *Axis ordinatas ſuas perpendiculariter, & bifariam ſecat, & ſecat in duas partes æquales, & ſimiles tam aream, quam perimetrum cycloidis.*

Quod ſecet perpendiculariter, patet ex eo, quod ſit perpendicularis baſi ipſis ordinatis parallelæ.

Quod ſecet bifariam, demonſtratur. Sit ordinata Pp, quam ſecet axis in O, diametri LM, lm circuli genitoris in eo ſitu, in quo punctum generans appellit ad P & p, in N & n, ejuſque circuli peripheria in I, & i. Quoniam diametri LM, lm perpendiculares ſunt tangenti AB (*b*), adeoque tam inter ſe parallelæ, quam cum axe ED (*c*), & perpendiculares ordinatæ Pp (*d*); erunt & LN, ln æquales inter ſe, & NO, nO æquales rectis LE, lE (*e*); adeoque & chordæ PI, pi æquales erunt (*f*), & earum dimidiæ PN, pn æquales (*g*), & arcus PMI, pmi (*h*) æquales, & eorum dimidii PM, pm (*i*) æquales. Demptis autem ab EA, & ſemicircumferentia LPM æqualibus (*k*) LA, & LP pariter æqualibus (*l*), remanent LE, PM æquales. At demptis EA, lim pariter æqualibus ab æqualibus lEA, limp, remanent El, mp pariter æquales. Quare & EL, El, adeoque & ON, On, ac proinde & totæ OP, Op pariter æquales. (b) 16.1.3. (c) 28.1.1. (d) 29.1.1. (e) 34.1.1. (f) 14.1.3. (g) 3.1.3. (h) 28 l.3. (i) 30 l.3. (k) n 3. (l) n.1.

Demum ſi concipiatur angulus rectus DEB ſuperimponi recto DEA, abibit ſemper Op in ſibi æqualem OP ob angulos ad O rectos, adeoque congruent omnia puncta p, P, & tam lineæ DpB, DPA, quam areæ DEBp, DEAP; unde patet poſtremum.

5. Corol. 3. *Recta PR parallela baſi ducta ex quovis puncto P cycloidis, uſque ad interſectionem R cum perimetro circuli genitoris appellentis ad ED abſcindit in ea arcum DR a vertice D ſibi æqualem.*

Erit enim eodem argumento corollarii 2. arcus RD, & dimidius totius RDr, & æqualis PM; adeoque rectæ LE, ſive

sive NO ; & pariter OR dimidia Rr æqualis NP , ac addito RN , vel ablato , fient ON , RP æquales ; ac proinde & arcus DR rectæ RP æqualis erit .

6. Corol.4. *Circulus DREr axi tanquam diametro circumscriptus , totus intra cycloidem jacet , quam contingit in vertice D .*

Cum enim PR semper æquetur arcui RD , nusquam cyclois cum eo circulo concurrit præter punctum D , in quo is arcus sit nullus , quod pro utraque semicycloide valet , ut
(a) n.4. æquali , & simili (*a*) . Cum igitur puncta A & B , sita in
(b) 16.l.3. recta AB perpendiculari ad diametrum ED , adeoque (*b*) circulum tangente in E , sint extra circulum ; totus arcus tam AD , quam BD extra circulum jacebit .

Fig.3. 7. Prop.1. Theor. *Manentibus iisdem punctis AEDPRr , recta LPl parallela chordæ RD cycloidem ita contingit in unico puncto P , ut ejus arcus utrinque a contactu jaceat versus basim , & axem .*

Ducta enim per quodvis punctum H a P versus verticem
(c) 31.l.1. recta basi parallela (*c*) , quæ occurrat circulo in I , chordæ DR in F , tangenti circuli ductæ per R in C , & ducta RI ,
(d) 32.l.3. erit angulus CRF æqualis angulo RrD (*d*) in alterno segmento ; adeoque , ob arcus RD , rD æquales ex demonstratione
(e) 27.l.3. num.5. , erit æqualis etiam angulo DRr (*e*) , ejusque alterno
(f) 29 l.1. CFR (*f*) . Quare & latera RC , CF æqualia erunt (*g*) . Cum
(g) 6. l 1. igitur latera RI , IC simul majora sint solo latere CR (*h*) ,
(h) 20.l.1. majora quoque erunt latere CF , & dempto CI communi , erit chorda RI , & multo magis arcus RI major , quàm recta IF . Quamobrem ab arcu DR dempto arcu RI , & a recta
(i) 30. l.1. FL , quæ cum parallela sit rectæ RP (*i*) , æquatur eidem (*k*) ;
(k) 34.l.1. adeoque & arcui DR (*l*) , dempta recta IF , remanebit arcus
(l) n.5. ID , adeoque & recta IH (*l*) minor quam IL , ac proinde punctum L extra cycloidem .

Eadem facta constructione pro puncto h sito ad partes oppositas , erit eadem demonstratione Rc æqualis cf , & cum rectæ Rc , ci sint simul majores arcu Ri curvo versus c , erit fi major arcu Ri , & additis æqualibus fl & RP , seu RID , erit il major arcu iRD , adeoque major recta ih , & proinde punctum quoque l extra cycloidem , punctis h , H , adeoque toto arcu hPH jacente respectu tangentis lPL versus puncta AED . Q. E. D.

8. Corol.1. *Cycloidis perimeter est curva , quæ cavitatem perpetuo obvertit axi , & basi .*

Patet ex ipsa propositione : cum recta enim nusquam congruit , sed rectas ita in singulis punctis contingit singulas , ut ab iis versus axem , & basim utrinque detorqueatur .

9. Co-

9. Corol. 2. *Si tangentes per P & R ductæ producantur donec concurrant in N; punctum N perpetuo deſcribet curvam AND genitam evolutione fili ſemicirculo DRE advoluti.*

Cum enim ob PN, RF parallelas, anguli CFR, CRF, jam demonſtrati æquales num 7. inter ſe, ſint etiam æquales ille angulo P (*a*), hic angulo PNR (*b*); erunt & hi inter ſe æquales, ac proinde (*c*) & recta RN æqualis RP, ſive (*d*) arcui RD, & filo ipſi advoluto. Quamobrem ubi filum ſemper tenſum evolvitur uſque ad R, & curvam radit; ita congruit cum tangente RN, ut ejus extremum punctum ſit in N. (a) 34. l. 1. (b) 29 l. 1. (c) 6. l. 1. (d) n 5.

10. *Scholium.* Quando curva generatur evolutione fili alteri curvæ circumvoluti, illa dicitur evolutione Genita, hæc ejus *Evoluta*, ut hic curva DNA eſt Genita, ſemicirculus DCE eſt ejus Evoluta. Frequens Evolutarum mentio occurrit apud Recentiores Geometras, & ſæpe præſtantiſſimos uſus habent, ut mox in ipſa Cycloide patebit.

Demonſtrant autem, tangentem RN evolutæ eſſe ſemper perpendicularem tangenti genitæ in N, adeoque ipſius genitæ, ut vocant, Normalem. Circulum autem radio CN deſcriptum vocant genitæ *Oſculatorem*; quia licet nullus ejus arcus congruat cum arcu genitæ, quam in unico puncto N, vel contingit, ut in determinatis quibuſdam caſibus, vel ut fere ſemper, ſecat, (quod mirum videri poſſit, cum in ipſo ſectionis puncto communem rectam tangentem habeat); tamen ita ad eum accedit, & angulum ita exiguum conſtituit, ut nullius alterius circuli arcus intra eum angulum duci poſſit: ſed arcus cujuſcunque majoris jaceat tam extra oſculatorem, quam extra genitam utrinque, cujuſcunque minoris utrinque intra, eo prorſus pacto, quo inter rectum circulum tangentem, & arcum circuli demonſtrat Euclides nullam aliam rectam duci poſſe (*e*): ob quem tantum acceſſum exiguos arcus curvarum confundunt cum arcubus circulorum, qui eas oſculantur, & curvas ipſas conſiderant tanquam compoſitas ex infinitis numero, & infinite parvis arcubus circulorum eas ſucceſſive oſculantium, & habentium centra in ipſa Evoluta, quod ſi caute fiat, tuto fit. Circulorum porro oſculatorum longe frequentior mentio, & uſus longe præſtantior. Sed ea non ſunt hujus loci. (e) 16. l. 3.

11. Coroll. 3. *Arcus Pp major eſt tangente PL ducta per punctum P remotius a vertice uſque ad rectam pL parallelam baſi ductam per p, & minor ejuſmodi tangente pl ducta per p uſque ad parallelam PL.* Fig. 4.

Si enim eæ parallelæ occurrant circulo in r, & R, erit tangens PL parallela chordæ RD (*f*), ac PLFR parallelogrammum, in quo angulus L æquatur oppoſito PRF (*g*), qui (f) n 7. (g) 34. l. 1.

(a) 16.l.1. qui cum major ſit recto ROD (*a*) interno, & oppoſito, eſt obtuſus. Quare in triangulo PLp angulus ad p acutus erit
(b) 17.l.1. (*b*), & proinde tangens PL minor, quam chorda Pp (*c*),
(c) 19.l.1. adeoque multo minor, quam arcus Pp.

Si autem tangens pl occurrat tangenti PL in G; angu-
(d) 29.l.1. lus lPG æqualis alterno GLp (*d*) obtuſo, erit pariter obtuſus, & eadem prorſus demonſtratione PG minor, quam Gl, ac addita communi Gp, duæ ſimul tangentes PG, Gp, quæ majores ſunt arcu Pp, erunt minores ſola lp; qua proinde multo minor erit arcus ipſe.

12. Corol. 4. *Arcus Pp ad duplum exceſſum chordæ DR ſupra chordam Dr, habet rationem minorem, quam chorda RD ad chordam rD, & majorem ejus inverſa.*

Secto enim arcu Rr bifariam in I, ducatur recta IE, & ipſi parallelæ per R, & r rectæ occurrentes circulo in N, & n, chordis Dr, DR in T, & t, rectæ ductæ per D & I in V, & u; ac rectæ PR, pr occurrant iterum circulo in M, & m.

Ob arcus RI, Ir æquales, anguli RDV, VDT æquales
(e) 27.l.3. erunt (*e*): & ob angulum EID in ſemicirculo rectum (*f*),
(f) 31.l.3. angulus quoque RVD rectus erit (*g*), ac proinde æqualis an-
(g) 29.l.1. gulo TVD. Quare ob latus quoque VD commune triangulis
(h) 26.l.1. RDV, TDV, erunt (*h*) & latera DR, DT æqualia: ac eodem argumento æqualia erunt Dr, Dt, ac proinde tam rT, quam Rt erit exceſſus chordæ RD ſupra chordam rD.

(i) 21.l.3. Rurſus angulus rRD eſt æqualis angulo rmD (*i*), cui
(k) 27.l.3. æqualis eſt angulus DrF (*k*) ob arcus rD, Dm æquales ex
(l) 29.l.1. demonſtratione numeri 5., & angulus DfR (*l*) ipſius DrF internus, & oppoſitus. Quare primo ob angulum D commu-
(m) 32. l.1. nem & angulos DRr, DrF æquales, (*m*) æquiangula erunt triangula DRr, DrF, & (*n*) DR ad Dr, ut Dr ad DF,
(n) 4.l.6. ut (*o*) rf ad RF. Secundo angulus RFr major angulo FrD
(o) 2.l.6. (*p*) interno, & oppoſito, major erit etiam angulo FRr,
(p) 16.l.1. adeoque (*q*) Rr major quam rF. Tertio angulus Rrf major
(q) 19.l.1. pariter interno, & oppoſito rRD, erit major angulo rfR, adeoque Rf major, quam Rr;

Demum arcus EN, RI æquales ſunt, quia ſi duceretur
(r) 29.l.1. NI, efficeret angulos RNI, NIE alternos æquales (*r*), qui
(s) 26.l.3. arcubus NE, RI æqualibus deberent inſiſtere (*s*): & eodem argumento æquales ſunt Ir, En. Cum igitur eadem demonſtratione, qua arcus DR, DM æquales ſunt, ſint pariter æquales arcus ER, EM, adeoque arcus EM dimidius totius REM, & EN æqualis RI, dimidius Rr, erit & NM di-
(t) 33.l.6. midius totius rNM, ac proinde (*t*) angulus NRM, cui

æqua-

æquatur TRf ad verticem oppoſitus (*a*), erit dimidius anguli rDM, cui æquatur fRr, eo quod idem rRM ſit complementum ad duos rectos & prioris oppoſiti in quadrilineo RrDM (*b*) & poſterioris (*c*) in recta fRM. Quare ob angulum fRr ſectum bifariam per rectam RT, erit (*d*) fT ad Tr, ut fR ad Rr, adeoque ipſa fT major, quam Tr, & proinde fT major quam dupla Tr, ſive quam duplus exceſſus DR ſupra Dr. Eodemque pacto ob arcum Em dimidium rEm, & En dimidium rR, erit nm dimidius Rnm, & angulus nrm dimidius anguli Rrm; ac proinde in triangulo RrF erit Rt ad tF, ut Rr ad rF; adeoque Rt major, quam tF; & proinde tota RF minor quam dupla Rt, ſeu quam duplus exceſſus chordæ RD ſupra chordam rD. (a) 15. l. 1. (b) 22 l. 3. (c) 13 l. 1. (d) 3. l. 6.

Cum igitur rf parallela pl (*e*), ſit eidem æqualis (*f*), ac proinde (*g*) major arcu Pp, & eodem pacto RF æqualis PL minor pariter arcu Pp; tam ipſe arcus Pp, quam duplus exceſſus chordæ RD ſupra rD jacebunt inter rectas rf, RF; ac proinde habebit ille ad hunc rationem minorem, quam rf ad RF, ſive rD ad DF, vel RD ad Dr, & majorem, quam RF ad rf, ſeu rD ad RD. (e) n. 7. (f) 34. l. 1. (g) n. 11.

13. Prop. 2. Theor. *Arcus cycloidis Pp æquatur duplo exceſſui chordæ RD ſupra chordam rD, ſi puncta R, r definiantur per rectas PR, pr parallelas baſi.* Fig. 5.

Demonſtratur. Abſciſſa DM æquali Dr ex DR, ſi arcus Pp non erit æqualis duplæ rectæ MR, alterum ex iis duobus minus erit. Sit id ad majus ut DM ad DT abſciſſam ex ipſa DR, & inter DR, & DM inveniatur media proportionalis DO (*h*): tum inter ipſas DO, DR, & DO, DM mediæ DQ, DN, & ita porro; donec habeatur aliqua DN minor, quam DT, quod ſemper poterit; quia cum ſit DO ad DN, ut DN ad NM; erit etiam per converſionem rationis DO ad ON, ut DN ad NM, & alternando DO ad DN, ut ON ad NM; adeoque ON major quam NM; & eodem argumento OQ major, quam ON, & ita porro: Quamobrem MN ad totam MR habet rationem minorem ratione, quam haberet, ſi reliquis æqualis eſſet; nimirum ratione unitatis ad numerum particularum MN, NO &c. ſive ad numerum mediarum DN, DO &c. unitate auctum. Ac proinde ſi numerus mediarum augeatur ita, ut excedat rationem MT ad MR; erit ratio ultimæ MN ad MR minor ratione MT ad MR, adeoque MN minor ipſa MT, & DN minor quam DT. (h) 13. l. 6.

Jam vero applicatis in circulo rectis DI, DK, DL æqualibus mediis omnibus DN, DO, DQ (*i*), ductiſque IF, KG, LH parallelis baſi (*k*), donec arcui Pp occurrant in F, G, H, (i) 1. l. 4. (k) 31. l. 6.

ratio-

rationes Fp, GF, HG, PH ad NM, ON, QO, RQ ſin-
(a) n.12. gularum ad ſingulas erunt minores (*a*) rationibus ID, KD, LD, RD ad rD, ID, KD, LD, & majores inverſis, ſive per conſtructionem minores ratione ND ad MD, & majores inverſa. Quare & ratio totius Pp ad duplam MR erit minor ratione ND ad MD, major inverſa nempe MD ad ND. Sed ſi arcus Pp eſt major dupla MR; ea ratio erit DT ad DM: ſi minor; DM ad DT. Igitur in primo caſu erit ratio DT ad DM minor ratione DN ad eandem DM, & in ſecundo ratio DM ad DT major ratione DM ad DN, ac proinde in utroque caſu DT minor, quam DN, ſive totum ſua parte minus. Igitur arcus Pp nec major, nec minor eſt dupla MR, ſed ei æqualis. Q. E. D.

14. Corol. 1. *Totus arcus DP æqualis eſt duplæ chordæ DR.*

Sit enim inæqualis, & ſi fuerit major, ſit arcus Pp duplus RD; ſi minor, ſit MR dimidia PD: & in primo caſu ducta
[b] 31.1.1. pr parallela baſi (*b*), & captâ DM æquali Dr, erit Pp æqua-
(c) n.13. lis duplæ RM (*c*). Sed etiam eſt duplus RD. Igitur dupla RM, & dupla RD æquantur, pars, & totum, quod eſt abſurdum: & eodem prorſus pacto in ſecundo caſu applicata DR æquali DM, & ducta rp parallela baſi, invenitur Pp æqualis PD pars toti. Igitur æquatur DP duplæ chordæ DR.

15. Corol. 2. *Totus arcus DA eſt duplus diametri DE, ac tota perimeter quadrupla.*

Demonſtrari poteſt primum ſimili ratiocinio: ſed etiam patet ex eo, quod ſi pro quavis chorda DR aſſumpta fuiſſet ipſa diameter, demonſtratio habuiſſet eandem vim. Cum
[d] n.4. vero in fig. 1. ſit (*d*) DB æqualis DA; erit tota perimeter ADB quadrupla ejuſdem diametri.

16. Corol. 3. *Arcus datus cycloidis Pp ſecari poterit in ratione data.*

(e) 31.1.1. Ductis enim PR, pr parallelis baſi (*e*), uſque ad circulum, & chordis Dr, DR, ac ex longiore DR abſciſſa DM
[f] 3.1.1. (*f*) æquali breviori Dr, ſecetur MR in O in illa ratione da-
(g) 10.1.6. ta (*g*): tum applicata chorda DK æquali DO (*h*), ducatur KG
(h) 1.1.4. parallela baſi (*i*), quæ arcum Pp ſecabit in illa ratione data
(i) 31.1.1. in G. Nam erunt (*k*) arcus pG, GP dupli rectarum MO,
[k] n.13. OR; ac proinde in eadem cum ipſis ratione.

17. Prop. 3. Theor. *Area BPpb clauſa arcu cycloidis Pp, binis tangentibus PB, pb, & ſegmento Bb rectæ De parallelæ baſi ductæ per verticem D æquatur areæ RDr clauſæ binis chordis RD, rD & arcu circuli Rr, ſi puncta R, r definiantur per rectas PR, pr parallelas baſi.*

De-

Demonſtratur eodem prorſus modo, quo prop.2. Nam in primis in fig.4. area BPpb ad trilineum circulare RDr habet rationem minorem quadruplicata chordæ RD ad chordam rD, & majorem quadruplicata inverſa. Ductis enim PX, px parallelis (*a*) pb, PB uſque ad rectam De, æqualia erunt triangula BPX, RDf; quia ob PB, RD parallelas (*b*) erit BPRD parallelogrammum, & ob Df parallelam (*b*) pb, adeoque (*c*) & PX erit parallelogrammum XPfD, quorum utrunque bifariam ſecaret (*d*), ſi duceretur diameter PD, ac proinde ab æqualibus triangulis PBD, PRD demptis PXD, PfD æqualibus relinquerentur PBX, RDf æqualia: & eodem prorſus argumento æqualia ſunt triangula pbx, rDF. Cum igitur quadrilineum BPpb ſit inter triangula BPX, bpx, & trilineum RDr inter triangula RDf, rDF; erit ratio illius ad hoc minor, quam trianguli RDf ad rDF, & major, quam eadem inverſa. Cum autem ob Rf, rF parallelas, triangula RDf, rDF ſint æquiangula (*e*); erunt in duplicata ratione DR, DF (*f*), quæ eſt quadruplicata rationis DR, Dr, cum ob RD, rD, FD demonſtratas continue proportionales in num.12., ratio DR ad DF ſit duplicata rationis DR ad Dr. Quare illud quadrilineum ad trilineum erit in ratione minore, quam ſit quadruplicata RD ad rD, & majore quam ſit ejuſdem inverſa quadruplicata. F.4. (a) 31.1. (b) n 7. (c) 30.1. (d) 34.1. (e) 29.1. (f) 19.16.

Deinde in fig.5. ſi area BPpb non eſt æqualis areæ RDr, & ratio majoris ad minorem ſit quadruplicata cujuſdam DT ad DM: inventis prorſus ut in prop.2. punctis H, G, F, ductiſque per ea tangentibus HS, GV, FX uſque ad rectam De, eodem, quo ibi, diſcurſu ratio quadrilinei BPpb ad trilineum RDr erit minor ratione quadruplicata ND ad MD, & major eadem inverſa; adeoque ſi quadrilineum ſit minus, ratio quadruplicata DT ad DM erit minor, quam quadruplicata DN ad DM; ſi ſit majus, ratio quadruplicata DM ad DT erit major quam DM ad DN; ac proinde in utroque caſu DT minor quam DN, ſive totum ſua parte minus: quod eſt abſurdum. Quamobrem quadrilineum BPpb nec majus, nec minus eſt trilineo RDr, ſed ipſi æquale. Q.E.D. F.5.

18. Cor.1. *Tota area BPGD æquatur toti ſegmento RKDR, & erecta Ae perpendiculari ad AE* (g), *adeoque parallela axi ED* (h), *donec occurrat rectæ De in e, erit trilineum AGDe æquale ſemicirculo EKD.* (g) 11.1. (h) 28.1.

Demonſtratio eſt prorſus eadem, ac in corol.1., & 2. prop.2.

19. Corol.2: *Trilineum AGDKE eſt æquale circulo genitori, tota area cycloidis ejuſdem circuli tripla, & ad rectangulum ſub ſua baſi, & axe ut* 3. *ad* 4.

Nam

Nam per cor.1. prop.5. ex Archimede, area circuli æquatur rectangulo ſub dimidia circumferentia, & radio; ac proinde ob dimidiam baſim AE æqualem (a) dimidiæ circumferentiæ; erit (b) rectangulum AEDe ſub AE, & ED diametro circuli genitoris (c) duplum circuli ipſius, a quo ſi dematur ſemicirculus EKD, & trilineum AGDE ipſi æquale relinquetur trilineum AGDKE æquale alteri circulo genitori.

(a) n.3. (b) 1 l.6. (c) n 3.

F.1. Inde autem tota area ADB in fig.1. conſtans circulo genitore, & binis trilineis ADRE, BDrE eſt tripla ejuſdem circuli.

Cumque rectangulum ſub baſi tota ex axe, ſit duplum rectanguli (d) ſub dimidia baſi & axe, ac proinde quadruplum circuli genitoris; area cycloidis continebit tres quadrantes ejus rectanguli.

(d) 1.l.6.

F.6. 20. Corol.3. *Ducta præterea chorda PD, & recta PI perpendiculari ad De, ac producta PR uſque ad DE in H, erit primo trilineum PID terminatum arcu cycloidis æquale areæ RHD terminatæ arcu circuli: ſecundo quadrilineum APIe æquale trilineo RHE terminato arcu circuli: tertio trilineum PDR terminatum arcubus cycloidis, & circuli duplum ſegmenti cycloidalis PD.*

Patet primum, quia ob parallelogramma IH, BR ſecta bifariam a diametro PD (e) æqualia ſunt triangula IPB, RHD exceſſus æqualium triangulorum IPD, PDH ſupra æqualia triangula PBD, PRD; quæ ſi addantur trilineo cycloidali PBD, & ſegmento circuli RD æqualibus (f), fient trilineum cycloidale PID, & circulare RHD æqualia.

(e) 34 l.1. (f) n.19.

Patet ſecundum, quia trilineo APDe, & ſemicirculo ERD æqualibus (g) demendo trilineum cycloidale IPD, & circulare RHD æqualia, relinquentur quadrilineum APIe, & trilineum circulare RHE æqualia.

(g) n.17.

Patet tertium, quia parallelogrammum RB eſt duplum trianguli PBD (h), & ſumma trilinei cycloidalis PBD, & ſegmenti circularis RD æqualium (i) eſt dupla ſolius trilinei. Quare & reſiduum trilineum PDR terminatum arcubus cycloidis, & circuli duplum eſt reſidui ſegmenti cycloidalis PD.

(h) 34. l.1. (i) n.18.

21. Corol.4. *Recta PN parallela RE abſcindit trilineum ANP triplum ſegmenti circularis ER.*

Nam producta IP uſque ad baſim in M, rectangulum IMED, erit (k) æquale rectangulis ſub RH & ED, ac PR & ED. Primum eſt duplum trianguli ERD (l), &, ducta RC ad centrum circuli genitoris, eſt quadruplum trianguli ERC, cujus ERD eſt duplum (m). Secundum eſt quadruplum

(K) 1.l.2. (l) 41. l.1. [m] 1.l.6.

plum ſectoris RCD, cum nimirum per coroll. 3. prop. 4. ex Archim., ſector RCD æquetur triangulo, cujus baſis ſit arcus RD, æqualis rectæ PR (*a*), & altitudo radius CD, cujus eſt duplum rectangulum ſub eadem baſi & altitudine (*b*) ac proinde quadruplum rectangulum ſub eadem baſi & dupla altitudine ED (*c*). Quare rectangulum IMED erit quadruplum trilinei circularis RED. Si inde detur trilineum cycloidale IPD æquale circulari RDH, & triangulum PMN, quod triangulo RHE æquatur pariter, quia ſi duceretur EP ſecaret bifariam (*d*) tam rectangulum MPHE quam parallelogrammum PREN; demetur trilineum RED ſemel, & remanebit area DENP terminata arcu PD tripla trilinei circularis RED. Cum igitur & area totius ſemicycloidis AED ſit tripla totius ſemicirculi ERD (*e*); erit & reliqua area ANP tripla reliqui ſegmenti ER.

(a) n. 5. (b) 41. l. 1. (c) 23 l. 6. (d) 34. l. 1. (e) n. 19.

22. Corol. 5. *Si in ſemiaxe CD ſumantur puncta I & O æque diſtantia a centro C, & vertice D, & per ea ducantur ordinatæ Gg, Pp circulo genitori occurrentes in T, t, R, r, punctis G, P, T, R jacentibus ad eandem axis partem, & conjungantur ET, ER, Er, ac GP, Gp; erit ſegmentum cycloidale GDp æquale ſummæ triangulorum EOr, EIT, & ſegmentum GP differentiæ triangulorum EIT, EOR.* F. 7.

Ducta enim per D recta baſi parallela (*f*), cui occurrant in H, F, f rectæ ex G, P, p parallelæ axi; trapezium GHfp, habens angulos ad H & f rectos (*g*), divideretur per rectam Gf (quæ vitandæ confuſionis gratia non ducitur) in duo triangula, nimirum GfH, cujus baſis GH, & altitudo perpendicularis fH, & Gfp, cujus baſis pf & altitudo eadem. Quare eorum dupla ſimul æquabuntur (*h*) binis rectangulis ſub Hf & HG, & ſub Hf, & fp, nimirum (*i*) rectangulo ſub Hf & ſumma HG, fp, quæ æquatur radio CD, cum GH æquetur ID (*k*), & pf æquetur OD, ſive per conſtructionem CI. Igitur duplum trapezium GHfp æquatur rectangulo ſub Hf & radio CD, ſive (*l*) binis rectangulis ſub DH & DC, ac ſub Df & DC.

(f) 31. l. 1. (g) 29. l. 1. (h) 41. l. 1. (i) 1 l. 2. (k) 34. l. 1. (l) 1. l. 2.

Sed ob HD æqualem GI, rectangulum ſub HD & DC, æquatur rectangulo ſub GT vel arcu TD (*m*) & DC, ac ſub TI & DC vel CE; quorum primum ex demonſtratione num. 20. æquatur duplo ſectori TCD, & ſecundum duplo triangulo TCE (*n*) habenti baſim EC & altitudinem TI; ac proinde rectangulum ſub HD & DC æquatur duplo ſectori circulari TED, & eadem prorſus demonſtratione rectangulum ſub Df, & DC æquatur duplo ſectori DEr. Igitur trapezium GHfp æquatur toti areæ circulari TEr DT. Demp-

(m) n. 5. (n) 41. l. 1.

tis autem trilineis GPDH, pDf, & areis circularibus TID, rOD, quæ iis æquantur (a), relinquetur ſegmentum GDp æquale ſummæ triangulorum EIT, EOr. Patet igitur primum.

(a) n.20.

Eadem autem prorſus demonſtratione trapezium HGPF æquatur differentiæ arearum circularium TED, RED, ſive differentiæ triangulorum TEI, REO, & differentiæ arearum circularium TID, ROD ſimul. Si autem auferatur hinc differentia arearum TID, ROD, inde quadrilineum cycloidale HGPF, quod eſt differentia trilineorum cycloidalium GDH, PDF; relinquetur hinc differentia triangulorum TEI, REO, inde ſegmentum GP cycloidale: quæ proinde æquabuntur. Patet igitur, & ſecundum.

23. Corol. 6. *Ductis præterea rectis IP, ip, erit ſector cycloidalis PIp æqualis triangulo rectilineo REr.*

(b) n.22.

Quoniam enim ſegmentum GP eſt (b) differentia triangulorum TEI, REO; erit triangulum REO cum ſegmento GP æquale triangulo TEI. Quare totum triangulum REr cum ſegmento GP æquabitur binis triangulis TIE, rOE, ſive (c) ſegmento cycloidali GDp, & ablato utrinque ſegmento GP, erit triangulum REr æquale ſectori PGpD, ſive ob triangula PGp, PIp ſuper eadem baſi Pp, & inter eaſdem parallelas Pp, Gg æqualia (d), erit triangulum REr æquale ſectori PIp.

(c) n.22.

(d) 37.l.1.

24. Corol. 7. *Si ordinata per centrum tranſeat; chorda a vertice ad ejus extremum punctum ducta abſcindit ſegmentum æquale dimidio quadrato radii circuli genitoris, & trilineum clauſum ordinata, & arcubus circuli ac cycloidis æquatur utralibet ex parte quadrato radii ipſius.*

Si enim punctum I abeat in centrum C; abit O, adeoque & P in verticem D, triangulum OER fit nullum, chorda Gp evadit GD, & ſegmentum a chorda GD abſciſſum evadit æquale ſoli triangulo EIT, quod cum ſit (e) dimidium rectanguli ſub EI & IT in eo caſu æqualibus radio circuli, evadit dimidio quadrato radii æquale. Patet igitur primum.

(e) 41.l.1.

Trilineum autem GDT, quod eſt duplum ejus ſegmenti (f), evadit æquale quadrato radii. Patet igitur & ſecundum.

(f) n.20.

25. Corol. 8. *Si ordinata abſcindat a vertice quartam axis partem; abſcindit ſegmentum triplum trianguli æquilateri deſcripti ſupra radium circuli oſculatoris.*

Si enim POp abſcindat DO quartam axis partem ſeu dimidium radium DC; puncta O, I, congruent; eritque ſeg-

ſegmentum PDp æquale (*a*) triangulo REr. At in eo caſu (a) n.23.
ductæ Dr, Cr baſes triangulorum COr, DOr habentium
angulos ad O rectos (*b*), latus Or commune latera DO, OC (b) n.4.
æqualia, erunt (*c*) æqualia, adeoque triangulum DCr æqui- (c) 4. l.1.
laterum, ad quod triangulum erit EOr ob verticem r com-
munem, ut EO ad CD (*d*), ſive ut 3. ad 2., & totus REr (d) 1. l.6.
ipſius OEr duplus ob Rr ſectam bifariam in O (*e*) erit ut 6. ad (e) 3. l.3.
2., nimirum triplus.

26. *Scholium.* Segmenta GDp, & ſectores PIp ſunt omnia geometrice quadrabilia, cum æquentur triangulis rectilineis datis geometrice, quibus æquale quadratum aſſignari poteſt (*f*). Ea ſunt quæ Jo: Bernoullius determinavit. (f) 24. l.2.
Segmentum quod corol.7. determinavimus eſt Leibnitianum, & trilineum eſt Hugenianum, quorum alterum ex altero eruitur; ſegmentum quod in corol.8. deſignavimus eſt Hugenianum pariter, inter quos omnes Bernoulliani continentur.

Interea digna eſt peculiari adnotatione relatio inter Cycloidem & circulum genitorem. Baſis æquatur uni circumferentiæ circuli, axis binis radiis, area tribus areis, perimeter quatuor diametris.

27. Prop.4. Theor. *Si filum advolutum ſemicycloidi AMI evolvatur a vertice A, tum advolvatur ſemicycloidi IB ordine contrario poſitæ; generatur cyclois integra ADB evolutæ æqualis & baſim parallelam habens ipſius baſi.* F.8.

Demonſtratur. Ex quovis puncto M ſemicycloidis AMI, ducatur recta MO parallela baſi IH (*g*), chorda AO, & ipſi (g) 31. l.1.
parallela MN, quæ cycloidem continget in M (*h*): ex pun- (h) n.7.
cto E aſſumpto in dimidia baſi AB cycloidis ADB genitæ a circulo DRE æquali AOH, ducatur chorda ejuſdem circuli ER parallela chordæ OA, & ex R recta RP parallela baſi AB, donec occurrat tangenti MN productæ in P.

Quoniam anguli alterni OAE, AER æquales ſunt (*i*); (i) 29. l.1.
etiam RED, OAH complementa ad rectum æqualia erunt; adeoque (*k*) arcus DR, HO æquales. Cum autem & AOH (k) 26 l.3.
æquatur toti AE (*l*), & arcus AO æquetur rectæ OM (*m*), [l] n.3.
ac proinde AN (*n*); etiam arcus OH, adeoque & DR æqua- (m) n.5.
bitur rectæ NE, adeoque & RP (*n*). Eſt igitur punctum P (n) 34.l.1.
in perimetro cycloidis ADB (*o*). Rurſus chordæ ER, AO [o] n.5.
arcuum æqualium æquantur inter ſe (*p*); quare & PN, NM
iis æquales (*q*) æquantur pariter inter ſe, & PM eſt dupla [p] 29 l.3.
MN, adeoque dupla AO, ſive (*r*) æqualis arcui MA. Filum (q) 34 l.1.
autem, dum evolvitur, ob tenſionem habet ſemper poſitionem (r) n.14.
rectæ tangentis curvam, & ejus pars evoluta æquatur arcui
MA. Igitur ipſum filum congruet cum recta MP, & ejus

extremum punctum erit in P, quod, dum evolvitur, describet semicycloidem APD: Et eadem demonstratione dum advolvitur filum semicycloidi IB, generat aliam semicycloidem DB. Q. E. D.

28. *Scholium*. Demonstratis præcipuis cycloidis elementis, reliquum est, ut eam applicemus ad arcuum circularium rectificationem in Geometria, & isochronismum in Mechanica; ut promisimus.

F. 1. 29. In primis unica etiam cycloide descripta, facile est arcum cujuscunque circuli in rectam commutare, & vicevers. Detur arcus circuli cujuscunque. Ei similem abscinde (*a*) [a] 34. l. 3. in circulo genitore a vertice arcum DR. Duc per R (*b*) re- (b) 31. l. 1. ctam RP parallelam basi usque ad cycloidem. Cape (*c*) aliam (c) 12. l. 6. quæ ad ipsam habeat rationem, quam diameter dati circuli ad axem ED. Habebis rectam dato arcui æqualem. Nam (d) n. 5. erit (*d*) recta RP æqualis arcui RD; & cum totæ peripheriæ sint, per propositionem 7. ex Archimede, ut diametri circulorum; arcus quoque similes, qui ad suas peripherias habent eandem rationem, erunt inter se, ut diametri; ac proinde habebit arcus datus ad arcum RD eandem rationem quam recta inventa ad rectam RP æqualem arcui RD, adeoque, & recta inventa dato arcui æqualis erit.

30. Rursus data recta, quæratur arcus dati circuli ei (e) 12. l. 6. æqualis. In primis cape rectam (*e*), quæ ad eam habeat rationem, quam axis ED habet ad diametrum dati circuli. Si ea excedat basim AB; hanc abscinde quoties potueris; & habebis tot integras circumferentias. Reliquo segmento, si (f) 3. l. 1. quod superst, abscinde æqualem rectam AL (*f*) & erecta LM (g) 11. l. 1. normali ad AB (*g*), & æquali axi ED (*h*), diametro LM de- (h) 3. l. 1. scribe circulum, cujus intersectio P cum perimetro cycloidis jacens ad oppositam partem puncti E respectu LM, determinabit arcum LP, cui similem si abscindas ex dato circulo, & addas integris peripheriis, si quæ inventæ sunt; habebis arcum dati circuli æqualem datæ rectæ. Demonstratio patet ex eo, quod recta AB æquetur toti peripheriæ circuli geni- (i) n. 3. toris (*i*), AL arcui LP (*k*), & arcus similes circulorum sint, (k) n. 1. ut diametri juxta numerum superiorem.

31. Hinc & toti circulo, & cuivis sectori dato, quadratum æquale invenies. Cape rectam æqualem semicircumfe- [l] n. 29. rentiæ, vel dimidio arcui sectoris (*l*). Inter eam & radium (m) 13. inveni mediam proportionalem (*m*), & ejus quadratum erit l. 6. æquale areæ circuli, vel sectoris. Patet ex eo, quod totus circulus æquetur rectangulo sub dimidia peripheria & radio per cor. 1. prop. 5. ex Archim., & sectoris cujusvis area æquetur rectangulo sub dimidio arcu, & radio, ut num. 21. demon-

monſtravimus. Mediæ autem proportionalis quadratum æquetur (*a*) rectangulo ſub extremis. (a) 17. 1.6.

32. Pariter angulum quemvis ſecare poteris in quacunque ratione data. Facto centro in anguli vertice, quovis intervallo (commodiſſimum erit intervallum circuli genitoris) deſcribe circulum. Cape rectam (*b*) æqualem arcui cruribus intercepto. Eam ſeca in ratione data (*c*). Alteri ſegmento abſcinde (*d*) ex eodem circulo arcum æqualem ab ipſa interſectione cum altero crure verſus alteram; & recta per ſectionem ducta e vertice anguli ipſum angulum ſecabit in ratione data. Nam arcus cruribus interceptus ejuſque partes ſingulæ æquales erunt toti rectæ ſectæ in ratione data ejuſque partibus ſingulis. Quare & ipſe in eadem ratione ſectus erit; ac proinde (*e*) in eadem etiam angulus in centro ejus circuli conſtitutus. (b) n. 29. (c) 10. 1.6. (d) n. 30. (e) 33. 1.6.

33. Pro demonſtrando iſochroniſmo tria ex Mechanica ſunt præmittenda. 1. Corpus non ſolum in linea recta, ſed in curva quavis motum, ex illa flexione perpetua nihil amittit velocitatis jam acquiſitæ, niſi vel medii reſiſtentia, vel alia vis quæcunque eam imminuat. 2. Vires binæ, quæ ſimul agant ſecundum directiones PL, PF parallelogrammi cujuſcunque, & ſint ipſis proportionales, æquivalent vi ſecundum diagonalem PG ipſi diagonali proportionalem, quæ dicitur virium compoſitio, & reſolutio. 3. Ubi vires, quibus corpus per datam lineam movetur verſus datum in ea punctum, ſunt ut diſtantiæ ab eo puncto in ea ipſa linea computatæ; ex quacunque diſtantia motus incipiat, ſemper idem tempus impenditur in deſcenſu uſque ad datum illud punctum. F. 8.

34. Prima illa duo pertinent generaliter ad Mechanicam, & tam geometrice demonſtrantur, quam experimentis confirmantur. Hoc poſtremum minus late patet, & ſic demonſtratur. Concipe bina corpora in binis diſtantiis ab eodem illo puncto motum ſimul inchoare. Quoniam vires habent diſtantiis proportionales; velocitates, quas primo tempuſculo ab iis diſtantiis generantur, erunt in eadem ratione inter ſe, in qua ipſæ diſtantiæ. Quare & ſpatia primo tempuſculo percurſa in eadem ratione erunt; ac proinde in eadem etiam reliqua ſpatia decurrenda. Igitur & vires initio ſecundi tempuſculi, & velocitates ſecundo tempuſculo genitæ, adeoque & totæ velocitates quas habent, compoſitæ ex primis, quæ remanent, ac ex novis, quæ adveniunt, & ſpatia iis decurſa, & ſpatia reſidua in eadem pariter ratione erunt: & ita porro poſt quæcunque tempora, ſpatia, quæ ſupererunt decurrenda, erunt in eadem ratione, in qua integra ſpatia. Quare alterius ex iis corporibus non poterit diſtantia evadere

nulla, niſi alterius quoque diſtantia nulla evadat, & proinde ambo ſimul eo devenient.

31. Jam vero ubicumque ſit corpus P in arcu APB ſemi-
(a) 31.l.1. cycloidis, ducta PR parallela baſi (*a*), tum chorda RD, & rectis PL, DL parallelis ipſis DR, PR, quarum prior erit
(b) n.7. cycloidis tangens (*b*); ducatur PG parallela DE, cui occur-
(c) 11.l.1 rat in G recta LG perpendicularis (*c*) rectæ PL, ducanturque PF, GF parallelæ ipſis GL, PL. Quoniam ſi recta PG produceretur uſque ad AE, eſſet ei perpendicularis (*d*), ut axis
[d] 29.l.1. DE, cui parallela eſt, erit (*d*) perpendicularis etiam rectæ PR; adeoque angulus GPR rectus æqualis erit angulo LDE pariter recto (*d*), ob LD, AE parallelas. Demptis igitur angulis LPR, LDR oppoſitis in parallelogrammo LR, adeo-
(e) 34.l.1. que æqualibus (*e*), erit GPL æqualis RDE. Angulus autem
(f) 31.l 3 GLP rectus æqualis eſt angulo DRE recto (*f*) in ſemicirculo.
(g) 34 l 1. Quare ob PL quoque æqualem RD (*g*), erit & (*h*) PG æqua-
(h) 26.l.1. lis ED. Gravitas igitur conſtans, & ſemper agens ſecundum directionem verticalem eandem, ſecundum quam jacere concipitur axis ED, & ipſi parallela recta PG, exponi poterit per ipſam PG, & æquivalebit binis viribus ſecundum rectas PF, & PL proportionalibus ipſis rectis. Earum virium prima tota ſuſtinetur a cycloide, quam perpendiculariter urget,
(i) 29.l.1. cum ſit perpendicularis ejus tangenti PL (*i*). Secunda urget corpus ſecundum directionem curvæ, & auget velocitatem jam acquiſitam. Hæc porro cum proportionalis ſit rectæ PL,
(k) n.13. quæ æquatur chordæ DR, ſive (*k*) dimidio arcui PD, ſemper ipſi arcui proportionalis erit. Quare cum vis urgens corpus ſecundum directionem cycloidis ſit proportionalis diſtantiis a puncto infimo D computatis in eadem cycloide; ubicunque incipiat motus in arcu APD, ſemper idem tempus impendetur in deſcenſu per eum arcum, cujuſcumque longitudinis ſit.

32. Eadem autem temporum æqualitas habebitur & in aſcenſu. Nam in aſcenſu ipſo vires eædem in iiſdem punctis eaſdem velocitates deſtruent, quas in deſcenſu produxerant, ac proinde tota velocitas eodem tempore, & per eumdem arcum deſtruetur, quibus producta fuerat.

Hinc autem ſi inter duas ſemicycloides AMI, BI appendatur pondus ſuſtentatum filo æquali arcui ſemicycloidis; filo ipſo alternis vicibus advoluto, & evoluto, percurret corpus arcus cycloidales ſemper eodem tempore, vitium altera PF filum tendente, altera PL accelerante corpus in deſcenſu, vel in aſcenſu retardante: & tempus oſcillationum minimarum tempori maximarum æquale ſemper erit.

33. *Schol.2.* Conſiderantur a Geometris aliæ quoque cycloi-

cycloides, quas dicunt *contractas*, aut *protractas*. Contractæ ſunt, quas generat punctum, quod aſſumi concipitur in radio rotæ producto ultra peripheriam; protractæ, quas generat punctum aſſumptum intra rotam, inter peripheriam, & centrum. Si LPM referat non rotam, ſed circulum, cujus radius eſt diſtantia puncti deſcribentis a centro rotæ, qui dicitur circulus genitor, erit arcus LP ad rectam AL, & arcus RD ad rectam RP ſemper in eadem ratione, in qua radius genitoris ad radium rotæ, nimirum in ratione majoris inæqualitatis in cycloide contracta, minoris in protracta. Haſce cycloides primi etiam cycloidis primariæ Auctores conſiderarunt. Fig 1.

34. Si autem circulus revolvatur non ſuper rectam AB, ſed ſuper alium circulum; curvas, quas generant puncta in eo aſſumpta, vocant *Epicycloides*, de quibus multa præclara demonſtravit Nevvtonus l. 1. principiorum, & Philippus De la Hire opuſculo integro earum uſum demonſtravit pro formandis rotarum dentibus ita; ut motus æquabilitas conſervetur.

35. Demum curvæ etiam ex cycloidalium genere conſideratæ ſunt, quas generat curva quævis ſupra aliam quamvis curvam revoluta. Quinimmo demonſtravit idem Philippus De la Hire in Commentariis Acad. Pariſ. ad annum 1706., quo pacto curva quævis generari poſſit rotatione curvæ cujuſvis ſupra curvam aliam, quæ datis illis duabus determinari poteſt; ubi & naturam curvarum, quæ ex alterius curvæ revolutione ſupra alteram generantur, ſinthetica methodo perſecutus affectiones earum elegantiſſime definivit; quas ipſas curvas inſequenti anno in iiſdem commentariis generaliter tractavit Nicolius. Sed ea non ſunt hujus loci; & logiſtica nos jam nimium evagatos ad ſeſe vocat.

De Logiſtica.

1. *Definitio.* In recta AG indefinita utrinque aſſumpto ad arbitrium ſegmento CE, erectiſque pariter ad arbitrium CD, EF perpendicularibus ad CE (*a*), & inæqualibus, & aſſumptis utrinque perpetuo CA, EG æqualibus ipſi CE (*b*), ac erectis pariter perpendicularibus AB, GH ejus longitudinis, ut ſit (*c*) ſemper perpendicularis proxime ſequens ad proxime antecedentem, ut EF ad CD, concipiatur (*d*) ſecari bifariam tam CE in I, quam quodvis aliud ſegmentum EG in i, ac erigi IL, il perpendiculares ad CE, EG, quæ ſint (*e*) mediæ proportionales illa inter CD, EF, hæc inter EF, GH: tum ſectis bifariam CI, IE, Ei, iG in Fig. 1.

(a) 11. l. 11.
(b) 3. l. 1.
(c) 11. l. 6.
(d) 10. l. 1.
(e) 13. l. 8.

M, O, m, o, erigi perpendiculares MN, OP, mn, op, quæ ſint mediæ proportionales inter binas ſibi proximas, & ita porro ultra quoſcumque limites concipiantur ſegmenta omnia rectæ AG perpetuo bifariam ſecari, erectis perpendicularibus mediis geometrice proportionalibus inter binas ſibi proximas lineam continuam BDFH tranſeuntem per omnes vertices hujuſmodi perpendicularium, & perpetuo progredientem ſecundum directionem rectæ AG dico *Logiſticam*, vel *Logarithmicam*: rectas axi perpendiculares, & ad Logiſticam terminatas dico *Ordinatas*, rectam AG indefinitam dico *Axem*.

2. Corol. 1. *Logiſtica in punctis axis quibuſcumque non niſi unicam ordinatam habet.*

Patet: quia aliter non perpetuo progrederetur ſecundum directionem axis.

3. Corol. 2. *Ordinatæ illæ, quæ oriuntur ex dato quovis biſectionum numero, erunt in continua progreſſione geometrica.*

Patet: nam primæ illæ AB, CD, EF, GH ſunt per conſtructionem in continua ratione CD ad EF; quæ oriuntur ex prima biſectione, cum ſint mediæ proportionales ſingulæ inter binas proximas, una cum his ipſis, ſunt continuo in eadem illa ratione ſubduplicata: quæ oriuntur ex ſecunda una cum præcedentibus, ſunt omnes continuo in ratione ſubduplicata præcedentis rationis, & ita porro.

4. Corol. 3. *Logiſtica ex altera parte recedit ab axe, ex altera accedit perpetuo, & ultra quoſcumque limites, ita tamen ut axis ſit aſymptotus, cum quo nuſquam concurrat.*

In primis enim puncta illa omnia, quæ per biſectiones ſegmentorum axis, & perpendicularium erectionem geometrice definiuntur, ex altera parte perpetuo recedunt, ex altera perpetuo accedunt ad axem; cum ob primas illas CD, EF inæquales, ordinatæ omnes ex quovis biſectionum numero ortæ conſtituant progreſſionem verſus alteram partem majoris inæqualitatis verſus alteram minoris. Sit autem EF major, quam CD, &, ſi fieri poteſt, aliquod ſegmentum logiſticæ RS ſecundum directionem DF, vel æquidiſtet axi, vel ad eum accedat. Demiſſis ex R & S (*a*) perpendiculis RT, SX, continua biſectione devenietur ad particulas axis minores dimidia ipſa TX: ubi nimirum numerus particularum inter E & G, qui continue augetur, exceſſerit rationem dimidiæ TX ad EG. Quare neceſſario aliqua ex particulis cadet inter T, & X, ut mi, & ordinata iQ ſequens erit vel æqualis præcedenti mV, vel ea minor, quæ tamen debuit eſſe major (*b*). Quare logiſtica perpetuo ſecundum directionem DF recedit, & ſecundum directionem FD accedit ad axem.

(a) 12. l. 1.

(b) n. 3.

Rur-

Rursus in progressione geometrica AB, CD, EF, GH in infinitum continuata devenitur ad quantitatem quavis data majorem, & in inversa ad quavis data minorem juxta lemma 1. & 2. post prop. 11. l. 6. Quare logistica recedit ex altera parte, & ex altera accedit ultra quoscunque limites.

Demum continuatis utcumque segmentis CA, semper habebitur aliqua ordinata (*a*) AB, tertia nimirum continue geometrice proportionalis post binas præcedentes, & segmentum logisticæ inter ipsam, & præcedentem semper ab axe recedit Nusquam igitur Logistica cum axe congruet; qui proinde erit ejus asymptotus. (a) 11. l. 6.

5. *Scholium.* Hac definitione uti libuit tum alias ob causas, tum ad vitandam irrationalitatem, & ostendendum, quo pacto geometrice determinari possint infinita puncta, eaque quantum libuerit inter se proxima etiam datis binis ordinatis CD, EF, & earum intervallo CE. Joannes Neperus Baro Merchistonii primus Logarithmorum auctor (ipsi enim debentur, qui primus edidit, utut dicantur prius Justo Byrgio in privatos suos usus reservanti innotuisse) logarithmicam curvam sic definit. Recta Cc indefinita perpendicularis rectæ indefinitæ AG moveatur motu æquabili, & parallelo, & per eam punctum D versus axem excurrat celeritate proportionali distantiæ ab ipso; quod eo reducit, ut æqualibus rectæ Cc itineribus respondeant semper distantiæ puncti D a puncto C geometrice proportionales. Ea cum nostra congruit; nostra enim illa segmenta axis æqualia, sunt ipsa rectæ Cc itinera, & ordinatæ in progressione geometrica sunt ipsæ distantiæ puncti. Sed & ibi, & apud nos conditio illa expressa progressionis geometricæ respondentis abscissis axis æqualibus non exhibet omnes ordinatas, sed eas solum, quæ respondent certis punctis axis. Si enim capiantur bina axis segmenta CE, EX incommensurabilia, nullo modo axis poterit secari in partes æquales, ita ut sectionum puncta incidant in C, E, X, aliter CE, EX haberent pro mensura communi unam ex illis ipsis particulis. Quamobrem si definitio illa complectitur ordinatas spectantes ad puncta C, E, exhibere non poterit ordinatam spectantem ad X. Hujusmodi autem ordinatas complectitur Neperi definitio motu continuo habente in punctis rationalibus conditionem, quam definitio exprimit; nostra vero continuatione lineæ transeuntis per omnes vertices ordinatarum, quæ cum expressa conditione eriguntur. Nostra autem præterea statim speciem ingerit possibilitatis lineæ, cum ostendat geometricam inventionem punctorum quot libuerit, & ut libuerit proximorum.

6. Prop. 1. Theor. *Si ordinatæ AB, CD intercipiant* Fig. 2.

seg-

ſegmentum axis AC æquale ſegmento EG, quod intercipiunt ordinatæ EF, GH, erit AB ad CD, ut EF ad GH.

Si enim non ſit, inveniatur (*a*) quarta proportionalis poſt AB, CD, EF, quæ ſit GM minor, vel Gm major, quam GH. Ducatur ML, vel ml parallela axi (*b*); quæ logiſticæ alicubi occurret in L vel l, cum nimirum ea ex altera parte recedat ab axe, ex altera ad eum accedat (*c*) ultra quoſcumque limites. Demiſſis inde LI, li perpendicularibus ad axem (*d*), quæ erunt æquales ipſis GM, Gm (*e*) per continuam biſſectionem axis deveniatur, ut num. 4., ad particulas minores ſeptima parte rectæ GI, vel Gi, & ſectionum eæ, quæ proxime præcedunt puncta A, C, E, G, ſint N, P, R, T, quæ proxime ſequuntur, ſint n, p, r, t. Contineat autem TX, vel Tx ſex ejuſmodi particulas, & per omnia ſectionum puncta concipiantur erectæ ordinatæ (*f*).

(a) 12. l. 6.
(b) 31. l. 1.
(c) n. 4.
(d) 12. l. 1.
(e) 34. l. 1.
(f) 11. l. 1.

Primo quidem quoniam GI eſt major ſeptem ejuſmodi partibus, quarum TX continet ſex, GT non plus quam unam; erit GI major quam GX, & eodem argumento Gi erit major quam Gx. Quare (*g*) erit IL minor quam XV, & il major quam xu.

(g) n. 4.

Jam vero cum AC ſit æqualis EG, erit Np major quam rT, ac proinde nP major quam RX, eo quod AN, An, CP, Cp non ſint ſingulæ ſingulis particulis majores, quarum in TX auferuntur ſex, & in Rr non adduntur plures quam duæ; adeoque auferantur ibi non plures, hic non pauciores quam quatuor. Quare inter n & P plures habebuntur ordinatæ, quam inter R & X; ac proinde ratio no ad PQ erit minor, quam ratio RS ad XV. Cum enim ordinatæ definitæ per puncta ſectionum progreſſionem geometricam eandem conſtituant (*h*); quæ æqualem numerum ordinatarum intermedium habent, arguendo ex æqualitate ordinata, ſunt in eadem ratione; ac proinde eſt no ad PQ, ut RS ad aliquam poſteriorem ipſa XV; adeoque (*i*) ipſa majorem. Multo igitur magis ratio AB minoris (*i*) ad CD majorem (*i*), ſive ex hypotheſi ratio EF ad IL eſt major quam ratio ejuſdem EF majoris ipſa RS (*i*) ad XV. Adeoque erit XV minor quoque quam IL, qua ſimul eſt major. Quod eſt abſurdum.

(h) n. 3.
(i) n. 4.

Contra vero pauciores ſunt particulæ in nP, quam in Rt; quare pauciores in Np, quam in rx, additis ibi non plus quam quatuor, hic additis 6., & ablatis non plus quam binis. Quare erit ratio NO ad pq major quam ratio rſ ad xu, & multo magis ratio AB majoris ad CD minorem, ſive ratio EF ad il erit major quam ratio ipſius EF ad xu. Ac proinde xu erit etiam major quam il, qua ſimul eſt minor, quod pariter eſt abſurdum.

Igitur

Igitur ipſa GH eſt quarta proportionalis. Q. E. D.

7. Corol. 1. *Binæ ordinatæ quæcumque ejuſdem rationis idem, ubicumque ſint, ſegmentum axis intercipiunt.*

Si enim ratio AB ad CD fuerit eadem, ac ratio EF ad GH, & ſegmentum AC non fuerit æquale EG; abſciſſa (*a*) EX, vel Ex ipſi æquali, erit (*b*) EF ad XV, vel xu, ut AB ad CD, ſive ex hypotheſi ut eadem EF ad GH. Quare GH æqualis eſſet XV, vel xu: quod eſt abſurdum (*c*). (a) 3. l. 1. (b) n. 6. (c) n. 4.

8. Corol. 2. *Ordinatæ, quæ abſcindunt in axe ſegmenta æqualia, ſunt in progreſſione geometrica, & quæ ſunt in progreſſione geometrica abſcindunt ſegmenta æqualia.*

Patet ex propoſitione, & corol. 1. Eſt enim uterque caſus particularis, in quo puncta C, E concipiantur congruere.

9. Corol. 3. *Ordinatæ, quæ ſunt in progreſſione geometrica, abſcindunt in axe ſegmenta a quovis ejus puncto ad libitum aſſumpto, quæ ſint in progreſſione arithmetica, & viceverſa.*

Patet ex corol. præcedenti. Si enim aſſumatur ad arbitrium punctum axis A, & ſint CD, EF, GH in continua progreſſione geometrica; ſegmenta AC, AE, AG habebunt differentias æquales; adeoque erunt in continua progreſſione geometrica, & viceverſa.

10. Corol. 4. *Si ſint tres ordinatæ quæcumque, erit ratio primæ ad tertiam eadem ac ratio primæ ad ſecundam toties multiplicata, quot exprimit ratio ſegmenti axis intercepti inter primam, & tertiam ad ſegmentum interceptum inter primam & ſecundam.*

Sint enim ejuſmodi ordinatæ AB, CD, GH, & ſit primo AG ad AC, ut numerus integer ad unitatem; diviſa AG in partes æquales AC (*d*), ſi e ſingulis diviſionum punctis erigerentur ordinatæ (*e*); eſſent in progreſſione geometrica (*f*), in qua AB ad ſecundam ex iis ordinatis eſſet in ratione duplicata ipſius AB ad primam CD, ad tertiam vero in ratione triplicata, & ita porro; adeoque ad poſtremam in ratione toties multiplicata, quoties AG continet AC, ſive quot exprimit ratio AG ad AC. (d) 3. l. 1. (e) 11. l. 1. (f) n. 8.

Sit ſecundo AG ad AC, ut numerus m ad numerum n. Diviſa AG in numerum particularum m (*g*) ſit earum prima An: & AC continebit earum partium numerum n accurate; eritque eodem diſcurſu ratio GH ad AB multiplicata rationis no ad AB vicibus m; ratio autem no ad AB ſubmultiplicata rationis CD ad AB vicibus n: ac proinde GH ad AB erit in ratione vicibus m multiplicata rationis, quæ vicibus n eſt ſubmultiplicata rationis CD ad AB, nimirum in (g) 10. l. 6

ratio-

ratione multiplicata vicibus $\frac{m}{n}$, quæ eſt expreſſio rationis AG ad AC.

Demum ſi AC, AG ſint incommenſurabiles, & ratio GH ad CD non ſit multiplicata rationis CD ad AB toties, quot exprimit ratio AG ad AC, erit in ea ratione ita multiplicata aliqua minor, vel major quam GH. Sit ea GM vel Gm. Du-
(a) 31 l.1. cta ML vel ml parallela baſi (*a*), demiſſa ordinata LI vel li (*b*),
(b) 12.l.1. fecetur AG (*c*) in plures partes æquales, quam exprimat ra-
(c) 10. l.6. tio GI vel Gi ad AC, & ſingulæ ex iis partibus erunt minores quam GI vel Gi. Quare aliquod e punctis diviſionum ca-
(d) 11.l.1. det in X vel x inter G, & I, vel i; & erecta (*d*) XV vel xu, erit ejus ratio ad AB toties multiplicata rationis CD ad AB, quot exprimit ratio AX, vel Ax ad AC, quæ in primo caſu eſt minor, in ſecundo major ratione AG ad AC. Quare ra-
(e) 34.l.1. tio XV ad AB erit minor quam GM, ſeu (*e*) IL ad AB, vel ratio xu ad AB major, quam ratio Gm, ſeu il (*e*) ad AB; adeoque VX minor quam LI, vel ux major quam li; quorum
(f) n.4. utrunque eſt abſurdum (*f*). Patet igitur corollarium etiam in caſu incommenſurabilitatis.

11. Corol. 5. *Si ordinatæ omnes minuantur in quavis ratione data; orietur logiſtica æqualis priori, ſed promota ſecundum axem per intervallum æquale ſegmento axis reſpondente binis ordinatis rationis datæ.*

Fig. 3. Si enim in linea GHI ſint ordinatæ AG, EH, CI in eadem ratione ad ordinatas logiſticæ AB, EF, CD ſingulæ ad ſingulas; erunt etiam alternando illæ ad ſe invicem, ut hæ
(g) 31. l.1. pariter ſingulæ ad ſingulas. Ducta autem Gg parallela axi (*g*),
[h] n.4. quæ alicubi occurret logiſticæ in g (*h*): demiſſa ordinata ga (*i*),
(i) 12. l.1. & captis a e, a c æqualibus AE, AC (*k*) verſus eamdem
(k) 3. l.1. plagam, ac erectis (*l*) ordinatis eh, ci; erit (*m*) ag ad eh, vel
[l] 11.l.1. ci, ut AB ad EF, vel CD, ſive ut AG, vel eadem ag ipſi
(m) n. 6. æqualis (*n*) ad EH, vel CI. Quare erunt & EH, CI æqua-
(n) 34.l.1. les ipſis eh, ci; ac proinde ſi axis AEC figuræ AGHI retrahatur, donec congruat cum aec ſibi æquali; congruentibus angulis rectis, congruent ordinatæ quoque AG, EH, CI cum ordinatis æqualibus ag, eh, ci, & tota linea GHI cum linea ghi. Spatium autem, per quod ghi promovetur in GHI, eſt aA intervallum reſpondens ordinatis AB, ag exprimentibus illam rationem datam AB ad AG.

12. Corol. 6. *Segmentum axis interceptum inter binas ordinatas rationis cujuſcumque ad ſegmentum interceptum inter binas cujuſcumque alterius eſt in omnibus logiſticis in eadem ratione; & ſegmentum axis unius logiſticæ interceptum inter ordinatas rationis cujuſcumque*

ad

ad ſegmentum alterius cujuſcumque logiſticæ interceptum inter ordinatas ejuſdem rationis erit ſemper in eadem ratione conſtanti.

Sint binæ logiſticæ in fig. 1. & 2., & tam CD ad AB, quam GH ad AB in prima ut in ſecunda. Erit utrobique (*a*) ratio GH ad AB toties multiplicata rationis CD ad AB, quot exprimit ratio AG ad AC. Cum igitur ambæ illæ rationes ſint utrobique æquales, erit utrobique æqualis & ratio AG ad AC. Patet igitur primum. F. 1. 2. (a) n. 10.

Quoniam autem alternando eſt AG in prima ad AG in ſecunda ut AC in prima ad AC in ſecunda; patet & ſecundum.

13. Prop. 2. Theor. *Recta, quæ bina quævis Logiſticæ puncta conjungit, ita in nullo alio puncto ipſi occurrit, ut ſegmentum iis punctis interceptum jaceat in acuto eorum angulorum, quos ipſa uſque ad axem producta cum ipſo axe conſtituet, reliqua omnis Logiſtica in obtuſo.*

Sint ejuſmodi puncta BD, demiſſis BA, DC ordinatis (*b*) & ſecta AC bifariam in E (*c*), ac erecta ordinata EF (*d*), quæ rectæ BD occurrat in G, ſecent ipſam in punctis I & H rectæ ex B & D ductæ parallelæ axi (*e*). Quoniam in triangulis BGI, DGH præter angulos in G ad verticem æquales (*f*), anguli ad I & H, & ad D, & B alterni æquales ſunt (*g*); latera autem BI, HD æqualia ſegmentis (*b*) AE, EC æqualibus, æquantur inter ſe; æquabuntur & IG, GH (*i*). Cum vero ſit (*k*) CD ſive EH (*l*) ad EF, ut EF ad AB, ſive EI (*l*); erit per converſionem rationis EH ad HF, ut EF ad FI, ſive alternando EH ad EF, ut HF ad FI, adeoque ob HE, vel CD majorem FE (*m*) erit HF major quam FI. Quare ipſa HF erit major quam dimidia IH, ſive major quam HG, adeoque punctum F jacebit intra trapezium ABDC. Eodem autem pacto ſi AE, EC bifariam perpetuo ſecarentur, omnes vertices ordinatarum tranſeuntium per Sectionum puncta jacerent intra trapezia ABFE, EFDC, quæ priori trapezio ABDC continentur, & ita porro. F. 4. (b) 12. l. 1. (c) 10. l. 1. (d) 11. l. 1. (e) 31. l. 1. (f) 15. l. 1. (g) 29 l. 1. (h) 34 l. 1. (i) 26. l. 1. (k) n. 8. [l] 34. l. 1. (m) n. 4.

Hinc autem deducitur omnia prorſus puncta ſegmenti BFD jacere intra idem trapezium: ſi enim aliquod punctum jaceret vel extra id trapezium, vel in recta BD; neceſſario aliquod ſegmentum ut MO jaceret intra triangulum BFG, vel GFD. Demiſſis autem ordinatis ML, ON (*n*), & continuata biſſectione donec una e particulis evaderet minor, quam LN, aliquod e punctis ſectionum caderet inter L & N in Q; unde erecta ordinata (*o*) QP, vertex P caderet extra trapezium ABFE, vel EFDC, intra quod debuit cadere. (n) 12. l. 1. (o) 11. l. 1.

Pro-

(a) n.4. Producta autem DB, ſemper ob DC, AB inæquales (*a*), ſecabit axem, alicubi in S, cum ejus parallelam BI ſecet; &
(b) 17.l.1. perpendicula BA, DC jacebunt ex parte anguli acuti DSC (*b*), adeoque & ſegmentum Logiſticæ BFD. Si autem in eadem producta verſus D capiatur quodvis punctum d, & ducatur dBs; punctum D eodem argumento jacebit intra angulum dsC, adeoque recta Bd & punctum d extra angulum DSC acutum in obtuſo DSR; & eadem eſt demonſtratio pro puncto quovis b aſſumpto in Logiſtica DFB producta verſus B, ducta nimirum recta per D, & b. Quare recta BD in nullo alio puncto occurrit Logiſticæ, ſegmento quidem BFD jacente in angulo DSC acuto, reliqua vero Logiſtica in obtuſo. Q. E. D.

14. Cor. 1. *Nulla recta in pluribus, quam duobus punctis Logiſticæ occurrit.*

Patet ex ipſa propoſitione. Quæ enim recta occurret in binis, in nullo alio puncto poterit occurrere.

15. Cor. 2. *Logiſtica eſt linea curva, quæ curvitatem axi perpetuo obvertit.*

Patet primum. Cum recta enim nullus ejus arcus perpetuus congruit; ſi nulla recta ipſi in pluribus, quam in duobus punctis occurrit.

Patet ſecundum: quia arcus quem chorda quævis BD ſubtendit, cum jaceat intra trapezium ABDC, jacet inter chordam & axem, ac proinde verſus axem curvatur.

16. Cor. 3. *In quovis Logiſticæ puncto recta quædam linea ipſam ita tangit, ut cum axe concurrat ad angulos inæquales verſus eam partem, verſus quam Logiſtica ad ipſum accedit, & omnia Logiſticæ puncta utrinque circa contactum jaceant in eorum angulorum obtuſo.*

F 5. Conjunctis enim binis quibuſcunque punctis ED, de-
(c) 12.l.1. miſſis ordinatis EV, DC (*c*), concipiantur per quævis puncta M aſſumpta inter E, & D in recta ED ductæ rectæ ordi-
(d) 31.l.1. natis parallelæ (*d*), quæ axi occurrent alicubi in Q, & arcui
(e) n.13. ED alicubi in N inter M, & Q (*e*). Erit autem omnium MN aliqua maxima: quod ſic probatur. Cum arcus ipſe ſit clauſus trapezio EVCD; erit aliqua, qua nulla ſit major: ſit ea KI, quæ producta concurrat cum axe in B: & ipſi nulla alia erit æqualis: ſi enim eſſet aliqua MN æqualis; ducta IN, eſſet
(f) 33 l.1. MK N parallelogrammum (*f*); Et arcus ab N ad I deberet jacere intra trapezium NQBI, ex demonſtratione propoſitionis, ac proinde extra parallelogrammum MNIK: adeoque quævis alia ipſi MN parallela ducta inter M & K uſque ad eum arcum eſſet major quam KI; cum huic æquale debeat
(g) 34.l.1. eſſe ſegmentum recta NI terminatum (*g*) quod eſt contra hypotheſim.

Ducta

Ducta autem per I recta ipſi DE parallela, quæ rectæ cuivis MQ occurrat in O, erit MO æqualis KI (*g*), adeoque major quam MN, cumque eadem ſit ratio pro omnibus punctis M utralibet ex parte puncti I; totus arcus EID, utrinque circa I jacebit ad eaſdem partes rectæ OI verſus chordam ED; & quoniam producta DE occurret alicubi axi in S ad angulos inæquales verſum eam partem verſus, quam Logiſtica ad eam accedit juxta num. 15.; ac proinde eodem etiam modo & IO ipſi parallela alicubi in T; jacebit totus arcus EID, in angulo obtuſo STP, & multo magis in eodem angulo jacebunt reliqua omnia Logiſticæ puncta, quæ (*a*) jacent in angulo obtuſo RSD. (g) 34. l. 1. (a) n. 23.

Aſſumpto demum ubicunque puncto i, demiſſa ordinata ib (*b*), capta bt in axe æquali BT & ad eaſdem partes, (*c*) & ducta ti indefinita; per quodvis ejus punctum utralibet ex parte puncti i agatur ordinata qn (*d*), ac aſſumpta ad eaſdem partes TQ æquali tq, ducatur pariter ordinata QN (*d*), occurrens tangenti TI in O; & erunt etiam qb, QB æquales; ac proinde (*e*) qn ad bi, ut QN ad BI. Eſt autem etiam (*f*) ib ad qo, ut bt ad qt, ut BT ad QT, ut IB ad QO. Quare ex æqualitate ordinata erit qn ad qo, ut QN ad QO in ratione majoris inæqualitatis. Quamobrem & recta it [occurrens axi ad eas partes verſus quas Logiſtica ad axem accedit, in angulis inæqualibus (*g*) ob angulum tbi rectum), ita contingit Logiſticam in unico puncto i, ut omnia ejus puncta utrinque circa contactum jaceant in eorum angulorum obtuſo Rti. (b) 12. l. 1. (c) 3. l. 1. (d) 12. l. 1. (e) n. 6. (f) 4. l. 6. (g) 17. l. 3.

17. Cor. 4. *Subtangens, ſive ſegmentum axis interceptum inter ordinatam, & tangentem in eadem Logiſtica eſt ubique conſtans.*

Patet ex eo, quod pro quovis puncto i ſit tb æqualis TB.

18. Cor. 5. *Nulla recta aut parallela axi, aut normalis, aut ad eum inclinata ita, ut angulus acutus ſpectet eas partes, verſus quas Logiſtica accedit ad ipſum axem eſt tangens. Cuivis autem rectæ ad partes oppoſitas inclinata tangens aliqua eſt parallela.*

Per quodvis punctum I logiſticæ tranſeat recta MIN parallela axi, BIa perpendicularis eidem, & PIO inclinata ita, ut angulus acutus IOB ſpectet arcum ID accedentem ad axem: nulla ex iis erit tangens. Cum enim Logiſtica ex altera parte perpetuo recedat ab axe, & ex altera accedat ad eum (*h*); recta MN eam neceſſario ſecabit in puncto I. Pariter cum ea perpetuo progrediatur ſecundum directionem axis (*i*), eam recta Ba neceſſario ſecabit in I. Cum vero recta OIP jaceat in angulis F. 6. (h) n. 4. (i) n. 1.

BIN

BIN, MIa; in quibus arcus Logiſticæ nullus jacet, neceſſario ipſa etiam eam ſecabit in I. Patet igitur primum.

Sit vero IT tangens, cujus inclinatio erit oppoſita inclinationi PIO (a), & in quovis angulo acuto ad eaſdem partes inclinetur recta TA, quæ occurret alicubi rectæ Bi productæ, ſi opus eſt, in A: ac per A ducatur AD parallela axi, quæ neceſſario alicubi occurret Logiſticæ in D (b). Tangens DF per D tranſiens erit ipſi AT parallela. Demiſſa enim ordinata DE (c), erit & FE æqualis TB (d), & ED æqualis BA (e). Quare ob angulum quoque E & B rectum, erit & angulus EFD æqualis angulo BTA (f), adeoque FD parallela TA (g). Et eadem eſt demonſtratio pro recta Ta. Patet igitur & ſecundum.

(a) n. 16.
(b) n. 4.
(c) 12 l. 1.
(d) n. 17
(e) 34 l. 1.
(f) 4 l. 1.
(g) 28 l. 1.

19. Cor. 6. *Angulus tangentis cum axe eo minor eſt, quo magis contactus recedit verſus eam partem, verſus quam Logiſtica accedit ad axem; & verſus oppoſitam augetur perpetuo ita, ut ibi quidem decreſcat ultra quoſcunque limites, hic ultra quoſcunque limites accedat ad rectum.*

Nam puncto D recedente ab I ad eam partem, verſus quam Logiſtica accedit ad axem, perpetuo decreſcit DE, adeoque & BA, & puncto d pariter recedente ad partem oppoſitam, creſcit perpetuo de, adeoque & Ba (h). Quare in primo caſu perpetuo decreſcit angulus BTA, adeoque & EFD, in ſecundo perpetuo creſcit BTa, adeoque & efd.

(h) n. 4.

Rurſus dato quovis angulo acuto, poterit fieri BTA eo minor, vel BTa minus eo diſtans a recto. Quare decreſcet ex parte D angulus F ultra quoſcunque limites; & angulus f ex parte d accedet ad rectum ultra quoſcunque limites.

20. Cor. 7. *Binæ tangentes quæcunque concurrunt inter utrunque contactum inter axem & curvam.*

Cum enim tangens TI ſecet rectam Ta parallelam tangenti fd, ob angulum quoque BTI minorem angulo efd (i), adeoque minorem, & angulo BTa (k); ſurſum producta ſecabit alicubi in Q ipſam quoque df inter I & d, quæ ſectio jacebit inter axem Be, & arcum Id, ob arcum DId jacentem extra angulum BTQ (l).

(i) n. 19.
(k) 29. l. 1.
(l) n. 16.

21. *Quævis recta per contactum ducta ita Logiſticam ibidem ſecat, ut hujus arcus aliquis jaceat in angulo, quem illa cum tangente efficit, nec inter tangentem, & Logiſticam ulla alia recta a puncto contactus in utrumque angulo duci poſſit.*

Sit enim tangens TIt, & recta quævis ducta per I ſit primo MIN parallela axi, vel BIa normalis, vel PIO inclinata

clinata ita, ut angulus acutus ſpectet eas partes, ad quas Logiſtica accedit ad axem ipſum: Secabit in eodem puncto Logiſticam (*a*); & patet curvam ID debere remanere in angulis MIT, aIT, PIT, & curvam Id in angulis MIt, aIt, PIt. (a) n.18.

Si autem ſit in f.7. recta AID inclinata ad partes oppoſitas; aliqua tangens HF erit ipſi parallela (*b*), & tangenti IT alicubi occurret in F inter contactus H & I (*c*). Poſito A ad eaſdem partes, ad quas jacet contactus H reſpectu I, & D ad oppoſitas, & ducta chorda IH; jacebit arcus HI intra triangulum HFI, cum jaceat inter chordam & axem (*d*), punctum autem F inter arcum & axem (*e*). Jacebit igitur arcus IH in angulo FIH, & ob FH parallelam IA, multo magis in angulo AIF. Cumque tota curva HIh jaceat ad eaſdem partes reſpectu tangentis TIt (*f*) puncta verò A & D ad partes oppoſitas, eo quod rectæ AD, Tt ſe in I ſecent, jacebunt arcus IH, Ih ad partes oppoſitas, hinc inde a recta AID. Et eadem eſt demonſtratio pro recta aId. F.7. (b) n.18. (c) n.20. (d) n.15. (e) n.20. (f) n.16.

Quoniam autem ſemper ID jacet ad partes oppoſitas curvæ reſpectu tangentis, & arcus IH ſemper in angulo FIA. Nulla recta duci poterit in eo angulo, quem arcus continet cum tangente.

22. Cor. 8. *Subtangentes in diverſis Logiſticis ſunt inter ſe in eadem illa conſtanti ratione, in qua ſunt* (g) *ſegmenta axis abſciſſa a binis ordinatis cujuſcunque rationis datæ.* (g) n.12.

Nam ſi in binis Logiſticis ſubtangentes BT non ſint in ea ratione; ratio ſubtangentis unius ad alteram erit ea ratione minor. Sit minor ratio ſubtangentis BT figuræ 8, & capta ibi in ea ratione BA ad ſubtangentem BT figuræ 5, erit in fig.8. BA major, quam BT; arcus autem aliquis IN, qui (*h*) jacet in angulo ATI obtuſo (*i*) ob TBI rectum, jacebit in angulo TIA (*k*). Ducta vero per N ordinata QN (*l*) quæ occurrat alicubi in X rectæ AI: ſumatur (*m*) in fig.5. BQ verſus eandem partem ad hanc BQ in illa ratione conſtanti, in qua eſt BT ejuſdem figuræ ad BA figuræ 8., erigaturque QN ordinata (*n*). F.5. 8. [h] n.16. (i) 16 l.1. (k) n 21. (l) 12. l.1. [m] 12.l.6. (n) 11.l.1.

Quoniam eſt alternando BA ad BQ in fig.8., ut BT ad BQ in 5.; erit dividendo BA ad QA in 8, ut BT ad QT in 5.; adeoque etiam (*o*) IB ad QX in 8.,ut IB ad QO in 5. ſive in ratione majore,quam in 5. ſit IB ad QN. Eſt autem etiam ex hypotheſi rationis conſtantis, IB ad QN in 8.ut in 5. Quare erit IB ad QX in 8. in ratione majore quam IB ad QN; ac proinde QX minor ſua parte QN. Quod eſt abſurdum. (o) 4. l.9.

23. Corol. 9. *Si chorda Logiſticæ producatur uſque ad axem; ſegmentum axis interceptum inter ejuſmodi interſectionem & ordinatam demiſſam per punctum propius eſt minus ſubtangente; interceptum autem inter eam & ordinatam ductam per punctum remotius, majus eſt ipſa ſubtangente.*

F.7. Sit enim chorda IH, occurrens axi in M: demiſſis ordi-
(a) 12.l.1. natis IB, Hb (*a*), & producta tangente FH uſque ad axem in N; patet rectam bM interceptam inter M, & ordinatam Hb fore minorem ſubtangenre bN, & BM interceptam inter M & ordinatam IB fore majorem ſubtangente BT: ex eo nimirum, quod concurſus F tangentium debeat cadere
(b) n 20. reſpectu chordæ IH verſus axem, & inter puncta I, H (*b*).

24. Corol. 10. *Si curvæ cujuſdam ſubtangens definita per ordinatas perpendiculares ad datum axem ſit conſtans; ea curva erit Logiſtica.*

F.9. In primis enim ea curva erit perpetuò convexa verſus eum axem. Nam ſi ejus arcus aliquis ab H ad I eſſet HdI perpetuo cavus verſus axem; caderet ad partes oppoſitas axi reſpectu chordæ HI, & concurſus tangentium, quæ tranſeunt per I & H, deberet eſſe alicubi in f ultra chordam HI, adeoque concurſus u tangentis fH cum axe caderet a concurſu M chordæ productæ verſus ordinatas HC, IB, & concurſus t tangentis If ad partes oppoſitas, & eſſet ſubtangens Cu minor ſubtangente Bt. Quamobrem nulla pars utcunque exigua ejus curvæ obvertit cavitatem axi.

Deinde per puncta H & I eodem axe tranſit aliqua Lo-
(c) n.1. giſtica (*c*), pariter verſus axem convexa (*d*), & ſubtangen-
(d) n 15. tem conſtantem habens (*e*); quæ ſi cum illa curva non con-
(e) n.7. gruit; ſit arcus alterius HDI, alterius HOI, quorum uterque jacebit verſus axem reſpectu chordæ ob curvitatem axi obverſam ab utraque. Si forte ii arcus alicubi ſibi invicem occurrunt ante punctum I; transferatur punctum I in primam illam interſectionem poſt H, & ſint IFT, FHV tangentes arcus HOI remotioris a chorda HI. Satis patet tangentes arcus HDI non magis recedere a chorda HI, quam tangentes remotioris HOI. Quare nec tangens per I ducta poterit cadere extra angulum HIF, nec tangens per H extra angulum IHF, eique ad verticem oppoſitum VHM; adeoque ſubtangens prima non poterit eſſe minor quam BT, nec ſecunda major quam CV, ſive quam ipſi æqualis BT. Cum igitur & illa ſecunda æquetur primæ, oportebit utranque ipſi BT æqualem eſſe.

Demum ſi per quodvis punctum axis Q inter C & B tranſeat communis ordinata QOD, occurrens in O Logiſticæ, in D cur-

curvæ illi ; eodem argumento ſubtangens ejuſdem curvæ æquabitur ſubtangenti Logiſticæ tranſeuntis per H, & D, & habentis eundem axem; ac proinde ſubtangens Logiſticæ tranſeuntis per H, & I, erit æqualis ſubtangenti Logiſticæ tranſeunti per H & D ; adeoque & ſegmenta axis, intercepta ab ordinatis earum Logiſticarum rationis ejuſdem, æqualia erunt (*a*) : ac proinde ratio CH ad QD erit æqualis rationi CH ad QQ, & erunt QQ, QD æquales. Quod cum fieri non poſſit ; niſi arcus HDI congruat cum arcu Logiſticæ HOI; neceſſario arcus quivis illius curvæ cum eadem Logiſtica congruet. (a) n. 22.

25. *Scholium.* In his fuſius immorari libuit ; quia tum maxime curvæ lineæ natura dignoſcitur, cum ejus poſitio ad rectas ſeu tangentes, ſeu ſecantes deprehenditur ; libuit autem & inverſum theorema ſubtangentis conſtantis exigere ad rigidiorem geometriam in corol. 10.

Ex corol. autem 5. prop. 1., ex 8. hujus, & ex demonſtratione poſtrema corol. 10. facile colligitur, logiſticas, quæ eamdem ſubtangentem habent, eſſe æquales, & rite ſuperimpoſitas congruere, quæ diverſam diverſas.

Ex corol. 9. per approximationem poteſt deprehendi ratio quantum libuerit veræ proxima tangentis ad ſegmentum axis, interceptum inter ordinatas rationis cujuſvis datæ. Si enim binæ ejuſmodi ordinatæ ſint in fig. 5. VE, CD, quæ numeris exprimantur, & pariter numeris exprimatur CV ; ducta EX parallela baſi (*b*), quæ a CD abſcindet CX ipſi VE æqualem (*c*), erit (*d*) DX ordinatarum differentia ad EV ordinatam minorem, ut CV ad VS minorem ſubtangente, ſed quæ adjecta CV evadat major. Habentur igitur limites. Sed ſi concipiatur VC ſecari bifariam in B, & inveniatur BI media proportionalis inter VE, CD (*e*), quæ invenietur extracta radice quadrata ex producto ordinatarum VE, CD (*f*), ac fiat iterum ut exceſſus IB ſupra VE ad VE, ita VB ad quartum ; prodibit linea minor ſubtangente; ſed quæ ab ea differat minus quam per VB. Et ſi per continuam biſſectionem inveniantur mediæ, donec deveniatur ad partem axis quamtumlibuerit parvam, devenietur etiam ad limites ſubtangentis quantumlibuerit proximos. In theorematis circa logiſticam impreſſis inter opera poſthuma Hugenii Amſtelod. 1728. habetur pag. 162 bis, & 178. ſemel ratio ſubtangentis ad ſegmentum axis interceptum ordinatis rationis duplæ, ut 434294481903251804 ad 301039995663981195, ſive proxime ut 13. ad 9. Corrigendæ ſunt poſtremæ duæ notæ primi numeri, & quinta ſecundi: eſt enim ea ratio adhuc proximius ut 434294481903251838967785 &c. ad 301029995663981195240585. Fig. 5. (b) 31 l. 1. (c) 34 l. 1. (d) 4 l. 6. (e) n. 8. (f) 17 l. 6.

Ea autem definita, ſubtangens cujuſcumque Logiſticæ facile Fig. 6.

facile determinatur. Si enim in fig. 6. ſit quævis ordinata BI;
(a) 10 l. 1. quæ bifariam ſecetur in A (*a*), ducaturque AD parallela
(b) 31. l 1. axi (*b*), erit ea æqualis ſegmento axis BE (*c*), & proinde ad
(c) 34. l. 1. ſubtangentem in ea ratione determinata.

In coroll. 4. illud videtur mirum, logiſticam, quæ eſt curva, ut vocant, tranſcendens, non niſi duas habere poſſe interſectiones cum recta. Curvas Geometræ poſt Carteſium in certas claſſes partiri ſolent per relationem, quam habent ordinatæ ad abſciſſas computatas a puncto quovis in data recta aſſumpto uſque ad ordinatas ipſas. Quæritur æqualitas inter ſummas, vel differentias productorum quorumcumque, quæ fiunt ex abſciſſa, ordinata, earum potentiis quibuſcumque, & quibuſcumque datis rectis: quæ æquatio dicitur. Ubi aliqua ejuſmodi æquatio invenitur; curvæ, ad quas ea pertinet, dicuntur *algebraicæ*: in quibus nulla eſt æquatio, quæ finitis terminis relationem hanc exprimat, dicuntur *tranſcendentes*; & illas quidem Carteſius *geometricas* has *mechanicas* appellavit. Porro algebraicæ in claſſes ſuas diſtribuuntur juxta dimenſionem maximam producti ex abſciſſa, ordinata, & earum potentiis; ita, ut ubi non invenitur, niſi quadratum alterutrius, vel factum ex ipſis; dicantur ſecundi gradus: ubi maxima dimenſio eſt cubus alterutrius, vel quadratum alterius ductum in alteram; dicantur tertii gradus, & ita porro. Ac curvæ quidem algebraicæ ad eum gradum aſcendunt, qui exprimat, quot interſectiones poſſint habere cum recta linea: ſic ſectiones conicæ ſunt curvæ ſecundi gradus, quia rectæ lineæ non niſi in duobus punctis poſſunt occurrere. Tranſcendentes autem plerumque omnes tranſcendunt finitos gradus; quia poſſunt habere infinitas interſectiones cum recta. Sic cyclois licet videatur habere poſſe duas tantum, poteſt habere infinitas; nam cycloides omnes, quas generat circulus perpetuo revolutus ſupra rectam utrinque infinitam, ad unicam pertinent curvam continuam. At logiſtica licet binas tantum interſectiones habere poſſit cum recta; adhuc tamen tranſcendens eſt, & nullius finitæ æquationis terminis coercetur. Id autem unde proveniat cogitantibus, viſum eſt provenire ex ea ſimilitudine partium omnium, quam n. 11. demonſtravimus; qua fit, ut ubicumque in axe origo ordinatarum capiatur ſemper ordinatæ & ordinatarum relationes ad ſe invicem eodem prorſus modo progrediantur, iiſdem aſſumptis abſciſſis. Unde fieret, ut ſi quæ æquatio exprimeret relationem abſciſſarum ad ordinatas; deberet exprimere relationem ejuſdem abſciſſæ ad infinitas ordinatas, nimirum ad eas omnes, quæ reſpondent eidem abſciſſæ variata ejus origine per totum axem. Solum æquatio inveniri poteſt, quæ exprimat

mat relationem ordinatarum ad ſe invicem per relationem inter abſciſſas, quæ tamen eſt æquatio exponentialis. Sed hæc algebram requirunt, & non ſunt hujus loci.

Demonſtrato in corol. 10., curvam, quæ habeat ſubtangentem conſtantem, eſſe logiſticam per rigidiorem geometriam, uſui hic eſſe poſſet Marchionis Jo: Poleni doctiſſimi viri præclarum inventum. Is in Epiſtola ad Hermannum exhibuit inſtrumentum, quo deſcribi poſſit motu continuo curva ſubtangentem conſtantem habens, adeoque logiſtica. Sed quoniam ejuſmodi inſtrumentum non ita facile ſibi poſſunt comparare Tyrones, addemus expeditiſſimam methodum deſcribendi logiſticam per puncta.

In recta AH capiantur ſegmenta AB, BC, CD &c. æqualia (*a*): erigantur ex omnibus punctis perpendicula Aa, Bb, Cc &c. (*b*) occulta, vel quæ deleri poſſint: aſſumpto in primo perpendiculo Aa puncto I ad arbitrium, & diviſione E pariter ad arbitrium, applicetur regula ad I & E, & notetur in ſecundo perpendiculo punctum K, tum applicata regula ad K & F notetur punctum L, per L & G determinetur M, & ita porro. Erunt puncta IKLM &c. ad logiſticam, quæ facile continuabitur ductu calami. Eſt enim (*c*) AI ad BK, ut AE ad BE, ſive ut BF ad CF ob æqualitatem particularum, nimirum (*c*) ut BK ad CL. Quare AI, BK, CL ſunt continue proportionales; & cum eadem ſit demonſtratio pro reliquis, erunt ea puncta ad logiſticam (*d*). Fig. 10. (a) 3. l. 1. (b) 12. l. 1. [c] 4. l. 6. (d) 11. 1.

Perpendicula illa facilius ducentur, ſi erecto primo Aa, ducatur per a recta ah parallela AH (*e*), & in ea ſumantur ab, bc, cd &c. æquales AB, BC, CD &c.; erunt enim Bb, Cc &c. parallelæ Aa (*f*), adeoque perpendiculares ad AH (*g*). (e) 31. l. 1. (f) 33. l. 1.

Si autem detur ſubtangens RE, ea diviſa in numerum quemcumque imparem particularum (*h*), ſumantur hinc inde RA, RB æquales ſingulis particulis: capiantur reliquæ BC, CD &c. æquales binis ſingulæ, & habebitur intentum quam proxime. Erecta enim RS parallela AI (*i*), quæ chordam KI ſecabit bifariam in I (*k*); arcus exiguus KI vix ad ſenſum differet a chorda KI, & a recta, quæ eum tanget in medio in S. Quare erit RE proxime ſubtangens. [g] 28. l. 1. (h) 10. l. 6. (i) 31. l. 1. (k) 3. l. 6.

26. Prop. 3. Theor. *Area clauſa arcu logiſticæ, binis ordinatis, & axe æquatur rectangulo ſub differentia ordinatarum, & ſubtangente.* Fig. 11.

Sint ejuſmodi ordinatæ BA, DC. Abſciſſa ex axe CE (*l*) æquali ſubtangenti, completo rectangulo DCEF (*m*), ductaque per B verticem ordinatæ minoris (*n*) recta parallela axi, quæ in G, & H occurrat rectis CD, EF, & abſcindat CG æqualem AB (*o*); dico aream BACD eſſe æqualem rectan- (l) 3. l. 1. (m) 31. l. 1. (n) 34. l. 1. (o) 31. l. 1.

gulo GF ſub DG ordinatarum differentia, & recta DF æquali ſubtangenti CE.

Si enim alterum ex iis ſit minus, ſit ratio minoris ad majus eadem ac CK ad CD. Ducatur KP parallela axi (a), quæ occurret alicubi arcui BD in P (b); demittatur PY ordinata (c), tum recta CA ſecetur in partes æquales AV, VX, XZ, ZC per continuam biſectionem, donec una ex iis evadat minor quam CY, ut in num 4. Erigantur ordinatæ per omnia ſectionum puncta (d) VS, XQ, Z): per bina quælibet puncta proxima S, Q, agantur rectæ axi parallelæ (e) occurrentes rectis VS, XQ, CD, EF, illa in T, m, I, hæc in R, M, L; & chorda QS occurrat axi in N.

(a) n. 4.
(b) 12. l. 1.
(c) 11. l. 1.
(d) 11. l. 1.
(e) 31. l. 1.

Erit (f) rectangulum MI ad mE, ut Mm ad mC, ſive (g) ut QT ad SV, ut (h) ST ad VN minorem (i) ſubtangente CE, adeoque & recta mI (g); ac proinde in ratione majore quam ST ad mI, ſive (f) quam rectangulum SX ad mE. Quare rectangulum MI eſt majus rectangulo SX. Pariter eſt eadem prorſus demonſtratione MI ad ME, ut Mm ad MC, ſive ut QT ad QX, ut ST ad XN majorem recta ML; ac proinde in ratione minore, quam ST ad ML, ſive quam rectangulum RX ad ME. Quare rectangulum MI eſt minus rectangulo RX. Cumque etiam area logiſticæ VSQX ſit major rectangulo SX, minor rectangulo RX; erit ratio ejuſdem areæ ad rectangulum MI major ratione rectanguli SX ad RX, ſeu (k) ordinatæ præcedentis VS ad ſequentem XQ, vel (l) penultimæ ZO ad CD, & minor ejus inverſa QX ad SV, vel DC ad OZ. Cumque id accidat in omnibus areis logiſticæ conſtituentibus aream BACD, & totidem rectangulis conſtituentibus rectangulum DH; erit illa ad hoc in ratione minore quam ZO ad CD, & majore inverſa. Quare ſi illa area eſt minor rectangulo DH, erit ratio CK vel YP ad CD major ratione ZO ad CD; ſi illa eſt major, erit ratio CD ad PY minor ratione CD ad OZ. Adeoque in utroque caſu PY major quam OZ, quod eſt abſurdum (m). Igitur area ABDC æquatur rectangulo BH. Q. E. D.

(f) 1. l. 6.
(g) 34. l. 1.
(h) 4. l. 6.
(i) n. 23.
(k) 1. l. 6.
(l) n. 8.
(m) n. 4.

27. *Corol.* 1. *Fere eadem demonſtratione infertur ſolidum genitum revolutione ejuſdem areæ circa axem AC, æquari dimidio annulo genito a rectangulo HD.*

Nam concipiatur diviſio continuari donec binæ particulæ ſint minores quam CY, ita ut CZ jam contineat duas ex particulis, qualium una eſt VX, & æquetur AX; chorda autem QB occurrat axi in n, & recta BG rectæ QX in t.

Erit cylindrus genitus ab EM ad cylindrum genitum ab Em (n), ut circulus genitus a CM ad circulum genitum a Cm, ſive (o) in ratione duplicata CM ad Cm, vel (p)

(n) 11. l. 12.
(o) 2. l. 12.
(p) 34. l. 1.

XQ

XQ ad VS, ſive ob XQ, VS, AB continue proportionales (*a*) in ratione ſimplici XQ ad AB. Quare dividendo erit annulus genitus ab MI ad cylindrum genitum ab mE, ut Qt ad BA, ſive (*b*) ut Bt, vel (*c*) AX dupla VX ad An, ſive in ratione minore quam dupla VX ad CE majorem Aa (*d*), vel (*e*) quam duplus cylindrus genitus ab XS ad eundem cylindrum genitum ab Em; ac proinde annulus MI major duplo cylindro SX. Eodem autem pacto idem demonſtratur minor duplo cylindro RX; ac proinde ratio ipſius ad duplum ſolidum VSQX erit major quam ratio dupli cylindri XS ad duplum XR, ſive (*f*) quam duplicata VS ad XQ, vel ſimplex AB ad XQ, ſive ZO ad CD, & minor eadem inverſa. Reliqua autem demonſtratio procedit, ut in propoſitione.

(a) n. 8.
(b) 4. l. 6.
(c) 34 l. 1.
(d) n. 23.
(e) 14. l. 2.
(f) 14. l. 12.

28. Corol. 2. *Si concipiatur punctum B abire in infinitum; erit tota area infinita logiſticæ inter ordinatam CD, logiſticam, & axem, æqualis rectangulo, cujus baſis CD, altitudo ſubtangens: & ſolidum genitum ejus rotatione circa axem erit æquale dimidio cylindro, cujus baſis circulus ab eadem ordinata deſcriptus, & altitudo eadem.*

Patet, quia puncto B abeunte in infinitum, AB decreſcit ultra quoſcumque limites, & recta GH abit in rectam CE.

29. Corol 3. *Si DE ſit tangens; erit area infinita ad triangulum ECD, ut 2. ad 1., & ſolidum genitum ejus converſione circa axem ad conum genitum ab eodem triangulo, ut 3. ad 2.* Fig. 12.

Patet primum, quia triangulum eſt dimidium rectanguli ſub eadem baſi, & altitudine (*g*).

(g) 41 l. 1.

Patet ſecundum, quia ſolidum logiſticæ ad cylindrum, cujus baſis circulus CD, & altitudo CE, eſt ut 3. ad 6. (*h*). Idem cylindrus ad conum ejuſdem baſis, & altitudinis, ut 6. ad 2. (*i*). Quare illud ſolidum ad hunc conum, ut 3. ad 2.

(h) n. 28.
(i) 10. l. 12.

30. Corol. 4. *Area clauſa binis ordinatis axe & curva eſt ut differentia ordinatarum, & poteſt ſecari in ratione data, ope ipſius logiſticæ.*

Patet primum, quia area ABDC, cum æquetur rectangulo DH, erit (*k*) ut DG. Fig. 11.

(k) 1. l. 6.

Patet ſecundum; ſecta enim GD in M in ratione data (*l*), & ducta MQ parallela baſi (*m*), ac inde demiſſa ordinata QX (*n*), quæ rectæ BG occurrat in t; erit area ABQX ad XQDC, ut Qt, ſeu [*o*] GM ad MD.

(l) 10. l. 6.
(m) 31. l. 1.
(n) 12. l. 1.
(o) 34. l. 1.

31. Corol. 5. *Si tangens DE occurrat ordinatæ BA in I, & recta ex D parallela axi in O; erit area OBD ut IB, nimirum æqualis rectangulo ſub IB, & ſubtangente.* Fig. 12.

Completo enim rectangulo ECDF (*p*), rectæ per I & B parallelæ axi (*p*) occurrant lateribus EF, CD in M, H, N, G,

(p) 31. l. 1.

(a) 43 l.1. Erit complementum IC æquale IF (*a*); quare addito ON. erit CO æquale NF. Demantur hinc area ABDC, inde re-
(b) n.26. ctangulum GF æqualia (*b*): relinquetur area BOD æqualis
(c) 34.l.1. rectangulo NH ſub NG, ſeu *c*) BI, & GH, ſeu ſubtangente conſtanti CE.

32. *Scholium*. Hiſce præter alia nonnulla continentur fere omnia theoremata, quæ Hugenius circa logiſticam propoſuit, & Grandus demonſtravit, demptis iis, quæ ad centra gravitatis pertinent. Jam dicendum aliquid de uſu logiſticæ. Infinitum eſſet ſingula fuſius perſequi. Delibabimus nonnulla; Indicabimus nimirum uſum in Geometria ad inventionem mediarum proportionalium, ac quadraturam Hyperbolæ, & rectificationem Parabolæ: & explicabimus logarithmos, & eorum uſum in Arithmetica, ac Trigonometria.

Fig.13. 33. *Datis duabus rectis, & una logiſtica quærantur quot libuerit mediæ proportionales*.

(d) 11.l.1. Erecta Cc normali ad axem logiſticæ (*d*) abſcindantur
(e) 3. l.1. in ea Cf, Ch æquales rectis datis (*e*): ducantur fF, hH parallelæ
(f) 31.l.1. axi (*f*), quæ alicubi occurrant logiſticæ in F, & H (*g*). De-
(g n.4. mittantur ordinatæ FE, HG (*h*); ſegmentum axis EG ſece-
(h) 12.l.1. tur in tot partes unitate addita, quot mediæ inveniendæ ſunt,
(i) 10.l 6. in m, i, o (*i*). Erigantur e ſingulis ſectionum punctis ordina-
(k) 21 l.1. tæ mn, il, op (*k*): quæ erunt mediæ quæſitæ (*l*).
(l) n 8.

Fig.12. 34. Aſymptotis MA, AH ſibi invicem perpendicularibus, ſit Hyperbola aL, cujus notiſſima proprietas per cor.1 pr.27. Conicorum Grandi eſt, quod ducta ordinata LH ad alteram aſymptotum alteri aſymptoto parallela, ſit rectangulum AHL ſemper conſtans, & proinde æquale quadrato rectæ datæ. Axe eodem ſit ad eaſdem partes logiſtica dBD habens pro ſubtangente illam ipſam rectam, & ſecans AH alicubi in B: ere-
(m) 31.l.1. cta ordinata Hyperbolæ Ba parallela AM (*m*), & producta LH uſque ad logiſticam in D, erit area Hyperbolica aBHL æqualis rectangulo ſub HD, & illa ipſa ſubtangente: quod demonſtratur, eadem methodo qua propoſitio 3. in fig.12.

Si enim non ſit æqualis ei rectangulo, ſit minus ex iis duobus ad majus, ut CK ad CD. Ducta prorſus ut ibi KP parallela baſi, demiſſa normali PY, ſecta CA in partes æquales ita, ut earum una CZ ſit minor quam CY, erectis
(n) 31.l.1. ordinatis VS, XQ, ZO; ducantur (*n*) per O, Q, S rectæ parallelæ baſi occurrentes rectæ AH in z, E, F, hyperbolæ in o, q, ſ; ac per quæcumque bina puncta proxima Q, S tranſeant tangentes (*o*) QN, Sn, quarum prima ſecet ſS productam in T, ſecunda producta ſecet XQ in R. Recta demum
(p) 31.l.1. ſS producta ſecet XQ in I, & qt, ſu parallelæ rectæ AH (*p*) ſecent Ff, Eq in t, & u.

In

In primis ob rectangulum AEq æquale quadrato ſubtangentis XN, erit (*a*) Eq ad XN, ut XN ad AE, ſive (*b*) ad XQ, ut (*c*) TI ad IQ æqualem FE (*b*). Quare (*d*) rectangulum Fq æquatur rectangulo ſub TI, & ſubtangente, & eſt minus rectangulo ſub (*e*) SI majore quam TI, ſive (*f*) ſub VX, & ſubtangente. Contra vero Ff ad Vn, ut Vn ad AF, vel VS, ut SI ad IR minorem IQ, ſive FE; ac proinde rectangulum ſub SI vel VX & ſubtangente minus rectangulo Ef. Cum igitur etiam area EqfF ſit major rectangulo Fq, & minor rectangulo Ef; erit ratio ejus areæ ad rectangulum ſub VX, & ſubtangente major ratione rectanguli Fq ad Ef, ſive rectæ Eq ad Ff, vel ob rectangula AEq, AFf æqualia, ratione AF ad AE (*g*), vel (*b*) VS ad XQ, ſive (*i*) ZO ad CD, & minor inverſa ratione Ef ad Fq, ſive DC ad ZO. Cumque idem contingat omnibus ſegmentis areæ Hyperbolicæ incluſis in BaLH, reſpectu totidem rectangulorum ſub partibus rectæ AC, & ſubtangente conſtanti; erit illa ad rectangulum ſub AC vel HD (*k*), & ipſa ſubtangente in ratione majore quam ZO ad CD, & minore inverſa; nimirum ſi illa eſt minor hoc rectangulo, erit ratio CK vel YP ad CD major quam ZO ad CD; ſi illa eſt major, erit ratio CD ad YP minor quam CD ad ZO, & in utroque caſu ZO minor quam YP: quod eſt abſurdum. (*l*)

(a) 17. l. 6.
(b) 34. l. 1.
(c) 4. 16.
(d) 16. l. 6.
(e) n. 16.
(f) 34. l. 1.
(g) 16 l. 1.
(h) 34. l. 1.
(i) n. 8.
(k) 34. l. 1.
(l) n. 4.

Eadem demonſtratione ducta hdl infra BA, erit area aBhl æqualis rectangulo ſub hd, & ſubtangente. Et quoniam ob rectangulum ABa æquale rectangulo AHL, etiam triangula eorum dimidia (*m*) æqualia ſunt; ac proinde dempto AiB, & addito aiL communi, ſector aAL æquatur areæ aBHL; erit & is ſector æqualis rectangulo ſub HD vel AC, & ſubtangente.

(m) 34. l. 1.

Hinc erunt areæ tam ſegmentorum, quam ſectorum, ut rectæ HD vel AC (*n*), & eorum ſegmenta, ut hujus ſegmenta. Quare ſi fuerint AB, AF, Az, AH geometrice proportionales, erint areæ aBFf, ozHL inter ſe æquales, ob AV, ZC eo caſu æquales (*o*). Captis vero ſegmentis aſymptoti AB, AF, AE, Az, AH continue proportionalibus geometrice; erunt & areæ hyperbolicæ, quæ iis reſpondent æquales. Quod theorema primus omnium cum tanto & plauſu, & fructu protulit noſter Gregorius a S. Vincentio. Facile autem quæ hic dicta ſunt de Hyperbolis æquilateris, habentibus aſymptotos perpendiculares, ad reliqua transferuntur.

(n) 1. l. 6.
(o) n. 7.

Cum vero ex quadratura Hyperbolæ pendeat rectificatio Parabolæ per prop. 44. Conicorum Grandi, etiam ea haberi poterit ope logiſticæ.

35. Ma-

35. Maxima tamen logiſticæ utilitas in ipſis logarithmis ſita eſt. Sint binæ progreſſiones numerorum quæcumque, altera geometrica— $\frac{1}{2}$. 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64 &c. altera arithmetica 2.— 1. 0. 1. 2. 3. 4. 5. &c. quæ concipiantur collocatæ altera ſub altera, ut libuerit; termini ſecundæ progreſſionis dicuntur *logarithmi* terminorum primæ, qui dicuntur *numeri*, ſinguli ſingulorum.

Fig. 1. 36. Patet autem, ſi in fig. 1. incipiendo a quovis puncto E, & verſus alteram partem numerando logarithmos poſitivos, verſus alteram negativos, ut nimirum in E ſit 0, tum Em ſit 1, Ei 2., Eo 3., EG 4., & ex parte oppoſita EO— 1., EI— 2., & ita porro, ſingulis logarithmis erigantur perpendiculares rectæ, quæ numeros ſuos exprimant, ut IL $\frac{1}{2}$, oP 1., EF 2., & ita porro; vertices ordinatarum debere (a) n.1. eſſe in logarithmica quadam (*a*), cum nimirum ordinatæ continue geometrice proportionales inſiſtant axi poſt æqualia ſegmenta. Et ſi ipſa illa logiſtica conſtructa eſſet, invenirentur logarithmi etiam numerorum quorumlibet intermediorum, qui in illa progreſſione geometrica non occurrunt; nimirum capiendo Ca reſpondentem dato numero, & ducendo aſ parallelam axi (*b*), quæ eſſet logarithmus quæſitus; quia inde (b) 31.l.1. demiſſa ordinata ſX (*c*), & eſſet æqualis aC (*d*), & abſcinde- (c) 12.l.1. (d) 24.l.1. ret CX æqualem aſ. In iis autem logarithmis, & numeris haberent locum, quæcumque de ſegmentis axis, & ordinatis demonſtravimus.

37. Porro arbitraria eſt & determinatio progreſſionum, & collocatio alterius ſub altera; ſemper enim eadem demonſtratione conſurget logarithmica: & liberum quoque eſt ita eas collocare, ut altera creſcente altera decreſcat. Sic poterat inverſo ordine collocari progreſſio arithmetica vocando EO 1., EI 2. &c. poſitivos, Em —1., Ei —2 &c. negativos. Quotieſcumque tamen binis numeris rationis datæ reſponderet eadem logarithmorum differentia; ſemper eadem logiſtica oriretur (*e*), ſolum origo logarithmorum re- (e) n.11. trahenda, vel promovenda eſſet, vel conſideratio poſitivorum ex una plaga in aliam transferenda; nam numeri illi bini eſſent binæ ordinatæ, & differentia logarithmorum eſſet ſegmentum axis; quare logarithmi eo modo permutati ſemper ejuſdem ſpeciei remanerent. Sed ſi mutata altera ex progreſſionibus, vel utraque, binis terminis progreſſionis geometricæ non reſponderet eadem, ac prius differentia logarithmorum; logiſtica eſſet diverſa, & ſubtangentes in ratione earum differentiarum (*f*); & ſi origo logarithmorum utrobique reſ- (f) n.22. ponderet eidem numero, & creſcentibus numeris utrobique creſcerent logarithmi, vel utrobique decreſcerent; omnium alio-

aliorum numerorum logarithmi primæ ſpeciei ad logarithmos ſecundæ eſſent ut unius cujuſcumque dati numeri logarithmus primæ ſpeciei ad logarithmum ſecundæ (*a*), vel ut ſubtangens primæ ad ſubtangentem ſecundæ. (a) n. 12.

38. Quæcumque autem collocatio, quarumcumque progreſſionum conſtitueretur, ſi vel conſtructione mechanica, vel quacumque alia methodo invenirentur omnium numerorum logarithmi, & in tabulas digererentur, ſaltem uſque ad magnum aliquem numerum, ſtatim pateret ipſorum utilitas. Si enim ſint quatuor numeri mn, il, op, GH quicumque geometrice proportionales, & logarithmorum numeratio incipiat ubicumque in E, erit ſumma logarithmorum extremorum Em, & EG æqualis ſummæ mediorum Ei, & Eo. Nam mi exceſſus ſecundi Ei ſupra primum Em deberet eſſe æqualis oG exceſſui quarti EG ſupra tertium Eo (*b*), ac proinde translato (b) n. 7. mi in oG, fiunt Em, EG ex Ei, Eo. Quamobrem in omni regula aurea, ubi datis tribus proportionalibus, quæritur quartus, ſatis eſſet addere logarithmum ſecundi, & tertii, ac detrahere logarithmum primi, & haberetur logarithmus quarti. Sic in progreſſionibus expoſitis n. 35. cum ſit 4 ad 8, ut 32 ad 64; quartus numerus, qui per communem arithmeticam inveniendus eſſet multiplicando 32 per 8, ac dividendo per 4; invenietur per logarithmos, addendo logarithmos ſecundi, & tertii, nimirum 2 & 4, & auferendo logarithmum primi, nimirum 1; ſic enim habetur 5, cui reſpondet numerus quæſitus 64. Id autem in majoribus numeris quanti compendii ſit, ſtatim patet.

39. At logarithmi omnium numerorum naturalium accurati haberi non poſſunt, ſæpe enim inciditur in incommenſurabilitates; poſſunt tamen inveniri quantumlibuerit veris proximi, & qui errorem ſenſibilem nullum pariant, quod & in radicum extractione fit, & in ſinibus computandis in Trigonometria. Multæ quidem methodi a doctiſſimis viris inventæ ſunt ad facilius rem præſtandam. Nos unam indicabimus, quæ omnium facillime intelligitur, ut ut in praxi moleſtior ſit. Neque enim jam agitur de tabulis logarithmorum conſtruendis, cum tam multæ proſtent: eſt autem eadem, ac methodus num. 25. exhibita pro computanda ſubtangente.

40. Sint bini numeri CD, EF ad arbitrium ſumpti pro progreſſione geometrica, & bini logarithmi dC, dE ad arbitrium definiti; aſſumpto, ut libuerit, intervallo CE, & origine logarithmorum d. In primis per regulam aut eam continuari poteſt utrinque progreſſio factis CD ad EF, ut EF ad GH, vel EF ad CD, ut CD ad AB, & ita porro; & logarithmi dG, dA invenientur continua additione, & ſubtra-

ctione

meri adeo magni, ut omnes tabularum vires tranſcendat.

52. Reliquum erat, ut Briggiani hi logarithmi trigonometriæ aptarentur. Aptavit Briggius ipſe, qui logarithmos ſinuum, tangentium, & ſecantium computavit verum non pro gradibus, & minutis, ſed pro gradibus, & centeſimis graduum partibus; radium autem aſſumpſit 10000000000., cujus nimirum logarithmus 10.0000 &c., nullo negotio & ſubtrahi poſſet, & addi; quam ob cauſam Neperus radii logarithmum aſſumpſerat 0.; ne nimirum, cum frequens radii uſus occurrat in Trigonometria, aut addendus eſſet unquam, aut ſubtrahendus ipſius logarithmus. Dum tamen editionem pararet ipſe Briggius, fato præreptus eſt. Opus autem nondum penitus abſolutum abſolvit Henricus Gelliprandus, & nomine Trigonometriæ Britannicæ edidit anno 1633., in qua continetur Canonis conſtructio a Briggio conſcripta, & uſus ab ipſo Gelliprando explicatus. Verum Hadrianus Ulaccus cum videret ægre a ſexageſimali calculo vetuſtiſſimo minutorum, ac ſecundorum Mathematicos ipſi jam diu aſſuetos divelli, immani labore computavit canonem logarithmorum pro ſinibus & tangentibus in ſingulos gradus, minuta, & dena ſecunda, omiſſis ſecantium logarithmis, quia, ut mox videbimus, nullo negotio eliciuntur, & neceſſarii non ſunt. Nos hic ex eo ſecundam tabulam excerpſimus pro ſingulis tamen gradibus, & denis minutis primis, ut pariter & ſinus, tangentes, ac ſecantes naturales, ex accuratiſſimis Schoteni tabulis eruimus pro iis tantum; tum quia multis uſibus ordinariis hæc plerumque ſatis ſunt; tum quia ex his, ut docebimus, reliqua pro minutis, & ſecundis eruuntur ſatis proxima; tum demum ne moles nimium excreſceret: verum cum plurimis tabulis ita hoſce numeros comparavimus, ut errores omnes quorum nonnullos deprehendimus quantum liceret corrigeremus.

53. Jam vero quod ad uſum pertinet logarithmorum; quatuor præcipuis theorematis is omnis continetur. Sunt autem.

1. *Logarithmus Facti eſt ſumma logarithmorum Factorum.* Sic numeri 493. logarithmus 2.692847 habetur ſi numerorum 29, & 17. ex quorum multiplicatione oritur. logarithmi 1.462398, & 1.230449 addantur ſimul.

2. *Logarithmus Quoti eſt differentia orta ſubtrahendo a logarithmo diviſi logarithmum diviſoris.* Sic numeri 17 qui oritur dividendo 493. per 29. logarithmus 1.230449 habetur ſi a numeri 493. logarithmo 2.692847 dematur logarithmus 1.462398.

3. *Logarithmus quadrati, vel cubi, vel potentiæ cujuſvis m, numeri dati eſt logarithmus ipſius numeri multiplicatus per* 2., *vel* 3., *vel m.* Sic cum numerus 625. ſit quadra-

quadratum numeri 25 : illius logarithmus 2. 795880 eſt duplus logarithmi hujus nimirum 1. 397940. Et cum idem numerus ſit quarta potentia numeri 5., idem ille ejus logarithmus eſt quadruplus logarithmi 5. nimirum 0. 698970.

4. *Logarithmus radicis quadratæ, vel cujuſvis m dati numeri eſt logarithmus ejuſdem diviſus per 2. vel m.* Sic quia numerus 25. eſt radix quadrata numeri 625.; hujus logarithmo 2. 795880. diviſo per 2., habetur 1. 397940 logarithmus illius; & quia ejuſdem numeri numerus 5. eſt radix quarta; hujus logarithmus 0. 698970 habetur, illo diviſo per 4. F. 1.

Demonſtratur primum. Sit AB unitas, CD primus numerus, EF ſecundus; fiat EG æqualis AC; & erit AC logarithmus primi numeri, AE ſecundi: cum nimirum ob logarithmum unitatis 0. Logarithmi incipiant ab A; logarithmorum ſumma erit AG, qui erit logarithmus GH. Erit autem (a) AB unitas ad CD, ut EF ad GH; ac proinde HG multiplicatus per unitatem, nimirum ipſe numerus HG, æqualis producto, ex CD & EF. (a) n. 6.

Secundum patet ex primo, quia diviſio numerorum deſtruit multiplicationem, & ſubtractio logarithmorum additionem.

Tertium pariter ex ſecundo facile infertur; quia duplicando logarithmum dati numeri habetur logarithmus ipſius ducti in ſe, nimirum quadrati ipſius, addendo iterum logarithmum ipſius habetur logarithmus quadrati ducti in ipſum numerum, nimirum cubi, & ita porro. Generalius autem eruitur ex num. 10. pro potentiis etiam irrationalibus.

Quartum patet ex tertio, quia extractio radicis deſtruit elevationem ad potentiam, & diviſio logarithmi multiplicationem.

54. Hinc patet primo, pro computandis tabulis logarithmorum ſatis eſſe computare logarithmos numerorum primorum, qui ex aliorum multiplicatione non producuntur, ut ſunt 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, &c.; nàm numeri, qui oritur ex aliorum multiplicatione, habebitur logarithmus ipſorum logarithmos addendo per theor. 1. Sic inventis log. 3. & 7. invenietur ſtatim logarithmus numeri 21. Immo n. 5. logarithmus invenietur detrahendo ab 1. 000000 logarithmo numeri 10. aſſumpto, logarithmum numeri 2. inventum.

55. Eruitur ſecundo in regula aurea logarithmum quarti inveniri ſi a ſumma logarithmorum ſecundi, & tertii dematur logarithmus primi; quod & n. 38. demonſtravimus: hic autem patet ex theor. 1. & 2.; quia nimirum quartus haberetur multiplicando ſecundum per tertium, & dividendo per primum.

56. Eruitur tertio: methodus inveniendi fractiones, quæ reſpon-

reſpondent cuivis logarithmo negativo. *Cape fractionem, cujus denominator numerus ille, qui in tabulis reſpondet logarithmo propoſito conſiderato ut poſitivo, & numerator* 1. *& habebis fractionem quæſitam*; quia a logarithmo unitatis qui eſt 0. ſi ſubtrahatur illius denominatoris logarithmus; reſiduum erit idem logarithmus, ſed cum ſigno negativo; nimirum ille ipſe propoſitus logarithmus. Is autem erit per theor. 2. logarithmus quoti ex diviſione unitatis per eum numerum, qui quotus eſt illa ipſa fractio: ſic quia 2. 795880 eſt logarithmus numeri 625: erit — 2. 795880 logarithmus hujus fractionis $\frac{1}{625}$. Immo etiam ſic facile invenientur fractiones decimales, quæ reſpondeant cuivis logarithmo negativo. *Subtrahe ejus poſtremam notam a* 10. *reliquas a* 9. *uſque ad carateriſticam, quam omitte. Reſiduo præfige carateriſticam, quamlibuerit. Hujuſmodi logarithmi quære numerum, cui ſi apponas pro diviſore unitatem cum tot cyphris, quot unitates erant in carateriſtica omiſſa, & quot ſunt in carateriſtica præfixa, una addita; habebis fractionem decimalem quæſitam.* Exemplo & praxis illuſtrabitur, & demonſtratio innoteſcet. Proponatur logarithmus — 1. 125518. Facta ſubtractione juxta formam præſcriptam habebitur 874482. Huic præfige quamlibuerit carateriſticam ut 2. Invenies numerum 749, cujus nimirum log. 2. 874482. Cape hunc pro numeratore fractionis quæſitæ, & pro denominatore ſume 10000, [quatuor nimirum cyphras, quia carateriſtica propoſiti logarithmi 1. cum carateriſtica aſſumpta 2, requirunt tres cyphras & una addenda eſt] habebis fractionem quæſitam $\frac{749}{10000}$ ſive quod idem eſt 0. 0749. Demonſtratio pendet ex eo, quod log. 10000. eſt 4. 0000000, cui ſi addas — 1. 125518, ſive, quod idem eſt, ſi ſubtrahas 1. 125518, poſtremam notam 8. ſubtrahes a 10., reliquas a 9.: carateriſticæ unitatem unam deſtruet primi decimalis ſubtractio, alteram carateriſtica 1, reliſtis duabus; ac proinde neceſſario juxta formam præſcriptam emerget 2. 874482. Quare fractio quæſita ducta in 10000 debet per theor. 1. exhibere 749. ac proinde ea debet eſſe numerus 749. diviſus per 10000.

57. Jam vero tabula prima continet, ut diximus logarithmos numerorum ab unitate ad 1000: tabula autem ſecunda ſinus, tangentes, ſecantes, logarithmos ſinuum, & logarithmos tangentium pro denis minutis primis. Si numeri ab 1 ad 1000. cujuſcunque oporteat invenire logarithmum; in tabula prima quæratur numerus in columna 1, 3, 5, 7, 9; & invenietur e regione logarithmus. Si quæratur ſinus, tangens, ſecans, logarithmus ſinus, logarithmus tangentis

angu-

anguli continentis gradus & dena minuta: quæraturin tab. 2. gradus in columna prima paginæ ſiniſtræ, ſi fuerit infra gradum 45., dexteræ, ſi fuerit ultra eum gradum, ac minuta in ſecunda columna: & in tertia reſpondebit ſinus, in quarta tangens, in quinta ſecans, in ſexta log. ſinus, in 7. log. tangentis. Iccirco autem conjuncti ſunt arcus minores gradibus 45, cum æquè majoribus, & illi deſcendendo creſcunt, hi decreſcunt, ut cuivis arcui alterius paginæ reſpondeat in altera e regione complementum, & coſinus, cotangens &c. Sic anguli grad. 28. min. 40. invenietur ſinus 4797131 tangens 5467281, ſecans 11396981. log. ſin. 9. 680982 log. tang. 9. 737771, & in pag. ſequenti complementum gr. 61. min. 20. coſinus 8774254; & ita porro. Quoniam autem ex trigonometria plana eſt coſinus ad radium, ut radius ad ſecantem; ſi a duplo logarithmo radii, ſive a 20. 000000, dematur logarithmus coſinus, nimirum ſi ut in num. 56. poſtrema figura dematur a 10. reliquæ a 9. & caracteriſtica a 19. relinquetur (a) logarithmus ſecantis. Viceverſa ſi occurrat logarithmus, qui ſit in tabulis, & quæratur vel numerus, vel arcus facile invenietur. (a) n. 55.

58. Notandum tamen logarithmos ſinuum & tangentium non reſpondere numeris ipſorum in prima & ſecunda columna expreſſis, ſed iis ductis in 10000. nam ſinus, & tangentes ſunt computati ad radium 1000000. Logarithmi vero pro radio 10000000000; ut radii ipſius logarithmus eſſet 10.0000000 & poſſet facilius, & ſubtrahi, & addi. Reducentur autem ad eorum numerorum logarithmos, ſi logarithmi illi ſinguli mulctentur in caracteriſtica quatuor unitatibus; quo pacto tabula prima logarithmorum reſpondens numeris tantum infra 1000. extendetur in tabula ſecunda ad plurimos numeros majores.

59. *Si autem proponatur vel numerus, vel arcus intermedius inter binos, qui ſunt in tabulis; eruetur logarithmus, vel ſinus, tangens &c. ipſi reſpondens factis ut differentia numeri vel arcus proximè minoris a proxime majori ad differentiam proxime minoris a propoſito, ita differentia logarithmi, vel ſinus, tangentis &c. reſpondentis proxime minori a reſpondente proxime majori, ad quartum addendum reſpondenti proximè minori, ut habeatur reſpondens propoſito*; Et viceverſa ſi proponantur logarithmus, ſinus, tangens intermedii inter binos exiſtentes in tabulis: quæ dicitur inventio partis proportionalis, & adhibetur in omni quaruncunque tabularum uſu. Innititur autem hæc praxis huic principio, quod pars exigua lineæ curvæ poteſt haberi pro recta ſine errore ſenſibili. Exprimat in f. 11. NA logarithmum numeri AB, NX logarithmum numeri XQ,

NV logarithmum cujuſdam intermedii VS. Si conſideretur arcus BSQ pro recta, erit [a] Qt ad Ss ut Bt ſive AX (a) ad Bs, ſive (b) AV addendam NA, ut fiat NV. Et eadem eſt demonſtratio ſi NAX referat arcus circuli, & AB, XQ ſinus tangentes &c. Exemplis res clarior evadet.

(a) 4 l. 6.
(b) 34 l. 1.

60. Exemplum 1. Quæratur logarithmus numeri 256. 65. A logarithmo numeri 257. proxime majoris 2. 409933, dempto log. num. 256. proxime minoris 2. 408240., differentia erit 1693. Fac ut 1. exceſſus 257. ſupra 256. ad 0. 356 exceſſum 256. 365 ſupra 256., ſive ut 1000 ad 356, ita 1693, ad quartum. Prodibunt 602. 708, vel computata per 1. fractione 708, prodibunt 603, quibus additis log. 256. nimirum 2. 408240., emerget numeri 256. 365 logarithmus 2. 408843. Patet autem hanc regulam pro praxi erui. *Differentiam logarithmorum numeri proximè majoris, & minoris duc in notas decimales integris additas poſt punctum, & reſecatis in fine tot notis, quot ipſa fractio continebat, vel computatis pro unitate in reliquarum ultima, reliquos adde logarithmo numeri proximè majoris, ut habeas quæſitum.*

61. Exemplum 2. Quæratur numerus logarithmi 2. 594152. Differentia logarithmi proxime majoris 2. 594393, a proxime minori 2. 593286 eſt 1107: differentia proximè minoris a propoſito eſt 866. Fac ut 1107 ad 866, ita 1 exceſſus numeri 393. reſpondentis logarithmo majori ſupra 392. reſpondentem minori ad quartum. Prodibunt .782 &c. Erit igitur numerus quæſitus 392. 782 &c. Regula autem in praxi erit: *Differentiam logarithmi proxime minoris a propoſito auctam in fine tot cyphris, quot notas decimales requiris, divide per differentiam proximè minoris a proxime majori, & quotum, contempto reſiduo, adjunge numero reſpondenti logarithmo proxime minori interpoſito puncto, quo indicetur eas eſſe figuras decimales.*

62. Ex hiſce autem exemplis, & ex theor. primo oritur praxis extendendi vires tabularum ultra terminos, pro quibus computatæ ſunt; Quæratur log. numeri 256365. Poſt primas tres interpone punctum, & fiat 256. 365. Quæra ejus logarithmum per n. 60., qui erit 2. 408843: adde ejus caracteriſticæ tot unitates, quot notæ, poſt punctum rejectæ ſunt ex integris in decimales, ut hic adde 3; habebis 5. 408843 logarithmum numeri 256365. Quia nimirum 256. 365 ductus in 1000 evadit 256365, adeoque logarithmo illius addito log. hujus, nempe 3. 0000000, fit log. numeri 256365. Viceverſa ſi quæratur numerus logarithmi 5. 594152; deme caracteriſticæ tot unitates, quot opus eſt, ut relinquantur 2. Reſidui 2. 594152 quære numerum cum tot decimalibus, quot uni-

unitates detraxiſti caracteriſticæ, qui per num.61 erit 392. 782. Rejice punctum poſt ultimam notam & habebis numerum 392782. Demonſtratio eſt eadem.

63. Hoc pacto inveniri ſolent accurati logarithmi pro numeris continentibus duplum notarum, quam in tabulis habeantur, & viceverſa. Quare in noſtra tabella eruentur accurati uſque ad 1000000. In Ulacchiano canone qui extenditur ad 100000. habebuntur uſque ad 10000000000. Verum ibi oportebit in primo caſu punctum apponere poſt 5. notas, & in ſecundo relinquere in caracteriſtica 4. unitates. Poſſunt autem majorum numerorum logarithmi erui methodo numeri 60. adhibendo ex tabula 2. ſinum, vel tangentem proxime majorem, & minorem cum ſuis logarithmis mulctatis tamen in caracteriſtica ſua 4. unitatibus juxta num.58., & viceverſa methodo numeri 61. Sed ſi ſinus proximi multum inter ſe differant; non ita accuratus proveniet logarithmus inventus aut numerus.

64. Exemplum 3. Quæratur log.ſinus gr.28 min.13. A log. ſinus gr 28. min.20. arcus proximè majoris 9.676328, dempto log. ſinus gr.28. min 10. arcus proxime minoris 9. 673977: differentia erit 2351. Fac ut 10. minuta exceſſus proximè majoris arcus ſupra proximè minorem ad 3. exceſſum propoſiti ſupra proximè minorem ita 2351 ad quartum. Prodibunt 705.3 vel fractione 3. omiſſa, prodibunt 705; quibus additis logarithmo proxime minoris arcus 9. 673977, fit 9.674682 log.ſinus quæſitus; qui minus quàm binis unitatibus in poſtrema nota differt ab eo, qui in tabulis Ulaccianis habetur. Si autem propoſitus fuiſſet arcus continens etiam minuta ſecunda, ut gr.28. min.13. ſec. 25; oportuiſſet reducere differentias ad ſecunda, & quidem cum minuta per unicam notam ut hic exprimuntur facile reducuntur ad ſecunda, multiplicando eam per 6, & computando tot decades ſecundorum, quot indicabit productum. Hinc 3. min. continebunt ſec. 180 & 3. min: cum 25. ſecundis erunt 205 ſecunda. Quare fiet ut 600. ad 205. ita 2351 ad quartum; prodibit 803 omiſſis fractionibus, quod ſi addatur 9. 673977; habebitur 9. 674780 log. ſin. gr.28. min. 13, ſec.25., qui à vero nonniſi unitate diſcrepat in ultima nota: Oritur autem hæc regula. *Differentiam log. arcus proxime minoris a proxime majori, ſi propoſitus non contineat minuta ſecunda, multiplica per numerum minutorum, qui decades ſuperat, & rejice ultimam notam, vel computa pro unitate in præcedenti prout fuerit minor, vel non minor 5., ac adde logarithmo ſinus arcus proxime minoris; ſi vero contineat ſecunda; multiplica per numerum ſecundorum, qui continentur in exceſſu*

ſupra

ſupra decades primorum , & rejectis binis notis , reſidui ſextam partem adde eidem logarithmo , & habebis quæſitum .

65. Exemplum 4. Demum quæratur arcus cujus 9. 871382 eſt log. tangentis. Proximè major eſt 9. 871849 log. tang. gr. 36. min. 40. ; proximè minor 9. 869209 log. tang. arcus gr. 36. min. 30. Differentia eſt 2640. Differentia proxime minoris a propoſito eſt 2173 . Fac ut 2640 ad 2173 ita 10. vel 600. prout volueris ſola minuta , vel etiam ſecunda ad quartum ; Invenies in primo caſu 8 minuta prima , in ſecundo 494 ſecunda , contemptis fractionibus , ſive 8. prima , 14. ſecunda addenda arcui minori gr. 36. min. 30. , ut fiat quæſitus gr. 36. min. 38. ſec. 14. , qui arcus ne unico quidem ſecundo a vero diſtat . Oritur autem hæc regula . *Differentiam log. tang. proximè minoris auctam una cyphra , ſi quæris ſola minuta , multiplicatam per 600 , ſi quæris etiam ſecunda , divide per differentiam proxime minoris a proxime majori ; & quotum contemptis fractionibus exprimentem in primo caſu minuta prima , in ſecundo ſecunda adde arcui minori ; & habebis quæſitum .*

66. Eadem autem eſt praxis pro ſinibus ipſis , tangentibus , & ſecantibus . Interim illud notandum : quod hic fere eadem facilitate eruuntur ex hac tabella logarithmi ſinuum &c. pro gradibus minutis , & ſecundis , & viceverſa , ac ex longioribus tabulis , quæ pro ſingulis minutis conſcriptæ ſunt . Ex alia parte plerunque omnia , nimirum extra initium & finem quadrantis ita accuratè proveniunt , ut ne unius quidem ſecundi error committatur . Unde patet quanto uſui futuræ ſint hæ tabellæ Tyronibus , quibus non ita facile ad manus ſunt longiores tabulæ , & non ita parvo pretio proſtant . Accedit , quod ſi ſubtiliora quædam Aſtronomiæ problemata excipias ; rarus admodum uſus occurrit minutorum ſecundorum , ac ſæpiſſimè tuto plura etiam prima negliguntur , tum in menſurandis locorum intervallis , & altitudinibus in Geometria practica , tum in conſtruendis arcibus in Architectura militari , tum in delineandis horologiis in Gnomonica , tum in determinandis Cæli phænomenis in Sphæra , tum in plurimis aliis præſtantiſſimis facultatibus , in quibus continuus eſt Trigonometriæ uſus , & ad quas omnes hæ licet breviuſculæ tabellæ ſe extendunt .

67. Proferendum jam eſt exemplum aliquod , quo pateat Tyronibus , quanto facilius per logarithmos triangula reſolvantur , quam per ſinus naturales . Proferemus binum tantum : alterum ex Trigonometria plana , alterum ex Sphærica . Sit triangulum planum rectangulum , in quo baſis pedum

dum 982, alter angulus gr.29. min.20. Quæratur latus oppoſitum ei angulo. Per n.4. noſtræ Trig. Sphæricæ; eſt radius ad ſinum anguli in triangulis planis, ut baſis ad latus oppoſitum. Adde log. ſin. ejus anguli 9.690698, & log. baſis 982. qui eſt 2.992111, & aufer log. radii; nimirum aufer 10. e caracteriſtica. Habebis 2.682209, qui (*a*) erit log. lateris quæſiti, nimirum pedum proxime 481. In tri- (a) n.55. autem rectangulo Sphærico datis lateribus gr.28. min.10. & gr.52. min.40., quæratur baſis. Per canonem 1 ejuſdem Trigonometriæ Sphæricæ eſt radius ad coſinum unius lateris, ut coſinus alterius ad coſinum baſis. Coſinus igitur logarithmicos illorum 9.945261, & 9.782796 ſi ſimul addas dempto radii logarithmo 10.00 &c. habebis 9.728057, qui cum ſit coſinus proximè gr.57. min.40., & accuratius methodo numeri 65. coſin. gr.57. min.40. ſec.51.; ea erit baſis quæſita juxta regulam 2. ejuſdem Trig. Sphæricæ. Porro ſi naturalibus ſinibus res fuiſſet peragenda; pro additione multiplicatio neceſſaria fuiſſet, & illa quidem ſatis moleſta numerorum longiorum. Nam in hoc ſecundo caſu eſſet radius 1000000. ad coſ. gr.28. min.10., nimirum 881578., ita coſ. gr.52. min.40. nimirum 606451. ad coſ. baſis, qui proveniret 534634., ſed per moleſtam multiplicationem coſinuum ſenis notis conſtantium. Multo autem etiam difficilior evaderet operatio, ſi primus terminus non eſſet radius, ut in obliquangulis fere ſemper accidit, & moleſtam multiplicationem moleſtior diviſio exciperet. Porro 534634. invenitur (*b*) ſinus grad.32. (b) n.59. min.19. ſec.9., & coſ. gr.57. min.40. ſec.51., abſque ullo ne unius quidem ſecundi diſcrimine a baſi per logarithmos definita.

68. Ope primæ tab. hyperbolicorum etiam ſpatiorum di- F.13. menſio habebitur in numeris. Sit ſector aAL hyperbolæ æquilateræ. Ductis aB, LH perpendicularibus ad alteram aſymptotum (*c*), capiantur in numeris ex ſcala aliqua partium (c) 12.l.1. æqualium AH (286.), AB (148.), aB (89.), & fiat ut ſubtangens logiſticæ Briggianæ 0.434294 (*d*) ad differentiam lo- (d) n.49. garithmorum AH, AB erutorum ex tab.1. (0.286104); ita productum ex AB, & Ba (13172] ad aream quæſitam (8677). Demonſtratur. Si quadratum ſubtangentis logiſticæ dBD æquetur rectangulo ſub AB, & Ba; erit (*e*) area aBHL æqua- (e) n.34. lis rectangulo ſub AC, & ſubtangente ipſa. Rurſus differentia logarithmorum ex tabulis eruta eſt ſegmentum axis logiſticæ Briggianæ interceptum inter binas ordinatas iiſdem numeris expreſſas, quibus exprimuntur AB, AH, vel CD (*f*). (f) 34 l.1. Erit igitur (*g*) ſubtangens logiſticæ Briggianæ ad ſubtangentem [g] n.22. logiſticæ dBD, ut illa differentia logarithorum ad AC: &

alter-

alternando ſubtangens Logiſticæ Briggianæ ad illam differentiam, ut hæc ſubtangens ad AC, ſive (*a*) ut quadratum hujus ſubtangentis ad rectangulum ſub AC & ipſa ſubtangente, ſive ad aream aBHL, vel (*b*) ſectorem aAL.

(a) l. 1.6.

(b) n.34. Fig. 6. Cycl.

69. Ope autem utriuſque tabulæ facile invenietur in numeris etiam menſura arcuum, & ſectorum circularium. Sit ſector RCD. Capiantur ex aliqua ſcala partium æqualium diameter DE, & chorda DR in numeris. Logarithmo DR addatur 10.000000 logarithmus radii, & dematur log. DE. Inveniatur arcus (*c*) cujus id reſiduum eſt log. ſin., qui ob angulum DRE rectum (*d*), erit menſura anguli RED per nu.4. noſtræ Trig. ſphær., nimirum (*e*) dimidii anguli DCR, adeoque æqualis dimidio arcui DR. Is arcus reducatur ad minuta ſecunda. A log. numeri ſecundorum inventi, & log. diametri DE ſimul additis auferatur 4.5;6274, & habebitur logarithmus arcus RD ſumpti in iiſdem partibus; vel a log. ejuſdem numeri ſecundorum, & duplo log. DE auferatur 5.138334, & habebitur log. ſectoris RCD ſumpti in iiſdem partibus quadratis. Demonſtratio autem ſponte fluit ex ratione diametri ad circumferentiam ut 113. ad 355. notiſſima, & ex eo, quod ſector circuli æquetur rectangulo ſub ſemidiametro, & dimidio arcu (*f*), collatis ſemel inter ſe logarithmis, qui ſemper iidem occurrunt addendi, ac ſubtrahendi.

(c) n.59.

(d) 31 I 3.

(e) 20.I.3.

(f) n.21. Cycl.

70. Ex arcuum computatione, & cyclois facile ſine motu mechanico deſcribetur per puncta ob RP æqualem (*g*) arcui RD. Cumque & Ellipſium quadratura pendeat a quadratura circuli, per pr.50. ſect. con. Grandi, & omnium hyperbolarum areæ ad areas hyperbolæ æquilateræ facile reducantur; patet ope cycloidis, & logiſticæ obtineri tam geometricas, quam numericas quadraturas conicarum ſectionum, quæ per finitam geometriam obtineri non poſſunt; unde illud etiam fit manifeſtum, ſatis appoſite ſelectas eſſe haſce potiſſimum curvas, quæ poſt ſectiones conicas Tyronibus proponerentur. Sequuntur jam

(g) n.5. Cycl.

TABULA I. conſtans 5. pag. pro log. Briggianis numerorum ab 1. ad 1000.; quanquam pro 1000. appoſuit Typographus 100. tantum, intervallo quartam notam non admittente.

TABULA II. conſtans 16. pag. pro ſinibus, tangentibus, ſecantibus ad radium 1000000., & logarithmis ſin., ac tang. ad radium logarithmicum 10.000000 in dena minuta prima.

TA-

TABULA I.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
1	0.000000	41	1.612784	81	1.908485	121	2.082785	161	2.206826
2	0.301030	42	1.623249	82	1.913814	122	2.086360	162	2.209515
3	0.477121	43	1.633468	83	1.919078	123	2.089905	163	2.212188
4	0.602060	44	1.643453	84	1.924279	124	2.093422	164	2.214844
5	0.698970	45	1.653213	85	1.929419	125	2.096910	165	2.217484
6	0.778151	46	1.662758	86	1.934498	126	2.100371	166	2.220108
7	0.845098	47	1.672098	87	1.939519	127	2.103804	167	2.222716
8	0.903090	48	1.681241	88	1.944483	128	2.107210	168	2.225309
9	0.954243	49	1.690196	89	1.949390	129	2.110590	169	2.227887
10	1.000000	50	1.698970	90	1.954243	130	2.113943	170	2.230449
11	1.041393	51	1.707570	91	1.959041	131	2.117271	171	2.232996
12	1.079181	52	1.716003	92	1.963788	132	2.120574	172	2.235528
13	1.113943	53	1.724276	93	1.968483	133	2.123852	173	2.238046
14	1.146128	54	1.732394	94	1.973128	134	2.127105	174	2.240549
15	1.176091	55	1.740363	95	1.977724	135	2.130334	175	2.243038
16	1.204120	56	1.748188	96	1.982271	136	2.133539	176	2.245513
17	1.230449	57	1.755875	97	1.986772	137	2.136721	177	2.247973
18	1.255273	58	1.763428	98	1.991226	138	2.139879	178	2.250420
19	1.278754	59	1.770852	99	1.995635	139	2.143015	179	2.252853
20	1.301030	60	1.778151	100	2.000000	140	2.146128	180	2.255273
21	1.322219	61	1.785330	101	2.004321	141	2.149219	181	2.257679
22	1.342423	62	1.792392	102	2.008600	142	2.152288	182	2.260071
23	1.361728	63	1.799341	103	2.012837	143	2.155336	183	2.262451
24	1.380211	64	1.806180	104	2.017033	144	2.158362	184	2.264818
25	1.397940	65	1.812913	105	2.021189	145	2.161368	185	2.267172
26	1.414973	66	1.819544	106	2.025305	146	2.164353	186	2.269513
27	1.431364	67	1.826075	107	2.029384	147	2.167317	187	2.271842
28	1.447158	68	1.832509	108	2.033424	148	2.170262	188	2.274158
29	1.462398	69	1.838849	109	2.037426	149	2.173186	189	2.276462
30	1.477121	70	1.845098	110	2.041393	150	2.176091	190	2.278754
31	1.491362	71	1.851258	111	2.045323	151	2.178977	191	2.281033
32	1.505150	72	1.857332	112	2.049218	152	2.181844	192	2.283301
33	1.518514	73	1.863323	113	2.053078	153	2.184691	193	2.285557
34	1.531479	74	1.869232	114	2.056905	154	2.187521	194	2.287802
35	1.544068	75	1.875061	115	2.060698	155	2.190332	195	2.290035
36	1.556303	76	1.880814	116	2.064458	156	2.193125	196	2.292256
37	1.568202	77	1.886491	117	2.068186	157	2.195900	197	2.294466
38	1.579784	78	1.892095	118	2.071882	158	2.198657	198	2.296665
39	1.591065	79	1.897627	119	2.075547	159	2.201397	199	2.298853
40	1.602060	80	1.903090	120	2.079181	160	2.204120	200	2.301030

TABULA I.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
201	2.303196	241	2.382017	281	2.448706	321	2.506505	361	2.557507
202	2.305351	242	2.383815	282	2.450249	322	2.507856	362	2.558709
203	2.307496	243	2.385606	283	2.451786	323	2.509203	363	2.559909
204	2.309630	244	2.387390	284	2.453318	324	2.510545	364	2.561101
205	2.311754	245	2.389166	285	2.454845	325	2.511883	365	2.562293
206	2.313867	246	2.390935	286	2.456366	326	2.513218	366	2.563481
207	2.315970	247	2.392697	287	2.457882	327	2.514548	367	2.564666
208	2.318063	248	2.394452	288	2.459392	328	2.515874	368	2.565848
209	2.320146	249	2.396199	289	2.460898	329	2.517196	369	2.567026
210	2.322219	250	2.397940	290	2.462398	330	2.518514	370	2.568202
211	2.324282	251	2.399674	291	2.463893	331	2.519828	371	2.569374
212	2.326336	252	2.401401	292	2.465383	332	2.521138	372	2.570543
213	2.328380	253	2.403121	293	2.466868	333	2.522444	373	2.571709
214	2.330414	254	2.404834	294	2.468347	334	2.523746	374	2.572872
215	2.332438	255	2.406540	295	2.469822	335	2.525045	375	2.574031
216	2.334454	256	2.408240	296	2.471292	336	2.526339	376	2.575188
217	2.336460	257	2.409933	297	2.472756	337	2.527630	377	2.576341
218	2.338456	258	2.411620	298	2.474216	338	2.528917	378	2.577492
219	2.340444	259	2.413300	299	2.475671	339	2.530200	379	2.578639
220	2.342423	260	2.414973	300	2.477121	340	2.531479	390	2.579784
221	2.344392	261	2.416641	301	2.478566	341	2.532754	381	2.580925
222	2.346353	262	2.418301	302	2.480007	342	2.534026	382	2.582063
223	2.348305	263	2.419956	303	2.481443	343	2.535294	383	2.583199
224	2.350248	264	2.421604	304	2.482874	344	2.536558	384	2.584331
225	2.352183	265	2.423246	305	2.484300	345	2.537819	385	2.585461
226	2.354108	266	2.424882	306	2.485721	346	2.539076	386	2.586587
227	2.356026	267	2.426511	307	2.487138	347	2.540329	387	2.587711
228	2.357935	268	2.428135	308	2.488551	348	2.541579	388	2.588832
229	2.359835	269	2.429752	309	2.489958	349	2.542825	389	2.589950
230	2.361728	270	2.431364	310	2.491362	350	2.544068	390	2.591065
231	2.363612	271	2.432969	311	2.492760	351	2.545307	391	2.592177
232	2.365488	272	2.434569	312	2.494155	352	2.546543	392	2.593286
233	2.367356	273	2.436163	313	2.495544	353	2.547775	393	2.594393
234	2.369216	274	2.437751	314	2.496930	354	2.549003	394	2.595496
235	2.371068	275	2.439333	315	2.498311	355	2.550228	395	2.596597
236	2.372912	276	2.440909	316	2.499687	356	2.551450	396	2.597695
237	2.374748	277	2.442480	317	2.501059	357	2.552668	397	2.598790
238	2.376577	278	2.444045	318	2.502427	358	2.553883	398	2.599883
239	2.378398	279	2.445604	319	2.503791	359	2.555094	399	2.600973
240	2.380211	280	2.447158	320	2.505150	360	2.556303	400	2.602060

TABULA I.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
401	2.603145	441	2.644439	481	2.682145	521	2.716838	561	2.748963
402	2.604226	442	2.645422	482	2.683047	522	2.717671	562	2.749736
403	2.605305	443	2.646404	483	2.683947	523	2.718502	563	2.750508
404	2.606381	444	2.647383	484	2.684845	524	2.719331	564	2.751279
405	2.607455	445	2.648360	485	2.685742	525	2.720159	565	2.752048
406	2.608526	446	2.649335	486	2.686636	526	2.720986	566	2.752816
407	2.609594	447	2.650308	487	2.687529	527	2.721811	567	2.753583
408	2.610660	448	2.651278	488	2.688420	528	2.722634	568	2.754348
409	2.611723	449	2.652246	489	2.689309	529	2.723456	569	2.755112
410	2.612784	450	2.653213	490	2.690196	530	2.724276	570	2.755875
411	2.613842	451	2.654177	491	2.691081	531	2.725095	571	2.756636
412	2.614897	452	2.655138	492	2.691965	532	2.725912	572	2.757396
413	2.615950	453	2.656098	493	2.692847	533	2.726727	573	2.758155
414	2.617000	454	2.657056	494	2.693727	534	2.727541	574	2.758912
415	2.618048	455	2.658011	495	2.694605	535	2.728354	575	2.759668
416	2.619093	456	2.658965	496	2.695482	536	2.729165	576	2.760422
417	2.620136	457	2.659916	497	2.696356	537	2.729974	577	2.761176
418	2.621176	458	2.660865	498	2.697229	538	2.730782	578	2.761928
419	2.622214	459	2.661813	499	2.698101	539	2.731589	579	2.762679
420	2.623249	460	2.662758	500	2.698970	540	2.732394	580	2.763428
421	2.624282	461	2.663701	501	2.699838	541	2.733197	581	2.764176
422	2.625312	462	2.664642	502	2.700704	242	2.733999	582	2.764923
423	2.626340	463	2.665581	503	2.701568	543	2.734800	583	2.765669
424	2.627366	464	2.666518	504	2.702431	544	2.735599	584	2.766413
425	2.628389	465	2.667453	505	2.703291	545	2.736397	585	2.767156
426	2.629410	466	2.668386	506	2.704151	546	2.737193	586	2.767898
427	2.630428	467	2.669317	507	2.705008	547	2.737987	587	2.768638
428	2.631444	468	2.670245	508	2.705864	548	2.738781	588	2.769377
429	2.632457	469	2.671173	509	2.706718	549	2.739572	589	2.770115
430	2.633468	470	2.672098	510	2.707570	550	2.740363	590	2.770852
431	2.634477	471	2.673021	511	2.708421	551	2.741152	591	2.771587
432	2.635484	472	2.673942	512	2.709270	552	2.741939	292	2.772322
433	2.636488	473	2.674861	513	2.710117	553	2.742725	593	2.773055
434	2.637490	474	2.675778	514	2.710963	554	2.743510	594	2.773786
435	2.638489	475	2.676694	515	2.711807	555	2.744293	595	2.774517
436	2.639486	476	2.677607	516	2.712650	556	2.745075	596	2.775246
437	2.640481	477	2.678518	517	2.713491	557	2.745855	597	2.775974
438	2.641474	478	2.679428	518	2.714330	558	2.746634	598	2.776701
439	2.642465	479	2.680326	519	2.715167	559	2.747412	599	2.777427
440	2.643453	480	2.681241	520	2.716003	560	2.748188	600	2.778151

TABULA I.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log	N.	Log.
601	2.778874	641	2.806858	681	2.833147	721	2.857935	761	2.881385
602	2.779596	642	2.807535	682	2.833784	722	2.858537	762	2.881955
603	2.780317	643	2.808211	683	2.834421	723	2.859138	763	2.882525
604	2.781037	644	2.808886	684	2.835056	724	2.859739	764	2.883093
605	2.781755	645	2.809560	685	2.835691	725	2.860338	765	2.883661
606	2.782473	646	2.810233	686	2.836324	726	2.860937	766	2.884229
607	2.783189	647	2.810904	687	2.836957	727	2.861534	767	2.884795
608	2.783904	648	2.811575	688	2.837588	728	2.862131	768	2.885361
609	2.784617	649	2.812245	689	2.838219	729	2.862728	769	2.885926
610	2.785330	650	2.812913	690	2.838849	730	2.863323	770	2.886491
611	2.786041	651	2.813581	691	2.839478	731	2.863917	771	2.887054
612	2.786751	652	2.814248	692	2.840106	732	2.864511	772	2.887617
613	2.787460	653	2.814913	693	2.840733	733	2.865104	773	2.888179
614	2.788168	654	2.815578	694	2.841359	734	2.865696	774	2.888741
615	2.788875	655	2.816241	695	2.841985	735	2.866287	775	2.889302
616	2.789581	656	2.816904	696	2.842609	736	2.866878	776	2.889862
617	2.790285	657	2.817565	697	2.843233	737	2.867467	777	2.890421
618	2.790988	658	2.818226	698	2.843855	738	2.868056	778	2.890980
619	2.791691	659	2.818885	699	2.844477	739	2.868644	779	2.891537
620	2.792392	660	2.819544	700	2.845098	740	2.869232	780	2.892095
621	2.793092	661	2.820201	701	2.845718	741	2.869818	78	2.892651
622	2.793790	662	2.820858	702	2.846337	742	2.870404	782	2.893207
623	2.794488	663	2.821514	703	2.846955	743	2.870989	783	2.893762
624	2.795185	664	2.822 68	704	2.847573	744	2.871573	784	2.894316
625	2.795880	665	2.822822	705	2.848189	745	2.872156	785	2.894870
626	2.796574	666	2.823474	706	2.848805	746	2.872739	786	2.895423
627	2.797268	667	2.824126	707	2.849419	747	2.873321	787	2.895975
628	2.797960	668	2.824776	708	2.850033	748	2.873902	788	2.896526
629	2.798651	669	2.825426	709	2.850645	749	2.874482	789	2.897077
630	2.799341	670	2.826075	710	2.851258	750	2.875061	790	2.897627
631	2.800029	671	2.826723	711	2.851870	751	2.875640	791	2.898176
632	2.800717	672	2.827369	712	2.852480	752	2.876218	792	2.898725
633	2.801404	673	2.828015	713	2.853090	753	2.876795	793	2.899273
634	2.802089	674	2.828660	714	2.853698	754	2.877371	794	2.899821
635	2.802774	675	2.829304	715	2.854306	755	2.877947	795	2.900367
636	2.803457	676	2.829947	716	2.854913	756	2.878522	796	2.900912
637	2.804139	677	2.830589	717	2.855519	757	2.879096	797	2.901458
638	2.804821	678	2.831230	718	2.856124	758	2.879669	798	2.902007
639	2.805501	679	2.831870	719	2.856729	759	2.880242	799	2.902543
640	2.806180	680	2.832509	720	2.857332	760	2.880814	800	2.903090

TABULA I.

N.	Log.	N.	Log	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log
801	2.903633	841	2.924795	881	2.944976	921	2.964260	961	2.982723
802	2.904174	842	2.925312	882	2.945459	922	2.964731	962	2.983175
803	2.904716	843	2.925828	883	2.945961	923	2.965202	963	2.983626
804	2.905256	844	2.926342	884	2.946452	924	2.965672	964	2.984077
805	2.905795	845	2.926857	885	2.946943	925	2.966142	965	2.984527
806	2.906335	846	2.927370	886	2.947434	926	2.966611	966	2.984977
807	2.906874	847	2.927883	887	2.947924	927	2.967080	967	2.985426
808	2.907411	848	2.928396	888	2.948413	928	2.967548	968	2.985875
809	2.907949	849	2.928908	889	2.948902	929	2.968016	969	2.986324
810	2.908485	850	2.929419	890	2.949390	930	2.968483	970	2.986772
811	2.909021	851	2.929930	891	2.949878	931	2.968950	971	2.987219
812	2.909556	852	2.930440	892	2.950365	932	2.969416	972	2.987666
813	2.910091	853	2.930949	893	2.950851	933	2.969882	973	2.988113
814	2.910624	854	2.931458	894	2.951338	934	2.970347	974	2.988559
815	2.911158	855	2.931965	895	2.951821	935	2.970812	975	2.989005
816	2.911690	856	2.932474	896	2.952308	936	2.971276	976	2.989450
817	2.912222	857	2.932981	897	2.952792	937	2.971740	977	2.989895
818	2.912753	858	2.933487	898	2.953276	938	2.972203	978	2.990339
819	2.913284	859	2.933993	899	2.953760	939	2.972666	979	2.990783
820	2.913814	860	2.934498	900	2.954243	940	2.973128	980	2.991226
821	2.914343	861	2.935003	901	2.954725	941	2.973590	981	2.991669
822	2.914872	862	2.935507	902	2.955207	942	2.974051	982	2.992111
823	2.915400	863	2.936010	903	2.955688	943	2.974512	983	2.992554
824	2.915927	864	2.936514	904	2.956168	944	2.974972	984	2.992995
825	2.916454	865	2.937016	905	2.956649	945	2.975432	985	2.993436
826	2.916980	866	2.937518	906	2.957128	946	2.975891	986	2.993877
827	2.917506	867	2.938019	907	2.957607	947	2.976350	987	2.994317
828	2.918030	868	2.938520	908	2.958086	948	2.976808	988	2.994757
829	2.918555	869	2.939020	909	2.958564	949	2.977266	989	2.995196
830	2.919078	870	2.939519	910	2.959041	950	2.977724	990	2.995635
831	2.919601	871	2.940018	911	2.959518	951	2.978181	991	2.996074
832	2.920123	872	2.940516	612	2.959995	952	2.978637	992	2.996512
833	2.920645	873	2.941014	913	2.960471	953	2.979093	993	2.996949
834	2.921166	874	2.941511	914	2.960946	954	2.979548	994	2.997386
835	2.921686	875	2.942008	915	2.961421	955	2.980003	995	2.997823
836	2.922206	876	2.942504	916	2.961895	956	2.980458	996	2.998259
837	2.922725	877	2.943000	917	2.962369	957	2.980912	997	2.998695
838	2.923244	878	2.943495	918	2.962843	958	2.981366	998	2.999131
839	2.923762	879	2.943989	919	2.963316	959	2.981819	999	2.999565
840	2.924279	880	2.944483	920	2.963788	960	2.982271	1000	3.000000

TABULA II.

G.	M.	Sinus.	Tang.	Secant.	Log. sin.	Log. tang.
0	0	0.	0.	1000000.	— Infin.	— Infin.
	10	2909.	2909.	1000004.	8.463726	8.463727
	20	5818.	5818.	1000017.	8.764754	8.764761
	30	8727.	8727.	1000038.	8.940842	8.940858
	40	11635.	11636.	1000068.	8.065776	8.065805
	50	14544.	14545.	1000106.	8.162581	8.162727
1	0	17452.	17455.	1000152.	8.241855	8.241921
	10	20361.	20365.	1000207.	8.308794	8.308884
	20	23269.	23275.	1000271.	8.366777	8.366895
	30	26177.	26186.	1000343.	8.417919	8.418068
	40	29085.	29097.	1000423.	8.463565	8.463849
	50	31992.	32009.	1000512.	8.505045	8.505267
2	0	34899.	34921.	1000610.	8.542819	8.543084
	10	37806.	37834.	1000715.	8.577565	8.577877
	20	40713.	40747.	1000830.	8.609734	8.610094
	30	43619.	43661.	1000953.	8.639680	8.640093
	40	46525.	46576.	1001084.	8.667689	8.668160
	50	49431.	49491.	1001224.	8.693998	8.694529
3	0	52336.	52406.	1001372.	8.718800	8.719395
	10	55241.	55325.	1001529.	8.742259	8.742922
	20	58145.	58243.	1001695.	8.764511	8.765245
	30	61049.	61163.	1001869.	8.785675	8.786486
	40	63952.	64083.	1002051.	8.805852	8.806742
	50	66854.	67004.	1002242.	8.825130	8.826103
4	0	69756.	69927.	1002442.	8.843585	8.844644
	10	72658.	72851.	1002650.	8.861283	8.862433
	20	75559.	75775.	1002867.	8.878285	8.879529
	30	78459.	78702.	1003092.	8.894643	8.895984
	40	81359.	81629.	1003326.	8.910404	8.911846
	50	84258.	84558.	1003569.	8.925609	8.927156
5	0	87156.	87489.	1003820.	8.940296	8.941952
	10	90053.	90421.	1004080.	8.954499	8.956267
	20	92950.	93354.	1004348.	8.968249	8.970133
	30	95846.	96289.	1004625.	8.981573	8.983577
	40	98741.	99226.	1004911.	8.994497	8.996624
	50	101635.	102164.	1005205.	9.007044	8.009298

TABULA II.

G.	M.	Sinus.	Tang.	Secant.	Log.sin.	Log. ta.
	60	1000000.	Infin.	Infin	10.000000	Infin.
	50	999995.	343773707.	343775162.	9.999998	12.536273
	40	999982.	171885399.	171888308.	9.999993	12.235239
	30	999962.	114588650.	114593013.	9.999983	12.059142
	20	999932.	85939791.	85945609.	9.999971	11.934194
89	10	999894.	68750087.	68757359.	9.999954	11.837273
	60	999848.	57289962.	57298688.	9.999934	11.758079
	50	999793.	49103881.	49114062.	9.999910	11.691116
	40	999729.	42954077.	42975713.	9.999882	11.633105
	30	999657.	38188459.	38201550.	9.999851	11.581932
	20	999577.	34367771.	34382316.	9.999816	11.536151
88	10	999488.	31241577.	31257577.	9.999778	11.494733
	60	999391.	28636253.	28653708.	9.999735	11.456916
	50	999285.	26431600.	26450510.	9.999689	11.422123
	40	999171.	24541758.	24562123.	9.999640	11.389976
	30	999048.	22903766.	22925586.	9.999586	11.359905
	20	998917.	21470401.	21493676.	9.999529	11.331840
87	10	998778.	20205553.	20230284.	9.999469	11.305471
	60	998630.	19081137.	19107323.	9.999404	11.280504
	50	998473.	18074977.	18102619.	9.999336	11.257078
	40	998308.	17169337.	17198434.	9.999265	11.234754
	30	998135.	16349855.	16380408.	9.999189	11.213514
	20	997953.	15604784.	15636793.	9.999110	11.193258
86	10	997763.	14924417.	14957882.	9.999027	11.173897
	60	997564.	14300666.	14335587.	9.998941	11.155356
	50	997357.	13726737.	13763115.	9.998851	11.137567
	40	997141.	13196883.	13234717.	9.998757	11.120471
	30	996917.	12706205.	12745495.	9.998659	11.104016
	20	996685.	12250505.	12291252.	9.998558	11.088154
85	10	996444.	11826167.	11868370.	9.998453	11.072844
	60	996195.	11430052.	11473713.	9.998344	11.058048
	50	995937.	11059431.	11104549.	9.998232	11.043733
	40	995671.	10711913.	10758488.	9.998116	11.029867
	30	995396.	10385397.	10433431.	9.997996	11.016423
	20	995113.	10078031.	10127522.	9.997872	11.003375
84	10	994822.	9788173.	9839123.	9.997745	10.990702

TABULA II.

G.	M.	Sinus.	Tang.	Secant.	Log. sin.	Log. ta.
6	0	104528.	105103.	1005508.	9.019235	9.021620
	10	107421.	108046.	1005820.	9.031089	9.033609
	20	110313.	110990.	1006141.	9.042625	9.045284
	30	113203.	113916.	1006470.	9.053859	9.056659
	40	116093.	116883.	1006807.	9 064806	9.067752
	50	118982.	119833.	1007154.	9.075480	9.078576
7	0	121869.	122785.	1007510.	9.085894	9.089144
	10	124756.	125738.	1007874.	9.096062	9.099468
	20	127642.	128694.	1008247.	9.105992	9.109559
	30	130526.	131653.	1008629.	9.115698	9.119429
	40	133410.	134613.	1009020.	9.125187	9.129087
	50	136292.	137576.	1009419.	9.134470	9.138542
8	0	139173.	140541.	1009828.	9.143555	9.147803
	10	142053.	143508.	1010245.	9.152451	9.156877
	20	144932.	146478.	1010671.	9.161164	9.165774
	30	147809.	149451.	1011106.	9.169702	9.174499
	40	150686.	152426.	1011550.	9.178072	9.183059
	50	153561.	155404.	1012003.	9.186280	9.191462
9	0	156434.	158384.	1012465.	9.194332	9.199713
	10	159307.	161368.	1012936.	9.202234	9.207817
	20	162178.	164354.	1013416.	9.209992	9.215780
	30	165048.	167343.	1013905.	9.217609	9.223607
	40	167916.	170334.	1014403.	9.225092	9.231302
	50	170782.	173329.	1014910.	9.232444	9.238872
10	0	173648.	176327.	1015427.	9.239670	9.246319
	10	176512.	179328.	1015952.	9.246775	9.253648
	20	179375.	182332.	1016487.	9.253761	9.260863
	30	182236.	185339.	1017030.	9.260633	9.267957
	40	185095.	188349.	1017583.	9.267395	9.274964
	50	187953.	191363.	1018145.	9.274049	9.281858
11	0	190809.	194380.	1018719.	9.280599	9.288652
	10	193664.	197401.	1019297.	9.287048	9.295349
	20	196517.	200425.	1019887.	9.293393	9.301951
	30	199368.	203452.	1020487.	9.299655	9.308463
	40	202218.	206483.	1021095.	9.305819	9.314885
	50	205065.	209518.	1021713.	9.311893	9.321222

TABULA II.

G.	M.	Sinus.	Tang.	Secant.	Log. ſin.	Log ta.
	60	994522.	9514364.	9565772.	9.997614	10.978380
	50	994214.	9255304.	9309170.	9.997480	10.955391
	40	993897.	9009826.	9065151.	9.997341	10.954716
	30	993572.	8776887.	8833671.	9.997199	10.943741
	20	993238.	8555547.	8613790.	9.997053	10.932248
83	10	992896.	8344956.	8404659.	9.996904	10.921424
	60	992546.	8144746.	8205509.	9.996751	10.910856
	50	992187.	7953022.	8015645.	9.996594	10.900532
	40	991820.	7770351.	7834434.	9.996433	10.890441
	30	991445.	7595754.	7661298.	9.996269	10.880571
	20	991061.	7428726.	7495711.	9.996100	10.870913
82	10	990669.	7268725.	7337191.	9.995928	10.861458
	60	990268.	7115370.	7185297.	9.995753	10.852197
	50	989859.	6968214.	7039522.	9.995573	10.843122
	40	989442.	6826944.	6899794.	9.995390	10.834226
	30	989016.	6691156.	6765469.	9.995203	10.825501
	20	988582.	6560554.	6636329.	9.995013	10.816941
81	10	988139.	6434843.	6512081.	9.994818	10.808538
	60	987688.	6313752.	6392453.	9.994620	10.800287
	50	987229.	6197028.	6277193.	9.994418	10.792183
	40	986762.	6084438.	6166067.	9.994212	10.784220
	30	986286.	5975761.	6058858.	9.994003	10.776393
	20	985801.	5870804.	5955363.	9.993789	10.768698
80	10	985309.	5769369.	5855392.	9.993572	10.761128
	60	984808.	5671282.	5758770.	9.993351	10.753681
	50	984298.	5576379.	5665333.	9.993127	10.746352
	40	983781.	5484505.	5574926.	9.992898	10.739137
	30	983255.	5395517.	5487409.	9.992666	10.732033
	20	982721.	5309279.	5402623.	9.992430	10.725036
79	10	982178.	5225665.	5320436.	9.992190	10.718142
	60	981627.	5144554.	5240843.	9.991947	10.711348
	50	981068.	5065835.	5163592.	9.991699	10.704651
	40	980501.	4989403.	5088528.	9.991448	10.698049
	20	979925.	4915157.	5015852.	9.991193	10.691537
	20	979341.	4843005.	4945169.	9.990934	10.685115
78	10	978748.	4772857.	4876491.	9.990671	10.678778

TABULA II.

G.	M.	Sinus.	Tang.	Secant.	Log sin.	Log.ta.
12	0	207912.	212557.	1022341.	9. 17879	9.327475
	10	210756.	215599.	1022977.	9.323780	9.333646
	20	213599.	218645.	1023624.	9.329599	9.339739
	30	216440.	221695.	1024280.	9.335337	9.345755
	40	219279.	224748.	1024945.	9.340995	9.351697
	50	222116.	227806.	1025619.	9.346579	9.357566
13	0	224951.	230868.	1026304.	9.352088	9.363364
	10	227784.	233934.	1026998.	9.357524	9.369094
	20	230616.	237004.	1027702.	9.362889	9.374756
	30	233445.	240079.	1028415.	9.368185	9.380354
	40	236273.	243157.	1029138.	9.373414	9.385888
	50	239098.	246241.	1029871.	9.378577	9.391360
14	0	241922.	249328.	1030614.	9.383675	9.396771
	10	244743.	252420.	1031366.	9.388711	9.402124
	20	247563.	255516.	1032128.	9.393685	9.407419
	30	250380.	258618.	1032900.	9.398600	9.412658
	40	253195.	261723.	1033682.	9.403455	9.417842
	50	256008.	264834.	1034474.	9.408254	9.422974
15	0	258819.	267949.	1035276.	9.412996	9.428052
	10	261628.	271069.	1036088.	9.417684	9.433080
	20	264434.	274194.	1036910.	9.422318	9.438059
	30	267238.	277325.	1037742.	9.426899	9.442988
	40	270040.	280460.	1038584.	9.431429	9.447870
	50	272840.	283600.	1039437.	9.435908	9.452706
16	0	275637.	286745.	1040299.	9.440338	9.457496
	10	278432.	289896.	1041172.	9.444720	9.462242
	20	281225.	293052.	1042055.	9.449054	9.466945
	30	284015.	296213.	1042949.	9.453342	9.471605
	40	286803.	299380.	1043853.	9.457584	9.476223
	50	289589.	302553.	1044767.	9.461782	9.480801
17	0	292372.	305731.	1045692.	9.465935	9.485339
	10	295152.	308914.	1046627.	9.470046	9.489838
	20	297930.	312104.	1047573.	9.474115	9.494299
	30	300705.	315299.	1048529.	9.478142	9.498722
	40	303479.	318500.	1049496.	9.482128	9.503109
	50	306249.	321707.	1050474.	9.486075	9.507460

TABULA II.

G.	M.	Sinus.	Tang.	Secant.	Log. ſin.	Log ta.
	60	978148.	4704530.	4809734.	9.990404	10.672525
	50	977539.	4638246.	4744821.	9.990134	10.666354
	40	976921.	4573629.	4681675.	9.989860	10.660261
	30	976296.	4510709.	4620226.	9.989582	10.654245
	20	975662.	4449418.	4560408.	9.989300	10.648303
77	10	975020.	4389604.	4502157.	9.989014	10.642434
	60	974370.	4331476.	4445411.	9.988724	10.636636
	50	973712.	4274707.	4390116.	9.988430	10.630906
	40	973045.	4219332.	4336215.	9.988133	10.625244
	30	972370.	4165300.	4283658.	9.987832	10.619646
	20	971687.	4112562.	4232394.	9.987526	10.614112
76	10	970995.	4061070.	4182378.	9.987217	10.608640
	60	970296.	4010781.	4133565.	9.986904	10.603229
	50	969588.	3961652.	4085913.	9.986587	10.597876
	40	968872.	3913642.	4039380.	9.986266	10.592581
	30	968148.	3866713.	3993929.	9.985942	10.587342
	20	967415.	3820828.	3949522.	9.985613	10.582158
75	10	966675.	3775952.	3906125.	9.985280	10.577026
	60	965926.	3732051.	3863703.	9.984944	10.571948
	50	965169.	3689094.	3822225.	9.984603	10.566920
	40	964404.	3647047.	3781660.	9.984259	10.561941
	30	963630.	3605884.	3741978.	9.983911	10.557012
	20	962849.	3565575.	3703151.	9.983558	10.552130
74	10	962059.	3526094.	3665152.	9.983202	10.547294
	60	961262.	3487414.	3627955.	9.982842	10.542504
	50	960456.	3449512.	3591536.	9.982477	10.537758
	40	959642.	3412363.	3555871.	9.982109	10.533055
	30	958820.	3375943.	3520937.	9.981737	10.528395
	20	957990.	3340233.	3486711.	9.981361	10.523777
73	10	957151.	3305209.	3453173.	9.980981	10.519199
	60	956305.	3270853.	3420304.	9.980596	10.514661
	50	955450.	3237144.	3388082.	9.980208	10.510162
	40	954588.	3204064.	3356490.	9.979816	10.505701
	30	953717.	3171595.	3325510.	9.979420	10.501278
	20	952838.	3139719.	3295123.	9.979019	10.496891
72	10	951951.	3108421.	3265315.	9.978615	10.492540

TABULA II.

G.	M.	Sinus.	Tang.	Secant.	Log. sin.	Log. ta.
18	0	309017.	324920.	1051462.	9.489982	9.511776
	10	311782.	328139.	1052461.	9.493851	9.516057
	20	314545.	331364.	1053471.	9.497682	9.520305
	30	317305.	334595.	1054492.	9.501476	9.524520
	40	320062.	337833.	1055524.	9.505234	9.528702
	50	322816.	341077.	1056567.	9.508956	9.532853
19	0	325568.	344328.	1057621.	9.512642	9.536972
	10	328317.	347585.	1058686.	9.516294	9.541061
	20	331063.	350848.	1059761.	9.519911	9.545119
	30	333807.	354119.	1060849.	9.523495	9.549149
	40	336547.	357396.	1061947.	9.527045	9.553149
	50	339285.	360679.	1063057.	9.530565	9.557121
20	0	342020.	363970.	1064178.	9.534052	9.561066
	10	344752.	367268.	1065310.	9.537507	9.564983
	20	347481.	370573.	1066454.	9.540931	9.568873
	30	350207.	373885.	1067609.	9.544325	9.572738
	40	352931.	377204.	1068776.	9.547689	9.576576
	50	355651.	380530.	1069955.	9.551024	9.580389
21	0	358368.	383864.	1071145.	9.554329	9.584177
	10	361082.	387205.	1072347.	9.557606	9.587941
	20	363793.	390554.	1075631.	9.560855	9.591681
	30	366501.	393910.	1074786.	9.564075	9.595398
	40	369205.	397275.	1076024.	9.567269	9.599091
	50	371908.	400646.	1077273.	9.570435	9.602761
22	0	374607.	404025.	1078535.	9.573575	9.606410
	10	377302.	407414.	1079808.	9.576689	9.610036
	20	379994.	410810.	1081094.	9.579777	9.613641
	30	382683.	414214.	1082392.	9.582840	9.617224
	40	385369.	417626.	1083703.	9.585877	9.620787
	50	388052.	421046.	1085025.	9.588890	9.624330
23	0	390731.	424475.	1086360.	9.591878	9.627852
	10	393407.	427912.	1087708.	9.594842	9.631355
	20	396080.	431358.	1089068.	9.597783	9.634838
	30	398749.	434812.	1090441.	9.600700	9.638302
	40	401415.	438276.	1091827.	9.603594	9.641747
	50	404078.	441748.	1093225.	9.606465	9.645174

TABULA II.

G.	M.	Sinus.	Tang.	Secant.	Log. ſin.	Log. ta.
	60	951057.	3077684.	3236068.	9.978205	10.488224
	50	950154.	3047491.	3207367.	9.977794	10.483943
	40	949243.	3017830.	3179198.	9.977377	10.479695
	30	948324.	2988685.	3151545.	9.976957	10.475480
	20	947397.	2960042.	3124396.	9.976532	10.471298
71	10	946462.	2931888.	3097736.	9.976103	10.467147
	60	945519.	2904211.	7071553.	9.975670	10.463028
	50	944568.	2876997.	3045835.	9.975233	10.458939
	40	943609.	2850235.	3020569.	9.974792	10.454881
	30	942641.	2823913.	2995744.	9.974347	10.450851
	20	941666.	2798020.	2971349.	9.973897	10.446851
70	10	940684.	2772545.	2947372.	9.973444	10.442879
	60	939693.	2747477.	2923804.	9.972986	10.438934
	50	938694.	2722808.	2900635.	9.972524	10.435017
	40	937687.	2698525.	2877853.	9.972058	10.431127
	30	936672.	2674621.	2855451.	9.971588	10.427262
	20	935650.	2651087.	2833419.	9.971113	10.423424
69	10	934619.	2627912.	2811747.	9.970635	10.419611
	60	933580.	2605089.	2790428.	9.970152	10.415823
	50	932534.	2582609.	2769453.	9.969665	10.412059
	40	931480.	2560455.	2748814.	9.969173	10.408319
	30	930418.	2538648.	2728504.	9.968678	10.404602
	20	929348.	2517151.	2708514.	9.968178	10.400909
68	10	928270.	2495966.	2688837.	9.967674	10.397239
	60	927184.	2475087.	2669467.	9.967166	10.393590
	50	926090.	2454506.	2650396.	9.966653	10.389964
	40	924989.	2434217.	2631618.	9.966136	10.386359
	30	923880.	2414214.	2613126.	9.965615	10.382776
	20	922763.	2394489.	2594914.	9.965090	10.379213
67	10	921638.	2375037.	2576975.	9.964560	10.375670
	60	920505.	2355852.	2559305.	9.964026	10.372148
	50	919365.	2336929.	2541896.	9.963488	10.368645
	40	918216.	2318261.	2524744.	9.962945	10.365162
	30	917060.	2299843.	2507843.	9.962398	10.361698
	20	915896.	2281669.	2491187.	9.961846	10.358253
66	10	914725.	2263736.	2474773.	9.961290	10.354826

TABULA II.

G.	M.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.sin.	Log. ta.
24	0	406737.	445229.	1094636.	9.609113	9.648583
	10	409392.	448719.	1096060.	9.612140	9.651974
	20	412045.	452218.	1097498.	9.614944	9.655348
	30	414692.	455726.	1098948.	9.617727	9.658704
	40	417338.	459244.	1100411.	9.620488	9.662043
	50	419980.	462771.	1101888.	9.623229	9.665366
25	0	422618.	466308.	1103378.	9.625948	9.668673
	10	425253.	469854.	1104881.	9.628647	9.671963
	20	427884.	473410.	1106398.	9.631326	9.675237
	30	430511.	476976.	1107929.	9.633984	9.678496
	40	433135.	480551.	1109473.	9.636623	9.681740
	50	435755.	484137.	1111030.	9.639242	9.684968
26	0	438371.	487733.	1112602.	9.641842	9.688182
	10	440984.	491339.	1114187.	9.644423	9.691381
	20	443593.	494955.	1115787.	9.646984	9.694566
	30	446198.	498582.	1117400.	9.649527	9.697736
	40	448799.	502219.	1119028.	9.652052	9.700893
	50	451397.	505867.	1120670.	9.654558	9.704036
27	0	453990.	509525.	1122326.	9.657047	9.707166
	10	456580.	513195.	1123997.	9.659517	9.710282
	20	459166.	516875.	1125682.	9.661970	9.713386
	30	461749.	520567.	1127382.	9.664406	9.716477
	40	464327.	524270.	1129095.	9.666824	9.719555
	50	466901.	527984.	1130826.	9.669225	9.722621
28	0	469472.	531709.	1132570.	9.671609	9.725674
	10	472038.	535446.	1134329.	9.673977	9.728716
	20	474600.	539195.	1136104.	9.676328	9.731746
	30	477159.	542956.	1137893.	9.678663	9.734764
	40	479713.	546728.	1139698.	9.680982	9.737771
	50	482263.	550513.	1141518.	9.683284	9.740767
29	0	484810.	554309.	1143354.	9.685571	9.743752
	10	487352.	558118.	1145205.	9.687843	9.746726
	20	489890.	561939.	1147073.	9.690098	9.749689
	30	492424.	565773.	1148956.	9.692339	9.752642
	40	494953.	569619.	1150854.	9.694564	9.755585
	50	497479.	573478.	1152769.	9.696775	9.758517

TABULA II.

G.	M.	Sinus.	Tang.	Secant.	Log.sin.	Log. ta.
	60	913545.	2246037.	2458593.	9.960730	10.351417
	50	912358.	2228568.	2442645.	9.960165	10.348026
	40	911164.	2211323.	2426922.	9.959595	10.344652
	30	909961.	2194300.	2411421.	9.959023	10.341296
	20	908751.	2177492.	2396137.	9.958445	10.337957
65	10	907533.	2160896.	2381065.	9.957863	10.334634
	60	906308.	2144507.	2366202.	9.957276	10.331327
	50	905075.	2128321.	2351542.	9.956684	10.328037
	40	903834.	2112335.	2337083.	9.956089	10.324763
	30	902585.	2096544.	2322820.	9.955488	10.321504
	20	901329.	2080944.	2308750.	9.954883	10.318260
64	10	900065.	2065532.	2294869.	9.954274	10.315032
	60	898794.	2050304.	2281172.	9.953660	10.311818
	50	897515.	2035256.	2267657.	9.953042	10.308619
	40	896229.	2020386.	2254320.	9.952419	10.305434
	30	894934.	2005690.	2241158.	9.951791	10.302264
	20	893632.	1991164.	2228168.	9.951159	10.299107
63	10	892323.	1976805.	2215346.	9.950522	10.295964
	60	891007.	1962611.	2202689.	9.949881	10.292834
	50	889682.	1948577.	2190195.	9.949235	10.289718
	40	888350.	1934702.	2177859.	9.948584	10.286614
	30	887011.	1920982.	2165681.	9.947929	10.283523
	20	885664.	1907415.	2153655.	9.947269	10.280445
62	10	884309.	1893997.	2141781.	9.946604	10.277379
	60	882948.	1880726.	2130054.	9.945935	10.274326
	50	881578.	1867600.	2118474.	9.945261	10.271284
	40	880201.	1854616.	2107036.	9.944582	10.268254
	30	878817.	1841771.	2095739.	9.943899	10.265236
	20	877425.	1829063.	2084579.	9.943210	10.262229
61	10	876026.	1816489.	2073556.	9.942517	10.259233
	60	874620.	1804048.	2062665.	9.941819	10.256248
	50	873206.	1791736.	2051906.	9.941117	10.253274
	40	871784.	1779552.	2041276.	9.940409	10.250321
	30	870356.	1767494.	2030772.	9.939697	10.247358
	20	868920.	1755559.	2020393.	9.938980	10.244415
60	10	867476.	1743745.	2010136.	9.938258	10.241483

TABULA II.

G.	M.	Sinus.	Tang.	Secant.	Log.sin.	Log.ta.
30	0	500000.	577350.	1154701.	9.698970	9.761439
	10	502517.	581235.	1156648.	9.701151	9.764352
	20	505030.	585134.	1158612.	9.703317	9.767255
	30	507538.	589045.	1160592.	9.705469	9.770148
	40	510043.	592970.	1162589.	9.707606	9.773033
	50	512543.	596908.	1164603.	9.709730	9.775908
31	0	515038.	600861.	1166633.	9.711839	9.778774
	10	517529.	604827.	1168681.	9.713935	9.781631
	20	520016.	608807.	1170746.	9.716017	9.784479
	30	522499.	612801.	1172828.	9.718085	9.787319
	40	524977.	616809.	1174927.	9.720140	9.790151
	50	527450.	620832.	1177044.	9.722181	9.792974
32	0	529919.	624869.	1179178.	9.724210	9.795789
	10	532384.	628921.	1181331.	9.726225	9.798596
	20	534844.	632988.	1183501.	9.728227	9.801396
	30	537300.	637070.	1185689.	9.730217	9.804187
	40	539751.	641167.	1187895.	9.732193	9.806971
	50	542197.	645280.	1190120.	9.734157	9.809748
33	0	544639.	649408.	1192363.	9.736109	9.812517
	10	547076.	653551.	1194625.	9.738048	9.815280
	20	549509.	657710.	1196906.	9.739975	9.818035
	30	551937.	661886.	1199205.	9.741889	9.820783
	40	554360.	666077.	1201523.	9.743792	9.823524
	50	556779.	670284.	1203861.	9.745683	9.826259
34	0	559193.	674509.	1206218.	9.747562	9.828987
	10	561602.	678749.	1208594.	9.749429	9.831709
	20	564007.	683007.	1210991.	9.751284	9.834425
	30	566406.	687281.	1213406.	9.753128	9.837134
	40	568801.	691572.	1215842.	9.754960	9.839838
	50	571191.	695881.	1218298.	9.756782	9.842535
35	0	573576.	700208.	1220775.	9.758591	9.845227
	10	575957.	704551.	1223271.	9.760390	9.847913
	20	578332.	708913.	1225789.	9.762177	9.850593
	30	580701.	713293.	1228327.	9.763954	9.853268
	40	583069.	717691.	1230886.	9.765720	9.855938
	50	585429.	722108.	1233466.	9.767475	9.858602

TABULA II.

G.	M.	Sinus.	Tang.	Secant.	Log sin.	Log. ta.
	60	866025.	1732051.	2000000.	9.937521	10.238561
	50	864567.	1720474.	1989982.	9.936799	10.235643
	40	863102.	1709012.	1980081.	9.936062	10.232745
	30	861629.	1697663.	1970294.	9.935320	10.229852
	20	860149.	1686426.	1960621.	9.934574	10.226967
59.	10	858662.	1675299.	1951058.	9.933822	10.224092
	60	857167.	1664279.	1941604.	9.933066	10.221226
	50	855665.	1653366.	1932258.	9.932304	10.218369
	40	854156.	1642558.	1923017.	9.931537	10.215521
	30	852640.	1631852.	1913881.	9.930766	10.212681
	20	851117.	1621247.	1904847.	9.929989	10.209849
58	10	849586.	1610742.	1895914.	9.929207	10.207025
	60	848048.	1600335.	1887080.	9.928420	10.204211
	50	846503.	1590024.	1878344.	9.927629	10.201404
	40	844951.	1579808.	1869704.	9.926831	10.198604
	30	843391.	1569686.	1861159.	9.926029	10.195813
	20	841825.	1559655.	1852707.	9.925222	10.193029
57	10	840251.	1549715.	1844348.	9.924409	10.190252
	60	838671.	1539865.	1836078.	9.923591	10.187483
	50	837083.	1530102.	1827899.	9.922768	10.184720
	40	835488.	1520426.	1819806.	9.921940	10.181965
	30	833886.	1510835.	1811801.	9.921107	10.179217
	20	832277.	1501328.	1803881.	9.920268	10.176476
56	10	830661.	1491904.	1796045.	9.919424	10.173741
	60	829038.	1482561.	1788292.	9.918574	10.171013
	50	827407.	1473298.	1780620.	9.917719	10.168291
	40	825770.	1464115.	1773029.	9.916859	10.165575
	30	824126.	1455009.	1765517.	9.915994	10.162866
	20	822475.	1445980.	1758084.	9.915123	10.160162
55	10	820817.	1437027.	1750727.	9.914246	10.157465
	60	819152.	1428148.	1743447.	9.913365	10.154773
	50	817480.	1419343.	1736241.	9.912477	10.152087
	40	815801.	1410610.	1729110.	9.911584	10.149407
	30	814116.	1401948.	1722051.	9.910686	10.146732
	20	812423.	1393357.	1715064.	9.909782	10.144062
54	10	810723.	1384835.	1708148.	9.908873	10.141398

TABULA II.

G.	M.	Sinus.	Tang.	Secant.	Log. sin.	Log. ta.
36	0	587785.	726543.	1236068.	9.769219	9.861261
	10	590436.	730995.	1238691.	9.770952	9.863015
	20	592482.	735469.	1241336.	9.772675	9.866564
	30	594823.	739961.	1244003.	9.774388	9.869209
	40	597159.	744472.	1246691.	9.776090	9.871849
	50	599489.	749003.	1249402.	9.777781	9.874484
37	0	601815.	753554.	1252136.	9.779463	9.877114
	10	604136.	758125.	1254892.	9.781134	9.879741
	20	606451.	762716.	1257671.	9.782795	9.882363
	30	608761.	767327.	1260472.	9.784447	9.884980
	40	611067.	771959.	1263297.	9.786089	9.887594
	50	613367.	776612.	1266146.	9.787720	9.890204
38	0	615661.	781286.	1269018.	9.789342	9.892810
	10	617951.	785981.	1271914.	9.790954	9.895412
	20	620235.	790697.	1274834.	9.792557	9.898010
	30	622515.	795436.	1277779.	9.794150	9.900605
	40	624789.	800196.	1280747.	9.795733	9.903197
	50	627057.	804979.	1283741.	9.797307	9.905785
39	0	629320.	809784.	1286760.	9.798872	9.908369
	10	631578.	814612.	1289803.	9.800427	9.910951
	20	633831.	819463.	1292872.	9.801973	9.913529
	30	636078.	824336.	1295967.	9.803511	9.916104
	40	638320.	829234.	1299088.	9.805039	9.918677
	50	640557.	834155.	1302234.	9.806557	9.921247
40	0	642788.	839100.	1305407.	9.808067	9.923814
	10	645013.	844069.	1308607.	9.809569	9.926378
	20	647233.	849062.	1311833.	9.811061	9.928940
	30	649448.	854081.	1315087.	9.812544	9.931499
	40	651657.	859124.	1318368.	9.814019	9.934056
	50	653861.	864193.	1321676.	9.815485	9.936611
41	0	656059.	869287.	1325013.	9.816943	9.939163
	10	658252.	874407.	1328378.	9.818392	9.941713
	20	660439.	879553.	1331771.	9.819832	9.944262
	30	662620.	884725.	1335192.	9.821265	9.946808
	40	664796.	889924.	1338643.	9.822688	9.949353
	50	666966.	895151.	1342123.	9.824104	9.951895

TABULA II.

G.	M.	Sinus.	Tang.	Secant.	Log. sin.	Log ta.
	60	809017.	1376382.	1701302.	9.907958	10.138739
	50	807304.	1367995.	1694524.	9.907037	10.136085
	40	805584.	1359676.	1687815.	9.906111	10.133436
	30	803857.	1351422.	1681173.	9.905179	10.130791
	20	802123.	1343233.	1674597.	9.904241	10.128151
53	10	800383.	1335108.	1668086.	9.903298	10.125516
	60	798636.	1327045.	1661640.	9.902349	10.122886
	50	796882.	1319044.	1655258.	9.901394	10.120259
	40	795121.	1311105.	1648938.	9.900433	10.117637
	30	793353.	1303225.	1642680.	9.899467	10.115020
	20	791579.	1295406.	1636483.	9.898494	10.112406
52	10	789798.	1287645.	1630346.	9.897516	10.109796
	60	788011.	1279942.	1624269.	9.896532	10.107190
	50	786217.	1272296.	1618251.	9.895542	10.104588
	40	784416.	1264706.	1612291.	9.894546	10.101990
	30	782608.	1257172.	1606388.	9.893544	10.099395
	20	780794.	1249693.	1600542.	9.892536	10.096803
51	10	778973.	1242268.	1594751.	9.891523	10.094215
	60	777146.	1234897.	1589016.	9.890503	10.091631
	50	775312.	1227579.	1583335.	9.889477	10.089049
	40	773472.	1220312.	1577708.	9.888444	10.086471
	30	771625.	1213097.	1572134.	9.887406	10.083896
	20	769771.	1205933.	1566612.	9.886362	10.081323
50	10	767911.	1198818.	1561142.	9.885311	10.078753
	60	766044.	1191754.	1555724.	9.884254	10.076185
	50	764171.	1184738.	1550356.	9.883191	10.073622
	40	762292.	1177770.	1545038.	9.882121	10.071060
	30	760406.	1170850.	1539769.	9.881046	10.068501
	20	758514.	1163976.	1534549.	9.879963	10.065944
49	10	756615.	1157149.	1529377.	9.878875	10.063389
	60	754710.	1150368.	1524253.	9.877780	10.060837
	50	752798.	1143633.	1519176.	9.876678	10.058287
	40	750880.	1136941.	1514145.	9.875571	10.055738
	30	748956.	1130294.	1509160.	9.874456	10.053192
	20	747025.	1123691.	1504221.	9.873335	10.050647
48	10	745088.	1117130.	1499327.	9.872208	10.048104

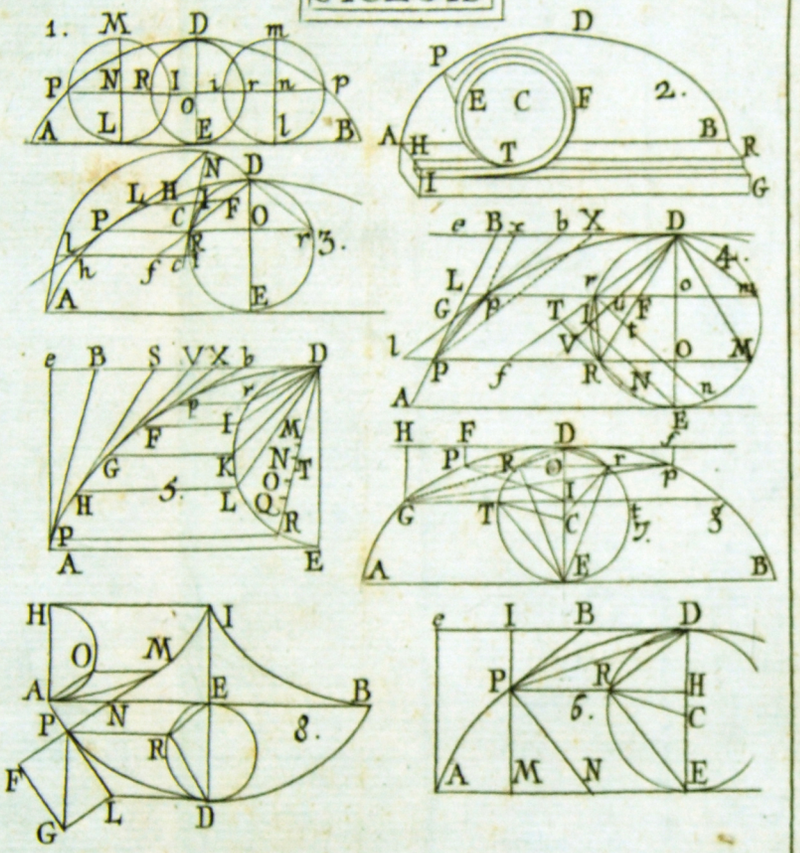
TABULA II.

G.	M.	Sinus.	Tang.	Secant.	Log. sin.	Log. ta.
42	0	669131.	900404.	1345633.	9. 825511	9. 954437
	10	671289.	905685.	1349172.	9. 826910	9. 956977
	20	673443.	910994.	1352742.	9. 828301	9. 959516
	30	675590.	916331.	1356342.	9. 829683	9. 962052
	40	677732.	921697.	1359972.	9. 831058	9. 964588
	50	679868.	927091.	1363634.	9. 832425	9. 967123
43	0	681998.	932515.	1367327.	9. 833783	9. 969656
	10	684123.	937968.	1371052.	9. 835134	9. 972188
	20	686242.	943451.	1374809.	9. 836477	9. 974720
	30	688354.	948965.	1378598.	9. 837812	9. 977250
	40	690462.	954508.	1382420.	9. 839140	9. 979780
	50	692563.	960083.	1386275.	9. 840459	9. 982309
44	0	694658.	965689.	1390164.	9. 841771	9. 984837
	10	696748.	971326.	1394086.	9. 843076	9. 987365
	20	698832.	976996.	1398042.	9. 844372	9. 989893
	30	700909.	982697.	1402032.	9. 845662	9. 992420
	40	702981.	988432.	1406057.	9. 846944	9. 994947
	50	705047.	994199.	1410118.	9. 848218	9. 997473
45	0	707107.	1000000.	1414214.	9. 849485	10. 000000

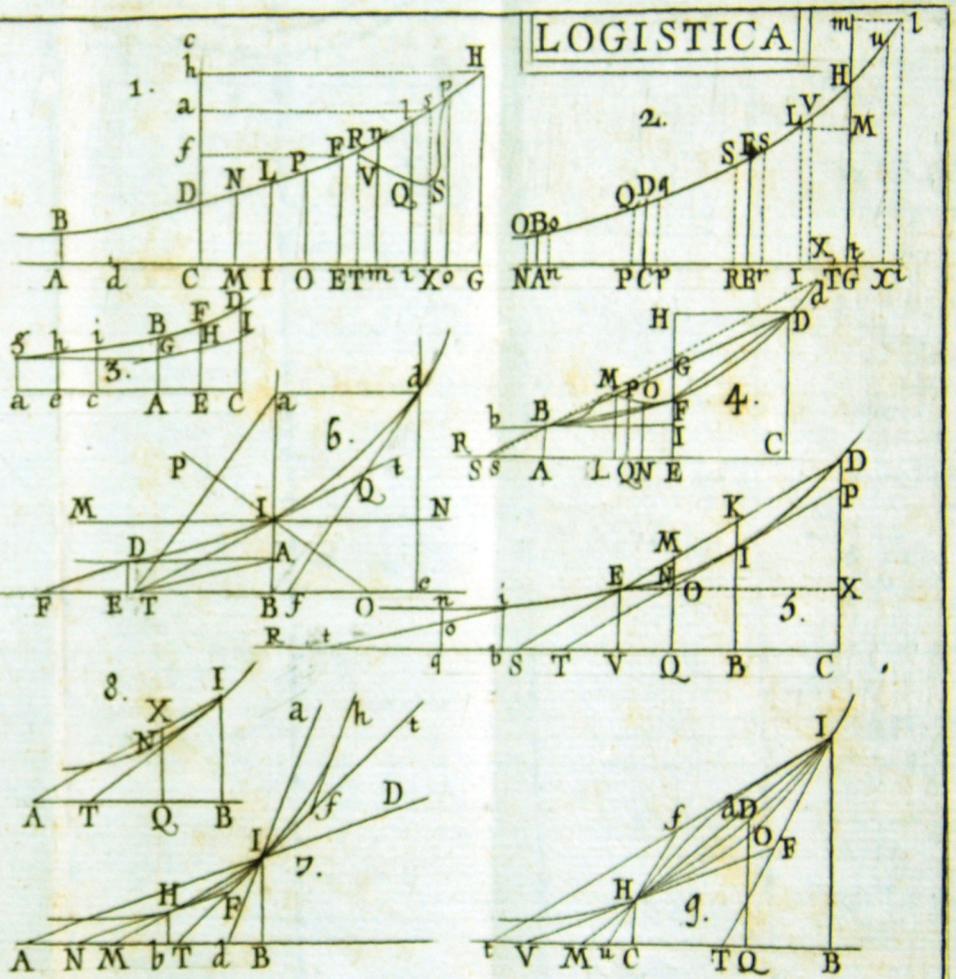
TABULA II.

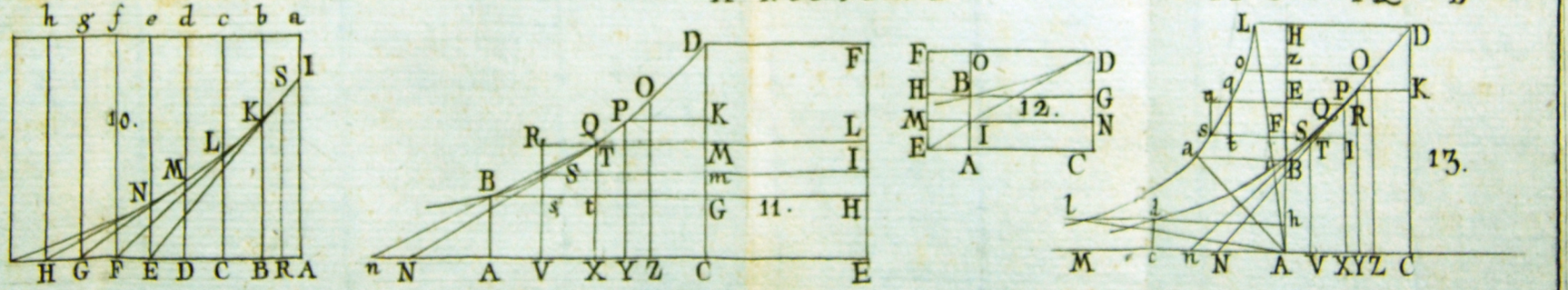
G.	M.	Sinus.	Tang.	Secant.	Log. ſin	Log ta.
	60	743145.	1110613.	1494477.	9.871073	10.045563
	50	741195.	1104137.	1489670.	9.869933	10.043023
	40	739239.	1097702.	1484907.	9.868785	10.040484
	30	737277.	1091308.	1480187.	9.867631	10.037948
	20	735309.	1084955.	1475510.	9.866470	10.035412
47	10	733334.	1078642.	1470874.	9.865302	10.032877
	60	731354.	1072369.	1466279.	9.864127	10.030344
	50	729367.	1066134.	1461726.	9.862946	10.027812
	40	727374.	1059938.	1457213.	9.861758	10.025280
	30	725374.	1053780.	1452740.	9.860562	10.022750
	20	723369.	1047660.	1448306.	9.859360	10.020220
46	10	721357.	1041577.	1443912.	9.858151	10.017691
	60	719340.	1035530.	1439557.	9.856934	10.015163
	50	717316.	1029520.	1435239.	9.855711	10.012635
	40	715286.	1023546.	1430960.	9.854480	10.010107
	30	713250.	1017607.	1426718.	9.853242	10.007580
	20	711209.	1011704.	1422513.	9.851997	10.005053
45	10	709161.	1005835.	1418345.	9.850745	10.002527
44	60	707107.	1000000.	1414214.	9.849485	10.000000

CYCLOIS



LOGISTICA





TRIGONOMETRIA SPHAERICA



R. Istituto di Studi Superiori
SCUOLA DI FISICA
2452
Via Cino Capponi, N. 9
FIRENZE

FIA
72

Cl 1

~~13~~

Jacques

1745

D 11

~~D° 13~~ ~~f° 5~~

ANDREÆ TACQUET
SOCIETATIS JESU

TRIGONOMETRIA PLANA
NEC NON

TRIGONOMETRIA SPHÆRICA
ROGERII BOSCOVICH
Ejusdem Societatis Jesu,

ET

SECTIONES CONICÆ,
GUIDONIS GRANDI

Cum ampliſſimis Annotationibus,
& Additamentis
OCTAVIANI CAMETI

TOMUS SECUNDUS.



ROMÆ, MDCCXLV.
Sumtibus VENANTII MONALDINI Bibliopolæ in Via Curſus.

Typis HIERONYMI MAINARDI in Platea Agonali.
Superiorum facultate.

TMSS/1986

TRIGONOMETRIA SPHÆRICA

AUCTORE

P. ROGERIO JOSEPHO BOSCOVICH

Soc. Jesu Matheseos Professore in Collegio Rom.

1. TRigonometria Sphærica est ars resolvendi triangula sphærica, nimirum ea, quæ in superficie spheræ continentur arcubus circulorum, qui dicuntur maximi, quorum plana transeunt per centrum sphæræ. Sex sunt, quæ in ejusmodi triangulis considerantur, ut in triangulis planis: 3. latera, & 3. anguli. Docet Trigonometria sphærica, quonam pacto datis 3. ex hisce 6., cetera invenire possint. Præmittemus autem primò quidem 3. lemmata, quorum primum ad elementa Geometriæ pertinet, reliqua etiam in Trigonometria plana usui esse possunt, & pertinent ad doctrinam sinuum, & tangentium: tum ea demonstrabimus, quæ ex sphæricorum doctrina necessaria sunt ad Trigonometriam hanc nostram: ac demum Trigonometriam ipsam aggressi agemus primum de triangulis rectangulis, tum de obliquangulis.

Lemma 1.

2. *SI linea AD secetur utcumque in E, & bifariam in I;* Fig. 14.
erit AI vel ID semisumma, & IE semidifferentia segmentorum AE, ED.

Primum patet, cum AD sit summa, & AI ejus dimidia, semisumma: secundum sic demonstratur. Fiat AO versus D æqualis DE; erit IO æqualis IE. Erit autem OE ipsarum AE, AO, adeoque ipsarum AE, ED differentia. Igitur & IE semidifferentia. Idem pariter valebit, si punctum e sumatur extra AD, & consideretur De ut negativa, assumpta pariter Ao, sed ad partes oppositas. Nam si De considere-

tur ut positiva, evadit ID semidifferentia, Ie semisumma ipsarum Ae, eD.

3. Coroll. *Semisummæ adde semidifferentiam, habebis segmentum majus, subtrahe, habebis segmentum minus. Si semidifferentia fuerit major, quam semisumma; alterum segmentum erit negativum, & cadet ad partes oppositas.*

Lemma 2.

Fig. 35. 4. *IN triangulo rectangulo latus est sinus anguli sibi oppositi, & cosinus anguli sibi adjacentis; si basis assumatur pro radio: tangens vero illius, ac cotangens hujus, si latus alterum pro radio assumatur.*

Si enim sumpta pro radio basi BC trianguli BAC rectanguli ad A, describatur circulus occurrens lateri BA producto in D, erit latus CA perpendiculum demissum ex altero extremo C arcus DC in radium BD ductum per alterum extremum, quæ est ipsa definitio sinus arcus DC, sive anguli B oppositi lateri AC. Cum autem ob angulum A rectum anguli
(a) 32.l.1. ACB, ABC simul compleant (*a*) rectum angulum; erit AC simul sinus complementi anguli ACB sibi adjacentis, qui dicitur ejus cosinus.

At si circulus describatur sumpto pro radio latere BA; pariter ex ipsa tangentis notione patebit fore latus alterum AC tangentem anguli B sibi oppositi; adeoque tangentem complementi anguli ACB sibi adjacentis, quæ dicitur ejus cotangens.

5. Coroll. *Factum sub tangente, & cotangente æquatur quadrato radii.*

Cum enim assumpto AB pro radio, sit AC tangens anguli B sibi oppositi, & assumpto CA pro radio, AB sit cotangens ejusdem anguli B sibi adiacentis; erit ut AC ad AB: ita tam tangens anguli B ad radium, quam radius ad cotangen-
(b) 16.l.6. tem: ac proinde (*b*) factum sub tangente, & cotangente æquatur quadrato radii.

Lemma 3.

Fig. 36. 6. *SUmma sinuum duorum arcuum est ad differentiam, ut tangens semisummæ ipsorum arcuum ad tangentem semidifferentiæ.*

Sint arcus AE, ED, quorum sinus AF, DG perpendiculares radio CE, quem chorda AD secet in P; ipsa autem sec-

ſecetur bifariam, & ad angulos rectos (*a*) in H a radio CL, qui etiam arcum AD ſecabit bifariam in L. (*b*) Erit (*c*) AL ſemiſumma, LE ſemidifferentia eorum arcuum, AH ſemiſumma, HP ſemidifferentia rectarum AP, PD: & ob angulos rectos ad H, ſi ſumatur CH pro radio, erit HA tangens anguli ACH (*d*), adeoque arcus LA, qui eſt ejus menſura, & HP tangens anguli HCP, adeoque arcus LE. Triangula autem AFP, DGP, quorum anguli ad F, & G recti, & ad P ad verticem oppoſiti æquales, ſunt æquiangula; (*e*) ac proinde (*f*) eſt ſinus AF ad ſinum DG, ut AP ad PD. Quare ſumma eorum ſinuum ad differentiam, ut ſumma rectarum AP, PD ad differentiam, & ut ipſarum ſemiſumma AH ad ſemidifferentiam HP, ſive ut tangens ſemiſummæ AL ad tangentem ſemidifferentiæ LE.

(a) 3. l. 3. (b) 30. l. 3. (c) n. 4. (d) n. 4. (e) 32. l. 1. (f) 4 l. 6.

7. Coroll. *Summa coſinuum, ſive ſinuum complementorum ad differentiam eſt, ut cotangens, ſive tangens complementi ſemiſummæ ad tangentem ſemidifferentiæ.*

Producatur enim AC uſque ad circuli peripheriam in M, ſumanturque LN, EO quadrantes. Dempto communi EN, erit NO æqualis LE; erit quoque DO complementum DE, & quoniam e ſemicirculo AOM dempto quadrante EO, arcus AE, OM ſimul quadranti æquantur, erit OM complementum EA. Pariter eſt DN complementum LD, & NM complementum LA, qui arcus NM ipſi BN æqualis erit ob AL, LD æquales. Sed (*g*) eſt ſumma ſinuum DO, OM ad differentiam, ut tangens eorum ſemiſummæ DN ad tangentem ſemidifferentiæ ON. Igitur erit ſumma coſinuum arcuum ED, EA ad differentiam, ut cotangens ſemiſummæ LD ad tangentem ſemidifferentiæ LE.

(g) n. 6.

Ex Doctrina Sphæricorum.

DEFINITIO I.

8. *Sphæra eſt ſolidum unica ſuperficie comprehenſum, intra quam eſt punctum, quod centrum dicitur, a quo omnes rectæ ad eam ſuperficiem ductæ ſunt inter ſe æquales, quæ quidem dicuntur ſphæræ radii, vel ſemidiametri, & recta per centrum ſphæræ ducta, & ad ſuperficiem utrinque terminata ſphæræ diameter appellatur.* Fig. 37.

Generatur ſphæra rotatione ſemicirculi circa propriam diametrum immotam, donec regrediatur unde digreſſus eſt. Quia cum omnes lineæ rectæ ductæ a centro immoto ſemicirculi ad ejus peripheriam ſint inter ſe æquales; etiam omnes rectæ ductæ ab eodem puncto ad ſuperficiem ſolidi geniti æqua-

les

les erunt. Figura quarta exhibet tantum dimidiam ſphæram, vitandæ confuſionis gratia, cujus centrum C, radii æquales CP, CA, CF &c., diameter Pp, vel AD.

9. Coroll. 1. *Si ſphæra utcumque plano ſecetur, ſectio erit circulus.*

Secetur primo ſphæra plano ABD, quod tranſeat per centrum C, & rectæ omnes, quæ a centro ſphæræ C ducuntur ad ejus plani interſectionem cum ſuperficie ſphæræ ipſius, ut CA, CB, CD erunt æquales radio ſphæræ ejuſdem. (*a*) Quamobrem puncta omnia A, B, D erunt ad peripheriam circuli, cujus centrum C.

(a) n. 8.

Secetur ſecundo ſphæra plano EFH, quod per centrum non tranſeat, & per centrum ſphæræ C ducatur recta CG ipſi plano perpendicularis, (*b*) ac ad bina puncta quæcunque perimetri ſectionis, ut F, & H ducantur ex C, & G rectæ CF, CH, GF, GH. Erunt anguli CGF, CGH recti ob CG perpendicularem toti plano FGH. Quare (*c*) quadrata CG, GF ſimul æquabuntur quadrato CF, adeoque quadrato CH, (*d*) ſive binis quadratis CG, GH ſimul (*c*), ac dempto communi CG, quadrata GF, GH, & ipſæ rectæ GF, GH æquabuntur. Cumque id contingat manente puncto H, & variato utcumque puncto F; erit perimeter ſectionis peripheria circuli, cujus centrum G, radius GH.

(b) 11. l. 11.

(c) 47. l. 1.

(d) n. 8.

10. Coroll. 2. *Circuli quorum plana per centrum ſphæræ tranſeunt æquales ſunt inter ſe, & majores iis omnibus, quorum plana per centrum non tranſeunt.*

Si enim ABD ſit quicumque e circulis, quorum plana tranſeunt per centrum C; erit ejus radius CD æqualis radio ſphæræ; ac proinde omnium ejuſmodi circulorum radii æquales ſunt inter ſe, & ipſi circuli æquales.

In quovis autem circulo EFH, cujus planum per centrum non tranſit, radius GH minor eſt radio ſphæræ CH, cum hujus quadratum æquetur quadratis CG, GH ſimul, adeoque ſit majus ſolo quadrato GH.

DEFINITIO II.

11. *Hinc circuli, quorum plana per centrum ſphæræ tranſeunt, dicuntur circuli ſphæræ maximi.*

12. Coroll. 1. *Circuli maximi ſe omnes bifariam mutuo ſecant, & communis interſectio planorum eorumdem eſt diameter ſphæræ.*

Cum enim omnium plana per centrum tranſeant, ſibi occurrunt in ipſo centro, ac proinde parallela non ſunt, adeo-

adeoque (*a*) se invicem secant in aliqua recta, quæ cum transeat per centrum sphæræ ipsis commune, intersectio & erit eorum circulorum diameter, quos proinde secabit bifariam, & erit diameter sphæræ. (a) 3.l.11.

13. Coroll.2. *Per quævis bina puncta assumpta in superficie sphæræ potest duci circulus maximus, & per quodvis punctum potest duci circulus maximus dato circulo maximo perpendicularis.*

Patet primum, quia si data duo puncta conjungantur cum centro, & inter se; triangulum in eodem plano jacebit totum, (*b*) quo plano si secetur sphæra, sectio erit circulus maximus, & transibit per data duo puncta. (b) 2.l 11.

Patet secundum, quia ex illo dato puncto potest demitti perpendiculum in planum dati circuli maximi, (*c*) & conjunctis extremis ejus punctis cum centro, fit triangulum pariter jacens totum in eodem plano, quo si sphæra secetur, sectio erit circulus maximus, & perpendicularis (*d*) dato circulo maximo. (c) 11 l.11. (d) 18.l.11

DEFINITIO III.

14. *Diameter sphæræ perpendicularis plano circuli orti ex sectione sphæræ, dicitur ejus axis, & extrema axis puncta dicuntur ejus poli.*

Sic Pp est axis circulorum EFH, ABD, & puncta Pp eorum poli.

15. Coroll.1. *Omnia puncta peripheriæ, cujuscumque circuli in superficie sphæræ distant per æquales arcus circulorum maximorum ab eodem suo polo.*

Si enim assumantur bina ejusmodi puncta quæcumque H, & F, & per ea, ac per polum P ducantur (*e*) circuli maximi PHp, PFp, & radii HC, FC, HG, FG; in triangulis CGF, CGH ob omnia latera æqualia, æquales erunt anguli ad C; (*f*) ac proinde & arcus PH, PF æquales. (*g*) (e) n.13. (f) 8.l.1. (g) 26.l.3.

16. Coroll.2. *Circulus maximus ab utrolibet suo polo distat quaquaversus per quadrantem circuli maximi, & circulus, cujus aliquod punctum distat per quadrantem circuli maximi a suo polo, est maximus.*

Si enim circulus fuerit maximus ut ABD, transibit per centrum C, & radii CB, CD, qui erunt ejus intersectiones cum planis PFp, PHp, erunt perpendiculares axi PCp, qui nimirum ex ipsa sua definitione est perpendicularis toti plano ABD; ac proinde tam arcus PB, PD, quam arcus pB, pD erunt quadrantes.

Si autem circulus non fuerit maximus, ut EFH, non tran-

tranſibit ejus planum per centrum; ac proinde ſecta ſphæra per centrum plano ABD parallelo ipſi EFH, erunt PB, PD, pB, pD quadrantes, adeoque PF, PH minores iis, & pF, pH majores erunt. Circulus igitur, cujus aliquod punctum a polo per quadrantem diſtat, non erit non maximus; ac proinde erit maximus.

DEFINITIO IV.

17. *ANgulus ſphæricus dicitur is, quem in ſuperficie ſphæræ continent bini arcus circulorum maximorum alicubi concurrentes; pro cujus menſura conſideratur angulus rectilineus, quem continent rectæ jacentes cum iiſdem arcubus in iiſdem planis, & ad eaſdem partes, ac eos tangentes in ipſo concurſu.*

Sic FPH eſt angulus ſphæricus, cui ſubſtituitur angulus rectilineus fPh, quem continent tangentes Pf, Ph.

18 Coroll.1. *Si arcus ſupra arcum cadit; duos angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales.*

Nam tangens fP, cum tangente ePh duos angulos facit (a) aut rectos, aut duobus rectis æquales. (a) 13.l.1

19. Coroll.2. *Si bina anguli latera ultra verticem producantur; angulos ad verticem oppoſitos æquales continebunt.*

Si enim tangentes fP, HP producantur ultra verticem P, angulos ad verticem P æquales (b) continebunt. (b) 15.l.1.

20 Coroll.3. *Si plana laterum fuerint ſibi invicem perpendicularia, angulus erit rectus: & ſi angulus fuerit rectus, plana erunt ſibi invicem perpendicularia.*

Si enim planum FPp fuerit perpendiculare plano HPp; tangens fP, quæ eſt perpendicularis diametro Pp (c) communi eorum planorum interſectioni (d), erit perpendicularis (e) toti plano HPp, adeoque & tangenti Ph. (c) 16.l.3. (d) n.12. (e) def. 4. l.11.

Si autem tangens fP fuerit perpendicularis tangenti Ph; cum etiam ſit perpendicularis diametro Pp; erit (f) perpendicularis toti plano HPp, ac proinde (g) & planum FPp erit eidem perpendiculare. (f) 4.l.11. (g) 11.l.11.

21. Coroll.4. *Si e quovis puncto diametri ſphæræ tranſeuntis per verticem anguli exeant in planis ipſorum arcuum binæ rectæ ipſi perpendiculares; angulum continebunt rectilineum ſphærico æqualem.*

Si enim ejuſmodi rectæ fuerint GF, GH, erunt eæ parallelæ rectis Pf, Ph (h), perpendicularibus eidem diametro Pp (i). Ac proinde angulus FGH erit æqualis (k) angulo fPh. (h) 28.l.1. (i) 16.l.3. (k) 10.l.11

22. Coroll.5. *Menſura anguli ſphærici erit arcus circuli cujuſcumque habentis polum in ejus vertice interceptus inter ejus latera.*

Secta

Secta enim ſphæra plano quovis ABD, vel EFH perpendiculari ad diametrum Pp communem interſectionem planorum arcuum PF, PH, ſectio erit circulus habens polum P (*a*) cujus arcus BD, vel FH interceptus lateribus PF, PH, erit menſura anguli BCD, vel FGH, qui cum contineatur radiis BC, CD, vel FG, GH perpendicularibus diametro Pp perpendiculari plano ABD, vel EFH, æquatur angulo ſphærico FPH. (*b*)

(a) n.14.

(b) n.21.

23. Coroll.6. *Si anguli ſphærici crura producantur, iterum ita concurrunt, ut ſemicirculum compleant, & angulum ſphæricum priori æqualem contineant.*

Cum enim PCp ſit diameter utriuſque arcus PF, PH, debet uterque productus tranſire per p; eruntque PFp, PHp ſemicirculi, & angulorum FpH, FPH menſura communis erit arcus BD, vel FH. (*c*)

(c) n.22.

24. Coroll.7. *Circulus maximus circulo maximo perpendicularis tranſit per ejus polos, & ſi circulus maximus tranſit per polum circuli maximi, eſt ipſi perpendicularis.*

Sit enim circulus maximus PBp perpendicularis circulo maximo ABD, erit planum PBp perpendiculare plano ABD. (*d*) Quare ſi ſecetur ſphæra alio plano APDp per centrum C perpendiculari eidem plano ABD; erit (*e*) ipſi perpendicularis etiam interſectio PCp; ac proinde (*f*) P, p puncta, quæ jacent in circulo PBp, erunt poli circuli ABD.

(d) n.20.

(e) 19.l.11

(f) n.14.

Si autem circulus PBp maximus tranſeat per polum P circuli maximi ABD, tranſibit per ejus axem PCp ipſi perpendicularem (*f*): ac proinde (*g*) erit ipſi perpendicularis.

(g) 18.l.11

De Triangulis Sphæricis.

DEFINITIO.

25. *TRiangulum ſphæricum dicitur, quod continetur in ſuperficie ſphæræ ſub tribus arcubus circulorum maximorum, quæ dicuntur ejus latera.*

26. Coroll.1. *Si in triangulo ſphærico bini anguli fuerint recti; latera iis oppoſita erunt quadrantes: & ſi bina latera fuerint quadrantes, anguli iis oppoſiti erunt recti; ac in utroque caſu tertium latus erit menſura tertii anguli.*

Si enim ſint anguli PBD, PDB recti, punctum P communis interſectio circulorum BP, DP erit (*h*) polus circuli BD, & PB, PD quadrantes. (*i*)

(h) n.24.

(i) n.16.

Si autem arcus PB, PD fuerint quadrantes, anguli BCP, DCP erunt recti, ac proinde (*k*) recta CP perpendicularis erit toti plano BCD, & iccirco (*l*) plana arcuum PB, PD per-

(k) 4.l.11.

(l) 18.l.11.

perpendicularia erunt plano arcus BD, & anguli PBD, (a) n. 20. PDB (*a*) recti.

In utroque autem caſu cum P ſit polus circuli BD, ar- [b] n.22. cus BD eſt (*b*) menſura anguli PBD.

27. Coroll. 2. *Si omnes anguli fuerint recti, omnia latera erunt quadrantes; & ſi omnia latera fuerint quadrantes, omnes anguli erunt recti.*

Cum enim bini anguli binis lateribus quibuſcumque oppoſiti in primo caſu recti ſint ea ipſa latera quadrantes erunt; & pariter cum in ſecundo caſu bina latera binis angulis quibuſcumque oppoſita ſint quadrantes, ij ipſi anguli recti erunt.

Hinc patet ejuſmodi triangulorum reſolutio, in quibus nullum opus eſt Trigonometria. Supereſt ut de triangulis agamus, in quibus unus angulus eſt rectus, quæ dicuntur rectangula, & de iis, in quibus nullus angulus eſt rectus, quæ obliquangula appellantur. Et in iis quidem baſis dicitur latus recto angulo oppoſitum: in his vero latus quodlibet pro baſi aſſumi poteſt.

TRIGONOMETRIÆ SPHÆRICÆ

PARS I.

De Triangulis rectangulis.

Fig. 38. 28. SIT triangulum DAB rectangulum ad A. Circulus la- teris AD ſit ADEF, cui latus AB, & baſis DB ſi pro- (c) n.23. ducantur, ita alicubi occurrent in E, & F; ut (*c*) ABE, DBF ſint ſemicirculi, & ACE, DCF diametri. Ducatur [d] 11 l.11 BC, tum BI perpendicularis plano ADE (*d*), quæ diametro (e) 38 l.11. AE ad angulos rectos occurret (*e*) alicubi in I: deinde IG perpendicularis diametro DCF, & BG, quæ eidem diame- (f) 18 l.11 tro perpendicularis erit; quia planum BIG erit (*f*) perpendi- (g) def. 4. l.11. culare plano GIC, adeoque (*g*) CG perpendicularis plano BGI, cum ſit perpendicularis interſectioni IG planorum IGB, IGC ſibi invicem perpendicularium. Demum ſectis ſemicirculis DAF, DBF bifariam in L, & H, ducatur per L, (h) n 13. & H (*h*) arcus circuli maximi occurrens ſemicirculo ABE ali- (i) n 26. cubi in P, eruntque anguli DHL, DLH recti (*i*); ac proin- (k) n.24. de D polus circuli LPH (*k*), & (*l*) LH menſura anguli ADB; (l) n.22. (m) n. 24. ac ob angulum quoque LAP rectum, erit (*m*) P polus circuli (n) n.16. AL, & PA, PL quadrantes (*n*), ac AL menſura anguli [o] n 22. BPH. (*o*)

29 Jam vero omnis triangulorum rectangulorum ſolutio pro-

profluet ex conſideratione pyramidis, cujus vertex C baſis BIG, & comparatione trianguli ſphærici BAD rectanguli ad A, cum BHP rectangulo ad H. Facies omnes pyramidis ſunt triangula rectangula, nam anguli BIG, BIC recti ſunt ob BI perpendicularem toti plano GIC, angulus IGC per conſtructionem, BGC ex numero ſuperiore. Trianguli autem ſphærici PHB latus BH erit complementum baſis DB trianguli DAB: baſis BP complementum lateris AB: latus HP complementum arcus HL, qui menſurat angulum BDA: angulus BPH, cujus menſura arcus AL, complementum lateris AD: anguli B ad verticem oppoſiti æquales (*n*). Ex conſideratione [a]n.19. pyramidis, comparando binas facies inter ſe, & cum baſi, eruentur tres canones: ex comparatione triangulorum DAB, BHP alii tres, quorum ope reſolventur omnia triangula rectangula. Dum autem eruuntur priores tres canones habeatur ob oculos lemma 2. (*a*); dum eruuntur reliqui, (b) n.3. quæ dicta ſunt in comparatione ſingularum partium eorum triangulorum.

30. Ob angulos rectos BGC, BIC ſunt BG, BI ſinus angulorum BCI, BCG, ſive baſis BD, & lateris BA, ad radium BC; & ob angulum rectum BIG eſt BG ad BI, ut radius ad ſinum anguli rectilinei BGI, vel ſphærici D, qui lateri AB opponitur. Quare

I. *Radius ad ſinum anguli, ut ſinus baſis ad ſinum lateris oppoſiti.*

Ob angulos BGC, IGC rectos ſunt BG, GI tangentes angulorum BCG, ICG, ſive arcuum BD, AD ad radium CG: & ob angulum rectum BIG, eſt BG ad GI, ut radius ad ſinum anguli GBI, ſive ad coſinum anguli rectilinei G, vel ſphærici D, qui adjacet lateri AD. Quare

II. *Radius ad coſinum anguli, ut tangens baſis ad tangentem lateris adjacentis.*

Ob angulos rectos CGI, CIB eſt IG ſinus anguli ICG, ſive arcus AD, & IB tangens anguli ICB, ſive arcus AB ad radium CI, & ob angulum BIG rectum eſt GI ad IB, ut radius ad tangentem anguli rectilinei BGI, ſive ſphærici D, cui adjacet DA, & opponitur AB. Quare

III. *Radius ad tangentem anguli, ut ſinus lateris adjacentis ad tangentem oppoſiti.*

Ex can.1. Radius ad ſinum anguli P, vel arcus AL, ſive coſinum lateris AD, ut ſinus BP, ſive coſinus lateris AB ad ſinum BH, ſive coſinum baſis BD. Quare

IV. *Radius ad coſinum unius lateris, ut coſinus alterius ad coſinum baſis.*

Ex can.1. eodem. Radius ad ſinum anguli PBH, ſive ABD,

ABD, ut ſinus BP, ſive coſinus lateris AB adjacentis ipſi angulo ad ſinum PH, ſive coſinum HL, vel anguli D, qui ipſi AB opponitur. Quare

V. *Radius ad ſinum anguli adjacentis, ut coſinus lateris ad coſinum anguli oppoſiti.*

Ex can. 3. Radius ad tangentem anguli B, ut ſinus BH, vel coſinus baſis BD ad tangentem HP, ſive cotangentem arcus LH, vel anguli D. Quare

VI. *Radius ad tangentem unius anguli, ut coſinus baſis ad cotangentem alterius.*

31. Antequam doceamus uſum eorum canonum, tradendæ ſunt duæ regulæ, per quas innoteſcat, cujus ſpeciei debeant eſſe latera, & anguli inventi. Dicuntur autem ejuſdem ſpeciei, quæ ſimul excedunt gradus 90., vel ab iis ſimul deficiunt; diverſæ ſpeciei, quorum alterum deficit, alterum excedit.

Fig. 39. Manentibus reliquis, per polum P, & punctum D ducatur (a) arcus circuli maximi, qui erit (b) perpendicularis ad ADE, & ſemicirculo ADE ſecto bifariam in I, ducatur (c) arcus BI, qui cum polus circuli ABE ſit (b) in circulo ADE ſibi perpendiculari, & (c) ipſum bifariam ſecet, ac proinde ſit in I; erit (c) quadrans. Ducatur quoque arcus Bd per quodvis punctum d jacens reſpectu I ad partes oppoſitas D (d) & polo B ſit arcus circuli maximi FIf occurrens arcubus BD, Bd in F & f, qui ob BI quadrantem erit (e) circulus maximus, & abſcindet BF, Bf quadrantes, ac conſtituet (f) angulos BIF, BIf rectos.

(a) n. 13. (b) n. 24. (c) n. 16. (d) n. 13. (e) n. 16. (f) n. 24.

32. Si latus AB ſit minus quadrante AP; erit angulus ADB minor ſemper recto ADP, cujus erit pars. Si autem illud ſit majus, & hic major erit, utcumque ſe habuerit alterum latus AD. Quare

Reg. 1. *Latera ſunt ejuſdem ſpeciei cum angulis oppoſitis.*

Si latus AB ſit minus quadrante AP, erit angulus AIB minor per reg. 1. recto, adeoque minor angulo FIB, angulus vero BId major recto BIf; & propterea baſis BD minor quadrante BF, & Bd major quadrante Bf: ac proinde in triangulis BAD, BED, ubi latera ſunt ejuſdem ſpeciei, baſis eſt quadrante minor; in triangulis AdB, EdB, ubi ea ſunt diverſæ ſpeciei, eſt quadrante major. Quoniam vero per reg. 1. anguli ſunt ejuſdem ſpeciei cum lateribus oppoſitis; poſſunt pro illis ſubſtitui. Quare

Reg. 2. *Si duo latera, vel duo anguli, vel latus cum angulo adjacente fuerint ejuſdem ſpeciei; baſis erit quadrante minor; ſi diverſæ major: & viceverſa.*

33. Jam

33. Jám vero quotieſcumque proponitur reſolvendum triangulum rectangulum ex duobus angulis, duobus lateribus, & baſi dantur duo præter angulum rectum, & quæritur tertium aliquid. Ut id inveniatur, oportet primo invenire aliquam ejus functionem nimirum ſinum, tangentem, coſinum, vel cotangentem. Secundo noſſe cujus ſpeciei eſſe debeat; nam complementa ad ſemicirculum communes functiones habent. Primum ſemper innoteſcet per canones, ſecundum per regulas ſemper, præter caſum, in quo detur latus cum angulo oppoſito; tunc enim reliqua poterunt eſſe vel minora gradibus 90., vel majora. Sic in fig. 5. in triangulis BAD, BAF, latus BA commune eſt, anguli ad D & F æquales (*a*), latus reliquum, baſis, & reliquus angulus in uno complementa ad gradus 180. eorum, quæ ſunt in altero: ac proinde is caſus in ſe indeterminatus eſt, & ambiguus. [a] n 23.

34. In 6. Canonibus adſunt omnes combinationes earum 5. anguli partium, quæ dari poſſunt, & quæri præter angulum rectum, cum ternæ accipiuntur: & utcumque dentur duæ ex iis tribus, quæ ſunt in eodem canone, dabitur functio aliqua tertiæ; nam e quatuor terminis proportionalibus, qui in eo canone ponuntur, unus erit radius, duo erunt functiones datæ, & reliqua erit functio quæſita: & in quacumque proportione datis tribus terminis quibuſcumque, innoteſcit & reliquus. Cum enim productum ſub extremis æquetur producto ſub mediis (*b*); ſi reliquus ille fuerit extremus habebitur, dividendo productum ex mediis per alterum extremum, & ſi fuerit extremus habebitur, dividendo productum ex extremis per alterum medium. Species autem per alteram e regulis facile eruetur. (b) 16. l. 6.

35. Apponemus hic combinationes ſuo ordine, & ſingulis adſcribemus canonem ad quem pertinent, & regulam. Regula ſecunda tres habet partes, quarum ſingulas adnotabimus.

1. Baſis cum utroque latere.	Can. 4.	Reg. 2. pars 1.
2. Baſis cum utroque angulo.	Can. 6.	Reg. 2. pars 2.
3. Baſis cum latere, & angulo adjacente.	Can. 2.	Reg. 2. pars 3.
4. Baſis cum latere, & angulo oppoſito.	Can. 1.	Reg. 1., vel nulla in caſu ambiguo.
5. Utrumque latus cum altero angulo.	Can. 3.	Reg. 1., vel nulla in caſu ambiguo.
6. Uterque angulus cum altero latere.	Can. 5.	Reg. 1., vel nulla in caſu ambiguo.

36. Detur ex. gr. baſis (gr. 57. 25.) cum latere (gr. 41. 16.) & quæratur angulus adjacens lateri. Tria, quæ hic combinantur, ſunt baſis cum latere, & angulo adjacente. Huic combinationi, quæ eſt 3. reſpondet canon 2., & regulæ 2. pars 3. Ex canone 2. habes: *Radius ad coſinum anguli, ut tangens baſis ad tangentem lateris adjacentis.* Datur 1. terminus (10000000) tertius (15646590), quartus (8774912). Igitur erues, & ſecundum, nimirum coſinum anguli ($\frac{8774912 \times 10000000}{15646590} = 5608194$, qui eſt ſinus gr. 34. 6'. 49", coſin. gr. 55. 53'. 11", vel grad. 124. 6'. 49".) Ex ſecunda parte reg. 2. habes convertendo, ſi baſis fuerit quadrante minor, (ut hic eſt), fore latus, & angulum adjacentem ejuſdem ſpeciei; ſi major, diverſæ. Noſti ſpeciem baſis, & lateris (hic nimirum quadrante minoris). Invenies igitur, & ſpeciem anguli (nimirum hic acuti). Igitur & angulum (gr. 55. 53'. 11".) Eodem pacto in reliquis operare.

37. Singulæ combinationes continent terna problemata, cum nimirum quodlibet ex iis tribus quæri poſſit ex datis reliquis duobus. Quare omnia ſimul eſſent 18. Sed in prima, & ſecunda ſunt bina tantum diverſa. Nam cum data baſi, & latere, vel angulo, quæritur alterum latus, vel alter angulus; idem erit problema utrumvis laterum, vel angulorum detur, ut ex eo inveniatur alterum. Quare ea problemata redu untur ad 16., quibus continetur omnis reſolutio triangulorum rectangulorum. In poſtremis tribus combinationibus continentur 3. problemata indeterminata circa ſpeciem partis quæſitæ; cum nimirum dato latere, & angulo oppoſito quæritur baſis, vel alterum latus, vel alter angulus, in quibus tantum deſerimur ab iis regulis, cætera omnia, quæ in ſe determinata ſunt, complectentibus.

PARS II.

De Obliquangulis.

38. OBliquangula reducuntur ad rectanguia ope perpendiculi demiſſi (*a*) in unum e lateribus conſideratum ut baſim. Continet 6. caſus; cum nimirum poſſint quæri reliqua 1.° datis duobus lateribus cum angulo intercepto, 2.° cum angu-

(a) n. 13.

angulo alteri eorum oppoſito, 3.o datis duobus angulis cum latere intercepto, 4.o cum latere alteri eorum oppoſito, 5.o datis tribus lateribus, 6.o datis tribus angulis.

39. Primus, & tertius caſus erunt ſemper poſſibiles, & determinati dummodo ſingula latera, & anguli, qui dantur, non excedant gradus 180. Facto enim angulo A, ut libuerit, & aſſumptis, utlibuerit, lateribus AD, AB, poterit per B, & D duci (*a*) circulus maximus, qui eſt determinatus a plano tranſeunte per B, D, & centrum ſphæræ. Aſſumpto vero latere AD, utlibuerit, & factis angulis A, D, pariter, utlibuerit, occurrent ſibi alicubi ſemicirculi ABa, DBd in unico puncto B, cum circuli toti debeant ſe invicem ſecare (*b*) in binis punctis e diametro oppoſitis, ac proinde altera interſectio debeat jacere in Hemiſphærio oppoſito. F. 40. (a) n. 13. (b) n. 12.

40. Secundus, & quartus poſſunt habere vel duas ſolutiones, vel unam, vel nullam. Concipiatur enim compleri circulus lateris AD trianguli ABD, & ſtante angulo A cum latere AB, ſit ſemicirculus EBe perpendicularis circulo ADa, quem punctum D perpetuo percurrat, variato latere BD, & angulo D, ac ſemicirculi EAe, Eae ſecentur bifariam in i & I.

41. Ex can. 4. eſt radius ad coſinum EB, ut coſinus ED ad coſinum BD. Quare ſtante radio, & coſinu BE, erit coſinus BD, ut coſinus ED. Coſinus ED eſt maximus puncto D abeunte in E, ubi æquatur radio, evaneſcente ED: decreſcit utrinque uſque ad I & i, ubi fit nullus: cum nimirum quadrantis EI, & Ei nullum ſit complementum. Tum fit negativus, & creſcit uſque ad e, ubi iterum fit æqualis radio. Quare coſinus BD, & ipſius BD complementum erunt maxima in E, & e: ab E ad I & i decreſcent, ubi fient nulli: tum creſcent uſque ad e, & in paribus diſtantiis hinc inde a puncto E vel e ejuſdem magnitudinis erunt.

42 Ex can. 3. eſt radius ad tangentem anguli D, ut ſinus ED ad tangentem BE. Igitur datis radio, & tangente BE, erit tangens anguli D in ratione inverſa ſinus ED. Quare anguli ad D, qui, puncto D abeunte in E, ſunt utrinque recti, ab E ad I, vel i variantur ita; ut acutus decreſcat, obtuſus creſcat, decreſcente tangente, adeoque eorum ſemidifferentia, quæ cum habeatur (*c*) demendo minorem a ſemiſumma, ſeu a quadrante, vel demendo quadrantem a majore, eſt complementum utriuslibet, augetur uſque ad I, vel i; ubi ED fit quadrans; ac proinde evadit D polus circuli EBe (*d*), & angulos ipſos metiuntur (*e*) arcus EB, Be, tum iterum aucta tangente decreſcit complementum, quod in e fit nullum, ubi ipſi anguli iterum evadunt recti. (c) n. 3. (d) n. 16. (e) n. 22.

43. Hinc ſi in ſecundo caſu complementum lateris BD oppoſiti angulo dato A, & in quarto caſu complementum anguli D oppoſiti lateri dato AB, fuerit majus complemento BE, qui arcus ex datis AB, & A datur per combin. 1. caſus erit impoſſibilis. Si fuerit minus complemento EB, ſed adhuc majus complemento ibi lateris AB adjacentis dato angulo, hic anguli A adjacentis dato lateri; ſolutio erit duplex ibi circa E, hic circa I, vel nulla, prout fuerit ejuſdem ſpeciei ibi latus BD cum latere AB, hic angulus D cum angulo A, vel diverſæ. In reliquis caſibus unica, & unica pariter ſi punctum D abeat ibi in E, & latus datum BD æquetur BE, hic in I, & angulum D menſuret arcus BE. Verum hæc omnia ex ipſa ſolutione innoteſcent facilius, & quando duplex occurret ſolutio; oportebit, prius noſſe ſpeciem alterius anguli in ſecundo caſu, vel alterius lateris in quarto ad problema determinandum.

44. Poſtremi duo caſus ſemper erunt determinati, quod ex ipſa ſolutione patebit, & ſi impoſſibilitatem involvant; deprehendetur, ut & in aliis caſibus ex eo, quod ſinus, aut coſinus alicujus arcus obveniet radio major.

45. Conſideretur jam latus quodlibuerit AD, ut baſis, in quam cadat arcus perpendicularis BE, ſive intra triangulum, ſive extra ipſum producta baſi. Dicantur AE, DE ſegmenta baſis, primum adjacens lateri AB, & angulo A, & oppoſitum lateri BD, & angulo D, ſecundum adjacens lateri BD & angulo D, & oppoſitum lateri AB, & angulo A, & illud quidem conſideretur, ut poſitivum, cum cadit verſus D, ut negativum, cum puncto E cadente citra A, abit ad partes oppoſitas: hoc autem poſitivum verſus A, & negativum ex parte oppoſita. Anguli ABE, DBE dicantur ſegmenta verticis: primum adjacens lareri AB, ſegmento baſis AE, & angulo A, oppoſitum lateri BD, ſegmento baſis BE, & angulo D; contra verò ſecundum & eodem modo conſiderentur poſitiva, vel negativa.

46. Deducemus jam ex primis 6. alios 7. canones, quorum ope, & ope tertiæ regulæ deductæ ex prima, ſolvemus omnes caſus obliquangulorum triangulorum. Applicabimus nimirum canones, & regulas jam expoſitas triangulis rectangulis AEB, DEB, & quidquid de litteris majoribus dicetur, de minoribus etiam intelligatur.

47. Ex can. 1. Radius ad ſinum anguli A, ut ſinus AB ad ſinum BE, & radius ad ſinum anguli D, ut ſinus BD ad ſinum BE. Ergo ex æquo ſinus anguli A ad ſinum D, ut ſinus BD ad ſinum AB. Quare

VII. *Sinus angulorum, ut sinus laterum oppositorum.*

Ex can. 2. Radius ad cosinum anguli ABE, ut tangens AB ad tangentem BE, & radius ad cosinum anguli DBE, ut tangens BD ad tangentem BE. Ergo ex æquo cosinus anguli ABE ad cosinum DBE, ut tangens DB ad tangentem BA. Quare

VIII. *Cosinus segmentorum verticis, ut tangentes laterum oppositorum.*

Ex can. 3. Radius ad tangentem anguli A; ut sinus AE ad tangentem BE, & radius ad tangentem anguli D, ut sinus DE ad tangentem BE. Ergo ex æquo tangens anguli A ad tangentem D, ut sinus DE, ad sinum AE. Quare

IX. *Sinus segmentorum basis, ut tangentes angulorum oppositorum.*

Ex can. 4. Radius ad cosinum BE ut cosinus AE ad cosinum AB, & ut cosinus DE ad cosinum DB. Ergo alternando cosinus AE ad cosinum DE, & ut cosinus AB, ad cosinum DB. Quare

X. *Cosinus segmentorum basis, ut cosinus laterum adjacentium.*

Ex can. 5. alternando, radius ad cosinum BE, ut sinus ABE ad cosinum A, & ut sinus DBE ad cosinum D. Ergo alternando sinus ABE ad sinum DBE, ut cosinus A ad cosinum D. Quare

XI. *Sinus segmentorum verticis, ut cosinus angulorum adjacentium.*

48. Ope horum 5. canonum ex segmentis datis, vel ex se mutuo invenientur latera, vel anguli, ut patebit inferius. Iccirco combinantur.

7.	Latera, & anguli inter se	can. 7.
8.	Latera, & segmenta verticis	can. 8.
9.	Latera, & segmenta basis	can. 10.
10.	Anguli, & segmenta verticis	can. 11.
11.	Anguli, & segmenta basis.	can. 9.

49. Segmenta ipsa facile invenientur in primis 4. casibus ope priorum 6. canonum, ut mox patebit. Pro duobus postremis invenientur per duos sequentes, qui eruuntur ex can. 10, & 11, ac ex præmisso lem. 3.

50. Ex can. 10. sumendo summas, & differentias terminorum, erit summa cosinuum segmentorum basis ad differentiam, ut summa cosinuum laterum ad differentiam. Quare (a)

(a) n. 7.

XII. *Cotangens semisummæ segmentorum basis, sive cotangens dimidiæ basis, ad tangentem semidifferentiæ, ut cotangens semisummæ laterum ad tangentem semidifferentiæ.*

Ex cān. 11. pariter ſumma ſinuum ſegmentorum verticis ad differentiam, ut ſumma coſinuum angulorum ad differentiam. Quare (*a*)

(a) n. 7.

XIII. *Tangens ſemiſummæ, ſegmentorum verticis, ſive tangens dimidii anguli verticalis ad tangentem ſemidifferentiæ, ut cotangens ſemiſummæ angulorum ad baſim ad tangentem ſemidifferentiæ.*

51. Neperus pro cān. 12. proponit hunc. *Tangens dimidiæ baſis, ad tangentem ſemiſummæ laterum, ut tangens ſemidifferentiæ ipſorum ad tangentem ſemidifferentiæ ſegmentorum baſis*; quem demonſtrat ex principiis conicis. Eruitur ex can. 12. alternando primum, tum pro ratione cotangentis dimidiæ baſis ad cotangentem ſemiſummæ laterum, ponendo rationem tangentis hujus ad tangentem illius. Cum enim (*b*) factum ſub tangente, & cotangente cujuſvis arcus æquetur quadrato radii; erunt tangentes in ratione inverſa cotangentium. Sed ad praxim hic noſter, qui immediate deducitur, eſt æque accommodatus.

(b) n. 5.

52. Ex Reg. 1. tam angulus BAE, quam angulus BDE ſunt ejuſdem ſpeciei, ac arcus BE. Igitur ſi anguli BAD, BDA fuerint ejuſdem ſpeciei; jacebit punctum E intra baſim AD, congruentibus angulis BDA, BDE; ſi fuerint diverſæ, cadet extra. Quare

Reg. III. *Si duo anguli ad baſim fuerint ejuſdem ſpeciei; perpendiculum intra baſim cadet; ſi diverſæ extra.*

53. *Caſus* 1. Dentur latera AB, AD cum angulo intercepto A. Duo quæri poſſunt. Primò quæratur latus tertium BD. Fac baſim utrumvis duorum laterum, ut AD. Ex datis AB, & A quære AE per combinationem 3.: habebis & ED ob datum AD, Ex ſegmentis AE, ED, & latere AB invenies coſinum BD per combin. 9. in can. 10. Ex dato A habes ſpeciem B per reg. 1., ex ipſa, & ſpecie ED habes ſpeciem BD per reg. 2.

Secundò quæratur alter angulorum D. Fac baſim latus datum ipſi adjacens AD. Quære ſegmenta AE, ED ut prius: ex iis & angulo A per combin. 11. can. 9. invenies tangentem D. Si AE excedatur ab AD, ſpecies D erit eadem ac A; ſi excedat erit diverſa per reg. 3.

54. *Caſus* 2. Dentur latera AB, BD, cum angulo A oppoſito alteri, ut BD: tria quæri poſſunt.

Primò quæratur latus AD. Fac ipſum baſim: invenies AE, & ſpeciem BE, ut in primo caſu: tum ex datis lateribus AB, BD, & ſegmento AE invenies per combin. 9. can. 10. coſinum ED. Ex ſpecie BE, & BD invenies ejus ſpeciem per reg. 2. Sed quoniam aliquando poterit haberi duplex ſolutio; hinc

inde

inde ab E ſubtrahe ED ab EA, & habebis primam; adde, & habebis ſecundam. Si forte AD ex ſubtractione evaſerit negativa ob AE ipſa ED minorem, vel ex additione ſemicirculum exceſſerit; eam ſolutionem rejice.

Secundò quæratur angulus ABD interceptus. Ex datis AB, & A quære ſegmentum verticis ABE per combin.2. Ex lateribus AB, BD, & ſegmento verticis ABE invenies per combin.8. can.8. coſinum EBD. Ex BD dato, & ſpecie BE inventa, ut prius, invenies ſpeciem DBE per reg.2. Subtrahe EBD ex ipſo EBA & habebis primam ſolutionem; adde & habebis alteram. Si angulus ABD ex ſubtractione evaſerit negativus, vel ex additione major duobus rectis; eam ſolutionem rejice.

Tertiò quæratur angulus D oppoſitus lateri AB. E lateribus AB, BD, & angulo A invenies per combin 7. can.7. ſinum D. Species in ſecunda ſolutione erit eadem ac A, in prima diverſa per reg.3.

55. *Caſus* 3. Dentur anguli A, & B cum latere interceptoAB: Duo quæri poſſunt. Primo quæratur latus utrumvis BD. Fac baſim alterum AD. Quære angulum ABE, ut in 2. parte caſus primi. Habebis & EBD, ob datum ABD. Ex iis datis & latere AB invenies per combin.8. can.8. tangentem BD. Speciem BE ex ſpecie A habes per reg.1. Ex ipſa & ſpecie EBD habes ſpeciem BD per reg.2.

Secundò quæratur angulus D. Fac baſim utrunque laterum non datorum, ut AD. Quære ſegmenta verticis, ut prius. Ex ipſis, & angulo A invenies per combin.10. can.11. coſinum D. Is erit ejuſdem ſpeciei cum A, ſi ABE fuerit minor, quam ABD; diverſæ, ſi major per reg.3.

56. *Caſus.*4. Dentur anguli A, & D cum latere AB oppoſito alteri, ut D. Tria quæri poſſunt.

Primò quæratur latus AD interceptum, Fac ipſum baſim. Ex datis AB, & A quære AE per combin.3. Ex angulis A, D, & AE ſegmento baſis invenies per combin.11. can.9. ſinum ED. Species erit indeterminata, & poterit eſſe duplex ſolutio circa I, aſſumpta utralibet ejus ſpecie. Ipſi AE adde utrunque ED; ſi anguli A & D fuerint ejuſdem ſpeciei; ſubtrahe ſi diverſæ per reg.3., & habebis utranque ſolutionem. Si AE ex ſubtractione evaſerit negativa, vel ex additione major ſemicirculo; eam ſolutionem rejice.

Secundò quæratur tertius angulus ABD. Ex datis AB, & A quære ABE per combin.2. ex angulis A, D, & ABE ſegmento verticis invenies per combin.10. can.11. ſinum EBD. Erit pariter EBD ambiguæ ſpeciei, & uterque addendus ipſi ABE, ſi anguli A, & D fuerint ejuſdem ſpeciei; ſubtrahendus,

ſi diverſæ per reg.3. Si angulus ABD ex ſubtractione obvenerit negativus, vel ex additione major duobus rectis; eam ſolutionem rejice.

Tertiò quæratur latus BD. Ex datis angulis A, D & latere AB, invenies ſinum BD per combin. 7. can.7. Ipſe arcus erit ſpeciei ambiguæ. Si detur præterea ejus ſpecies; ex ipſa & ex ſpecie BE jam toties inventa, determinabis ſpeciem ED, & EBD per reg.2.

57. *Caſus 5.* Dentur 3. latera, & quæratur quilibet angulus, ut A. Fac baſim alterum e lateribus ipſi adjacentibus ut AD. Ex datis AB, BD, & dimidia baſi AD invenies per can.12. tangentem ſemidifferentiæ ſegmentorum AE, ED, quam ſumes quadrante non majorem. Adde ipſam dimidiæ baſi AD, & ſubtrahe, invenies ſegmenta AE, ED (*a*). Sume pro AE adjacente ipſi AB ſegmentum, quod magis, vel minus diſtet a quadrante, prout latus adjacens AB diſtabit magis, aut minus, quam oppoſitum BD: nam per can.10: *Coſinus ſegmentorum baſis ſunt, ut coſinus laterum adjacentium*, & arcus quadranti propioris minor eſt coſinus. Ex AB, & AE invenies angulum A per combin.3. Sed ſi AE habitum fuerit per ſubtractionem, & obvenerit negativum puncto E cadente citra A, angulus BAD jacebit ad partes oppoſitas angulo BAE, adeoque erit diverſæ ſpeciei.

(a) n.3.

58. *Caſus 6.* Dentur tres anguli, & quæratur quodlibet latus, ut AB. Fac baſim utrumlibet ex reliquis, ut AD. Ex datis A, & D, ac dimidio ABD invenies per can.13. tangentem ſemidifferentiæ ſegmentorum ABE, DBE, quam ſumes quadrante non majorem. Adde ipſam dimidio angulo ABE, & ſubtrahe: invenies ſegmenta verticis ABE, DBE (*b*) Sume pro ABE adjacente ipſi A ſegmentum, quod magis, aut minus diſtet ab angulo recto, prout e contrario angulus A adjacens minus, aut magis diſtabit ab eodem, quam oppoſitus D: nam per can.11. *Sinus ſegmentorum verticis ſunt, ut coſinus angulorum adjacentium*, & arcus quadranti proprioris major eſt ſinus, minor coſinus. Ex angulis A, & ABE invenies latus AB per combin.2. Sed ſi ABE habeatur per ſubtractionem, & obvenerit negativum, puncto E cadente citra A; angulus BAE, ex quo, & ex ABE æſtimatur ſpecies AB, jacebit ad partes oppoſitas, eritque diverſæ ſpeciei, ac datus BAD.

(b) n.3.

59. Si in quinto caſu habita tangente ſemidifferentiæ, ſegmentorum baſis, ſumptus fuiſſet arcus quadrante major; eadem prorſus ſolutio obveniſſet. Sit enim arcus AD biſariam ſectus in L, ut ſint (*c*) AL, LD ſemiſummæ, LE ſemidifferentia, AE ſegmentum factum ex additione ſemiſummæ,

(c) n.2.

mæ, & ſemidifferentiæ, DE ex ſubtractione. Si pro LE ſumptus fuiſſet arcus LAe; ſegmentum ex additione fuiſſet DLAe (vel De, quoniam ſemicirculum excedit) ex ſubtractione Ae negativum, & proinde cadens ab A verſus d. Cumque ipſius complementum ſit idem, ac AE; id fuiſſet adjacens angulo A, & pro triangulo BAE, ſolvendum fuiſſet triangulum BAe, & angulus BAD ſemper idem obveniſſet ob functiones arcuum AE, Ae communes. Præſtat tamen ſumere pro ſemidifferentia arcum quadrante non majorem; tum quia ſine nova ſubtractione occurrit immediatè in tabulis; tum quia eo pacto nunquam exceditur ſemicirculus in additione ob AD minorem ſemicirculo, & propterea AL, DL quadrante minores. Idem accidit in 6. caſu. Unde patet utrumque determinatum eſſe, & unicam ſolutionem admittere.

60. Si in triangulo ABD, vel duo latera AB, BD, vel duo anguli A, D æquarentur; brevior evaderet ſolutio, ſumendo pro baſi latus AD interceptum lateribus, vel angulis æqualibus. Nam perpendiculum BE dividet bifariam & ipſam baſim, & angulum baſi oppoſitum. Cum enim in triangulis ABE, DBE ex data baſi AB, & latere BE idem proveniat in can. 4 coſinus lateris AE, & ex can. 2. coſinus anguli ABE, ac ex baſi æquali BD; & eodem latere BE coſinus lateris BE, & anguli DBE; ac ob ſpeciem baſium BD, BA eandem, & eandem lateris BE ſit per reg. 3. eadem eorundem ſpecies; erit ſemper AE æqualis ED, & angulus ABE æqualis angulo DBE; & ſimilis eſt demonſtratio pro caſu æqualium angulorum A, & D. Hinc vero in triangulo rectangulo AEB præter latus AB, vel angulum A; innoteſcet ſegmentum AE, vel ABE, prout data fuerit baſis AD, vel angulus ABD.

61. Si alterum latus tantum detur quadranti æquale, ut AB; capto AE quadrante, ducatur per E, & B arcus EB (*a*); eruntque anguli ABE, AEB recti (*b*) & latus BE menſura anguli A (*c*); ac proinde arcus ED, & angulus EBD, erunt complementa lateris AE, & anguli ABD. Datis igitur partibus trianguli ABD, dantur partes trianguli rectanguli BED, & hoc reſoluto illud reſolvitur.

(a) n. 13.
(b) n. 26.
(c) n. 22.

62. Omnes hi canones, & univerſa praxis ſatis ſunt apta pro adhibendis logarithmis: tum quia nunquam adhibetur ſumma, aut differentia ſinuum, & coſinuum, quæ immediatè per logarithmos non habetur: tum quia omiſſæ ſunt ſecantes, quarum logarithmi in pluribus tabulis non extant eo, quod facile eruantur ex logarithmis coſinuum, & nuſquam occurrit uſus ſinuum verſorum, qui difficilius e tabulis

lis eruuntur. Hæc autem methodus multis aliis præstare videtur tum brevitate, & ordine quodam, ac nexu demonstrationum; cum nec sectionum conicarum doctrina sit opus, nec transformatione quadam molesta trianguli datorum angulorum in triangulum datorum laterum, & alia ex aliis theoremata sponte fluant: tum quod per regulas expeditissimas, quotiescumque partis quæsitæ species in se determinata est, statim innotescit.

63. Ut autem unico conspectu pateant omnia, quæ ad usum spectant; apponemus hic canones cum combinationibus, & regulas.

Pro triangulis rectangulis.

I. *Radius ad sinum anguli, ut sinus basis ad sinum lateris oppositi.*

II. *Radius ad cosinum anguli, ut tangens basis ad tangentem lateris adjacentis.*

III. *Radius ad tangentem anguli, ut sinus lateris adjacentis ad tangentem oppositi.*

IV. *Radius ad cosinum unius lateris, ut cosinus alterius ad cosinum basis.*

V. *Radius ad sinum anguli adjacentis, ut cosinus lateris ad cosinum anguli oppositi.*

VI. *Radius ad tangentem unius anguli, ut cosinus basis ad cotangentem alterius.*

Reg. I. *Latera sunt ejusdem speciei cum augulis oppositis.*

Reg. II. *Si duo latera vel duo anguli, vel latus cum angulo adjacente fuerint ejusdem speciei; basis erit quadrante minor; si diversæ, major, & viceversa.*

	1. Basis cum utroque latere:	Can. 4.	Reg. 2. pars 1.
	2. Basis cum utroque angulo:	Can. 6.	Reg. 2. pars 2.
Combin.	3. Basis cum latere, & angulo adjacente:	Can. 2.	Reg. 2. pars 3.
	4. Basis latere, & angulo opposito:	Can. 1.	)
	5. Utrunque latus cum altero angulo:	Can. 3.	) Reg. 1. vel nulla in casu ambiguo.
	6. Uterque angulus cum altero latere:	Can. 5.	)

Pro

Pro Obliquangulis.

VII. *Sinus angulorum, ut ſinus laterum oppoſitorum.*

VIII. *Coſinus ſegmentorum verticis, ut tangentes laterum oppoſitorum.*

IX. *Sinus ſegmentorum baſis ut tangentes angulorum oppoſitorum.*

X. *Coſinus ſegmentorum baſis, ut coſinus laterum adjacentium.*

XI. *Sinus ſegmentorum verticis, ut coſinus angulorum adjacentium.*

Reg III. *Si duo anguli ad baſim fuerint ejuſdem ſpeciei perpendiculum intra baſim cadet; ſi diverſæ, extra.*

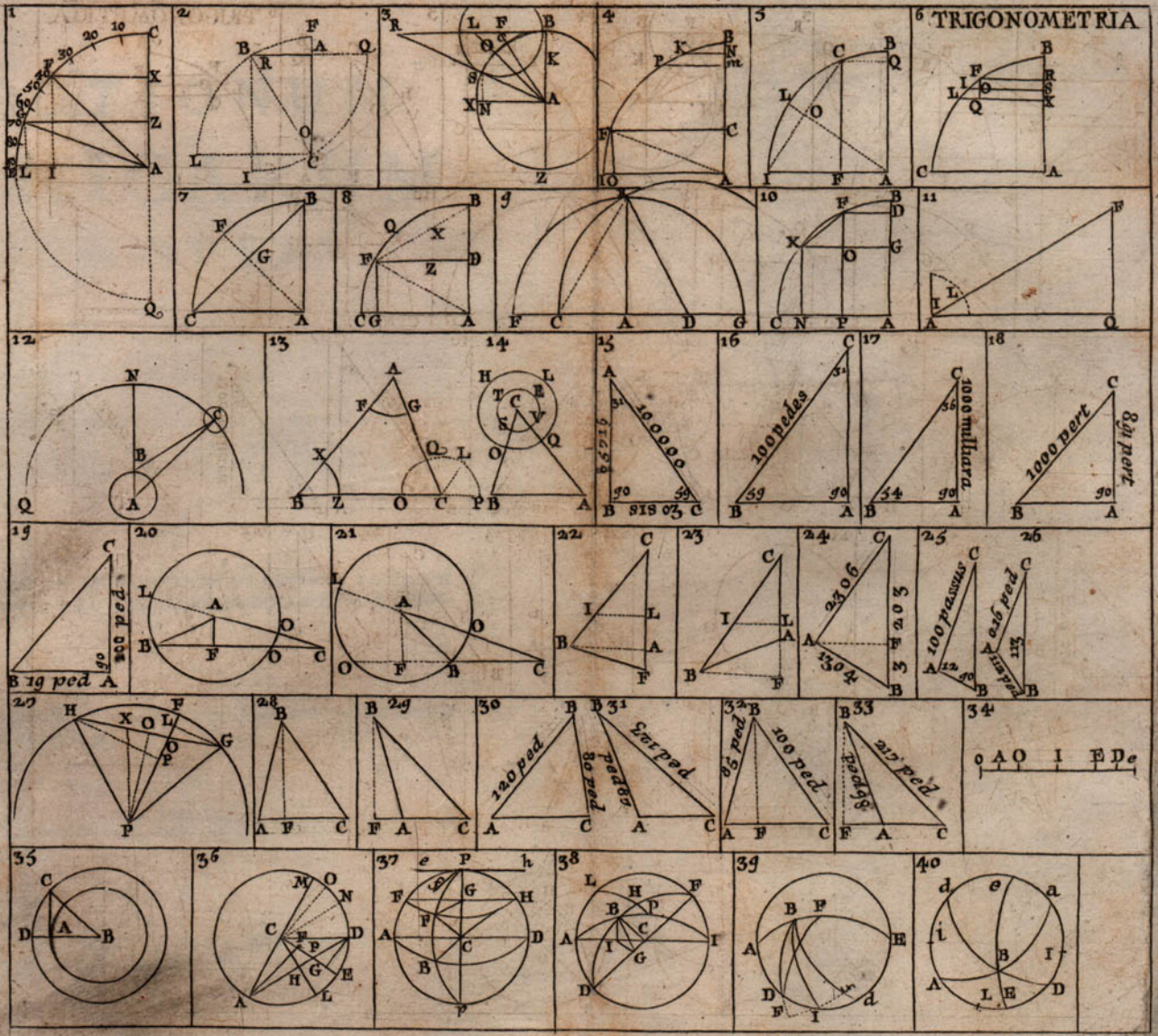
	7. Latera, & anguli.	can.7.
	8. Latera, & ſegmenta verticis.	can.8.
Combin.	9. Latera, & ſegmenta baſis.	can.10.
	10. Anguli, & ſegmenta verticis.	can.11.
	11. Anguli, & ſegmenta baſis.	can.9.

Pro inveniendis ſegmentis in caſu datorum laterum, vel angulorum.

XII. *Cotangens dimidiæ baſis ad tangentem ſemidifferentiæ, ſegmentorum, ut cotangens ſemiſummæ laterum ad tangentem ſemidifferentiæ.*

XIII. *Tangens dimidii anguli verticalis ad tangentem ſemidifferentiæ ſegmentorum, ut cotangens ſemiſummæ angulorum ad baſim ad tangentem ſemidifferentiæ.*

SECTIO-


TRIGONOMETRIA
100000
100 pedes
1000 milliara
1000 pert
8 pert
200 ped
19 ped
2306
3203
1304
100 passus
216 ped
120 ped
80 ped
68 ped
123 ped
85 ped
100 ped
86 ped
217 ped

DIMOSTRAZIONE FACILE

D'UNA PRINCIPALE PROPRIETÀ

DELLE SEZIONI CONICHE



Dimoſtrazione facile d' una principale proprietà delle Sezioni Coniche, la quale non depende da altri Teoremi Conici; e Diſegno d' un nuovo metodo di trattare queſta Dottrina.

ARTICOLO XIX.

NEL leggere il breve ma elegantiſſimo libro ſcritto da *Giacomo Stirling* per illuſtrare il trattato del Neutono intitolato *Enumeratio Curvarum Tertii Ordinis*, c' incontrammo nella Propoſizione X, dove ſi dimoſtra, che ſe in una Curva del ſecondo ordine eſpreſſa per l' equazione $yy + ax + b \times y + cx^2 - dx = o$ due linee rette, terminate ciaſcuna da detta Curva ſi ſeghino in un punto; il rettangolo delle parti di una, intercette tra il punto del ſegamento e la Curva al rettangolo delle parti dell' altra, ſimilmente intercette tra la Curva e il medeſimo ſegamento, ſono in una data ragione, purche ſia data l' inclinazione delle dette due linee. La dimoſtrazione è bella e breviſſima; ma però aſtratta, e fondata ſopra un Teorema, che ſi dimoſtra in Algebra, cioè che il termine ultimo d' un' equazione è il prodotto di tutte le radici della medeſima. Il ſuddetto Autore ſoggiunge: *Ex hac propoſitione tanquam totidem Corollaria fluunt omnia, quæ tradere ſolent Auctores de Sectionum Conicarum diametris, verticibus, lateribus rectis & tranſverſis & ratione contentorum ſub parallelarum ſegmentis*. Queſto ſarebbe un altro metodo di trattare la dottrina Conica, principiandola dalla ſuddetta propoſizione. Ma in tutti gli Scrittori de' Conici ſi trova dimoſtrata dopo una lunga ſerie di Teoremi precedenti; e la dimoſtrazione è molto proliſſa ed implicata. Dimandammo per tanto al P. *Boſcovich* Profeſſore di Mattematica nel Collegio Romano, ſe ſi poteſſe col metodo Sintetico dimoſtrare queſta proprietà delle ſezioni Coniche independentemente da altre loro proprietà; Ci riſpoſe d' averne già da qualche tempo la dimoſtrazione, dedotta ſolamente da una

definizione, è un Lemma Elementare: che anzi aveva il disegno d'un nuovo Trattato Sintetico de' Conici, nel quale dalla detta definizione e Teorema deduceva quasi immediatamente le principali proprietà delle Sezioni Coniche; e che già aveva promesso questo trattato in due sue Dissertazioni, una dell'anno 1743. *de Motu Corporis attracti in centrum* &c. dove da quella definizione aveva ricavata la dimostrazione sintetica del Problema Astronomico diretto ed inverso delle forze Centrali; l'altra intitolata *Nova methodus adhibendi Phasium Observationes* &c. dell'anno 1744. Questo si fatto Trattato è appunto secondo l'idea contenuta nelle sopra riferite parole di *Stirling*, ed ha di più il pregio d'essere Sintetico. Crediamo che a' giovani amatori della Geometria sarà grato, che noi communichiamo loro una sì bella dimostrazione, come allora ci fu data in Latino dall'Autore; riserbandoci a dare in un altro Articolo quattro o cinque altre dimostrazioni intorno a' Diametri, Vertici, Lati retti e trasversi, immediatamente ricavate dalla detta proprietà, come pure intorno a' Fuochi e Asintoti similmente dedotte a dirittura dalla definizione suddetta.

Def. I. *E puncto quovis* B (fig. 1.) *cujusdam lineæ ducta recta* BF *ad datum punctum* F, & BP *perpendiculari ad rectam* Pp *positione datam, sint semper* FB *ad* BP *in ratione data. Lineam illam dico* Sectionem Conicam: *Si ratio fuerit minoris inæqualitatis* Ellipsim, *si æqualitatis* Parabolam, *si majoris inæqualitatis* Hyperbolam. *Rationem autem datam dico* Rationem definitivam; *punctum* F Focum; *rectam* Pp Directricem.

Corol. I. *Si ducatur quævis alia* BA *inclinata ad directricem in quovis dato angulo; erit etiam* FB *ad* BA *semper in ratione data.*

Nam ratio FB *ad* BA *componitur ex ratione definitiva data* FB *ad* BP, & *ex ratione* BP *ad* BA, *quæ, ob angulum* P *rectum, & ang.* A *datum, est ratio data, & est eadem, ac ratio sinus anguli* A *ad radium.*

Lemma. *Si ex vertice* P (fig. 2.) *trianguli Isoscelii* DPE

duca-

ducatur recta PF *ad quodvis punctum* F *ſumtum vel intra baſim, vel in eadem producta; erit rectangulum* DFE, *æquale differentiæ quadratorum* PE, PF.

Secta enim bifariam DE *in* I, *ductaque* PI, *quæ erit ipſi perpendicularis ob angulos ad* I *æquales* (per 8. l. 2.) *erit* (per 47. l. 1.) *quadratum* EP *æquale quadratis* EI, IP, *& quadr.* PF *quadratis* FI, IP; *quare ob quadratum* PI *commune erit differentia quadratorum* PE, PF *eadem ac* EI, FI. *Sed rectangulum* DFE *eſt differentia horum* (per 5. l. 2.) *quando* F *jacet intra* D *&* E; *& per 6. lib. 2. quando jacet extra. Igitur idem rectangulum* DFE *eſt differentia quadratorum* PE, PF; Q. E. D.

PROP. *Si binæ rectæ* CB, cb, *fig. 3 & 4, datam ſemper inclinationem habentes ſibi invicem occurrant in* P, *& ſectioni Conicæ illa in* B, C, *hæc in* b, c; *erit rectangulum* BPC *ad* bPc *in ratione data.*

Occurrant enim directrici in A, *&* a, *& ductis ex* F *rectis ad* B, C, b, c, A, a *ducantur ex* P *rectæ* PD, PE, Pd, Pe *parallelæ rectis* FC, FB, Fc, Fb, *occurrentes rectis* AF, aF *productis, ubi opus eſt, in* D, E, d, e, *ducaturque* BG *parallela* Pa *uſque ad directricem.*

Erit * *primo* EP *ad* PA, *ut* FB *ad* BA (*ob* EP, FB *parallelas*), *ſive ut* FC *ad* CA (per cor. 1. def. 1.), *ſive ut* PD *ad eandem* PA, (*ob* CF, PD *parallelas*). *Quare* PE, *æqualis* PD, *&* (*per lem:*) *rectangulum* EFD *æquale differentiæ quadratorum* EP, PF, *& rectangulum* EAD *æquale differentiæ quadratorum* EP, PA; *& idem habebitur in rectangulis* eFd, dae.

Rurſus † EP *ad* PA, *ut* FB *ad* BA, (*ob* EP, FB *parallelas*) *&* PA *ad* Pa, *ut* BA *ad* BG [*ob* Pa, BG *parallelas*] *ac* Pa *ad* Pe *ut* ba *ad* bF, [*ob* b F, Pe *parallelas*] *ſive ut* BG *ad* BF (*per cor. defin.*). *Quare ex æqualitate ordinata* EP *ad* Pe *ut* FB *ad ipſam* FB *in ratione æqualitatis. Erunt igitur æquales* PE, Pe *æquales, & proinde, differentiæ quadratorum* EP, FP, *&* eP, FP, *ſive rectangula* EFD eFd *æqualia.*

Jam

---

* EP. PA :: FB. BA :: FC. CA :: DP. PA quare EP = DP

† EP. PA :: FB : BA & PA. Pa :: BA. BG & Pa, Pe :: ba. bF :: BG. BF. Ergo EP. Pe :: FB, BF, & ideo EP = Pe.

Jam vero ✠ BP *ad* FE *ut* AP *ad* AE [*ob* FB, EP *parallelas*], *&* CP *ad* FD *ut* PA *ad* DA (*ob* FC, DP *parallelas*). *Quare rectangulum* BPC *ad* EFD *ut* AP *quadratum ad rectangulum* DAE, *ſive ad differentiam quadratorum* AP, PE, *quæ ratio datur data inclinatione rectæ* CB; *eſt enim* AP *ad* PE *in ratione* AB *ad* BF, *quæ in illo caſu datur* (*per corol. defin.*) *ac proinde datur & ratio quadrati* AP, *ad differentiam quadratorum* AP, PE. *Eodem argumento datur etiam ratio rectanguli* eFd, *æqualis ipſi* EFD *ad* bPc. *Quare datur & ratio ex his compoſita rectanguli* BPC *ad* bPc Q. E. D.

COROL. I. *Dicatur radius* R, *ſinus inclinationis* BC *ad directricem* S, *ſinus* bc = s, *ratio definitiva* R *ad* P, *& ratio illa data* BPC *ad* bPc *erit ratio* $P^2 - s^2$ *ad* $P^2 - S^2$.

Nam ratio AP *ad* PE, *ſive* AB *ad* BF, (*per cor. def.*) *componitur ex rationibus* R *ad* S, *&* P *ad* R, *ac proinde eſt ratio* P *ad* S. *Quare ratio quadrati* AP *ad differentiam quadratorum* AP, PE *ſive rectanguli* BPC *ad rectangulum* EFD *erit* P^2 *ad* $P^2 - S^2$; *eodem argumento rect.* eFd, *æquale ipſi* EFD, *ad rectangulum* bPc *eſt ut* $P^2 - s^2$ *ad* P^2. *Erit igitur* BPC *ad* bPc (*ex æqualitate perturbata*) *ut* $P^2 - s^2$ *ad* $P^2 - S^2$. Q. E. D.

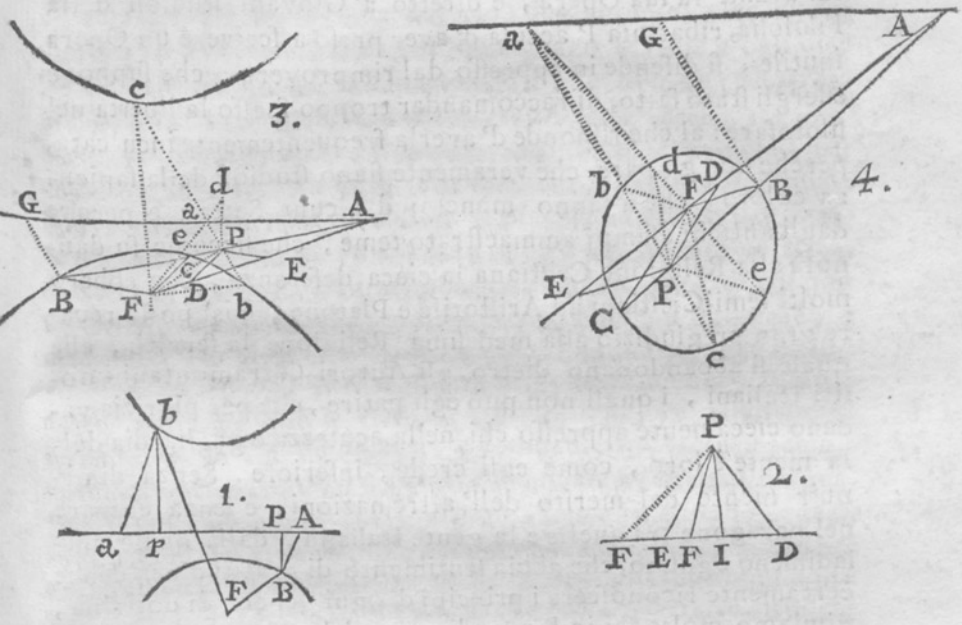
COROL. II. *In Parabola ſunt ea rectangula in ratione reciproca duplicata ſinus inclinationis ad axem.*

Nam in Parabola P = R *per def.* 1. *Quare* $P^2 - S^2 = R^2 - S^2$, *erit quadratum coſinus anguli, cujus ſinus* S, *nimirum quadratum coſinus inclinationis ad directricem, ſeu ſinus inclinationis ad axem, qui ipſi directrici eſt perpendicularis. Eſt autem ratio* $R^2 - s^2$ *ad* $R^2 - S^2$ *reciproca rationis* $R^2 - S^2$ *ad* $R^2 - s^2$.

COROL. III. *Si punctis* B, *&* C *coeuntibus ſecans in fig.* 4. *abeat in tangentem, abit rectangulum* CPB *in quadratum tangentis, & coeuntibus etiam punctis* D, E *adhuc demonſtratio eſt eadem.*

Anto-

✠ BP. FE :: PA. AE, & CP : FD :: PA. DA; ergo BPC. EFD :: AP^2. EAD.



Antonii *Genuenſis* in Regia Neapolit. Academia Profeſs. Elementorum Artis Logico-Criticæ libri v. Neapoli apud Petrum Palumbum 1745. in 8°.

ARTICOLO XX.

SOno oramai in ſi gran numero i libri, che trattano della Logica, che potrebbe parere ad alcuno vana opera avere intrapreſo il Sig. *Genoveſe*, ſcrivendo nuovamente ſopra una ſi trita materia. Ma egli crede di eſſere baſtantemente giuſtificato d' aver preſa queſta fatica, per non eſſerci ancora un trattato compiuto della Logica; la quale egli dice ſaviamente che allora ſarà giunta al grado della ſua perfezione, quando non mancherà più niente all'umana ſapienza, che è quanto dire quando l' anime noſtre ſaranno colà ritornate, donde

trarſi. Altra è la reſiſtenza, che ſi trova ne' corpi nel ſeparar-ſene le parti, la quale può accreſcerſi fino a farſi il corpo duriſſimo, e diminuirſi a un grado, che quello divenga liquidiſſimo; altra è la reſiſtenza, colla quale un corpo reſiſte ad eſſere compenetrato da un altro, ſicche ambedue occupino lo ſteſſo luogo*. Il noſtro Autore vuole dimoſtrare particolarmente la ſolidità de' fluidi, la quale fugge dalla noſtra attenzione, perche, com' egli dice, le loro parti cedono alla ſpinta della noſtra mano; o perche, come noi crediamo, ſi confondono volgarmente le due reſiſtenze, che abbiamo quì ſopra diſtinte.

Egli prende per tanto l' aria come la più fluida tra tutti i corpi, che poſſono tenerſi chiuſi in un vaſo. Queſte ſperienze ſi riducono a far vedere, che non può un liquido entrare in un vaſo, ſe l' aria non gli ceda il ſuo luogo: ella potrà eſſere compreſſa e ridotta ad occupare minore ſpazio; ma non mai ſi farà ch' ella non ne tenga alcuno. Se noi ſpingiamo perpendicolarmente in un fluido una tromba di vetro chiuſa per di ſopra col dito, noi finalmente troveremo una reſiſtenza inſuperabile, quando l' aria interna non potrà più comprimerſi dal fluido, ch' entra per di ſotto nella tromba. I vaſi di collo ſtrettiſſimo non poſſono ſenza gran difficoltà empierſi, perche il fluido che s' infonde, proibiſce l' uſcita all' aria, che deve fargli luogo.

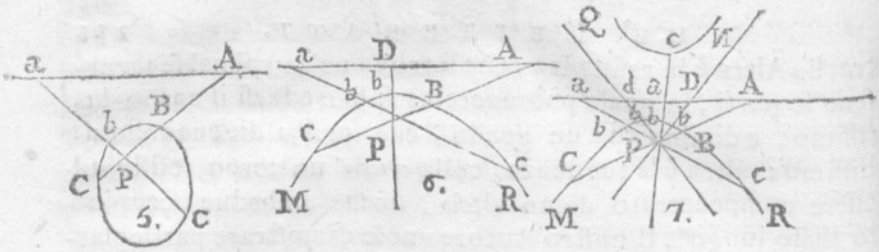
Continuaz. dell' Art. XIX. del Meſe paſſato ſulle Sezioni Coniche.

ARTICOLO XXIII.

COrol. IV. *Ellipſis redit in orbem, circa quodvis punctum aſſumtum intra chordam cujuſvis arcus. Parabola unicum ramum habet binis cruribus hinc inde in infinitum protenſis. Hyperbola binos ejuſmodi ramos ad partes contrarias.*

Sit in fig. 5. 6. 7. *punctum* P *in quavis chorda* CB *arcus* BbC *continui, circa quod ipſa* CB *motu angulari giret, & anguli* A, *quo ipſa ad directricem inclinatur ſinus ſit* S. *Patet ex corol.* 1. *fore rectangulum* BPC *ſemper in ratione reciproca* P^2—S^2. *Quoniam autem ſinus* S *ſemper eſt minor radio* R *præter caſum anguli recti, quo ipſi æquatur, &* R *in Ellipſi eſt minor quam* P, *in Parabola ipſi æqualis, in Hyperbola major; erit in Ellipſi in fig.* 5. *ſemper* S *minor quam* P, *in Parabola in fig.* 6. *fient æqua-*

les



les in poſitione DP *normali ad axem, in Hyperbola in fig.*7. *fient æquales in quadam inclinatione data* PD, *tum* S *fiet major, ac iterum poſt poſitionem perpendicularem decreſcens fiet æqualis in directione* Pd *contraria & æquali, ac demum iterum minor.*

Quare quantitas P^2-S^2, *erit ſemper in Ellipſi in fig.* 5. *finita & poſitiva. Ac proinde etiam rectangulum* BPC *finitum ſemper erit & poſitivum, ac excurrente puncto* B *per arcum continuum* BbC, *oportebit etiam* C *excurrat per arcum continuum* CcB, *nec uſquam aut in infinitum recedat, aut ad partes contrarias abeat.*

*In fig.*6. *in Parabola* P^2-S^2 *decreſcet ultra quoſcunque limites dum* A *accedit ad* D, *tum evaneſcet in* D, *ac verſus* a *iterum creſcet, ſed manebit quantitas poſitiva. Quare rectangulum* BPC *augebitur in infinitum, tum decreſcet, & punctum* C *abibit in infinitum per crus* C M, *donec puncto* A *appellente ad* D *nuſquam jam ſit, ac iterum per crus alterum* RcB *jacens ex eadem parte regredietur, & abibit in* B.

*In fig.*7. *eadem prorſus demonſtratione punctum* C *prius percurrit crus* CM, *donec abeat in infinitum, & puncto* A *appellente ad* D *nuſquam jam ſit: tum* A *vagante per* Dd, *mutatur* P^2-S^2 *e poſitivo in negativum, ac proinde* C *abit ad partes oppoſitas, & regreditur per crus* Nc *rami oppoſiti* NcQ, *ac iterum aſcendit in infinitum per crus* cQ, *donec* A *appellente ad* d *iterum nuſquam eſt, & pergente* A *ulterius, ac facto rurſum* P^2-S^2 *poſitivo regreditur per crus infinitum* RB *prioris rami motu continuo.*

Scholium. *Patet ex iis, quæ dicta ſunt mira quædam indoles locorum geometricorum, & Sectionum Conicarum relatio inter ſe, in hypotheſi quod infinitum abſolutum non repugnet. Singularum perimeter locum geometricum conſtituit quodam veluti continuo ductu in ſe redeuntem, & ſi crure aliquo in infinitum receſſit, ſemper cum alio crure pariter in infinitum recedente, & in infinitum remoto a crure priore, in infinita licet illa diſtantia connexum, & coaleſcentem.* Elli-

Ellipſis in fig. 5. in orbem redit in diſtantia finita : In Parabola in fig. 6. Crura M, & R, *quæ in infinitum a ſe invicem recedunt, conſiderantur, tanquam ſi quodammodo in infinito illo ſpatio coirent, & Ellipſim efformarent in infinitum productam. Bini Hyperbolæ rami in fig. 7. ſunt quædam veluti binæ ſemiellipſes, tanquam ſi crus* M *cum oppoſito* N, & Q *cum* R *in infinita diſtantia connecterentur.*

Ea patebunt ſi dum recta PA *motu continuo revolvitur circa punctum* P, *mentis acies defigatur in ipſum punctum* C *motu pariter continuo progrediens. Id, poſtquam in fig. 6. motu continuo peragravit totum crus infinitum* cB; *momento temporis quo* A *eſt in* D, *ſaltu quodam infinito tranſilit totum ſpatium infinitum, quod eſt inter crura, & abit in crus* RB; *tanquam ſi eo momento quo* A *eſt in* D, *eſſet* C *in toto illo infinito ſpatio, quod eſt inter crura, & id infinitum ſpatium eſſet unicum punctum, in quo bina crura coirent, & efformarent Ellipſim quandam in infinita diſtantia coeuntem.*

In fig. 7. in Hyperbola punctum C *peragrato toto crure* CM, *momento temporis, quo* A *pervenit ad* D, *tranſit in crus* cN *recedens in infinitum ad partes oppoſitas; tanquam ſi ea crura in illa infinita diſtantia coirent: tum* A *ulterius pergente, percurrit* C *totum ramum* NcQ, *& novo ſaltu infinito e crure* Q *in* R, *tanquam crura hæc in infinita diſtantia connecterentur, continuat motum per* RB. *Ope eorum nexuum infinitorum bini rami Hyperbolæ ſunt quædam veluti binæ ſemiellipſes ad partes oppoſitas in infinitum protenſæ, & in infinita illa diſtantia coeuntes, iiſdem fere proprietatibus præditæ, quibus veræ ſemiellipſes.*

Hæc & multa alia ejuſmodi ex locorum geometricorum continuitate profluunt admiſſo infinito abſoluto, & in ſe determinato : quæ tamen pro paradoxis jure haberi debent, & ex iis contradictiones deduci poſſent haud abſimiles iis, quas propoſuimus in Differt : de natura, & uſu infinitorum, & infinite parvorum. *Nobis, qui infinita non admittimus niſi tantum indefinita, in quibus nimirum nos magnitudinem, quæ in ſingulis caſibus certa & finita erit, non definimus, ſed ab ea cogitationem abſtrahimus, nulla ſunt ejuſmodi paradoxa, & Parabolam, ac Hyperbolam totas in infinitum protenſas cenſemus non poſſe exiſtere, ut nec rectam infinitam, ſed ſolum ſegmenta quædam finita, & determinatæ magnitudinis ſingula.*

EFFE-

mente, ſenza chiederne ſcuſa, riferirli, come prima di lui avea fatto il Card. *Baronio*, e ſono i ſeguenti all'anno 1065:

Papam rite colo, ſed te proſtratus adoro:
Tu facis hunc dominum, te facit ille Deum.

E dello ſteſſo Calibro queſti altri:

Vivere vis Romæ? clara depromito voce:
Plus Domino Papæ, quam Domno pareo Papæ.

Continuazione dell'Art. XXIII. del paſſato Meſe di Luglio.

ARTICOLO XXXIII.

Schol. 2. *Addemus jam theoremata nonnulla, ex quibus innoteſcat, quam facile ex ipſa definitione, & ex hoc theoremate* 1., *quod præmiſimus, præcipuæ ſectionum conicarum proprietates profluant omnes; quæ tamen ita innuemus, ut eorum caſus multiplices, & quæ ex iis plurima deducuntur, non attingamus, ea omnia in Conicarum ſectionum elementis olim exhibituri.*

Theor. 2. *Recta quæ binas chordas parallelas bifariam ſecat, eſt Diameter, quæ ſecat bifariam reliquas omnes iiſdem parallelas: & ſi ea bis occurrat perimetro, dicanturque eæ chordæ ejus ordinatæ, & interſectiones cum perimetro ejus vertices; erunt quadrata ſemiordinatarum ut rectangula ſub ſegmentis diametrorum per eas abſciſſis a binis verticibus.*

In fig. 8, 9, 10, *recta* AB *ſecet chordas* CD, FK *bifariam in* E, & H, & *occurrat perimetro in* A, & B. *Sit autem quævis alia chorda* LP *iiſdem parallela. Dico Primo, eam a recta* AB *bifariam ſecari in* N. *Secundo eſſe* NPq *ad* EDq, *ut rectangulum* BNA *ad* BEA.

Demonſtratur. *Rectæ ductæ ex* C, D *parallelæ* EH *occurrant perimetro iterum in* Q, & R, *ac chordis* FK, IP *in* G, I, & M, O. *Quoniam* HG, HI *æquantur æqualibus* EC, ED, *æquantur etiam inter ſe; ac proinde ob* HF, HK *æquales, erunt etiam æquales* GF, IK, & IF, GK. *Quare æqualia erunt & rectangula* FGK, FIK, *adeoque &* CGQ, DIR, *quæ*

per theor. 1. *habent ad ea eamdem rationem. Quamobrem ob* CG, DI *æquales, erunt &* GQ, IR, *& totæ* CQ, DR *æquales, & ob æquales* CM, DO, *erunt etiam æquales* MQ, OR, *& æqualia rectangula* CMQ, DOR, *adeoque & rectangula* LMP, LOP, *quæ ad ea habent rationem eandem per theor.* 1., *æqualia erunt; quæ ſi addantur quadratis rectarum* NM, NO *æqualium æqualibus* EC, ED, *vel ab iis demantur, fient quadrata* NL, NP *æqualia, & ipſæ* NL, NP *æquales. Quod erat primum.*

Rurſus eſt rectangulum LNP, *ſive ob* NL, NP *æquales quadratum* NP *ad rectang.* BNA, *ut* CED *vel* EDq *ad* BEA; *ſive alternando* NPq *ad* EDq, *ut* BNA *ad* BEA. *Quod erat ſecundum.*

Schol. *Facile demonſtratur diametros in Ellipſi & Hyperbola tranſire omnes per idem punctum, in quo ex quæ bis perimetro occurrunt ſecantur bifariam, quod punctum dicitur centrum, & in Parabola eſſe omnes diametros directrici perpendiculares; unde fit, ut abeuntibus in ea punctis* QBR *figuræ* 8. *in infinitum ſint quadrata* NP, ED *ut abſciſſæ* AN, AE *ab unico vertice* A, *quod ipſum etiam ex hoc theoremate infertur, in quo abeunte puncto* B *in infinitum, ratio* NB *ad* EB *fit ultimo ratio æqualitatis & rectangulum* BNA *ad* BEA, *ut* NA *ad* EA.

Pariter quæ pertinent ad latera recta hinc communi methodo nullo negotio deducuntur.

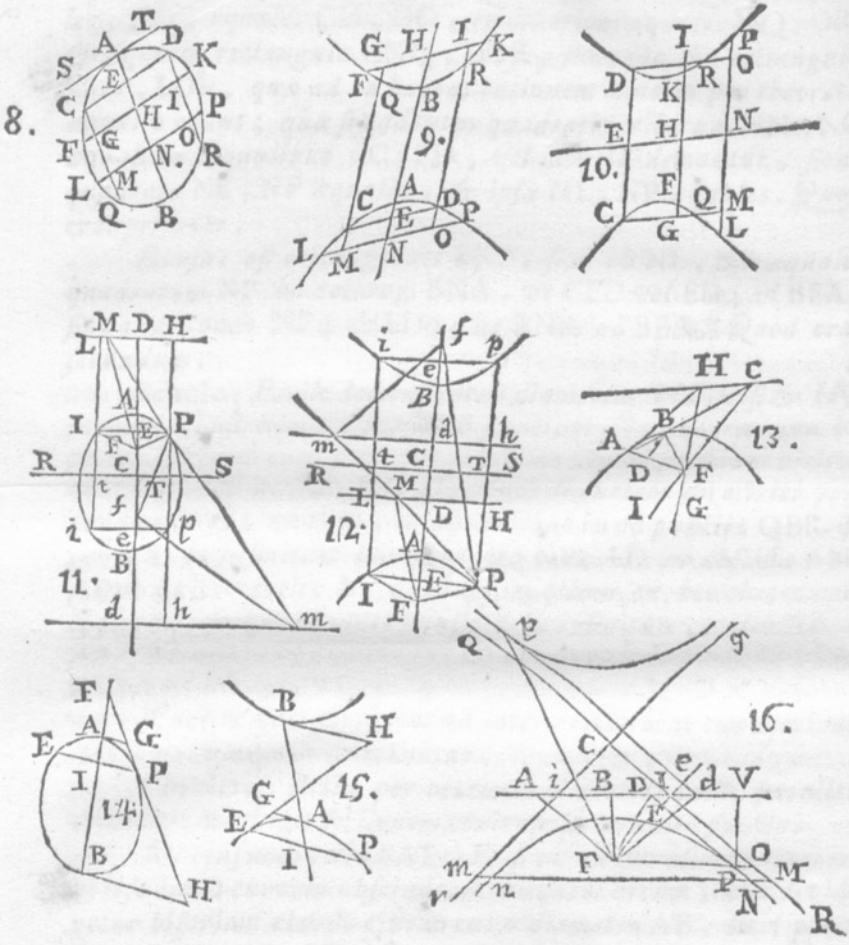
Corol. 1. *Recta per verticem diametri ducta parallela ordinatis contingit ſectionem conicam in eo unico puncto.*

Sit ejuſmodi recta SAT: *Et ſi ea ex utralibet parte immerſa intra curvam abſcinderet aliquem arcum, non divideretur bifariam chorda ejus arcus a diametro* AB, *licet parallela chordis* CD, FK. *Quod eſt abſurdum.*

Corol. 2. *Ordinatæ æqualiter diſtantes a binis verticibus altera ab altero, æquales ſunt, & viceverſa quæ æquales ſunt ita æqualiter diſtant.*

Si enim ſint ejuſmodi ordinatæ in fig. 8, *&* 9. FK, LP, *patet fore æqualia rectangula* AHB, ANB; *ac proinde & quadrata* HK, NP *& ipſæ rectæ, ac earum duplæ* FK, LP *æqua-*

les.


8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.

les. Inverſa autem propoſitio inverſa demonſtratione evincitur.

Corol. 3. *Diametri, quæ chordas directrici parallelas & perpendiculares habent pro ordinatis in Ellipſi & Hyperbola, eas ſecant ad angulos rectos; unde fit, ut dicantur Axes, & illa quidem tranſverſa, hæc conjugata.*

Sit enim in fig. 11. & 12. *quævis chorda* IP *parallela directrici, quæ rectæ* FD *ductæ ex foco ad directricem ad angulos rectos occurrat pariter ad angulos rectos in* E. *Ductis* FP, FI, *tum* IL, PH *perpendicularibus directrici, hæ æquales erunt, ac proinde, & illæ, quæ ad has habent eandem rationem per defin., erunt æquales, & ob latus* FE *commune triangulis rectangulis* FEP, FEI, *erunt &* EP, EI *æquales. Quare ipſa* FD *quæ chordas omnes directrici parallelas perpendiculariter ſecat, eas ſecat etiam bifariam, eſtque earum diameter: unde patet primum.*

Recta RS *ſecet bifariam axem tranſverſum* BA *in* C & *chordam* Pp *in* T *perpendicularem directrici, ac proinde ipſi* AB *parallelam, ducanturque* PEI, pei *ordinatæ axi tranſverſo, ac proinde ipſi perpendiculares. In parallelogrammo* PEep, *erunt æquales* PE, pe. *Quare & totæ ordinatæ* PI, pi *æquales, adeoque per corol.* 2. *hujus erunt æquales etiam* AE, Be, *adeoque &* CE, Ce *æquales. Hinc* CE, TP *dimidiæ æqualium* Ee, Pp *erunt æquales; quæ cum & parallelæ ſint, erunt etiam parallelæ, & æquales* CT, EP; *ac proinde* CT *perpendicularis* AB, & *ordinatis ſuis* Pp. *Patet igitur & ſecundum.*

Corol. 4. *Binæ ſemiellipſes hinc inde ab axe conjugato, & bini rami Hyperbolæ ſunt prorſus & æquales & ſimiles; & Ellipſis, ac Hyperbola alium focum, & aliam directricem habent pertinentes ad alium verticem axis tranſverſi cum iiſdem prorſus proprietatibus.*

Patet ex præcedenti. Si enim concipiatur tota figura converti circa axem conjugatum RS, *ob angulos* T, t *rectos, & rectas* Tp, ti *æquales rectis* TP, tI *abibunt omnia puncta* IAP *in* iBp, *ac focus* F, & *directrix* DH *in alium focum* f, & *aliam directricem* dh, & *viceverſa* iBp *ſuccedet in locum* IAP, & f, *ac* dh *in locum* F, *ac* DH.

Schol. 2.

Schol.2. *Ex ipſa defin.*, & *ejus corol.*1. *eruitur facillime ſequens theorema, quod ponendum eſſet pro ejus corol.*2., *ſed ibi omiſſum eſt, quia theor.*1. *ipſo non indigebat; hic autem ejus uſus occurrit.*

Rectæ, quæ ex foco ducuntur ad interſectionem tangentis cum directrice, & ad contactum, ſunt ſibi invicem perpendiculares.

*Nam in fig.*13. *chorda* AB *producta occurrat directrici in* C & *ductis ex foco* F *rectis* FA, FB, FC, *ſit* BD *parallela* CF. *Erit per corol.* 1. *defin.* AC. AF :: BC. BF. *Eſt autem ob* BD, CF *parallelas* AC. AF :: BC. DF. *Quare* DF, BF *æquantur*, & *anguli* FBD, FDB, *ac producta* CF *in* I *anguli* CFB, IFA *eorum alterni æquales erunt. Abeat jam ſecans* ABC *in tangentem* AH; & *coeuntibus punctis* A, B *ac rectis* FA, FB, *abibunt anguli* CFB, IFA *in* HFA, GFA; *qui proinde æquales erunt*, & *recti.*

Theor.3. *Rectarum, quæ a binis focis ducuntur ad quodvis perimetri punctum, ſumma in Ellipſi, & differentia in Hyperbola æquatur axi tranſverſo*, & *tangens per idem punctum ducta æquales cum iis angulos continet.*

*Nam in fig.*11. & 12. *rectæ* FP, fP *ad* PH, ph *perpendiculares directrici habent per defin.*, & *corol.*4. *theor.*2. *eandem rationem, quam* FA, fA *ad* AD, Ad. *Quare* & *illarum ſumma in fig.*11., *ac differentia in fig.*12. *ad* Hh *ſummam pariter vel differentiam* PH, Ph *erit ut* AB, *ſumma vel differentia* FA, fA *ſeu* fB, fA, *ad* Dd *ſummam vel differentiam* AD, Ad. *Quare ob* Hh, Dd *æquales, erit etiam ſumma* FP, fP *in Ellipſi*, & *differentia in Hyperbola æqualis axi tranſverſo* AB. *Quod erat primum.*

Si autem tangens ducta per P *occurrat binis directricibus in* M, & m, & *ducantur* FM, fm, *erunt anguli* MFP, mfP *recti per theor. ſcholii ſuperioris*, & *anguli* FMP, fmP *ambo ſimul acuti. Erit autem* FP *ad* PH, *ut* fP *ad* Ph, & *alternando* FP *ad* fP *ut* FH *ad* fh, *ſive* (*ob* HM, hm *parallelas*) *ut* PM *ad* Pm. *Quare ſimilia erunt triangula* FPM, fPm, & *anguli* FPM, fPm *æquales. Quod erat ſecundum.*

Schol. *In Parabola ubi unicus eſt focus, æque facile demon-*

demonſtratur tangentem cum recta quæ ad focum ducitur, & cum altera quæ ducitur parallela axi tranſverſo, continere angulos æquales. Id autem hinc etiam deducitur. Nam abeunte foco f *in infinitum cum vertice* B *in fig.* 11., *abit Ellipſis in Parabolam, & recta* Ff *evadit parallela axi.*

Theor. 4. *Ordinata, & tangens ductæ per idem punctum diametrum ſecant in eadem ratione.*

Tangens ducta per P *in fig.* 14. & 15. *occurrat diametro* AB *in* F, *& ordinata* PE *in* I. *Dico fore* AI. IB :: AF. FB.

Nam rectæ per A & B *ductæ parallelæ* FP *quæ per corol.* 1. *theor.* 2. *erunt tangentes, occurrant rectæ* FP *in* G & H. *Erit per theor.* 1. *quadratum* GP *ad* GAq, *ut* PHq *ad* HBq. *Quare alternando, & dimidiando rationes erit* GP *ad* PH, *ſive* AI *ad* IB, *ut* GA *ad* HB, *ſive ut* AF *ad* FB. *Q. E. D.*

Schol. *In Parabola æque facile demonſtratur fore* AI = AF; *quod hinc etiam eruitur. Nam alternando in fig.* 14. *erit* AI *ad* AF *ut* IB *ad* FB, *quæ ratio puncto* B *recedente in infinitum fit ratio æqualitatis.*

Theor. 5. *Hyperbola binas habet aſymptotos, in quarum angulis ad verticem oppoſitis jacent bini ejus rami, ita ut perimeter ad eas accedat ultra quoſcunque limites, nec tamen uſquam cum iis concurrat.*

Demonſtratur. *Sit in fig.* 16. F *focus*, FB *perpendicularis directrici, & capta* FA *ad* FB *in ratione definitiva, quæ in Hyperbola eſt majoris inæqualitatis, ea applicetur uſque ad directricem, ducaturque* FI *ipſi perpendicularis occurrens directrici in* I, *& per* I *recta indefinita* QR *parallela* AF, *quæ erit aſymptotus.*

Si enim punctum P *fuerit ad perimetrum, & ducatur* PD *parallela* QI *vel* FA *uſque ad directricem erit* PD *æqualis* FP; *nam erit ad* PV *perpendicularem directrici, ut* FA *ad* FB *ob ſimilia triangula* AFB, DPV, *ſive in ratione definitiva, vel ut* FP *ad eandem* PV. *Et viceverſa ſi fuerit* FP *æqualis* PD *erit* P *ad perimetrum; erit enim* FP *ad* PV *ut* PD *ad* PV, *ut* FA *ad* FB *in ratione definitiva.*

Hinc nullum punctum O *rectæ* QR *poteſt eſſe ad perimetrum. Nam ob angulum* FIO *rectum non poteſt eſſe* FO = OI.

At

At ſi per quodvis punctum E *rectæ* FI *citra* I *ducatur* DP *parallela* IR, *adeoque perpendicularis ad* FI, *erit angulus* FDE *acutus, & facto angulo* DFP *ipſi æquali, concurrent* FP, DE *citra directricem alicubi in* P, *eritque* FP=PD; *adeoque* P *ad perimetrum. Eodem autem pacto ſi per punctum* e *ultra* I *ducatur* de *parallela ipſi* IR, *& fiat angulus* dFp *æqualis acuto* Fde, *concurrent* Fp, de *alicubi in* p *ultra directricem, eritque* p *ad perimetrum.*

Hinc totus ramus citerior jacebit citra rectam QR, *& totus ulterior ultra: & quoniam quævis* DE, *vel* de *utcunque proxima* QR *occurrit perimetro in* P, *vel* p *accedet perimeter ad rectam* QR *ultra quoſcunque limites, quin tamen uſquam cum ea congruat; ac proinde erit* IR *aſymptotus.*

Quoniam autem FA *potuit applicari etiam ad partes oppoſitas reſpectu* B; *alia recta* qir *ipſi ita applicatæ parallela erit aſymptotus, & jacebit ramus citerior in angulo* rCR, *& ulterior in* QCq *ad verticem oppoſito.*

Scholium. *Facile demonſtratur* C *eſſe centrum, ut & illud ex quo omnes aſymptotorum hyperbolicarum proprietates pendent, quod nimirum ducta quavis recta, quæ in* Mm *occurrat aſymptotis, & in* Nn *perimetro ſit ſemper* MN=mn. *Id facile demonſtratur ope diametrorum, ſed & deducitur ex theor.* 1. *ſi concipiantur aſymptoti in infinita demum diſtantia concurrere cum perimetro in* Q, q, & R, r. *Nam, ob æquales angulos, quibus binæ aſymptoti inclinantur ad directricem, erit ex formula corol.* 1. *theor.* 1. *rectangulum* NMn *ad* RMQ, *ut* Nmn *ad* rmq, *& alternando* NMn *ad* Nmn, *ut* RMQ, *ſive* CRq—CMq *ad* rmq *ſive* Crq—Cmq; *ſive (ob* CR, Cr *infinitas, & æquales; ac* CM, Cm *finitas) in ratione æqualitatis, unde fit* Mn *ad* nm *ut* Nm *ad* NM, *ſive componendo* Mm *ad* nm, *ut eadem* Mm *ad* NM, *ac proinde* NM=nm.

Hæc quidem præcipua theoremata ſunt, in quibus demonſtrandis plerumque adhibentur methodi ſatis implexæ, & ex quibus cetera omnia ſponte fluunt. Quanto ſimpliciores ſint, & elegantiores noſtræ hæ demonſtrationes noverit ſane, qui eas cum aliorum demonſtrationibus conferet.

METODO DI ALZARE UN INFINITINOMIO

A QUALUNQUE POTENZA



Ora per dimoſtrare l'origine di queſte orazioni, è da ſaperſi, che anticamente gli Avvocati Conciſtoriali difendevano tutte le cauſe Conciſtoriali in Conciſtoro. Tolta poi queſta conſuetudine, dopo che ſi principiarono a trattare le cauſe ne' Tribunali e non più in Conciſtoro, accadeva che venuto il Papa al Conciſtoro pubblico, nell' aſpettarſi o nuovi Cardinali che doveſſero venire a ricevere il Cappello, o Ambaſciatori, rimaneva qualche tempo vacuo; e perciò s' introduſſe il coſtume, che uno degli Avvocati Conciſtoriali fingendo un delitto commeſſo, ſopra quello declamaſſe, e domandaſſe la ſegnatura della commiſſione per la fabbricazione del poſſeſſo criminale contro il reo, e intanto riempieſſe quel tempo. Urbano VIII abolì queſto coſtume, e decretò, che in vece di queſte declamazioni, ſi recitaſſe un' Orazione ſopra i fatti di qualche Servo di Dio, come ſi è detto; e preſcriſſe con una particolare Iſtruzione, inſerita in quel decreto, alcune regole da doverſi ſeguitare dagli Avvocati Conciſtoriali in ordine a ſi fatte Orazioni.

Riſerbiamo a un altro meſe il Riſtretto di ciò, che rimane a riferirſi in queſto primo Volume.

Metodo di alzare un' infinitinomio a qualunque potenza: del P. *Ruggiero Giuſeppe Boſcovich* della Compagnia di Gesù, Profeſſore di Mattematica nel Collegio Romano.

ARTICOLO XXXI.

1 QUanto ſia utile anzi neceſſaria una formola, con la quale ſi alzi un' infinitinomio a qualunque potenza, lo sà chiunque è anche mediocremente verſato negli elementi del calcolo, ſopra tutto ſe ſia infiniteſimale. Più metodi ſono uſciti fin' ora, co' quali ſi ottiene l'intento; ma in tutti quelli, che ſono arrivati a mia notizia, i membri ſeguenti non ſi ritrovano, che coll' ajuto de' precedenti. Eſſendomi venuto in mente un metodo aſſai elegante, e curioſo, per mezzo del quale ſi trova con incredibile facilità la detta for-

formola, e ſi trovano tutti i termini di qualunque ſuo membro, ſenza punto ſupporre già ritrovati i precedenti, e ſenza applicazione di alcun' altra formola; ho giudicato, ſia per eſſere coſa non meno utile, che gradita agli amatori del calcolo il darlo al pubblico con quanto maggiore chiarezza, e brevità ſarà poſſibile nella preſente Memoria; tanto più, che la dimoſtrazione del medeſimo metodo nulla più richiede, che la ſemplice elementare notizia delle prime operazioni del calcolo iſteſſo.

2 Prima però mi conviene ſciogliere un' altro problema, che a prima viſta pare del tutto inutile, e pure nella preſente materia fa tutto il giuoco. Il problema è il ſeguente: *Trovar tutte le maniere, nelle quali un numero dato poſſa dividerſi in parti, che contengano numeri interi, intendendo ſotto nome di numero anche l' unità, e ſotto nome di diviſione, anche una diviſione imaginaria, che ſi faccia pigliando lo ſteſſo numero intero conſiderato come parte unica, e totale di ſe ſteſſo*; o quello che è lo ſteſſo: *Trovare tutte le maniere, nelle quali poſſa un numero dato eſſer formato di parti, che contengano numeri interi*. Queſto problema ſi ſcioglie faciliſſimamente così. Si ſcrivano prima in una riga tante unità, quante ne contiene il numero dato. Indi nella riga ſeconda ſi ſcriva in ultimo un binario, e innanzi tante unità quante ne rimangono a compire detto numero. Dipoi nella terza riga ſi mettano al fine due binarj colle unità reſidue innanzi: nella quarta riga tre binarj colle unità reſidue innanzi, e così in poi fin che ſi può. Finiti tutti i binarj poſſibili ſi metta in una nuova riga al fine un ternario colle unità reſidue innanzi: nella ſeguente un ternario con un binario, e unità reſidue; indi un ternario con due binarj, e unità reſidue, e così in poi, fin che ſi può, rifacendo tutte le precedenti combinazioni. Si paſſi doppo a due ternarj colle unità, indi co' binarj, collo ſteſſo ordine: e così appreſſo a tre ternarj, a quattro, a cinque, fin che ſi può. Finiti i ternarj, ſi paſſi a' quaternarj, combinando prima un quaternario con tutte le precedenti combinazioni, indi due, tre, quanti ſi può, e così per ordine andando a' quinarj, a' ſenarj, a' ſettenarj, fin che ſi arrivi al numero propoſto medeſimo, che rimarrà ſolo parte unica di ſe medeſimo. L' operazione ne' numeri grandi riuſcirà lunghiſſima per la troppa moltiplicità delle cercate diviſioni, benchè ſicura e ſpeditiſſima in quanto alla teo-

ria;

ria ; ma ne' numeri piccoli ſarà anche facile, e corta. Qualche eſempio ſchiarirà il metodo, che riuſcirà evidente da ſe medeſimo ſenza alcuna dimoſtrazione diſtinta.

3 Nella prima parte della prima colonna della tavola ſeconda, poſta al fine di queſta Memoria, vi ſtanno tutte le diviſioni del numero 6, e nella ſeconda colonna ſul principio ſtanno quelle del numero 7. In quelle del numero 6 la prima riga contiene ſole unità, la ſeconda oltre alle unità un binario, la terza due, la quarta tre. Eſaurito così co' binarj il 6 ſi paſſa ad un ternario colle unità, indi ad un ternario con un binario e una unità ſola; onde non potendoſi pigliar ternario, e più binarj, ſi paſſa a due ternarj, i quali non laſciando luogo nè a unità, nè a binarj, ſi va innanzi a un quaternario con due unità, indi a un quaternario con un binario. Per la piccolezza del numero conviene di là andare ad un quinario con una unità, indi ad un ſenario, con cui ſi termina tutta l' operazione. In quelle del 7 dopo tre binarj e un' unità ſi va al ternario fino al ternario con due binarj. Vengono appreſſo due ternarj con un' unità, da' quali ſi paſſa al quaternario, che ſi combina prima con tre unità, indi con un binario, e una unità, e al fine con un ternario. Si va di là al quinario con due unità, e al quinario con un binario, poi al ſenario con una unità, e finalmente al ſettenario.

4 Sciolto queſto problema paſſiamo all'invenzione della formola. Sia l' infinitinomio $az^{n}+bz^{n+r}+cz^{n+2r}+dz^{n+3r}$ &c., che debba alzarſi alla potenza indefinita m. La formola cercata ſarà formata da infiniti prodotti di alcuni numeri, di alcune potenze delle lettere a, b, c &c., e di qualche potenza di z. Ciaſcuno di queſti prodotti lo chiamo un termine, e il compleſſo di tutti que' termini, che hanno la ſteſſa potenza di z, lo chiamo un membro. Nella tavola prima parimente meſſa al fine di queſta Memoria vi ſta in primo luogo in cima l' infinitinomio, che deve alzarſi alla potenza m: vi ſtanno ſotto i primi 6 membri della formola cercata compoſti ciaſcuno di uno, o più termini moltiplicati tutti per la ſteſſa potenza di z. Nella tavola ſeconda vi è il ſettimo, e l' ottavo membro. Darò prima il metodo, con cui ſi poſſano trovare tutti i termini di qualunque di queſti membri, ſenza punto ſervirſi de' membri precedenti: indi darò

darò l'esempio nel membro settimo, e finalmente dimostrerò il metodo istesso.

5 Il primo membro avrà z^{mn}, i membri seguenti accresceranno ciascuno un r all'esponente di z, sicchè nel membro $\overset{\text{simo}}{t+1}$ l'esponente di z sarà $mn+tr$, cioè nel settimo $mn+5r$, nell'ottavo $mn+7r$.

6 Per trovar tutti i termini del membro $\overset{\text{simo}}{t+1}$, si divida il numero t in parti in tutte le maniere possibili col metodo esposto al §. 2. Quante saranno queste divisioni, tanti saranno i termini di un tale membro, e ciascun termine si formerà dipendentemente da una di tali divisioni nella seguente maniera. Si chiamino le lettere b, c, d &c. *Corrispondenti* de' numeri 1, 2, 3 &c., i quali numeri stanno nell'esponente di z per coefficienti di r ne' medesimi termini dell'infinitinomio, ne' quali si trovano dette lettere; e il numero delle parti di ciascuna divisione si chiami p. Il coefficiente letterale avrà a^{m-p}, e avrà inoltre le lettere b, c, d &c. corrispondenti alle parti della divisione medesima messe ciascuna tante volte, quante volte è replicato il suo numero corrispondente tra le parti di essa divisione, o pure ciò, che è lo stesso, elevate alla potenza esposta dal numero delle volte, per cui la sua parte corrispondente si trova in essa divisione. Il numeratore del coefficiente numerico sarà il prodotto dalla moltiplicazione di termini p della progressione aritmetica $m. m-1. m-2$ &c. cominciando in m, e terminando in $m-p+1$. Il denominatore sarà il prodotto di altrettanti termini della serie naturale de' numeri 1, 2, 3 &c. ricominciata però da capo dall'1 tante volte, quante volte in detta divisione si muta la grandezza delle parti, e continuata sempre per tanti termini, quante sono le parti uguali. L'esempio schiarirà il metodo.

7 Nella tavola seconda per maggiore facilità della sostituzione si sono messe in cima le lettere b, c, d &c. co' numeri loro corrispondenti. Nella prima colonna vi sta il membro settimo. Esso viene tutto moltiplicato per z^{mn+5r}. Si vedono di fianco tutte le divisioni del numero 6, che quì è il valore di t. Essendo 11. queste divisioni, sono pure 11. i termini di questo membro.

membro. Nella prima diviſione vi ſono 6 unità; onde quì il numero p delle parti è 6. Perciò ſi vede a^{m-6}, e corriſpondendo a ciaſcuna unità un b, gli viene appreſſo b^6. Parimente per eſſere 6 le parti, ſono 6 i termini della progreſſione $m.m-1$ &c. che termina in $m-5$ nel numeratore del coefficiente numerico, ed altrettanti ſono i termini della ſerie 1. 2. 3 &c. nel denominatore, la quale continua ſempre, e non ricomincia mai da capo, perchè le parti ſono tutte della ſteſſa groſſezza. Così ſi trova tutto il primo termine. Eſſendo nella ſeconda diviſione 5 le parti, ſi trova nel ſecondo termine a^{m-5}, e ſi trovano 5 termini della progreſſione $m.\ m-1$ &c. Per le quattro unità corriſponde b^4, per il binario corriſponde c; nel denominatore del coefficiente numerico vi è la ſerie 1. 2. 3. 4 per le quattro unità, che ſono quattro parti uguali, e mutandoſi groſſezza di parte nell' andare dall' 1 al 2, ſi ricomincia la ſerie del denominatore di nuovo, eſſendovi di nuovo l' unità dopo il 4. Nel terzo termine vi è a^{m-4}, e vi ſono quattro termini della progreſſione $m.\ m-1$ &c. per le 4 parti della diviſione, b^2 per le due unità, c^2 per i due binarj, e nel denominatore per le due unità vi ſta 1. 2. e per i due binarj di nuovo 1, e 2. Nella ſeſta diviſione ſon tre le parti 1. 2. 3 tutte diverſe. Quindi ne viene nel ſeſto termine $a^{m-3}\ b\ c\ d$: il numeratore ha tre termini $m.\ m-1.\ m-2$, ed il denominatore ricomincia tre volte con 1. La decima diviſione ha due parti 1. 5; perciò viene $a^{m-2}\ b\ f$: il numeratore del coefficiente numerico è $m.\ m-1$, ed il denominatore ripiglia da capo 1. 1, eſſendo amendue le parti diverſe. Così ſono formati tutti i termini del membro ſettimo, e collo ſteſſo metodo ſi trovano tutti i termini del membro ottavo nella ſeconda colonna della tavola ſeconda, e tutti i precedenti nella tavola prima, in cui ſotto ogni membro ſi ſono meſſe a queſto effetto le diviſioni del numero t, che corriſponde a ciaſcuno.

8 La dimoſtrazione, benchè ſia piuttoſto lunga, è tanto facile e ſemplice, che non ſi può deſiderare nulla di più, ed è la ſeguente. Per alzare l' infinitinomio alla potenza m convie-

ne prima moltiplicarlo per ſe medeſimo, alzandolo alla potenza ſeconda; indi di nuovo la potenza ſeconda per lo ſteſſo infinitinomio, alzandolo così alla potenza terza, e così in poi, fin che ſi giunga alla potenza m. Si concepiſca, che ogni volta, che ſi moltiplica un termine per un altro, la lettera del moltiplicante ſi metta nel primo luogo, indi ſi aggiuſti al fine ogni termine mettendo le lettere, come ſi ſuole, per ordine di alfabeto, e dove ſono ripetute più volte, mettendo l' eſponente della loro potenza in vece di ripeterle, e ſommando i termini compagni, ne' quali l' aggregato delle lettere è lo ſteſſo. Nella prima moltiplicazione ſi troverà combinato qualunque termine dell' infinitinomio con qualunque altro; onde verranno tutte le combinazioni delle lettere a, b, c &c., che poſſono averſi a due, a due, cioè tutti que' che ſi chiamano ambi. Nella ſeconda moltiplicazione verranno tutti i terni, combinandoſi di nuovo ogni lettera con ogni ambo: nella terza tutte le quaterne, indi le cinquine, e così in poi, arrivandoſi al fine a tutte le combinazioni, che poſſono averſi, pigliando le lettere a m a m.

9 Vi ſarà dunque al fine in ogni termine un numero m di lettere, e portando ſeco ciaſcuna almeno z^n, vi ſarà a buon conto da per tutto z^{mn}, e di più nell' eſponente di z vi ſaranno tutti gli r, che avranno portati ſeco le lettere b, c, d &c., portandone ciaſcuna tanti, quanto è il numero ſuo corriſpondente, e tutte inſieme, quanto è la ſomma di tutti i numeri corriſpondenti delle medeſime. Dovendovi eſſere a^m, tra le combinazioni delle lettere, ſarà queſta accompagnata dal ſolo z^{mn}. Dovendovi poi eſſere inoltre $a^{m-1}b, a^{m-2}b^2$ &c., vi ſaranno anche de' termini, che avranno z^{mn+r}, z^{mn+2r} &c. Mettendoſi dunque inſieme tutti i termini, che hanno la ſteſſa potenza di z in un membro, e ordinandoſi i membri ſecondo le potenze di z, è evidente, che il primo membro avrà z^{mn}, il ſecondo z^{mn+r}, il terzo z^{mn+2r} e così in poi: onde il termine $\overset{ſimo}{t+1}$ avrà z^{mn+tr}. Ciò che era da dimoſtrare in primo luogo.

10 Giacchè

10 Giacchè il prodotto z^{mn+tr}, naſce da tutti quelli aggregati di lettere *b*, *c*, *d* &c., ne' quali i numeri corriſpondenti alle ſteſſe lettere ſommati inſieme fanno *t*; per vedere quanti ſono queſti diverſi aggregati, baſta vedere, in quante maniere il numero *r* poſſa dividerſi in parti, che contengono numeri 1, 2, 3 &c., giacchè ad ogn' una di queſte diviſioni corriſponderà il ſuo aggregato, che darà il *tr*, e il termine formato da detto aggregato avrà tutte le lettere corriſpondenti alle parti della diviſione. In oltre ſe ſia *p* il numero delle parti della diviſione; ſarà *p* il numero di dette lettere. Ma la ſomma di tutte le lettere inſieme in ogni termine deve eſſere *m*. Dunque converrà che vi ſia *a* ripetuto tante volte, quante ne eſprime $m-p$. Saranno dunque tanti i termini, quante le diviſioni, e ciaſcun termine avrà a^{m-p}, e inoltre avrà le lettere *b*, *c*, *d* &c., corriſpondenti alle parti della diviſione medeſima, meſſe ciaſcuna tante volte, quante volte è replicato il ſuo numero corriſpondente tra le parti di eſſa diviſione, o elevato alla potenza eſpoſta dal numero delle volte, per cui il ſuo numero corriſpondente ſi trova fra dette parti. Ciò che era da dimoſtrare in ſecondo luogo.

11 Ogni aggregato di lettere *a*, *b*, *c* &c. verrà prima, che le medeſime ſi ordinino per ordine d' alfabeto, in tutte le diverſe combinazioni, che poſſano avere le medeſime lettere, mutando ordine fra ſe, e niuna di dette combinazioni verrà due volte la ſteſſa. Imperocchè ſi pigli qualunque di dette combinazioni, e l' ultimo ambo di eſſa verrà nella prima moltiplicazione, quando per la penultima lettera ſi moltiplica l' ultima; il terno delle ultime 3 verrà, quando l' ultimo ambo ſi moltiplicherà per la lettera antepenultima nella ſeconda moltiplicazione, e così in poi. Onde tutta quella combinazione verrà nell' ultima moltiplicazione. Inoltre non eſſendo mai nell' infinitinomio ripetuta alcuna di quelle lettere; quella, che ſi metterà in primo luogo, ſarà in tutte le combinazioni o degli ambi, o de' terni, o delle quaterne &c., ſempre diverſa. Naſcendo dunque tutte tra ſe diverſe le combinazioni degli ambi; ſaranno pure tutte diverſe le combinazioni ſuperiori qualunque. Sarà dunque lo ſteſſo il vedere, quante ſieno le diverſe poſſibili combinazioni di un dato aggregato di lettere, e il vedere quante volte quel

dato aggregato torna il medeſimo, quando già ſieno ordinate le lettere coll' ordine dell' alfabeto; cioè il vedere, che numero debba prefiggerſi all' aggregato medeſimo, per eſprimere la ſomma di tutti i prodotti ſimili di quelle lettere, il qual numero ſerva per coefficiente numerico a quel termine, che ha il detto aggregato di lettere per coefficiente letterale.

12 Sieno in primo luogo tutte diverſe le lettere di un' aggregato qualunque. Ogni ambo di due di quelle lettere verrà due volte, mettendoſi nel primo luogo prima l' una, e poi l' altra di quelle. Ogni terno a tre doppj di più, quando qualunque di quelle 3 ſi mette la prima innanzi a gli ambi delle altre due. Così ogni quaterna verrà ad altri 4 doppj di più, la cinquina ad altri 5, e così in poi. Onde il numero delle diverſe combinazioni di dette lettere, ſe il loro numero è m, ſarà il prodotto di $1.2.3.....m$. Ma ſe dette lettere foſſero tutte una medeſima ripetuta numero m di volte; ſarà poſſibile una ſola combinazione, non eſſendovi, che mutar di ſito. Sia ora, in un qualunque aggregato di lettere una di quelle ripetuta la ſteſſa numero di volte p. Il numero delle combinazioni diverſe di queſto aggregato ſarà minore, di quando erano tutte diverſe, a tanti doppj, quanti ne eſprime il prodotto $1.2.3.....p$. Imperocchè ſi concepiſca qualunque combinazione di un tale aggregato di lettere. In eſſa quelle lettere, che ſono diverſe dalla ripetuta, rimangano ferme ne' ſiti loro: la ripetuta ſi muti in altre tutte fra ſe diverſe. Queſte mutando ſito potranno avere combinazioni diverſe $1.2.3.....p$. Tutte queſte combinazioni unite colle lettere concepite ferme fanno combinazioni tutte diverſe dell' aggregato m nel caſo di tutte le lettere diverſe; ma queſte ſono tutte una unica la ſteſſa nel caſo, che queſte lettere tutte ſieno una medeſima. Onde verificandoſi queſto di ogni combinazione di lettere dell' aggregato m; per ogni combinazione diverſa, che ſi ha nel caſo di una lettera ripetuta numero p di volte, ſi avrà numero $1.2.3.....p$ di combinazioni nel caſo di tutte le lettere diverſe. Onde nel primo caſo ſi avrà numero di combinazioni minore per $1.2.3.....p$ doppj, che nel ſecondo. Quindi tornando lo ſteſſo diſcorſo, ſe un' altra lettera ſarà ripetuta q volte, un altra u volte &c., il numero di tutte

le

le diverſe combinazioni, che ſi troveranno in queſto aggregato medeſimo ſarà

1. 2. 3. . . . . *m*

1.2.3.... *p*.1. 2. 3.... *q*.1.2.3....*u*

13 Ora nel caſo noſtro ogni aggregato di lettere in qualunque termine deve avere numero *m* di lettere, e chiamato *p* il numero delle parti contenute dalla diviſione nel numero *t*, da cui ſi è formato detto termine, ſi avrà a buon conto a^{m-p}, cioè la lettera *d* ripetuta numero di volte *m*—*p*; ſicchè nel numero delle combinazioni di detto aggregato vi ſarà nel numeratore 1. 2. 3..... *m*, e nel denominatore a buon conto 1.2.3...*m*-*p*; il quale denominatore diſtruggendo de' primi termini del numeratore un numero *m*—*p*, laſcerà gli ultimi in numero *p*, che contati dal fine ſaranno *m*. *m*—1.*m*—2..... *m*—*p*+1, come è manifeſto. Ma ſe in oltre vi ſarano altre lettere ripetute, cioè vi ſaranno nella diviſione del numero *t* parti compagne; vi ſaranno nel denominatore tante altre ſerie naturali 1. 2. 3 &c., quante ſono le diverſe ſpecie delle parti compagne, continuata ciaſcuna per tanti termini, quante ſono le parti uguali di groſſezza di qualunque ſpecie; alle quali ſe ſi aggiungono tante unità, quante ſono le parti ſcompagnate, le quali unità non mutano punto il denominatore; reſterà il denominatore medeſimo di tanti termini, quante ſono le parti della diviſione, cioè quanti ſono i termini del numeratore, e detti termini del denominatore ſaranno preſi dalla ſerie naturale de' numeri 1, 2, 3 &c. ricominciata da capo dall' 1 tante volte, quante volte in detta diviſione ſi muta la grandezza delle parti, e continuata ſempre per tanti termini, quante ſono le parti uguali. E queſto ſarà il coefficiente numerico. Ciò che era da dimoſtare in ultimo luogo.

14 Si noti quì, che trovato il coefficiente letterale, ſi trova il numerico anche così. Si pigli per numeratore il prodotto di tanti termini della progreſſione *m*. *m*—1. *m*—2 &c., quante unità contiene la ſomma di tutti gli eſponenti delle lettere *b*, *c*, *d* &c., e per denominatore il prodotto di altrettanti termini della ſerie naturale 1, 2, 3 &c., ricominciata da capo tante volte, quante ſono le diverſe lettere *b*, *c*, *d* &c., e continuata

ogni volta per tanti termini quante unità contiene l' eſponente di ciaſcuna lettera ; giacchè tanto è parlare delle lettere, quanto delle parti corriſpondenti delle diviſioni del numero t.

15 Quì ſi dovrebbero fare varie conſiderazioni nella formola così trovata, la quale molto più facilmente ſi comprende con queſto metodo, che con altri. Converrebbe dimoſtrare, come i diverſi membri naſcono l' uno dall' altro, e che relazione abbiano fra loro, che mutazione ſi faccia nella formola col mancare di alcuni termini dell' infinitinomio, o col determinarſi il numero m eſponente della potenza, e come ſi poſſano rigettare i termini ſuperflui, ritrovando immediatamente i ſoli utili in qualunque dato membro, con che ordine vengano le nuove lettere ne' nuovi membri, e da chi accompagnate, e coſe ſimili. La brevità, che mi ſono preſcritta nella preſente Memoria non mi permette il diffondermi a lungo. Darò una Memoria nel primo meſe dell' anno che viene ſù queſta iſteſſa materia. Intanto qui accennerò ſolo alcuni teoremetti non meno grazioſi, che utili, de' quali nella Memoria medeſima vi ſarà una compita dimoſtrazione. Se ne potrà intanto riconoſcere la verità ne' primi 8 membri della formola, che ſtanno nelle due tavole quì anneſſe.

16 *Dato qualunque membro, ſi troverà il proſſimo ſeguente così. Ogni termine del membro precedente genererà un' altro del ſeguente, ſe ſi moltiplichi per* $a^{-1}b$, *e que' termini, che avranno la prima lettera dopo l' a alzata alla prima ſola potenza ne genereranno in oltre un' altro, col mutar detta lettera nella ſua ſeguente, aggiuſtando in amendue le generazioni il coefficiente numerico ſecondo il §. 14. e accreſcendo di un* r *l' eſponente di* z. Così ſi troverà ſenza le diviſioni de' numeri tutta la formola facilmente. Il primo membro è $a^m z^{mn}$, il ſecondo $\frac{m}{1} a^{m-1} b z^{mn+r}$: da queſto naſcono i ſeguenti. L' unico termine del ſecondo membro genera i due del terzo: il ſecondo del terzo genera gli ultimi due del quarto, queſti generano due per uno gli ultimi 4 del quinto: gli ultimi due del quinto generano gli ultimi 4 del ſeſto due per uno; il terzo del ſeſto genera il terzo, e quarto del ſettimo, e gli ultimi 3 del ſeſto generano gli ultimi 6 del ſettimo due per uno. Il ſeſto del ſettimo genera il ſeſto, e ſettimo dell' ottavo, e gli ultimi 3 del ſettimo generano gli ultimi 6 dell' ottavo, due

per

per uno. Gli altri tutti generano uno ſolo per uno, perchè i ſoli nominati la prima lettera, che hanno doppo l'*a*, l'hanno elevata alla prima ſola potenza.

17 *Da qualunque membro ſi ricava immediatamente qualunque ſuo precedente, come dal* $t^{\text{ſimo}}$ *il* $\overline{t-1}^{\text{ſimo}}$, *traſcurando tutti quei ſuoi termini, che non hanno* b, *o l'hanno elevato a una potenza minor di* q, *e gli altri tutti moltiplicandoli per* $a^q b^{-q}$, *aggiuſtando il coefficiente numerico ſecondo il ſſ.* 14., *e all'eſponente di* z *levando* q r. Se dato l'ottavo membro ſi cerchi il quinto ſarà $q=3$, e rigettati tutti i termini, che non arrivano ad avere b^3, reſteranno i primi 3, il quinto, e il nono, da' quali moltiplicati per $a^3 b^{-3}$, aggiuſtati i coefficienti numerici, naſcono i 5 termini del membro quinto.

18 *In ogni membro viene per la prima volta una nuova lettera, e viene elevata alla ſola prima potenza, venendo nel membro* $\overline{t+1}^{\text{ſimo}}$ *quella, che ha per corriſpondente il numero* t. *La potenza qualunque* p, *di qualunque lettera corriſpondente al numero* t, *verrà per la prima volta nel membro* $\overline{pt-1}^{\text{ſimo}}$: *quando verrà la prima volta avrà ſeco ſolamente* $\frac{m.\ m-1.\ m-2 \ldots\ldots m-p+1}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ldots p}\ a^{m-p}$: *e venuta che ſarà, continuerà a venire in tutti i membri ſeguenti accompagnata di* b *alzato ſucceſſivamente a potenze più alte. Qualunque potenza* p *di lettera corriſpondente al numero* t, *verrà in qualunque termine* $\overline{pt+q}^{\text{ſimo}}$ *accompagnata con tutti i termini del membro* $q^{\text{ſimo}}$ *diviſi per* a^p, *accreſciuti nel numeratore del coefficiente numerico di nuovi termini in numero* p *della progreſſione* m. m−1 &c., *e nel denominatore accreſciuti di numero* p *di termini della ſerie naturale, l'ultimo de' quali ſia l'eſponente, che detta lettera avrà nel termine iſteſſo del membro* $\overline{pt+q}^{\text{ſimo}}$. Così nel ſecondo membro comincia a venire *b*, nel terzo *c*, nell'ottavo *b*: il quadrato o potenza ſeconda della lettera *c* corriſpondente al numero 2, comincia a venire nel membro $\overline{2\times2+1}^{\text{ſimo}}$, cioè quinto accompagnata da $\frac{m.\ m-1}{1.\ 2.}\ a^{m-2}$, il cubo c^3 nel $\overline{3\times2+1}^{\text{ſimo}}$ cioè nel ſettimo con $\frac{m.\ m-1.\ m-2}{1.\ 2.\ 3}\ a^{m-3}$; e venuti una volta ſi trovano ne' membri ſeguenti con delle potenze di *b*. Il c^2, che dà $p\,t=2\times2=4$, viene

viene nel membro ottavo, con tutti i termini del membro quarto, i quali essendo soli 3, si trova esso nel membro ottavo solo in 3 termini, terzo, quarto, e settimo, essendo le altre lettere le stesse in questi e in quelli, l'esponente di a minore di due unità, il numeratore d'ogni termine accresciuto di due termini della progressione $m.m-1$ &c., il denominatore nel termine terzo e settimo del membro ottavo, ne' quali si trova c^2, ha sopra que' de' termini primo, e terzo del membro quarto 1, 2, e il denominatore del termine terzo del membro ottavo, che ha c^3, ha sopra quello del termine quarto 2. 3.

Ma la dimostrazione di questi molto utili teoremi, e altre riflessioni sopra la stessa formola, e sopra il mio metodo di trovarla saranno l'argomento dell'altra promessa Memoria, nella quale vi sarà pure il confronto di questo metodo con alcuni altri e in modo particolare con quello, che ha dato M. Moiure l'anno 1697 nelle Transazzioni Filosofiche al num. 230, giacchè i fondamenti del suo sono quasi i medesimi co' fondamenti del mio; benchè nella pratica, e nelle riflessioni sulla formola vi sia della notabile differenza.

IL FINE.

INDICE

TAVOLA PRIMA

Infinitinomio da elevare alla potanza m $az^{n} + bz^{n+r} + cz^{n+2r} dz^{n+3r} + ez^{n+4r} + fz^{n+5r} + gz^{n+6r} + hz^{n+7r}$ &c.

Membri della formola dell' Infinitinomio elevato

I II III IV V VI

$$a^m z^{mn} + \frac{m}{1} a^{m-1} b\, z^{mn+r} + \frac{m.m-1}{1.2.} a^{m-2} b^2 + \frac{m}{1} a^{m-1} c \Big| z^{mn+2r}$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3.} a^{m-3} b^3 + \frac{m-1.m-2}{1.1} a^{m-2} bc + \frac{m}{1} a^{m-1} d \Big| z^{mn+3r}$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4} a^{m-4} b^4 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.1} a^{m-3} b^2 c + \frac{m.m-1}{1.2} a^{m-2} c^2 + \frac{m.m-1}{1.1} a^{m-2} bd + \frac{m}{1} a^{m-1} e \Big| z^{mn+4r}$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.5} a^{m-5} b^5 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.1} a^{m-4} b^3 c + \frac{m.m-1.m-2}{1.1.2} a^{m-3} bc^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.1} a^{m-3} b^2 d + \frac{m.m-1}{1.1} a^{m-2} cd + \frac{m.m-1}{1.1} a^{m-2} be + \frac{m}{1} a^{m-1} e \Big| z^{mn+5r}$$

Divisioni de' numeri t corrispondenti a' membri $t+1$

0.	1.	1. 1.	1.1.1.	1.1.1.1.	1.1.1.1.1.
		2.	1.2.	1.1.2.	1.1.1.2.
			3.	2.2.	1.2.2.
				1.3.	1.1.3.
				4.	2.3.
					1.4.
					5.

Numeri e lettere corrispondenti 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8
b . c . d . e . f . g . h . i . &c.

Divisioni del num. 6. — Membro VII

1. 1. 1. 1. 1. 1. $+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.}\ a^{m-6}b^6$

1. 1. 1. 1. 2. $+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.\ 3.\ 4.\ 1.}\ a^{m-5}b^4c$

1. 1. 2. 2. $+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.\ 1.\ 2.}\ a^{m-4}b^2c^2$

2. 2. 2. $+\frac{m.m-1.m-2}{1.2.\ 3.}\ a^{m-3}c^3$

1. 1. 1. 3. $+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.\ 3.\ 1.}\ a^{m-4}b^3d$

1. 2. 3. $+\frac{m.m-1.m-2}{1.1.\ 1.}\ a^{m-3}bcd$

3. 3. $+\frac{m.m-1}{1.2.}\ a^{m-2}d^2$

1. 1. 4. $+\frac{m.m-1.m-2}{1.2.\ 1.}\ a^{m-3}b^2e$

2. 4. $+\frac{m.m-1}{1.1.}\ a^{m-2}ce$

1. 5. $+\frac{m.m-1}{1.1.}\ a^{m-2}bf$

6. $+\frac{m}{1}\ a^{m-1}g$

Divisioni del num. 7. — Membro VIII.

1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. $+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.m-6}{1.2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.}\ a^{m-7}b^7$

1. 1. 1. 1. 1. 2. $+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 1.}\ a^{m-6}b^5c$

1. 1. 1. 2. 2. $+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.\ 3.\ 1.\ 2.}\ a^{m-5}b^3c^2$

1. 2. 2. 2. $+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.1.\ 2.\ 3.}\ a^{m-4}bc^3$

1. 1. 1. 1. 3. $+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.\ 3.\ 4.\ 1.}\ a^{m-5}b^4d$

1. 1. 2. 3. $+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.\ 1.\ 1.}\ a^{m-4}b^2cd$

2. 2. 3. $+\frac{m.m-1.m-2}{1.2.\ 1.}\ a^{m-3}c^2d$

1. 3. 3. $+\frac{m.m-1.m-2}{1.1.\ 2.}\ a^{m-3}bd^2$

1. 1. 1. 4. $+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.\ 3.\ 1.}\ a^{m-4}b^3e$

1. 2. 4. $+\frac{m.m-1.m-2}{1.1.\ 1.}\ a^{m-3}bce$

3. 4. $+\frac{m.m-1}{1.1.}\ a^{m-2}de$

1. 1. 5. $+\frac{m.m-1.m-2}{1.2.\ 1.}\ a^{m-3}b^2f$

2. 5. $+\frac{m.m-1}{1.1.}\ a^{m-2}cf$

1. 6. $+\frac{m.m-1}{1.1.}\ a^{m-2}bg$

7. $+\frac{m}{2}\ a^{m-1}h$

RIFLESSIONI SUL METODO DI ALZARE UN INFINITINOMIO A QUALUNQUE POTENZA. PARTE PRIMA



antichi ricavavano da queſto luogo e la verginità della B. Vergine, e la divinità di Gesù Criſto.

Così alla pag. 107. al Tit. LV. della Profezia di Geremia: *Vox Domini Chriſti de ſemetipſo & de Judæis, quod cum crucifixuri eſſent*, ſi nota che riferendoſi queſto titolo alle parole del Profeta al cap. 2. verſ. 19. ha avuto ragione S. Girolamo di dire: *Omnium Eccleſiarum iſte eſt conſenſus, ut ſub perſona Hieremiæ a Chriſto hæc dici intelligant.*

Alla pag. 369. al Tit. XIII. dell'Ep. 1. di S. Giovanni: *cujus veritati ſpiritus, aqua, & ſanguis teſtimonium dant*, non tralaſcia il P. *Vezzoſi* di avvertire, che quantunque manchi il celebre luogo *tres ſunt qui teſtimonium dant in cælo Pater &c.* nulla di meno non poſſono di qui gli Eretici ricavare alcuno argomento contro il miſterio della Trinità, eſſendovi per le Biblioteche tanto in Roma quanto fuori ottimi manoſcritti, che hanno quel paſſo, del quale anche ſe ne trovano chiariſſimi veſtigii negli ſcritti de' Padri, che ſono viſſuti prima della cauſa d' Ario. Ma non ſi vuole più lungamente ritenere il lettore, il quale può da quanto ſi è detto fare argomento di queſta opera, ſenza che noi ne riferiamo più di quel, che finora ne abbiamo qui riportato.

Parte prima delle Rifleſſioni ſul metodo di alzare un infinitinomio a qualunque potenza del P. *Ruggiero Giuſeppe Boſcovich* della Compagnia di Gesù, da lui promeſſe in queſto Giornale nel Decembre del 1747.

ARTICOLO III.

1 NEllo ſcorſo Decembre propoſi un metodo di alzare un Infinitinomio a una potenza indefinita qualunque: eſpoſi alcuni teoremi, e ne promiſi la dimoſtrazione, come anche alcune rifleſſioni ſul metodo iſteſſo, e il confronto di un tale metodo con qualche altro, come ſarebbe quello di M. *Moivre* dato nel 1697. nelle Tranſazioni Filoſofiche al num. 230. Vengo nella preſente Memoria a ſodisfare alla promeſſa, ma ſolo in parte, per non eſſere ſoverchiamente diffuſo; riſerbando il rimanente a un altro Articolo.

2 Il metodo era il ſeguente. Sia l' infinitinomio $az^{n} + bz^{n+r} + cz^{n+2r}$ &c., eſpoſto in cima alla prima tavola, e ſi abbia da alzare alla potenza indefinita m. Conterrà la formola dell' infinitinomio alzato infiniti membri, de' quali i primi ſei ſtanno nella tavola prima, il ſettimo e ottavo nella ſeconda. Saranno queſti membri compoſti di vari termini tutti moltiplicati per una potenza di z, che nel membro $p+1^{ſimo}$ ſarà z^{mn+pr}, e ciaſcun termine avrà un coefficiente numerico dato per m, e un coefficiente letterale compoſto dalle lettere a, b, c, &c. Solamente il primo e il ſecondo membro avranno un termine per uno.

3 Qualunque membro ſenza l' ajuto de' precedenti ſi trova così. Sia eſſo $p+1^{ſimo}$. Prima ſi pigli il num. p, come nel membro ſettimo il 6. nell' ottavo il 7. Si divida queſto in parti compoſte di numeri interi in tutte le maniere poſſibili, come ſi vede nella prima tavola praticato col num. 6, e col num. 7, contando per una diviſione anche quella, che ſi ha col pigliare il numero iſteſſo intero, unica, e totale parte di ſe medeſimo. Queſto ſi fa facilmente ſcrivendo nella prima riga tante unità, quante ne contiene detto numero, nella ſeconda in fine un binario colle unità reſidue innanzi, indi nella terza due binarj, e così in poi, finchè ſi può. Indi ſi paſſa a un ternario in fine colle unità innanzi, e poi a un ternario con un binario, e unità con due binarj, e più ſe ſi può, paſſando poi a due ternarj, e a quanti ſi può. Quindi collo ſteſſo ordine ſi combinano i quaternarj con tutte le precedenti combinazioni de' reſidui, e così i quinarj &c. fino ad arrivare al numero ſteſſo, che ſia l' unica parte di ſe; rimanendo così trovate tutte le ſue combinazioni, e in modo, che ogni diviſione comincia dalle parti più piccole, ſe non ſon tutte uguali, che vanno creſcendo ſempre; ſicchè niuna parte più groſſa ſi incontri prima di una minore.

4 Fatte queſte diviſioni il membro conterrà tanti termini quanti ſono le diviſioni. Ciaſcuna diviſione darà il ſuo termine così. Per il numeratore del coefficiente numerico dovranno pigliarſi tanti termini della progreſſione aritmetica $m. m-1. m-2.$ &c, quanto è il numero delle parti: per il denominatore altrettanti termini, cavati dalla ſerie de' numeri naturali 1, 2, 3 &c,

con

con queſta avvertenza, cher per ogni volta che nelle parti di tale diviſione ſi muta la groſſezza delle parti, ſi ricominci dal 1; e ſi piglino ſempre tanti termini di 1, 2, 3 &c. quante ſono le parti compagne di qualunque grandezza. Indi per il coefficiente letterale ſi metta a alzato alla poteſtà m meno il numero delle parti di quella diviſione; indi per ogni parte della diviſione ſi ſoſtituiſca la lettera, che accompagna detto numero poſto coll' r eſponente di z nell' Infinitinomio $az^{n} + bz^{n+r} + cz^{n+2r}$ &c., quali numeri chiamo corriſpondenti a lettere, cioè b per 1, c per 2, d per 3 &c. ſcrivendo la medeſima lettera coll' eſponente, che ſignifichi quante volte dovrebbe ſcriverſi, quando per eſſere più parti eguali dovrebbe ſcriverſi più volte.

4 Così nella tavola ſeconda alla colonna ſeconda eſſendo 15 le divioni ſono quindici i termini. Nel quarto per eſempio per le parti cinque ſi trova $m.m-1.\ m-2.\ m-3.\ m-4$; Eſſendo le prime 1. 1. 1, e poi mutandoſi la groſſezza della parte in 2. 2, vi è nel denominatore prima 1. 2. 3. indi da capo 1. 2. Per eſſere il numero delle parti cinque ſi ha a^{m-5}; per 1. 1. 1 ſi ha b^{3}; per 2. 1. ſi ha c^{2}; avendoſi così tutto il termine.

6 Trovato il coefficiente letterale, ſi può trovare il numerico anche così. Si prendano per numeratore tanti termini della progreſſione $m, m-1.\ m-2$ &c, quanta è la ſomma di tutti gli eſponenti delle lettere b, c, d &c. e per denominatore tante ſerie naturali 1, 2. 3 &c. quante ſono le lettere b, c, d &c. pigliando per ognuna di eſſe tanti termini quante unità contiene l' eſponente della potenza, a cui detta lettera è elevata.

7 Queſto metodo è ſtato più diffuſamente ſpiegato, ed accuratamente dimoſtrato in queſto Giornale dello ſcorſo Decembre. Diedi inſieme alcuni teoremi, che appartengono al modo di ricavare un membro dall' altro. Darò qui i fondamenti per la dimoſtrazione de' medeſimi eſpreſſi con poca diverſità, e qualche rifleſſione ſulle corriſpondenze de' diverſi membri; laſciando per un altro Articolo quello che appartiene alle mutazioni, che devono accadere nell' infinitinomio elevato, col mancare alcuni termini nel dato, o col determinare l' eſponente, e il confronto co' metodi degli altri.

8 In

8 In primo luogo, dato qualunque membro si può facilmente trovare quello, che gli viene appresso. Per ottenere un tale intento premetto in primo luogo, che date tutte le divisioni di un qualunque numero, si troveranno tutte le divisioni del numero $t+1$ in questo modo. *In ciascuna delle divisioni del numero t si aggiunga al principio una nuova parte, che sia 1. In oltre in tutte, e sole quelle divisioni, che cominciano con una parte scompagnata, e però minore della prossima seguente, si accresca di un' unità quella prima parte, e si avrà l' intento.*

9 Per esempio le prime 5. divisioni del numero 6, che nella colonna prima della tavola seconda cominciano con più parti uguali, sono seconde nel primo modo solo, e generano le prime 5 divisioni del 7 poste nella colonna seconda, coll' aggiunta di una nuova parte da principio, che è una unità. La divisione sesta del numero 6, che comincia con due parti disuguali 1. 2, genera la sesta, e la settima divisione del numero 7; la sesta con aggiungere una nuova parte, che sia un' unità; la settima, con ingrossare la prima parte, e far che in cambio di 1. 2, venga 2,2. Così le due seguenti settima e ottava del numero 6. generano l' ottava, e nona del numero 7, una per una nel primo modo. Ma le tre ultime, che cominciano con una parte scompagnata, ne generano due per una, una nel primo, e l' altra nel secondo modo. E' manifesto, che in questa maniera sono venute tutte le divisioni del numero 7 da quelle di 6, essendo quelle di 6 tutte seconde nel primo modo, e seconde in due modi quelle, che cominciano con una parte scompagnata.

10 La dimostrazione del metodo dato non è difficile. Per averla compita convien mostrare; 1.° che operando con esso non verrà alcuna, che non sia divisione del numero $t+1$; 2° che niuna di quelle, che verranno, verrà due volte; 3°. che verranno tutte.

11 La prima cosa è manifesta; perchè nel metodo prescritto, alle divisioni del numero t si aggiunge una sola unità, o staccata o unita con una delle parti di t. Come dunque tutte le parti prima facevano t, così ora faranno $t+1$.

12 La seconda è manifesta, perchè quelle, che saranno generate nel primo modo, cominceranno tutte coll' unità; quelle che saranno generate nel secondo, cominceranno con una parte in

te ingroſſata, e però più groſſa dell' unità. Dunque niuna di quelle ſarà la ſteſſa con alcuna di queſte. In oltre tutte quelle naſceranno dalle diviſioni del numero t già diverſe fra ſe coll' aggiunta di una nuova parte, che in tutte ſarà l' unità, e tutte queſte coll' aggiunta della ſteſſa unità alla prima parte. Dunque dovranno parimente rimaner diverſe tanto quelle fra ſe, quanto queſte pure fra ſe. Dunque la ſteſſa non tornerà due volte.

13 La terza coſa, che vengan tutte, ſi dimoſtra così. E' manifeſto, che le diviſioni del numero $t+1$ tutte naſcono dalle diviſioni di t coll' aggiunta di un' unità; giacchè alle diviſioni di $t+1$ levata dovunque un' unità, ne vengon ſubito le diviſioni di t. Or queſta aggiunta di un'unità, o ſi puo fare coll' aggiungere una nuova parte, che ſia un 1., o coll' ingroſſare alcuna parte aggiungendole un 1. Quelle che naſcono coll' aggiunta di una nuova parte, vengon tutte; eſſendoſi preſcritto nella prima parte del metodo, che a tutte le diviſioni di t ſi aggiunga una nuova parte, che ſia un' unità da principio. Quelle, che naſcono dall'ingroſſar qualche parte, convien moſtrare, che verranno tutte, o nell' aggiungere un'unità ſtaccata da principio, o nell' ingroſſare la prima parte di quelle ſole diviſioni, che cominciano con una parte ſcompagnata.

14 Sia qualunque diviſione del numero t la ſeguente $p.\ q.\ r.... u$; in cui p, o ſia uguale a q, o diſuguale, e in eſſa ſi accreſca qualunque parte fuorchè la prima, come r; onde diventi $p.\ q.\ r+1... u$. Queſta medeſima naſcerà dalla diviſione $p-1.\ q.\ r+1.... u$, coll' aggiungere una nuova parte che ſia un 1., ſe ſarà $p=1$, e $p-1=0$, e coll' accreſcere la prima parte $p-1$ di un' unità, ſe p ſarà più di 1. e $p-1$ qualche coſa; giacchè in amendue queſti caſi ſi avrà $p.\ q.\ r+1.... u$. Ora $p-1.\ q.\ ,+1.... u$ è diviſione del numero t, eſſendolo $p.\ q.\ r.... u$, che ha la ſteſſa ſomma col diſtruggerſi $-1+1$. Sicchè tutte le diviſioni, che naſcono dall'accreſcere una parte delle diviſioni di t, che non ſia la prima, o ſtanno fra quelle, che ſi formano coll' aggiungere una parte, o tra quelle, che ſi hanno coll' accreſcere in qualche altra diviſione la prima parte.

15 Ma queſte che ſi hanno coll' accreſcere la prima parte delle diviſioni, o ſtanno tra quelle, che ſi hanno coll' aggiungere una parte, o tra quelle, che ſi hanno coll' accreſcere la prima

ma parte di qualch' una di quelle diviſioni, che cominciano con una parte ſola. Imperocchè ſia una diviſione di t queſta $p. p. q. r.... u$, che cominci per una parte accompagnata, e ſi accreſca il primo p. Si avrà $p+1. p. q. r.... u$. Queſta permutando gli ultimi due termini, ſarà $p. p+1. q. r.... u$. Or queſta ſteſſa naſcerà ancora dalla diviſione $p-1. p+1. q. r....$, coll' aggiungerle una parte, che ſia un 1. da principio ſe $p-1$ ſarà zero, e $p=1$, e coll' accreſcere la ſua prima parte $p-1$ di un'unità, ſe ſarà qualche coſa. Ma è manifeſto, che $p-1. p+1. q. r.... u$. è diviſione del numero t, eſſendolo $p. p. q. r.... u$, ed elidendoſi $-1+1$, e in oltre è chiaro che nella diviſione $p-1. p+1. q. r.... u$, la prima parte $p-1$ è minore di tutte le altre; mentre è minore di p, e p eſſendo la prima, non era minore di alcun'altra, che le veniva appreſſo, come ſi ricava dalla ſoluzione del metodo eſpoſto al numero 3. Dunque è manifeſto quello, che ſi è avanzato nel principio di queſto numero, *contenerſi tutte le diviſioni nate dall' accreſcere la prima parte, o tra quelle, che ſi hanno coll' aggiungere una parte; o tra quelle che ſi hanno coll' accreſcere la prima parte di qualc' una di quelle diviſioni, che cominciano con una parte ſola*. Onde in queſte due claſſi ſi troveranno tutte quelle, che naſcono dall' accreſcere qualunque parte, giacchè le medeſime per il numero precedente *oſi trovano tra quelle che ſi formano coll' aggiungere una parte, o tra quelle, che ſi hanno coll' accreſcere in qualche altra diviſione la prima parte*. Onde finalmente tutte quelle diviſioni, che poſſono naſcere comunque dall' aggiungere alle diviſioni del numero t una unità, cioè tutte le diviſioni del numero $t+1$, ſi troveranno col metodo propoſto al num. 24.

16 Queſta coſa era facile a comprenderſi anche con una ſola attenta conſiderazione del metodo, con cui ſi ſono trovate le diviſioni al numero 3. di queſto articolo, e più diffuſamente a' numeri 2 e 3 dell' articolo dello ſcorſo Decembre. Ma pure ho ſtimato bene il dimoſtrarlo a lungo con una forza di diſcorſo accurato, perchè da eſſa dipende il ſeguente metodo di trovare qualunque membro ſeguente, coll'ajuto dell'antecedente, e però anche il coſtruire tutta la formola generale, ſenza biſogno di cercare le diviſioni tutte poſſibili de' numeri corriſpondenti a' diverſi membri, il che facilita molto l' operazione, quando non ſi cerchi un membro ſolo, ma tutta quanta la formola.

17 Il metodo è il ſeguente . *Si accreſca di un* r *l' eſponente di* z. *Per ogni termine del membro precedente , che dopo l'* a *non abbia immediatamente la prima potenza ſola di qualc' una delle lettere* b, c, d, *&c. ſi ſcriva un nuovo termine , in cui nel coefficiente letterale ſi levi un' unità all' eſponente di* a, *ſi aggiunga* b *ſe non vi era, o ſi accreſca di un' unità il ſuo eſponente , ſe vi era ; e nel coefficiente numerico ſi accreſca al fine del numeratore un termine di più, e tra i denominatori ſi aggiunga l' eſponente nuovo di* b, *o da capo , ſe prima non vi era* b, *o al fine della prima progreſſione* 1. 2. *&c. ſe vi era. Per ogni termine poi del precedente , che dopo l'* a *ha la prima ſola potenza di qualche lettera , ſe ne ſcrivano due, il primo formato al modo iſteſſo , ed il ſecondo formato col cambiare detta prima lettera nella ſua ſeguente , e laſciar tutto il reſto , ſe queſta ſeconda rimane elevata alla prima ſola potenza , o ſe queſta rimane elevata a qualche potenza maggiore dell'unità, ſi levi dal numeratore del coefficiente numerico la prima unità , e ſi aggiunga l' eſponente nuovo di detta lettera , dopo i numeri precedenti ad eſſo nel fine della prima ſerie* 1. 2 *&c.*

18 Si è dato queſto metodo così diffuſamente , per eſprimere tutte le operazioni , e diſtinguere tutti i caſi : per altro poteva più facilmente , e brevemente dirſi lo ſteſſo così . *In ogni termine del membro precedente il coefficiente letterale ſi moltiplichi per* $a^{-1}b$: *e in oltre in ogni termine del membro precedente , che dopo l'*a *abbia immediatamente qualche lettera elevata alla prima ſola potenza ſi muti quella nella ſua ſeguente , e la potenza di* z *di tutto il membro ſi accreſca di un* r. *I coefficienti numerici ſi aggiuſtino coll' ajuto de gli eſponenti delle lettere* b, c, d *&c. giuſta il facile metodo eſpreſſo qui al numero 6 , e nel Decembre ſcorſo al num.* 14.

19 Nel membro ſettimo nella prima colonna della tavola prima , vi era z^{mn+6r} , e nell' ottavo z^{mn+7r} . Il primo termine del membro ſettimo , dopo l' a^{m-6} aveva b^{6} perciò genera un ſolo termine dell' ottavo , in cui ſi vede $a^{m-7}b^{7}$, ſcemato di un' unità l' eſponente di *a* , e accreſciuto quello di *b* , cioè moltiplicato il coefficiente per $a^{-1}b$, e nel numeratore del coefficiente numerico vi è $m-6$ di più , e nel numeratore vi è

di

di più 7 eſponente nuovo di *b*. Il termine quarto del membro ſettimo non aveva *b*, e cominciava con c^2. Eſſo genera il quarto ſolo del membro ottavo, in cui vi è a^{m-4} in cambio di a^{m-3}; vi è bc^3, in cambio di c^3; vi è $m-3$ di più nel numeratore del coefficiente numerico, e un 1. di più, nuovo eſponente di *b* nel denominatore. Il termine ſeſto del membro ſettimo aveva $a^{m-3}bcd$, venendo doppo l' *a* il *b* elevato alla ſola prima potenza. Quindi queſto termine ne genera due, il ſeſto e il ſettimo del membro ottavo. Il ſeſto col mutare $a^{m-3}bcd$, in $a^{m-4}b^2cd$, coll' aggiungere $m-3$ nel numeratore del coefficiente numerico, coll' aggiungere un 2 nuovo eſponente di *b* tra i denominatori, il quale ſi trova al fine della prima ſerie naturale cioè doppo il primo 1., giacchè la ſerie ſteſſa era ſolamente principiata col ſolo ſuo primo termine 1. Il termine ſettimo del membro ottavo viene formato dal ſeſto del membro ſettimo, col mutare quel *b* in *c*, e però mettere $a^{m-3}c^2d$; e perchè così il *c* rimane alzato alla potenza ſeconda, ſi leva dal numeratore del coefficiente numerico il primo 1. e ſi mette un 2 eſponente nuovo di *c* al fine della ſeconda ſerie, che anche qui comincia ſolamente col primo termine 1. Queſto 2 ſi trova meſſo dopo quel ſecondo 1. che ora rimane in primo luogo. Finalmente dal termine decimo del membro ſettimo ſi forma il decimo terzo, e il decimo quarto del membro ottavo: quello col mutare $a^{m-2}bf$ in $a^{m-3}b^2f$, aggiungere nel numeratore $m-2$, e nel denominatore un 2 nuovo eſponente di *b* dopo il primo 1, in cui comincia, e finiſce la prima ſerie: queſto col mutare il *b* in *c*, e laſciare tutto il reſto come ſtava; giacchè il *c* rimane alzato alla ſola prima potenza.

20 La dimoſtrazione è tutta dipendente dalla trasformazione delle diviſioni del numero precedente in quelle del ſeguente. Nel numero 8. ſi ſono meſſe le due generazioni delle diviſioni ſeguenti. La prima ſi fa in tutte le diviſioni, coll' aggiungere una parte, che ſia 1. A queſta corriſponde l'aggiungere

nel coefficiente letterale un b, e levare dall' eſponente di a per queſto conto un' unità. Creſcendo così una parte della diviſione, creſce un termine della progreſſione $m.m-1$ &c. del numeratore; e ſe b arriva di nuovo, cioè ſe l' 1. meſſo per prima parte è ſcompagnato, viene nel numeratore da principio una nuova ſerie naturale, che però comincia, e finiſce nel ſuo primo termine 1: ſe poi b vi era, creſcendo il ſuo eſponente, creſce nella prima ſerie naturale del denominatore l' ultimo termine, uguale appunto all' eſponente nuovo di b. La ſeconda generazione ſi fa coll' accreſcere di una unità la prima parte di quelle diviſioni, che cominciano con una parte ſcompagnata, a cui corriſponde il mutare nella ſua ſeguente la lettera, che ſi incontra la prima doppo a in que' termini, ne' quali detta prima lettera era alzata alla ſola prima potenza. Reſtando qui il numero delle parti lo ſteſſo, non ſi muta la potenza di a, ne il numero de' termini del numeratore del coefficiente numerico; e ſe la lettera ſoſtituita reſta della prima potenza, come lo era la mutata, tanto la diviſione corriſpondente comincia come prima con una parte ſcompagnata, e le altre parti rimangono come prma; ma ſe eſſa rimane elevata a qualche potenza, la prima parte della diviſione corriſpondente nata da quell' accreſcimento di unità, avrà delle parti compagne dopo di ſe in modo, che in tutto ſieno una di più di prima, e ſieno tante quanto è l' eſponente di quella lettera. Sicchè nel primo caſo il denominatore rimane quello che era, e nel ſecondo in cambio della ſerie naturale cominciata e terminta nel primo ſuo termine 1. corriſpondente a quella prima parte ſcompagnata, la quale anderà via, verrà un termine di più nella prima ſerie naturale, che viene appreſſo, e appartiene alle parti maggiori corriſpondenti alla lettera ſeguente, il quale termine nuovo ſarà appunto lo ſteſſo eſponente della lettera ſteſſa.

21 Così dal membro precedente qualunque ſi ricava con ſomma facilità il membro ſeguente; onde facilmente ſi ricava la formola tutta cominciandola da principio, e continuandola fino a quel membro, che uno vorrà, ricavandoli l' uno dall' altro. Eſſi ſono eſpoſti nella tavola ſeconda. Ivi il primo membro $\frac{m}{1}a^{\frac{mn}{1}}$. Da eſſo naſce il ſecondo nella prima delle due maniere

niere venendo di nuovo il b, che non vi era mutandoſi a^m in a^{m-1} e ſopravvenendo $\frac{m}{1}$. L'unico termine del ſecondo membro genera i due del terzo il primo nel primo, e il ſecondo nel ſecondo modo. Il primo del terzo, avendo dopo l' a il b^2, genera nel primo modo il ſolo primo del quarto; ma il ſecondo del terzo, che dopo l' a ha il c elevato alla ſola prima potenza ſecondo in ambedue i modi, genera il ſecondo, e il terzo del membro quarto. Il primo del quarto, avendo dopo l' a il b^3 genera nel ſolo primo modo il ſolo primo termine del membro quinto; il ſecondo del quarto avendo dopo l' a il b, e il terzo il d elevati alla ſola prima potenza, ſecondi in ambedue le maniere, generano quello il ſecondo e terzo, queſto il quarto e quinto del membro quinto. Il primo ſecondo e terzo del membro quinto avendo b^4, b^2, c^2 doppo l' a, generano nel primo ſolo modo i termini primo ſecondo e terzo del membro ſeſto; il quarto, che dopo l' a ha il bd e l' ultimo, che ha e, generano in ambedue i modi, quello il quarto e quinto, queſto il ſeſto e ſettimo del membo ſeſto. Così ſe ſi confronti il membro ſeſto della tavola ſeconda col ſettimo della prma, ſi troveranno ſecondi in quello in due modi i ſoli termini terzo, quinto, ſeſto, e ſettimo, che doppo l' a hanno b, c, b, f e così può tirarſi inanzi la formola in infinito.

22 Non è ugualmente facile il ricavare immediatamente dal membro $t^{ſimo}$ qualunque altro in là come il $t+q^{ſimo}$, a cauſa della moltiplicità de' nuovi termini, che ſi vanno generando, ed altri di eſſi ſono ſecondi in due modi, altri in un ſolo. Ad ogni modo ſi potrebbero facilmente cavare alcuni canoni particolari, e corriſpondenti ciaſcuno ad un diverſo valor di q; ma la coſa è troppo compoſta, e di poco momento, potendoſi ricavare tutti l' un dopo l' altro, o pure qualunque membro da ſe co' metodi ſpiegati ſopra diffuſamente. Sarà coſa più giovevole il dimoſtrare un metodo generale, con cui da qualunque membro ſeguente ſi poſſa tornare indietro a trovare immediatamente qualunque de' precedenti.

23 In primo luogo è manifeſto, che ſe a qualunque diviſione di un qualunque numero $t-1$ ſi aggiunga una parte, che contenga un' unità; quella diviſione diviene diviſione del nume-

ro

o t. Onde tutte le diviſioni del numero $t-1$, ſi troveranno in quelle di t e ivi cominceranno per 1. All' oppoſto, qualunque diviſione di t, che cominci per 1, levata quella prima parte, diverrà una diviſione di $t-1$. Quindi ſi ricava, che date le diviſioni di un numero t; ſi troveranno ſubito le diviſioni di $t-1$, col tralaſciare tutte quelle diviſioni, che non cominciano per 1., e in quelle che cominciano per 1 levare il primo 1. Così nella colonna 2. della tavola 1. ſe ſi tralaſcino le diviſioni ſettima, undecima, decima terza, decima quinta, che cominciano per 2, 3, 2, 7, e nelle altre ſi levi la prima unità, ſi troveranno le diviſioni medeſime, che nella colonna prima ſono le diviſioni del numero 6.

24 Di quì ſi cava queſto teorema. *Dato il membro* t^{simo}, *ſi troverà il membro* $t-1^{\text{simo}}$; *purchè tralaſciati tutti i termini che tra' coefficenti letterali non hanno* b, *negli altri tutti ſi ſcemi di un' unità l' eſponente di* b, *e ſi levi* b *ſe l' eſponente era* 1, *ſi accreſca di un' unità l' eſponente di* a, *ſi levi l' ultimo termine della progreſſione* $m.\ m-1$ &c. *nel numeratore del coefficiente numerico, e ſi levi dal denominatore uno de' numeri, che ſia lo ſteſſo, che era l' eſponente di* b *nel termine* t^{simo}, *e al* z *ſi levi un* 1 *nell' eſponente.*

25 Per eſempio nel primo termine del membro ottavo levata un' unità all' eſponente di b, e aggiunta all' eſponente di a, reſta $a^{m-6}\ b^6$, levato l' ultimo termine del denominatore, e nel denominatore levato 7, che era l'eſponente di b, reſta $\frac{m\ .\ m-1\ m-2\ m-3\ m-4\ m-5}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.}$, che è appunto il primo termine del membro ſettimo. E nel termine terzo collo ſteſſo metodo rimane $a^{m-4}\ b^2\ c^2$ nel coefficiente letterale, e levando nel numerico il termine ultimo del denominatore, e nel numeratore un 3, che è l' eſponente di b in queſto termine del membro ottavo, reſterà $\frac{m\ .\ m-1\ m-2\ m-3}{1.\ 2.\ 1.\ 2.}$ come appunto ſi trova nel termine terzo del membro ſettimo. Finalmente ſaltati i termini ſettimo, undecimo, e terzodecimo, che non comincia-

vano

vano per *b*, come pure l' ultimo, dal decimo quarto del membro ottavo, ſi formerà l' ultimo, o undecimo del membro ſettimo, col levar' il *b*, che aveva per eſponente 1, aggiugnere un' unità nell' eſponente di *a*, levar *m*—1 dal numeratore, e un 1 dal denominatore del coefficiente numerico, rimanendo il termine $\frac{m}{1} a^{m-1} g$.

26 La dimoſtrazione è chiara. Giacchè al levare dalla diviſione la prima parte 1 corriſponde il divider per *b*, allo ſcemare una parte della diviſione corriſponde l' accreſcere di un' unità l'eſponente di *a*, e lo ſcemare di un termine la progreſſione del numeratore; e finalmente allo ſminuire di un'unità l'eſponente di *b*, corriſponde il togliere dal denominatore del coefficiente numerico l' ultimo termine della ſerie 1, 2, 3 &c. corriſpondente alla potenza di *b*.

27 Anzi dalle diviſioni di qualunque numero *t* ſi ricaveranno facilmente le diviſioni di qualunque numero *t*—*q*. Imperoche per andare dal *t*—1 al *t*—2, converrà di nuovo tralaſciare tutte le diviſioni di *t*—1, che non cominciano per 1, e alle altre togliere il primo 1, e così per andare dal *t*—2 al *t*—3 &c. Ora quelle diviſioni, che in *t*—1 non cominciano con 1, ſon tutte quelle, che in *t* non cominciavano con due unità, e il levare alle altre di *t*—1 un' unità, e il levare a quelle di *t* due unità, e così pure quelle che in *t*—2 non cominceranno coll' unità ſono quelle, che in *t* non cominciavano con tre unità, e il levare in quelle di *t* tre unità. Sicche il canone generale ſarà queſto. *Date le diviſioni del numero* t, *ſi troveranno le diviſioni del numero* t—q, *col tralaſciare tutte quelle, che in* t *non cominciano con numero* q *di unità, e levare nell' altre numero* q *di unità*. Così ſe date le diviſioni del numero 7 nella ſeconda colonna della tavola 1, ſi cerchino le diviſioni del numero 3; baſta pigliare quelle ſole diviſioni del 7, che cominciano con quattro unità, come ſono quelle ſole della riga 1, 2, 5, nelle quali levate le prime quattro unità reſtano 1.1.1. indi 1.2. indi 3, che ſono le ſole diviſioni del numero 3, intendendo la diviſione eſpreſſa come ſopra.

28 Di qui naſce la maniera facile di trovare qualunque membro precedente dato l' ultimo. Sia dato il membro $t^{ſimo}$, e ſi cerchi

chi il $\overline{l-q}^{\,simo}$ *Si tralascino tutti i termini del* t^{simo}, *che non hanno nel coefficiente numerico* b, *o l' hanno alzato alla potenza minor di* q. *Negli altri si levi dall' esponente di* b *il* q, *e se l' esponente era* q, *si tralasci il* b; *All' esponente di* a *si aggiunga* q; *nel numeratore del coefficiente numerico si levino gli ultimi termini in numero* q; *nel denominatore si levino numero* q *di termini della serie naturale, de' quali il massimo sia il numero che era l' esponente di* b *nel termine del membro* t^{simo}, *e al* z *si levi* qr *nell' esponente, e sarà fatto.*

29 Per esempio se dal membro ottavo si debba ricavare il solo terzo. Tralasciati tutti i termini fuori del primo, secondo, e quinto nella colonna seconda della tavola prima, i quali cominciano per b^7, b^5, b^4; in essi si levino 4 dall' esponente di b, e si aggiungano 4 all' esponente di a, e resteranno i coefficienti letterali $a^{m-3}b^3$, $a^{m-2}b^2$, $a^{m-1}d$: e levando quattro termini ultimi de' numeratori, e quattro de' denominatori, il massimo de' quali sia quello, che era l' esponente di b, cioè levando nel termine primo $\frac{m-3\,.\,m-4\,.\,m-5\,.\,m-1}{4.\quad 5.\quad 6.\quad 7.}$, nel termine secondo $\frac{m-2\,.\,m-3\,.\,m-4\,.\,m-5}{2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.}$, nel termine quinto $\frac{m-1\,.\,m-2\,.\,m-3\,.\,m-4}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.}$, si avranno i coefficienti numerici, che saranno $\frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2}{1.\quad 2.\quad 3.}$, $\frac{m.\,m-1}{1.\quad 1.}$, $\frac{m}{1}$. La dimostrazione è ugualmente facile, e quasi la stessa di prima.

30 Veniamo ora ad alcune riflessioni, che appartengono pure al confronto de' termini di diversi membri, e sono molto utili per comprendere la natura della serie elevata, e valersene poi in varj altri metodi. Darò i teoremi, e la loro dimostrazione, lasciando di dar gli esempj, che ogn' uno potrà facilmente pigliare da se stesso; tanto più, che nel fine dell' articolo di Decembre nominato di sopra dando un ristretto di questi teoremi, ho dato ancora gli esempj.

31 *In ogni nuovo membro sopraverrà una lettera alzata alla sola sua prima potenza, e la lettera, che abbia per corrispondente il nu-*

il numero t *comincierà a venire per la prima volta nel membro* $t^{\text{simo}}+1$.

Imperocchè ogni membro $t^{\text{mo}}+1$ naſcendo dalle diviſioni del numero *t*, avrà tra dette diviſioni quella, che ſarà coſtituita da una parte ſola, che ſia *t*; ſicchè vi ſarà un termine, che avrà la ſola lettera corriſpondente di *t* elevata alla prima potenza. Come poi il numero *t* non può entrare nelle diviſioni di alcun numero minor di ſe, nè può entrare nelle ſue proprie diviſioni più d'una volta; così detta lettera non potrà eſſere entrata in niun membro precedente, ne potrà nel membro $t^{\text{mo}}+1$ eſſere elevata, che alla ſola prima potenza.

31. *Il quadrato della letteta, a cui corriſponde il numero* t, *verrà per la prima volta nel membro* $2t^{\text{mo}}+1$, *il cubo nel* $3t^{\text{mo}}+1$, *la potenza* p *nel termine* $p^{\text{simo}}+1$

Perchè la potenza *p* della lettera, a cui corriſponde il numero *t*, verrà in que' termini, le diviſioni corriſpondenti de' quali contengono numero *p* di parti *t*. Queſto non ſi potrà avere in alcun numero, che ſia minore di *pt*, e ſi avrà in *pt* per la prima volta. Ma le diviſioni di *pt* danno le diviſioni del membro $pt^{\text{simo}}+1$. Dunque detta potenza comincierà a venire per la prima volta nel termine $p^{\text{simo}}+1$, cioè il quadrato nel $2t^{\text{simo}}+1$, il cubo nel $3t^{\text{mo}}+1$, e così in poi.

32. *Qualunque potenza* p *di lettera corriſpondente a qualunque numero* t, *incluſa anche la prima, quando viene per la prima volta, avrà ſeco* a^{m-p}; *e il coefficiente numerico avrà nel numeratore numero* p *di termini, e nel denominatore altrettanti della ſerie naturale ſempre continuata, terminando il numeratore in* m-p+1, *e il denominatore in* p.

Perchè la diviſione del numero *pt*, che gli corriſponderà, avrà numero *p* di parti *t*, e nulla più. Onde l'eſponente di *a* dovrà eſſere *m-p*; il numeratore dovrà avere numero di parti *p*, e il denominatore altrettanti di una ſerie ſola continuata, e andando

dando quella da m per $m-1$ &c., e queſta da 1, per 2, 3. &c., dovrà in quella eſſere $m-p+1$ e in queſta p il termine p^{simo}.

33. *Ogni lettera e ogni potenza di lettera dopo che ſarà cominciata a venire la prima volta, verrà in qualche termine di ciaſcun membro ſeguente accompagnata da' ſoli* b.

Imperocchè da quel termine moltiplicato ſucceſſivamente per b, ſi formeranno nella prima delle due maniere eſpoſte al numero 10. nuovi termini per i membri ſeguenti.

34. *Ogni potenza* p *di lettera corriſpondente al numero* t *verrà in qualunque membro* $pt+q^{simo}$, *accompagnata ſolamente con tutti i coefficienti del membro* q^{simo}, *trasformati ne' nuovi coefficienti col levare all'eſponente di* a *un numero eguale a* p, *aggiungere a' numeratori del coefficiente numerico numero* p *di altri termini della progreſſione* m.m-1 &c. *dopo l'ultimo, e al denominatore altrettanti della ſerie* 1.2. &c., *i quali per que' termini della potenza* q^{sima}, *che non avevano detta lettera, comincino da capo dall'* 1, *e finiſcano in* p, *per quei che l'avevano elevata a qualunque potenza* l *comincino da* l+1, *e finiſcano in* l+p, *continuando così quella ſerie, che già vi ſarà ſtata, e avrà terminato in* l.

Imperocchè tutti i numeri corriſpondenti a detta potenza ſommati inſieme faranno pt. Onde per arrivare al numero $pt+q-1$, che ſerve per le diviſioni corriſpondenti a' termini del membro $pt+q^{simo}$, rimane $q-1$; tutte le diviſioni del quale numero unite con pt, formeranno diviſioni di $pt+q-1$, e ſerviranno per il membro $pt+q^{simo}$. Ma queſte diviſioni di $q-1$, ſi troveranno tutte nel membro q^{simo}, e ſolamente il numero delle parti ſarà quì maggiore, dovendovene eſſere di più tante, quante unità contiene p. Dunque nell'eſponente di a vi ſarà un p di meno: nel numeratore del coefficiente numerico vi ſaranno p termini di più: nel denominatore del medeſimo vi ſarà una nuova ſerie corriſpondente al numero p delle nuove parti, che ſi aggiungono, le quali ſe quella lettera non vi era ne' termini

del

del membro q^{simo}, verranno ſole della loro grandezza, e in numero p; ma ſe quella vi era elevata alla potenza l, ne troveranno delle compagne in numero l; onde nel primo caſo dovrà cominciarſi da capo, nel ſecondo continuarſi la ſerie ſteſſa ripigliandola dal numero l, in cui ſarà prima terminata.

35. Altri teoremi ſimili a queſti ſi potrebbero aggiungere; ma baſtano queſti per dare un ſaggio de' vantaggi, che ſi ricavano dal mio metodo, per avere un' idea più comprenſiva della formola trovata. Queſti medeſimi ſono giovevoli al ſommo per il buon' uſo della formola iſteſſa, ed alcuni di eſſi neceſſarj per dimoſtrare il metodo della reverſione delle ſerie, ed altri, ne' quali dipendentemente da queſta ſerie ſi ſciolgono per approſſimazione l' equazioni finite, ſi riducono in ſerie di termini finiti l' equazioni anche differenziali delle curve, ed altri ſimili. E de' vantaggi di queſti teoremi e del mio metodo per avere, ſe non altro, le dimoſtrazioni più chiare, e più ſpedite, forſe in qualche altro Articolo ne darò un ſaggio, ſe le altre mie occupazioni mi permetteranno di mettere in pulito, e digerire varie ricerche, che ho fatte ſu queſto particolare.

36. Intanto darò tra poco il compimento di quello, che ho promeſſo col dimoſtrare i cangiamenti, che naſcono dal mancare alcun termine della ſerie data, o col determinarſi l'eſponente indefinito m della potenza, e col confrontare queſto metodo co' metodi degli altri.

Caroli *Noceti* e Soc. Jeſu de Iride & Aurora Boreali, Carmina &c. cum Notis Rogerii Joſ. *Boſcovich* ex eadem Societ. Romæ apud Palearinos 1747. in 4°.

ARTICOLO IV.

QUel ſaviſſimo precetto dato da Orazio di laſciar fuora del Poema quelle coſe, che non poſſono ricevere gli ornamenti poetici *& quæ Deſperat tractata nitescere poſſe, relinquit*, con maggior ragione ha luogo, ſe alcuno abbia preſo qualche argomento incapace di quella venuſtà e leggiadria, della quale conviene

RIFLESSIONI SUL METODO DI ALZARE UN INFINITINOMIO A QUALUNQUE POTENZA. PARTE SECONDA



Parte ſeconda delle Rifleſſioni ſul Metodo di alzare un infinitinomio a qualunque potenza del *P. Ruggiero Giuſeppe Boſcovich* della Compagnia di Gesù da lui promeſſe in queſto Giornale nel Dicembre del 1747., e Gennaro dell' anno corrente.

ARTICOLO XII.

1. E Spoſi nell' Articolo 31. del Decembre dello ſcorſo anno 1747. un metodo generale per alzare un dato infinitinomio $a z^{n} + b z^{n+r} + c z^{n+2r}$ &c. a una potenza qualunque indefinita m, moſtrando come ſi poſſa trovare qualunque ſuo membro ſenza aiuto de' precedenti, e ne diedi la dimoſtrazione. Nello ſcorſo Gennaro diedi alcune rifleſſioni ſul metodo ſteſſo, che concernevano varie conſeguenze, le quali generalmente ſe ne ricavano per il confronto principalmente de' diverſi membri fra loro, e per la derivazione degli uni dagli altri: e promiſi la preſente continuazione delle medeſime, e in eſſa la determinazione di cio, che accade ove manchino alcuni termini nell' Infinitinomio, e ove ſi determinino i valori indefiniti degli eſponenti, come anche il confronto di queſto mio metodo con altri, e maſſime con quello di M. *Moivre*, che ſi appoggia ſu i medeſimi fondamenti. Vengo per tanto ora a mantener la parola, e giacche una breve ſpiegazione del medeſimo mio metodo ſi trova in detto Articolo di Gennaro inſieme colle tavole neceſſarie per intendere quello, che dirò qui; ſenza ripetere le coſe ſteſſe per la terza volta, rimetto il Lettore all' articolo ſteſſo, e a quelle medeſime tavole.

2. In primo luogo ſe in un dato infinitinomio manca qualche termine, o ne mancano molti, baſta conſiderare $=0$ le lettere, che in queſto termine ſi trovano nell' infinitinomio poſto quì al num. 1. (dove ſi averta, che non potendo mancar mai il primo termine, dovendovene eſſere almeno uno, non puo mancare a) e però nella formola generale toglier via tutti que' termini, ne' quali ſi trovano tali lettere tra' coefficienti letterali. Così ſe mancaſſe il $c z^{n+2r}$ baſterebbe levar via tutti que' termini, ne' quali entra c, cioè il ſecondo nel membro terzo nella tavola prima; e parimente il ſecondo

in

in tutti i membri ſeguenti ; il terzo nel membro quinto , e in tutti i ſeguenti ; il quinto nel membro ſeſto ; il ſeſto , e nono nel membro ſettimo nella tavola ſeconda , e così degli altri .

3. Queſta correzione della tavola è facile quando la tavola ſi coſtruiſce colle diviſioni di quel numero dato t ; baſtando tralaſciare tutte quelle diviſioni , nelle quali entra il numero corriſpondente alla lettera fatta uguale a zero . Così nella tavola ſeconda nella colonna ſeconda nel cercar le diviſioni del numero 7 , dopo le unità della riga prima , tralaſciati i binarj ſi anderebbe ſubito a' ternarj della riga quinta , e ſaltati i binarj dopo uno o più ternarj , o dopo qualunque numero più groſſo , o combinazione di numeri più groſſi , ſempre ſi tralaſcerebbero le diviſioni , che richiedono binarj .

4. Ma sè , conforme al num. 8. dell' articolo di Gennaro , ſi cercaſſero le diviſioni di $t + i$, date quelle di t , o conforme al num. 16. e 17. ſi cercaſſe il membro ſeguente dato l' antecedente ; non baſterebbe aver trovato quell' antecedente così tronco ; imperocche le diviſioni del numero t , o i termini del membro antecedente potendo eſſere fecondi per due verſi , uno de' quali fa cambiare la prima parte, o la prima lettera , che ſi incontra dopo a acompagnata , o elevata alla prima ſola potenza ; tutti que' termini , che aveſſero per la prima parte , o per quella prima lettera il numero o la lettera che deve tralaſciarſi , genererebbero nel membro ſeguente un nuovo termine, tale , che non avendo punto quella lettera , non dovrebbe mancare, e pure tralaſciato gia nel membro precedente quello , che doveva generarlo , realmente mancherebbe .

5. All' oppoſto, quando, ſecondo il 24. e ſeguenti di Gennaro, dato l'ultimo membro ſi cercano i precedenti, l' aver gia laſciati i termini, che contenevano la lettera , che ſvaniſce , non fà alcun danno alla invenzione de' membri precedenti , purche la lettera , che manca non ſia il b . Giacche dovendoſi in tale invenzione levare nelle diviſioni le ſole unità , o dividere i termini per qualche potenza di b ſolamente , tralaſciando tutte quelle diviſioni , e tutti que' termini , che non anno tante unità , o quella potenza di b ; le altre lettere non poſſono ſopravvenire ne' termini così formati de' membri inferiori , ſe non vi erano in que' del ſuperiore , da cui queſti ſi formano : onde non ſi traſcurerà alcun termine , che non doveſſe traſcurarſi ,

6. Di qui ſi raccoglie , che volendo in tal caſo la formola fino a

un

un dato membro $t^{\text{simo}} + 1$; la più facile maniera di trovarla tutta, sarebbe, il trovar tutte le divisioni del numero t, che non contengano i numeri corrispondenti alle lettere divenute $= o$; coll' aiuto di queste trovare a dirittura il membro ultimo, e con esso tutti i precedenti giusta il num. 27. di Gennaro.

7. Si raccoglie insieme, che la formola generale dell' infinitinomio, contiene quella di qualunque binomio, trinomio, polinomio. Basta solo trovare una progressione aritmetica, che contenga tutti gli esponenti del valore di z contenuti ne' termini del loro polinomio, e la cosa sarà fatta ; giacche in una tale progressione aritmetica chiamato il primo termine n, la differenza de' termini r, si troveranno nel nostro infinitinomio tutti que' termini del dato polinomio, e si troverà quali lettere del nostro infinitinomio si debbano fare $= o$. In questa sostituzione poi si rifletta, che se un termine sarà spogliato del valor della lettera z, i cui esponenti si sono ordinati in progressione aritmetica, deve concepirsi anch' esso moltiplicato per z^{o}, rimanendo così fra gli esponenti dati ancora il o.

8. Dati poi alcuni numeri, il trovar una progressione aritmetica che li contenga, è cosa assai facile, basta levare il minimo da tutti, o tutti dal massimo, trovare il divisore commun di tutti i residui, il quale, se quelli sono numeri interi ; sarà almeno l' unità, e pigliando il massimo, o il minimo de' dati numeri per primo termine, pigliar quel massimo commune divisore per differenza de' termini.

9. Quì poi è da notare che in questi casi è di sommo vantaggio il metodo esposto quì ne' tre numeri precedenti. Sia dato un quadrinomio, che si riduca a questo $az^{n} + bz^{n+r} + bz^{n+7r} + lz^{m+10r}$, e si cerchino i primi 21. membri della formola, che gli deve corrispondere. Questi co' metodi communi sono impratticabili, giacche trovo, che il membro ventesimo primo della formola generale contiene 617 termini ; onde per scrivere tutta la formola fino ad esso, vi vuole un libretto di giusta mole, mentre per altro nel caso presente un' infinità di essi è inutile.

10. Col mio metodo si trovano facilmente così i soli necessarj. Si scrivano come si vede quì inserito tra le righe di questo numero venti unità in una riga. Indi giacche nel quadrinomio vi sono le lettere

tere *b*, *h*, *l*, ſolamente, oltre all' *a* alle quali corriſpondono i numeri 1. 7. 10; nella ſeconda riga ſi metta il 7 al fine con 13 unità innanzi, nella terza 7. 7. con 6. unità innanzi. Quindi non potendoſi andare avanti co' 7, ſi metta nella quarta riga il 10. con dieci unità innanzi, indi nella quinta il 10. 7. con tre unità, finalmente nella ſeſta, che ſarà l' ultima 10. 10. Così que' 617 termini ſi ſono ridotti a ſoli 6. ,che ſi vedono formati faciliſſimamente in altre 6. righe ſotto col metodo eſpoſto ne' num. 5. 6. Ora giuſta il num. 18, o 22. ſi troveranno tutti i membri precedenti con ſomma facilità, levando alle diviſioni del numero 20. una unità per il venteſimo, due per il decimo nono, tre per il decimo ottavo &c. dove ſi peſſono: d' onde ſi raccoglie, che il membro venteſimo, e gli altri due appreſſo fino al

1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1.
1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 7.
1. 1. 1. 1. 1. 1. 7. 7.
1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 10.
1. 1. 1. 7. 10.
10. 10.

m. *m* — 1. *m* — 2 . . . *m* — 19 *m* — 20 20
a *b*

1. 2. 3. . . . 20.
m. *m* — 1 *m* — 2 . . . . *m* — 13 *m* — 14 13
a *b* *b* *m n* + 20 *r*

1. 2. 3 . . . . 13. 1.
m. *m* — 1. *m* — 2 . . . . *m* — 7 *m* — 8 6 2
a *b* *b* Z

1. 2. 3. . . . . 6. 1. 2.
m. *m* — 1 *m* — 2 . . . *m* — 10 *m* — 11 10
a *b* *l*

1. 2. 3. . . . . 10. 1
m. *m* — 1. *m* — 2. *m* — 3. *m* — 4 *m* — 5 3
a *b* *b* *l*

1. 2. 3. 1. 1
m. *m* — 1 *m* — 2 2
a *l*

1. 2.

decimo

decimo ottavo avranno 5. termini per uno mancando l' ultimo. Di lì fino al quintodecimo mancherà anche il quinto. Dal quintodecimo all' undecimo mancherà anche il terzo, rimanendone soli tre. Dall'undecimo fino all'ottavo mancherà anche il quarto rimanendone soli due: di lì fino al primo rimarrà un termine solo. Così tutta la formola avrà termini $1\times7+2\times3+3\times4+4\times3+5\times3+6\times1=78$, potendo così capir tutta in una, o in due pagine, vantaggio molto considerabile.

11. E' da notare inoltre, che se si tratti di alzare un binomio solamente a qualunque potenza, ogni membro non avrà altro, che il solo primo termine, giacche in tutti i seguenti oltre alla lettera b ne vengono delle altre. Nascerà così la formola celebre del *Newtono* di alzare un binomio a qualunque potenza, la quale facilmente si riduce a questa $\overline{a+b}^{n} = a^{m} + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}b^{2} + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^{m-3}b^{3}$, &c. e che non è altro, che un caso particolare della formola generale in cui si faccia $z=1$, $c=0=d=e$ &c.

12. Veduti in questo modo i varj accidenti della formola generale nati dal variar de' valori de' coefficienti b, c, d, &c. che manchino, o rimangano; vediamo altre variazioni, che nascano dalla diversa determinazione degli esponenti m, n, r,. In primo luogo, o gli esponenti n, r, sieno interi, o rotti, o positivi, o negativi, la costruzione della formola è sempre la medesima, e la dimostrazione pure la medesima, non dipendendo essa punto dal valore di tali lettere. L' esponente m della potenza, a cui si deve alzare l' infinitinomio, deve bensì essere numero intero, e positivo, acciocchè abbia forza la dimostrazione data. La formola è veramente la stessa, quando esso sia o negativo, o rotto, o comunque variato; ma la dimostrazione per tali casi è molto più composta, e sarebbe cosa troppo lunga l' andarle appresso; onde passeremo a cio, che appartiene al caso del numero m intero, e positivo.

13. Determinato il numero m, molti termini in ogni membro svaniscono, giacche vi è in ogni termine il coefficiente numerico, che nel numeratore ha i termini $m.m-1.m-2$ &c. della progressione aritmetica; in cui è chiaro che il termine $\overline{m+1}^{simo}$ avrà

$m-$

$m-m=o$; onde ſvanirà tutto quel coefficiente. Sicche ſvaniranno tutti que' termini di qualunque membro, ne' quali la ſomma degli eſponenti delle lettere b, c, d, &c. ſarà maggior di m, o cio che è tutt' uno, tutti que' termini, che ſaranno nati da una diviſione del numero t, che abbia numero di parti maggior di m. Perche dovendo eſſere il numero de' termini di quella progreſſione lo ſteſſo, che il numero delle dette parti, o che la ſomma di quegli eſponenti; quando detto numero di parti, o detta ſomma paſſerà il numero m, ſempre nel numeratore del coefficiente numerico vi ſarà il zero, e però tutto il termine $= o$.

14. Quindi prima di formare un membro, baſterà tra le diviſioni del numero t traſcurare quelle, che anno un numero di parti maggiore di m. Così nella colonna ſeconda della Tavola ſeconda, ſe foſſe $m = 4$, converrebbe tralaſciare le prime tre diviſioni del numero 7 e la quinta, ritenendo le altre; e ſe foſſe $m = 3$, ſi dovrebbero tralaſciare le prime ſei, e la nona; e molte più ſarebbero quelle, che ſi dovrebbero tralaſciare ne' membri poſteriori.

15. Per non far ne pure l' inutile fatica di trovare tutte le diviſioni del numero t, giacche molte ſi devono rigettare; viene l' occaſione di cercare un metodo, con cui dato un numero t ſi trovino quelle ſole diviſioni, che non anno un numero di parti maggior di m. Queſto problema ſi ſcioglierà facilmente, ſe ſi cercheranno con altro metodo tutte le diviſioni poſſibili; cercando prima tutte le diviſioni, che contengono due parti, indi quelle, che ne contengon tre, e così in poi. Il metodo è pur facile, ed è il ſeguente. Si ſcriva in primo luogo il numero dato t, che ſarà la diviſione ideale di una parte ſola; indi per trovar quelle di due parti, ſi ſcriva 1. $t-1$, 2. $t-2$, 3. $t-3$ &c purche la prima parte reſti minore della ſeconda, e ſi avranno tutte quelle diviſioni, che contengono due parti. Per trovare quelle di tre, ſi mettà prima al fine $t-2$, il quale ſi combini con tutte le diviſioni, che il numero 2 puo avere in due parti, che ſarà una ſola 1. 1., indi $t-3$, combinata con tutte le diviſioni in due parti, che puo avere il 3, che parimente ſarà una 1. 2., indi $t-4$ con tutte le diviſioni che puo avere il 4. in due parti, poi $t-5$ &c., avvertendo però ſempre, che la penultima parte non ſia più grande dell' ultima. All' iſteſſo modo per trovare le diviſioni in 4. parti, ſi cominci dal mettere in ultimo $t-3$, con tre unità innanzi, indi $t-4$, $t-5$ &c. $t-q$ col pi-

gliare ogni volta tutte le divisioni, che puo avere quel q in tre parti, trovate col metodo precedente, ma in modo che mai la parte precedente non venga a superar la seguente. Così generalmente si troveranno le divisioni in qualunque numero di parti m, cominciando col mettere in ultimo $t + 1 - m$, indi, seguitando col $t - m$, $t - m - 1$, &c. $t - m - q$, e sempre qualunque di queste parti lasciate in ultimo combinandole con tutte le diverse divisioni di $m + q$ in numero di parti $m - 1$.

16. La dimostrazione è chiara da per se stessa, se anche poco vi si rifletta. L'esempio lo darò pigliando il numero 7, benche ne' numeri più alti si vedrebbe meglio il metodo, ma il numero de' termini viene troppo grande. Si vede qui questa operazione divisa in 7. colonnette.

I	II	III	IV	V	VI	VII
7.	1.6.	1.1.5.	1.1.1.4.	1.1.1.1.3.	1.1.1.1.1.2.	1.1.1.1.1.1.1.
	2.5.	1.2.4.	1.1.2.3.	1.1.1.2.2.		
	3.4.	1.3.3.	1.2.2.2.			
		2.2.3.				

Nella prima vi stà il numero 7. Nella seconda vi stà prima il 6. indi il 5., indi il 4., congiunti col suo residuo. Comincia la terza da $7 + 1 - 3$, cioe da 5 combinato coll' unica divisione del residuo 2. in due parti, che è 1. 1., indi siegue col 4 combinato coll' unica divisione, che ha il 3 in due parti ed è 1. 2. Vien dietro il 3, combinato con due divisioni, che puo avere il residuo 4. in due parti di 1. 3., e di 2. 2. La quarta colonnetta comincia coll' avere in ultimo 4, e l' unica divisione di 3 in tre parti che è 1. 1. 1. Indi viene il 3 coll' unica di 4 in tre parti ed è 1. 1. 2. Siegue 2, coll' unica divisione de residui 5 in parti 3 tale, che niuna sia maggiore dell' ultima 2. Indi seguono le altre tre da se manifeste, e confrontando le divisioni così trovate, con quelle che si sono trovate prima nella seconda Tavola si trovano le stesse.

17. Si noti nella riga terza della colonnetta quarta, che messo per ultima parte il 2, si puo dividere quel 5, che vi rimane al 7, anche facendo 1. 1. 3. ma questa non serve, perche nascerebbe 1. 1. 3. 2., dove la parte penultima supererebbe l' ultima, e in tal caso sempre

ſempre, come anche quì, detta diviſione ſi avrà anche prima. Qui ſi ha nella ſeconda riga di queſta colonnetta. Onde piantata l' ultima parte come in queſta riga terza il 2., per la penultima non và preſa parte maggiore della ſteſſa; ma o eſſa, ſe vi rimàngano unità quante baſtano, o un tal numero minore, che le unità baſtino, e detto numero, che conviene in qualunque operazione prendere per penultimo, ſi troverà così. Sia m il numero delle parti, t il numero intero, p l' ultima parte, converrà prendere per la penultima la prima volta, che compariſce il p, il numero $t+2-m-p$, perche così mettendo in ultimo p, indi $t+2-m-p$, indi unità $m-2$, la ſomma ſarà t, e il numero delle parti m. Benche anche in tal caſo ſe $t+2-m-p$ ſia maggiore di p, non potrà alcuna diviſione in parti m finire in p.

18. Anzi di quì facilmente ſi ricava, *Qual ſia il minimo numero, che poſſa ſervire di maſſima parte, da reſtare in ultimo tra le diviſioni del numero dato* t, *che abbiano un numero di parti* m. Giacche meſſa nell' ultimo p, conviene che la penultima non ſia maggiore di $t+2-m-p$, e che queſta ſteſſa non ſia maggiore di p; converrà che $t+2-m$ non ſia maggior di $2p$, onde che $\frac{t+2-m}{2}$ non ſia maggior di p. Preſa dunque la metà di $t+2-m$; e ſe queſto è numero ſpari, la ſua metà minore, queſto ſarà il minimo maſſimo cercato. Così nel numero 7 ſe ſi cerca la minima maſſima parte per la diviſione in parti 4. ſarà $t=7$, $m=4$, $t+2-m=9-4=5$, la cui metà minore è 2. E appunto nella colonnetta quarta la minima parte ultima che ſtà nella riga terza è il 2. Che sè $m=3$, ſarà $t+2-m=6$, la ſua metà $=3$, e appunto nella colonnetta terza la minima delle ultime parti è il 3 nel fine della quarta, o terza riga. Così le ultime parti delle diviſioni del numero t in parti m ſtaranno fra $t+1-m$, e $\frac{t+2-m}{2}$, eſſendo quella la maſſima, e queſta la minima.

19. Veduta così queſt' altra ſoluzione del problema, con cui ſi cercano tutte le diviſioni di un dato numero, ſi vede ſubito come ſi abbiano a trovare quelle ſole diviſioni, che ſervono per l' elevazione alla potenza m determinata, cioè come ſi abbiano a trovare quelle ſole

ſole, le quali non abbiano numero di parti maggiore di m, e però come in ogni membro ſi poſſano a dirittura trovare tutti i termini neceſſarj ſolamente, e ſenza aiutó alcuno di altri membri.

20. Ad ogni modo ſe la formola ſi avrà a trovare trovando ogni membro proſſimo ſeguente coll' aiuto del ſolo precedente ſecondo il metodo eſpoſto al numero 17. di Gennaro e ſeguenti, ſi troveranno facilmente tutti i termini eſcludendo i ſuperflui con queſta ſola avvertenza, che *ſi tralaſci ſempre la ſola prima trasformazione di que' termini del membro precedente, ne' quali l' eſponente di* a *ſarà divenuto zero, cioè i quali nel coefficiente letterale non avranno* a, *ritenendo tutte le altre trasformazioni ivi preſcritte*. Tralaſcerò il darne l' eſempio; giacche è troppo facile il pigliarlo da ſe. La dimoſtrazione della regola è pure manifeſta. Nella ſeconda generazione del metodo eſpoſto ivi, non creſce il numero de' termini nel numeratore del coefficiente, ma rimane il medeſimo, il quale non eſſendo ſtato $=0$ nel membro generante, non lo ſarà ne pure nel membro generato; onde tutti i termini generati nella ſeconda maniera vanno ritenuti. Nella prima generazione và creſciuto uno di que' termini del detto numeratore. Ora il numero de' termini è lo ſteſſo che il p dell' eſponente di a^{m-p}, eſſendo l' uno, e l' altro uguale al numero delle parti della diviſione corriſpondente. Dovendo eſſo creſcere di un' unità nel termine generato, ſarà in queſto il numero di termini $p+1$, il quale numero di termini non deve paſſare m, acciocche non includa $m-m=0$, e non faccia ſvanire il termine. Dovrà dunque nel termine generante eſſere $p+1$ non maggiore di m, e però m maggiore di p, onde l' eſponente $m-p$ maggior di zero. Si dovranno dunque traſformare nella prima maniera que' ſoli termini, che avranno un eſponente di a maggior di zero, cioè que' ſoli, che tra' coefficienti letterali avranno l' a, laſciando gli altri. Con che rimane dimoſtrata la regola propoſta.

21. All' oppoſto non ſi può dal membro ſeguente ricavare il proſſimo, o un qualunque altro precedente, col metodo eſpoſto al num. 28. di Gennaro e ſeguenti, ſe in quell' ultimo membro ſi ſaranno preſi i ſoli termini neceſſarj, e rigettati i ſuperflui. Perche il metodo preſcritto ivi al num. 27. di trovare le diviſioni del numero $t-q$, date quelle di t, porta che ſi levi, dove ſi puo un numero q di unità, traſcurando le diviſioni, nelle quali queſto numero di unità non ſi

trova,

trova. Ora in queſto levare le unità ſi ſcema il numero delle parti. Se il numero delle parti di alcune diviſioni del numero t ſuperava l'm di meno di q, come accade a molte diviſioni di tutti i numeri maggiori di m; allora queſta diviſione partoriſce nel membro ultimo un termine inutile; ma levato un numero q di unità, naſce una diviſione, che ha numero di parti minor di m, e però corriſponde ad un termine, che non ſvaniſce, nè ſi puo traſcurare. E pure queſto mancherebbe, mancando quello, da cui deve generarſi.

22. Quì ſolo rimarrebbe da ſciogliere un altro problema, non neceſſario per ritrovare la formola, o utile per facilitare eſſa ſteſſa, o il ſuo uſo; ma ſolo atto ad appagare la curioſità, e ſarebbe: *Dato un numero, trovare quante ſieno tutte le ſue diviſioni poſſibili in parti intere, ſenza determinarle a una a una*. Queſto ſervirebbe per ſapere un membro qualunque della formola indefinita quanti termini contenga. Come pure ſe ſi reſtringa il problema a cercare: *Quante ſieno le diviſioni poſſibili, che non abbiano parti maggiori di un dato numero*; Queſto ſervirebbe per trovare il numero de' termini di un dato membro della formola, quando l'eſponente m ſia determinato. Io ho tentato l'uno, e l'altro di queſti problemi per le ſerie da cui dipende; e con altri metodi: e ho trovate varie maniere da facilitarne la ſoluzione, come pure alcuni eſempj di ſommazioni di ſerie, che rieſcono meno atti al fine preteſo per un' accidente degno di rifleſſione; e parimente ho trovato un metodo, con cui date le diviſioni di un numero t, ſi puo da eſſe ricavare il numero delle diviſioni di $t+1$, $t+2$ &c. con formole particolari per ciaſcuno. Ma perche queſte ſoluzioni non appartengono, che puramente a cavarſi una curioſità, e non ho ſtimato bene il perder tempo nel tirar innanzi la ricerca, quanto baſtava per trovare una coſa generale, e facile quanto vorrei; ſtimo bene il tralaſciarle quì, e paſſare al confronto del mio metodo con qualche altro gia cognito, e maſſime con quello di M. *Moivre*.

23. Un metodo di alzare un polinomio qualunque, o anche un infinitinomio a una potenza indefinita lo dà il *Wolfio* nella ſua Algebra Finita al §. 102. dove eſpone anche la formola dello ſteſſo infinitinomio elevato. Si ſerve eſſo della formola del *Newton* del binomio $a+b$ alzato alla poteſtà m, che ſi è veduta quì ſopra al num. 11. ed è $a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2$ &c. Preſcrive, che in

cam-

cambio di a di queſta formola ſi metta il primo termine del polinomio, o infinitinomio, e in cambio di b ſi metta tutto il reſto. In queſto modo non entrandovi le potenze indefinite altro che del primo termine a, ed eſſendo determinate tutte le potenze del reſiduo chiamato b, cioè prima b, poi b^2, b^3 &c., potranno ſempre farſi coll'attuale moltiplicazione queſte potenze determinate, benche nel b ſi racchiuda qualunque numero di termini, e però potrà farſi l'intiera ſoſtituzione, e però trovarſi la formola, che dia indefinitamente qualunque potenza del dato polinomio, o infinitinomio.

24. Queſto metodo è certamente aſſai laborioſo, richiedendo che colla attuale moltiplicazione ſi trovino ſucceſſivamente le potenze di mano in mano maggiori di un polinomio, e nel noſtro caſo di un infinitinomio, per ricavarne la formola cercata; oltre di che non ſi vede punto con eſſo la natura della ſerie, nè la maniera di continuarla: anzi ne meno la moltiplicazione attuale da in mano quella formola iſteſſa, che ha eſpoſta il *Wolfio*, dando numeri particolari, la riduzione de' quali a' valori indefiniti non ſi vede così facilmente, e il *Wolfio* ſteſſo ne pure ne accenna l'artificio. Vi è però un altro modo da ricavare la formola per qualunque polinomio o infinitinomio da quella ſemplice del binomio Newtoniano; ed io la prima volta che ritrovai queſto metodo, che ho eſpoſto in queſti tre articoli, lo ricavai appunto dalla formola ſuddetta del *Newton* prima di aver veduto quello ne aveva publicato M. *Moivre*. Io tutto all'oppoſto del *Wolfio* mettevo in cambio di a i primi due termini del polinomio, e in cambio di b il terzo. Così avevo colla formola iſteſſa la potenza m di quell' a, che già coſtava di due termini, e la mettevo nella prima riga. Indi ſervendomi della ſteſſa formola, ma col mettere $m-1$ in cambio di m, trovavo il valore di a^{m-1}, quale moltiplicato per $\frac{m}{1}$, e per quel b, mi dava nella ſeconda riga tutto quello, che biſognava ſcrivere per avere il valore di $\frac{m}{1} a^{m-1} b$. Al modo ſteſſo tutta la prima riga mi ſerviva per trovare il valore di $\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2$.

Per-

Perche in tutti i termini della prima riga baſta in cambio di m mettere $m-2$, per avere a^{m-2}, e intanto moltiplicarli tutti in oltre per $\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}$, e per b^2. Così andando innanzi, e aggiungendo ſempre tutta la prima riga, ma mutata col mettere ſucceſſivamente $m-3$, $m-4$ &c. in cambio di m, e moltiplicare inoltre ogni termine per $\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} b^3$, $\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} b^4$ &c. ſi trova ne' termini indefiniti la potenza m del trinomio.

25 Da queſto paſſavo al quadrinomio, chiamando a tutto il primo trinomio, e b il quarto termine. Quì tutta la formola trovata fin'allora dava l'a^m, e però tutti i ſuoi termini, mutati co mettere $m-1$, $m-2$, $m-3$ &c. ſucceſſivamente in cambio di m, e moltiplicarli in oltre per $\frac{m}{1} b$, $\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} b^2$, $\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} b^3$, &c., davano i nuovi valori di $\frac{m}{1} a^{m-1} b$, $\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2$, $\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^3$ &c. Così ſi aveva tutto quello, che il quarto termine aggiungeva alla formola indefinita del trinomio per avere quella del quadrinomio, e lo ſteſſo metodo mi ſerviva per andare inanzi a polinomj più alti. Con queſto metodo veniva la formola ſempre creſcendo, ma ſempre co' termini indefiniti. Ogni poco di rifleſſione fatta ſulla maniera, in cui ſi trasformavano i termini antichi, per trovare i nuovi da aggiungere, mi faceva conoſcere la geneſi, e mi diede in mano la maniera di trovare qualunque membro ſenza l'ajuto de' precedenti, che eſpoſi nell'articolo dello ſcorſo Decembre.

26 Vidi in appreſſo il metodo di M. *Moivre* eſpoſto nelle Tranſazioni Filoſofiche al num. 230. nel Giugno del 1697., e prima di eſporre nel Decembre il mio articolo, fattami tradurre dall'Ingleſe tanto la coſtruzione, che avevo veduta altrove, quanto la dimoſtrazione

zione della ſua formola ; mi accorſi , che la dimoſtrazione ſi appoggiava agli ſteſſi principj , e la formola veniva quaſi la ſteſſa ; ma ad ogni modo , quella ſua coſtruzione era molto meno ſemplice , e per trovare un nuovo membro richiedeva ſi metteſſero in opera tutti i precedenti . Piglia eſſo ivi l'infinitinomio $az+bz^2+cz^3+dz^4$ &c. da elevare alla potenza n . Indi ſa notare , che la formola conterrà varj membri , de' quali ſarà compoſto ciaſcuno di varj termini tutti moltiplicati per un'iſteſſa potenza di z , che cominciando col z^n , anderà inanzi col z^{m+1} , z^{m+2} , z^{m+3} &c. In queſti termini tutti quelli , che dopo l' a hanno immediatamente il b, li chiama della prima claſſe ; quelli , che hanno il c , li chiama della ſeconda ; quelli , che hanno il d, della terza , e così in poi . Ora ſe ſi cercherà il membro , in cui deve eſſervi z^{m+r} , ordina che per trovare i coefficienti letterali di eſſo ſi moltiplichino per b , e dividano per a tutti i termini del membro precedente , in cui vi è z^{m+r-2} , tolti quelli della prima claſſe ; ſi moltiplichino per d , e dividano per a tutti quelli del membro , in cui vi è z^{m+r-3} , tolti quelli della prima , e ſeconda claſſe , e così in poi . I coefficienti numerici li trova dipendentemente da' letterali , nel modo iſteſſo , che ho eſpoſto nell articolo di Decembre al num. 14. , e in quello di Gennaro al num. 6.

27 Nella dimoſtrazione riflette ivi , che chiamato 1 eſponente di a , 2 di b , 3 di c &c. , in ogni termine di qualunque membro , che abbia z^{m+r} , deve eſſervi un prodotto letterale compoſto di lettere a , b , c &c. , in cui la ſomma degli eſponenti di tutte le medeſime lettere (raddoppiando l'eſponente iſteſſo , ſe ſi pigli il quadrato della lettera , triplicandolo ſe il cubo &c.) , faccia $n+r$, e il numero delle lettere , o la ſomma degl' indici delle loro potenze, ſe ve ne ſieno , ſia m ; giacchè colla lettera a viene il z , con il b il z^2 , con il c il z^3 , e così in poi ; onde la ſomma degl' indici di z cioè $m+r$, deve eſſere la ſteſſa , che la ſomma de' numeri , che egli chiama eſponenti delle lettere a , b , c &c. , e nel far il quadrato , indi il cubo , vengo-

vengono gli ambi di esse lettere, indi i terni &c. Ma di questa avvertenza ivi non si serve, che per dimostrare il metodo, che dà per raccogliere l'ultimo membro coll'ajuto di tutti i precedenti. Anzi ne pur poteva almeno così facilmente con quella sola riflessione, e col pigliar per esponenti di a, b, c &c. i numeri 1, 2, 3 &c. trovare immediatamente un membro, in cui per esempio fosse z^{m+r} ne' termini indefiniti: almeno non ha ivi accennato alcun metodo per ottenere questo intento, e per sciogliere questo problema numerico, che si richiederebbe, *Trovar tutte le maniere, in cui possa dividersi un numero* $m+r$, *in cui sia dato* r *in numeri, ed* m *rimanga indefinito in parti tali, che il loro numero sia* m. Benche anche la soluzione di questo si può con qualche artificio ricavare dalla maniera, con cui di sopra ho io trovate le divisioni tutte di un dato numero.

28 Io mi trovavo allora con del vantaggio in quanto avevo preso un infinitinomio $az^{n} + bz^{n+r} + cz^{n+2r}$ &c. in termini più generali; benchè il suo $az + bz^{2} + cz^{3}$, si può facilmente trasformare in questo dividendolo per z indi mettendo $z = u^{r}$, e moltiplicandolo tutto per u^{n}, con che verrebbe ad essere $au^{n} + bu^{n+r} + cun + 2r$ &c. e nella formola di esso alzato alla potestà m basterebbe togliere da ogni esponente z un m, indi quello, che resta moltiplicarlo per r, e aggiungere mn. Ma il maggior vantaggio nasceva dall' aver presi per numeri corrispondenti delle lettere b, c, d, &c., 1, 2, 3, &c., e non 2, 3, 4, &c., lasciando così in disparte a. In questo modo mi è bastato il dividere in parti un numero non indefinitamente, ma determinatamente dato, e dipendentememte da questa divisione ho potuto facilmente trovare a dirittura tutti i coefficienti sì letterali, come numerici, col solo ajuto di queste parti; cosa che esso non aveva trovato col suo metodo, e colla sua sostituzione de' numeri 1, 2, 3, &c. per a, b, c, &c. Questi numeri poi, che esso chiama esponenti di dette lettere, gli hopiutosto voluti chiamare corrispondenti, per non confonderli cogl'indici delle potenze, che anche si chiamano esponenti.

29 Dopo di avere impresso quell' articolo, e l' altro di Gen-

naro, mi ſono imbattuto nell'Operetta eccellente, e piena tutta di metodi profondiſſimi, ed utiliſſimi del medeſimo Autore intitolata *Miſcellanea Analytica*, ſtampata in Londra nel 1730. In eſſa nel probl: 4 del capo 2 del libro 4 propone *Invenire terminum quemlibet, cujus locus aſſignetur in ſerie nata ex diviſione unitatis per multinomium quodcunque*. Per ſciogliere queſto problema dice di volere trasferire quà il teorema generale preſentato alla Società Regia a' 6. Giugno del 1697, e inſerito negli Atti al num. 230. Ma nell'eſporlo quì lo muta alquanto mettendo non $a z + b z^2$ &c. come ivi, ma $a + b z + c z^2$ &c. Indi ſpiegati i ſuddetti eſponenti delle lettere, aggiunge: *Jam cum poteſtas quæ libet indeterminatæ* z, *ad intervallum quodlibet datum* $\frac{1}{1}$, *a primo ſeriei termino poſita ſit* z; *inde ſequitur* $\frac{1}{1}$ *producta omnia litteralia poteſtati* z *annectenda, adeoque ad intervallum* 1 *ponenda, obtineri poſſe, ſi ita combinentur litteræ ingredientes multinomium datum, ut ſumma exponentium in productis ſingulis, ſemper evadat* n+1, *numerus vero litterarum ſit* n. Quindi ſenza dare il metodo da ſciogliere queſto problema, moſtra come trovati i coefficienti letterali ſi trovino i numerici, e poi ſoggiunge: *Definita igitur fuerant producta omnia litteralia, atque coefficientes ipſis præfigendæ termino cuilibet aſſignato adſcribenda, ſubque eadem poteſtate indeterminatæ* z *ordinanda, idque abſque ulla conſideratione relationis, quam terminus ille haberet ad terminos anteriores*. Ma giacchè poi per la pratica in quel ſuo Scritto non aveva data la ſoluzione di quel problema delle combinazioni, e per trovare un membro era ricorſo a tutti i precedenti, convien dire che giudicaſſe troppo imbrogliata, e meno uſuale la ſoluzione medeſima, e l'invenzione immediata del membro, la quale per verità rieſce aſſai più compoſta, ſe non ſi mutano quegli eſponenti delle lettere *a*, *b*, *c* &c. da lui aſſunti 1, 2, 3 &c. in 0, 1, 2.

30 Queſta diminuzione di quell'eſponente l'accenna quì al corollario 2 aggiungendo, dover allora eſſere la ſomma di tutti gli eſponenti *l*; d'onde facilmente ſi può entrare nel mio metodo. Ma poi non l'applica che al caſo dell'unità diviſa per un polinomio, cioè al caſo di un polinomio elevato alla poteſtà —1, e pure lo abbandona anche in queſto caſo ad un problema numerico da ſciogliere, ſenza

ſenza eſibirne la ſoluzione. Sicchè quantunque dopo letto queſto ſuo problema co' corollarj, abbia trovati i fondamenti quaſi tutti della mia ſoluzione ancor nella ſua; ad ogni modo, credo di avere fatta coſa giovevole al pubblico, collo ſpiegare il metodo, coll'eſibire la ſoluzione intiera di tutto cio, che ſi richiede per trovare un membro immediatamente, col moſtrare una maniera faciliſſima di trovarlo in pratica ſenza l'ajuto de' precedenti; oltre alla aggiunta di tutto quello, che ſi contiene nell'articolo di Gennaro, e in queſto; ne' quali vi ſono tanti confronti de' membri frà loro, tanti metodi per trovare gli uni dipendentemente dagli altri, tante determinazioni particolari, le quali non ho ancora vedute altrove, e tutte molto giovano per comprendere appieno la natura di queſta utiliſſima formola.

31 Mi vien ſuppoſto, che negli Elementi del calcolo dell'incomparabile Geometra, e Analiſta M. *Clairaut* vi ſia qualche coſa ſul metodo di elevare un infinitinomio a una qualunque potenza. Si aſpettano da gran tempo qui delle copie della ſua Opera, che mai non giungono, coſa che mi ha impedito il vederla nello ſtendere il preſente articolo, per enunciare ſe ho nulla di commune con eſſo lui, con quella iſteſſa candidezza, con cui ho eſpoſto, quanto di commune ho trovato in M. *Moivre*, che in quelle parti mi ha prevenuto. Spero che in altra occaſione farò vedere l'uſo della prima parte delle mie Rifleſſioni nella dimoſtrazione del metodo della reverſion delle ſerie, che da quelle molto facilmente ricavaſi.

Aſſociazione che ſi propone per l'edizione d'un Opera, il cui titolo: *Viaggio d'Egitto* del Signor *Norden* in due volumi in fol. arricchito di 200. figure in rami.

ARTICOLO XIII.

POche ſono le nazioni, che poſſano con verità vantarſi d' una antichità ſi remota come gli Egiziani; e ſimilmente pochi ſono que' popoli, de' quali ſi trovino avanzi antichi degni di maggior con-

TAVOLA PRIMA

Infinitinomio da elevare alla potanza m $az^{n} + bz^{n+r} + cz^{n+2r} dz^{n+3r} + ez^{n+4r} + fz^{n+5r} + gz^{n+6r} + hz^{n+7r}$ &c.

Membri della formola dell' Infinitinomio elevato

I II III IV V VI

$$a^m z^{mn} + \frac{m}{1} a^{m-1} b\, z^{mn+r} + \frac{m.m-1}{1.2.} a^{m-2} b^2 + \frac{m}{1} a^{m-1} c \Big| z^{mn+2r}$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3.} a^{m-3} b^3 + \frac{m-1.m-2}{1.1} a^{m-2} bc + \frac{m}{1} a^{m-1} d \Big| z^{mn+3r}$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4} a^{m-4} b^4 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.1} a^{m-3} b^2 c + \frac{m.m-1}{1.2} a^{m-2} c^2 + \frac{m.m-1}{1.1} a^{m-2} bd + \frac{m}{1} a^{m-1} e \Big| z^{mn+4r}$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.5} a^{m-5} b^5 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.1} a^{m-4} b^3 c + \frac{m.m-1.m-2}{1.1.2} a^{m-3} bc^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.1} a^{m-3} b^2 d + \frac{m.m-1}{1.1} a^{m-2} cd + \frac{m.m-1}{1.1} a^{m-2} be + \frac{m}{1} a^{m-1} e \Big| z^{mn+5r}$$

Divisioni de' numeri t corrispondenti a' membri $t+1$

0.	1.	1. 1.	1.1.1.	1.1.1.1.	1.1.1.1.1.
		2.	1.2.	1.1.2.	1.1.1.2.
			3.	2.2.	1.2.2.
				1.3.	1.1.3.
				4.	2.3.
					1.4.
					5.

Numeri e lettere corrispondenti 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8
b . c . d . e . f . g . h . i . &c.

Divisioni del num. 6. — Membro VII

1. 1. 1. 1. 1. 1. $+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.}\,a^{m-6}b^6$

1. 1. 1. 1. 2. $+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.\ 3.\ 4.\ 1.}\,a^{m-5}b^4c$

1. 1. 2. 2. $\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.\ 1.\ 2.}\,a^{m-4}b^2c^2$

2. 2. 2. $+\frac{m.m-1.m-2}{1.2.\ 3.}\,a^{m-3}c^3$

1. 1. 1. 3. $+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.\ 3.\ 1.}\,a^{m-4}b^3d$

1. 2. 3. $+\frac{m.m-1.m-2}{1.1.\ 1.}\,a^{m-3}bcd$

3. 3. $+\frac{m.m-1}{1.2.}\,a^{m-2}d^2$

1. 1. 4. $+\frac{m.m-1.m-2}{1.2.\ 1.}\,a^{m-3}b^2e$

2. 4. $+\frac{m.m-1}{1.1.}\,a^{m-2}ce$

1. 5. $+\frac{m.m-1}{1.1.}\,a^{m-2}bf$

6. $+\frac{m}{1}\,a^{m-1}g$

Divisioni del num. 7. — Membro VIII.

1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. $+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.m-6}{1.2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.}\,a^{m-7}b^7$

1. 1. 1. 1. 1. 2. $+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 1.}\,a^{m-6}b^5c$

1. 1. 1. 2. 2. $+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.\ 3.\ 1.\ 2.}\,a^{m-5}b^3c^2$

1. 2. 2. 2. $+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.1.\ 2.\ 3.}\,a^{m-4}bc^3$

1. 1. 1. 1. 3. $+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.\ 3.\ 4.\ 1.}\,a^{m-5}b^4d$

1. 1. 2. 3. $+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.\ 1.\ 1.}\,a^{m-4}b^2cd$

2. 2. 3. $+\frac{m.m-1.m-2}{1.2.\ 1.}\,a^{m-3}c^2d$

1. 3. 3. $+\frac{m.m-1.m-2}{1.1.\ 2.}\,a^{m-3}bd^2$

1. 1. 1. 4. $+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.\ 3.\ 1.}\,a^{m-4}b^3e$

1. 2. 4. $+\frac{m.m-1.m-2}{1.1.\ 1.}\,a^{m-3}bce$

3. 4. $+\frac{m.m-1}{1.1.}\,a^{m-2}de$

1. 1. 5. $+\frac{m.m-1.m-2}{1.2.\ 1.}\,a^{m-3}b^2f$

2. 5. $+\frac{m.m-1}{1.1.}\,a^{m-2}cf$

1. 6. $+\frac{m.m-1}{1.1.}\,a^{m-2}bg$

7. $+\frac{m}{2}\,a^{m-1}h$

DIMOSTRAZIONE DI UN METODO DATO DA EULERO



Dimoſtrazione di un metodo dato da Eulero per dividere una frazione razionale in piu frazioni piu ſemplici con delle altre rifleſſioni ſulla ſteſſa materia Del Padre *Ruggiero Giuſ. Boſcovich* della Compagnia di Gesù.

ARTICOLO VII. IX.

I. E Aſſai noto il metodo, con cui una qualunque frazione $\frac{M}{N}$, nella quale abbia N fattori primi fra di loro, ciaſcun de' quali ſia una funzione intera, e razionale di una quantità variabile z, data per eſſa z, e coſtanti, come P, Q, R, &c., e parimente l'M ſia una ſomigliante funzione, e contenga potenze di z piu baſſe di quello, che ne contenga N, poſſa dividerſi in altrettante frazioni parziali $\frac{K}{P}+\frac{I}{Q}+\frac{L}{R}$ &c., in ciaſcuna delle quali ſieno i numeratori K, I, L &c. funzioni ſomiglianti di z, e contenga ciaſcuno potenze di z meno alte, che il ſuo corriſpondente denominatore P, Q, R, &c:, e ſe gli ſteſſi fattori P, Q, R, &c. ſaranno di queſta forma ſemplice $p-qz$, in cui p, e q ſieno quantità coſtanti, converrà, che i numeratori K, I, L &c, ſieno parimente quantità coſtanti, giacchè in eſſi non potrà ritrovarſi alcuna dimenſione di z; la quale coſa di quanto uſo ſia nel calcolo integrale, lo ſanno que', che ſon introdotti nel medeſimo calcolo.

II. Per facilitare l'operazione nel caſo, che i fattori P, Q, R, &c. ſieno ſemplici, ha dato un elegantiſſimo metodo l'Eulero, uomo sì meritamente rinomato, nell' opera intitolata *Introductio in Analyſim Infinitorum* nel tomo 1. capo 2., nella quall' opera, non mai abbaſtanza commendabile, e l'Analiſi algebraica, e la ſua applicazione alla Geometria, e la Geometria medeſima ha maravigliosamente arrichita di molti utiliſſimi, e beliſſimi ritrovamenti, e incredibilmente promoſſa. Si riduce queſto ſuo metodo a due regole generali, la prima pe'l caſo, in cui N abbia fattori

ſem-

ſemplici della forma $p-qz$ tutti diverſi, la ſeconda pe'l caſo, in cui N abbia fattori della forma $(p-qz)^n$, del quale ſecondo caſo più generale quel primo è un caſo particolare, in cui $n=1$.

III. La prima delle due regole ſi riduce a queſta. Se la frazione $\frac{M}{N}$ avrà fattori ſemplici ſolitarj della forma $p-qz$ nel denominatore N, il numeratore coſtante A di qualunque frazione parziale $\frac{A}{p-qz}$ ſi troverà, ponendo $\frac{N}{p-qz}=Z$, e nel valore $\frac{M}{Z}$ mettendo da per tutto $\frac{p}{q}$ in cambio di z. A un tal valore dopo detta ſoſtituzione ſarà uguale il cercato numeratore A. Dà egli una tale regola al num. 41.

IV. La ſeconda ſi riduce a queſta. Se N avrà un fattore della forma $(p-qz)^n$, ſi caverà da eſſo un numero n di frazioni di queſta forma $\frac{A}{(p-qz)^n}+\frac{B}{(p-qz)^{n-1}}+\frac{C}{(p-qz)^{n-2}}\cdots\cdots+\frac{F}{p-qz}$, e i numeratori coſtanti A, B, C, &c. ſi troveranno in queſta guiſa. Sia $\frac{N}{(p-qz)^n}=Z$; ſarà come ſiegue

$A=\frac{M}{Z}$, poſto $z=\frac{p}{q}$. Si ponga $P=\frac{M-AZ}{p-qz}$

$B=\frac{P}{Z}$, poſto $z=\frac{p}{q}$. Si ponga $P=\frac{P-BZ}{p-qz}$

$C=\frac{Q}{Z}$, poſto $z=\frac{p}{q}$. Si ponga $R=\frac{Q-CZ}{p-qz}$

$D=\frac{R}{Z}$, poſto $z=\frac{p}{q}$. &c.

e quel-

e quelle diviſioni per $p-qz$ ſi potranno ſempre fare accurate. Queſta regola la dà al num: 45, e al num: 46 afferma, che fatte queſte operazioni per ogni fattore della forma $p-qz$, o $(p-qz)^n$, ſi caveranno immediatamente dalla frazione data $\frac{M}{N}$ tutte le frazioni parziali, alle quali unite inſieme la medeſima ſarà uguale.

V. L'una e l'altra regola egli illuſtra con degli eſempj in tal maniera, che rimane aſſai chiara a' Principianti medeſimi. Ma la dimoſtrazione in parte dipende da alcune coſe premeſſe, in parte ſi ricava per induzione da' caſi particolari, in parte ancora, mi pare, che ſia mancante. Avendo io d'amendue le regole, ſe non mi inganno, una dimoſtrazione aſſai elegante, e accuratiſſima, che dipende dalla ſoluzione di un problema più generale applicato a' ſuoi caſi particolari; ho creduto di fare coſa agli amatori di queſti ſtudj utile, e non diſcara, coll'eſporre la medeſima dimoſtrazione, eſpoſta la quale ſtenderò le ſteſſe regole a' fattori trinomiali, e farò qualche altra non inutile rifleſſione ſulla materia medeſima.

VI. *Problema. Dividere la frazione* $\frac{L}{(p-qz)KH}$, *in cui* L, K, H, *ſieno funzioni di* z *intere, e razionali, in due* $\frac{G}{(p-qz)K} + \frac{I}{KH}$ *in modo, che* G *ſia coſtante, e* I *ſia parimente funzione intera, e razionale di eſſa* z.

VII. Si faccia $\frac{I}{(p-qz)KH} = \frac{G}{(p-qz)K} + \frac{I}{KH} = \frac{GH+I(p-qz)}{(p-qz)KH}$ Sarà $L = GH + I(p-qz)$, e però $I = \frac{L-GH}{p-qz}$, e in qualunque modo ſi determini il valore di G, purchè queſto valore di I rimanga, rimarrà ſempre la prima equazione.

VIII. Ora in tal maniera convien determinare il valore di G, che il valore d' I rimanga intero, cioè che $L-GH$ ſia divi-

divisibile per $p-qz$. Ciò si otterrà se fatto $p-qz=o$, cioè $\frac{p}{q}=z$, svanisca $L-GH$; imperocchè allora sarà $\frac{p}{q}$ una delle radici di questa equazione $L-GH=o$, e però $L-GH$ si potrà dividere per $z-\frac{p}{q}$, o per $\frac{p}{q}-z$, della quale divisione se il quoto si chiami F, sarà $\frac{L-GH}{p-qz}=\frac{F}{q}=I$, e nello stesso I non vi sarà denominatore, che contenga la variabile z.

IX. Acciò posto $\frac{p}{q}=z$ divenga $L-GH=o$, conviene che sia $L=GH$, e $G=\frac{L}{H}$. Quindi se si prenda $G=\frac{L}{H}$, posto da pertutto $\frac{p}{q}$ in cambio di z, ed $I=\frac{L-GH}{p-qz}$, ritenendo da per tutto z; si avrà la frazione $\frac{L}{(p-qz)HK}$ risoluta in due, $\frac{G}{(p-qz)K}+\frac{I}{KH}$ in modo, che sia G un valore costante, I una funzione intera e razionale di z. Come si richiedeva.

X. *Corol*: 1. *E' manifesto, che* $p-qz$ *non deve essere divisore di* H; perchè in tal caso posto $\frac{p}{q}$ in cambio di z, svanirebbe H, e non si potrebbe avere il valore di $G=\frac{L}{H}$. Può bensì essere $p-qz$ divisore di K.

XI. *Corol.* 2. *Nel denominatore della seconda frazione* $\frac{I}{KH}$ *arriverà* z *a una potenza minore di un' unità, che nella data funzione* $\frac{L}{(p-qz)KH}$: giacchè vi manca una volta $p-qz$.

XII. *Corol.* 3. *Nel numeratore I la ſteſſa potenza maſſima di* z *ſarà minore di un' unità, che in uno de' due valori* L, *ed* H, *cioè in quello, in cui detta potenza è maggiore, ſe detti valori non abbiano la potenza medeſima, o in qualunque de' due, ſe l'anno uguale.*

XIII. Imperocchè eſſendo $I = \frac{L-GH}{p-qz}$, e dovendo riuſcire ſempre la diviſione accurata, detta potenza di z ſarà in I minore per un'unità, che in $L-GH$, dove la potenza maſſima di z è quella, che ha de' due valori L ed H quello, che l'ha maggiore.

XIV. *Corol:* 4. *La potenza maſſima di* z *ſarà nel numeratore della ſeconda frazione* $\frac{I}{KH}$ *minore, uguale, o maggiore, che nel denominatore, ſecondo che parimenti lo ſarà ſtata nella data frazione* $\frac{L}{(p-qz)\,KH}$, *e ſe ſarà ſtata maggiore, ſarà ugualmente maggiore.*

XV. Imperocchè ſia in primo luogo in L minore, che in $(p-qz)\,KH$, e ſe ſarà anche minore, che in H, ſarà pe 'l corol: 3 in I minore per un unità, che in H, e però ancora aſſolutamente minore, che in KH. Se poi ſarà uguale, o maggiore in L, che in H, non ſarà maggiore, che in KH, dovendo eſſere minore che in $(p-qz)\,KH$. Onde dovendo per lo ſteſſo corol: 3 in queſto caſo eſſere in I minore per un' unità, che in L, ſarà ad ogni modo aſſolutamente minore, che in $(p-qz)\,KH$. Sarà dunque in I parimente uguale, o altretante volte maggiore, che in KH, ſecondo che lo ſarà in L riſpetto a $(p-qz)\,KH$.

XVI. *Scolio*. L'applicazione del Problema alle regole d' Eulero sì renderà manifeſta collo ſvolgere i caſi della formola generale $\frac{M}{N}$; anzi ſi' vedranno in oltre alcune coſe, che appartengono alle frazioni non legitime, nelle quali z in M non è elevato meno, che in N, nel quale caſo sì conterrà in quella frazione una parte intera, che ſi potrà cavare dividendo al modo ſolito M per N, finchè il reſiduo contenga z meno inalzato di quello, che lo ſteſſo z ſi contenga in N.

Ma

Ma la medeſima parte intera ſi potrà ancora rinovare dipendentemente dal preſente Problema.

XVII. *Caſo* 1. Sia $N=p-qz$, eſſendo $K=1$, $H=1$. in queſto caſo ſe ſarà M quantità coſtante, non vi ſarà biſogno di alcuna riſoluzione. Ma ſe la ſteſſa riſoluzione ſi faccia col dato metodo, ad ogni modo la prima parte ſi uguaglierà a tutta la data frazione, e la ſeconda ſarà $=o$. Imperocchè la prima parte era $\frac{G}{p-qz}$, e $G=\frac{M}{H}$, poſto $\frac{p}{q}$ in cambio di z. Ora non eſſendovi punto z in M, il ſuo valore con queſta ſoſtituzione non ſi muterà, e eſſendo $H=1$, diverrà G, cioè $\frac{M}{H}$, uguale a quel medeſimo dato valore M, e $\frac{G}{p-qz}=\frac{M}{p-qz}=\frac{M}{N}$. La ſeconda parte poi era $\frac{I}{KH}$, cioè in queſto caſo $I=\frac{M-GH}{p-qz}=\frac{M-M}{p-qz}=o$

XVIII. Se in M non vi ſarà, che la prima ſola potenza di z, la ſeconda parte $\frac{I}{H}$ ſarà una quantità coſtante. Imperochè trovata $G=\frac{M}{H}=M$, poſto $\frac{p}{q}$ in cambio di z, vi ſarà la ſola prima potenza di z in $M-G$, e però eſendo $I=\frac{M-GH}{p-qz}$, o $\frac{M-G}{p-qz}$, e dovendo la diviſione eſſere accurata; non vi ſarà più z in I, o in $\frac{I}{H}$.

XIX. Se vi ſarà in M una potenza di z maggiore, ſarà la parte ſeconda $\frac{I}{HK}$, o veramente I, una funzione, che conterrà z elevato a tanto alta potenza, quanto era prima in N, toltane una unità; Imperochè $M-GH$, o $M-G$ diviſo per $p-qz$, perderà nell' eſponente di z un'unità.

XX. Ciò che ſi è detto nel ſecondo, e terzo lungo, è

anche manifeſto pe 'l corol: 3, e 4. Ma queſte coſe ſi sbrigano più facilmente dividendo M per N.

XXI. *Caſo* 2. Sia $N = (p-qz)H$, divenendo $K=1$. Sarà $\frac{M}{N} = \frac{L}{(p-qz)H} = \frac{G}{p-qz} + \frac{I}{H}$, e $G = \frac{M}{H}$, poſto $\frac{p}{q}$ in cambio di z, e $I = \frac{M-GH}{p-qz}$

XXII. Che ſe vi ſaranno più fattori ſemplici di queſta forma diverſi fra loro, come $a-bz$, $c-dz$, $e-fz$ &c., la riſoluzinne ſi ripiglierà da capo in queſto modo. In primo luogo riſolvendo $\frac{M}{N}$ ſi troverà $\frac{A}{a-bz} + \frac{T}{P}$; indi riſolvendo $\frac{T}{P}$, ſi troverà $\frac{B}{c-dz} + \frac{V}{Q}$: Di poi riſolvendo $\frac{V}{Q}$, ſi troverà $\frac{C}{e-fz} + \frac{X}{R}$, e così in poi. La coſa ſi renderà molto più manifeſta colla ſeguente tavoletta.

Da riſolvere.		Valori da confrontare				Riſoluti
$\frac{L}{(p-qz)H}$	L	H	$G = \frac{L}{H}$	poſto $\frac{p}{q}$	$I = \frac{L-GH}{p-qz}$	$\frac{G}{p-qz} + \frac{I}{H}$
$\frac{M}{N}$	M	$P = \frac{N}{a-bz}$	$A = \frac{M}{P}$	in cambio di $\frac{a}{b}$	$T = \frac{M-AP}{a-bz}$	$\frac{A}{a-bz} + \frac{T}{P}$
$\frac{T}{P}$	T	$Q = \frac{P}{c-dz}$	$B = \frac{T}{Q}$	$\frac{c}{d}$	$V = \frac{T-BQ}{c-dz}$	$\frac{B}{c-dz} + \frac{V}{Q}$
$\frac{V}{Q}$	V	$R = \frac{Q}{e-fz}$	$C = \frac{V}{R}$	e $\frac{e}{f}$	$X = \frac{V-CR}{e-fz}$	$\frac{C}{e-fz} + \frac{X}{R}$
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

XXIII. Nella prima colonna vi è la frazione da riſolvere, nell'

nell' ultima la frazione già risoluta in due, nella seconda, e nella terza i valori corrispondenti ad L ed H, da' quali nella quarta si cava il valore corrispondente alla costante cercata G, e la posizione di $\frac{p}{q}$ in cambio di z necessaria pe 'l medesimo. Nella penultima finalmente vi è il valore corrispondente ad I, il quale col valore corrispondente ad H dà la nuova frazione, che deve collocarsi nella prima colonna in cambio di $\frac{M}{N}$, per ricominciare da capo la nuova risoluzione.

XXIV. E' manifesto, che in questa guisa per ogni fattore della forma $p - qz$ si cava un numeratore costante, che corrisponde al valore G. Se N ha solamente fattori di questa sorte, quando nel valore H della seconda parte $\frac{I}{H}$ ne rimarrà uno solo, la cosa si ridurrà al primo caso, e I conterrà una potenza di z maggiore della prima sola, la sola prima, o nulla, secondo che M l'avrà avuta maggiore di N, uguale, o minore, ciò che si ricava dal corol: 4. Quindi se si faccia una nuova risoluzione in due parti, la seconda parte sarà una funzione intera di z, o una quantità costante, o nulla, nel quale ultimo caso non vi sarà bisogno di nuova risoluzione, ma il valore I ricavato nell' ultima risoluzione sarà l' ultimo de' cercati numeratori costanti; quantunque, come abbiamo detto, esso ancora possa ricavarsi con una nuova risoluzione.

XXV. Ma i valori A, B, C molto più facilmente si trovano, se si noti, che qualunque di tali valori proviene quel medesimo, se la resoluzione si faccia in questo modo successivamente, il quale verrebbe, se addiritura nella prima risoluzione si cavasse dalla formola $\frac{M}{N}$, la quale cosa si dimostra così.

XXVI. Il valore B cavato nella seconda risoluzione è $= \frac{T}{2}$, posto $\frac{c}{d}$ in cambio di z. Fatta una tale sostituzione

nel

nel valore $\mathcal{T} = \frac{M - AP}{a - bz}$, ſvaniſce il valore AP, giacchè P è $= (c - dz)\,\mathcal{Q}$, valore, che con detta ſoſtituzione ſvaniſce. Rimane dunque $\mathcal{T} = \frac{M}{a - bz}$, e $B = \frac{\mathcal{T}}{\mathcal{Q}} = \frac{M}{(a - bz)\,\mathcal{Q}}$.

XXVII. Ma ſe ſi foſſe cavato nel primo luogo, ſoſtituendo i ſuoi valori in $G = \frac{L}{H}$, poſto $\frac{p}{q} = z$; ſarebbe ſtato $L = M$, $H = \frac{N}{c - dz} = \frac{(a - bz) \times (c - dz)\,\mathcal{Q}}{c - dz} = (a - bz)\,\mathcal{Q}$, $\frac{p}{q} = \frac{c}{d}$, e però $G = \frac{L}{H} = \frac{M}{(a - bz)\,\mathcal{Q}}$, poſto $\frac{c}{d}$ in cambio di z, il quale ſarebbe ſtato il valore di B della frazione $\frac{B}{c - dz}$, lo ſteſſo affatto di prima.

XXVIII. Dunque lo ſteſſo valore B ſi ricava, o eſſo ſi ricavi nella prima, o nella ſeconda riſoluzione; e valendo lo ſteſſo diſcorſo per qualunque ſeguente riſoluzione riſpetto alla precedente, qualunque de' valori A, B, C, &c. corriſpondente a tutti i fattori $p - qz$ può ricavarſi in qualunque riſoluzione nella prima parte, dove ſi fa la ſoſtituzione per G in $\frac{L}{H}$, il medeſimo ſi ricaverà immediatamente nella prima riſoluzione.

XXIX. Ma che tutti i valori A, B, C &c. corriſpondenti a tutti i fattori $p - qz$ poſſano ricavarſi in qualche riſoluzione nella prima parte colla formola $G = \frac{L}{H}$, ſi rende manifeſto dalla tavola propoſta, la quale ſe ſi continuaſſe, finchè foſſero eſauriti tutti i diviſori $p - qz$, darebbe ſucceſſivamente nella quarta colonna tutti que' numeratori coſtanti, come ſi è dimoſtrato di ſopra. Dunque ciaſcuno di eſſi può ricavarſi immediatamente dalla prima formola, come ſe ſi ricavaſſe il primo nella medeſima tavola, benchè ſi ricavi il quarto, o il quinto, o in qualunque altro luogo, la quale co-

ſa

ſa toglie via tutto il travaglio della medeſima tavola, e riduce tutta l' operazione a queſta, che ſiegue, ed è tanto più facile.

XXX. Si prendano ſucceſſivamente tutti i fattori della forma $p-qz$, e per ciaſcuno di eſſi ſi prenda $H=\frac{N}{p-qz}$, e ſi faccia $G=\frac{M}{H}$, poſto $\frac{p}{q}$ in cambio di z, e ſarà $\frac{G}{p-qz}$ la frazione corriſpondente a quel fattore; la quale è la ſteſſa regola propoſta da Eulero. Eſſa regola rimane quì accuratiſſimamente dimoſtrata. La dimoſtrazione d' Eulero, a me ſembra, che non abbia forza, ſe non ſi dimoſtri, che con qualunque metodo, e in qualunque luogo ſi cavi il numeratore corriſpondente a qualunque determinato fattore $p-qz$, ſempre debba venire lo ſteſſo; la quale ſeconda coſa eſſendo neceſſaria ancora nel mio metodo, io l' ho dimoſtrata, e ſcanſando così il travaglio della tavola, ho ridotto il metodo di ritrovare tutti i numeratori a una medeſima forma, che è appunto la propoſta da eſſo.

XXXI. Se N abbia ſolamente fattori di quella forma $p-qz$, che ſieno tutti fra loro diverſi, e la frazione ſia legitima, eſſendo z elevato a potenza meno alta in M, che in N; ſi ricaveranno col metodo eſpoſto molto facilmente tutte le parti della frazione $\frac{M}{N}$. Se poi N abbia anche altri fattori, o più fattori ſimili di quella forma, o la frazione non ſia legitima, quella frazione, che rimane dopo di avere adoprati tutti i fattori $p-qz$ fra ſe diverſi nel primo, e nel ſecondo di tali caſi, o quella parte intera, che rimane nel terzo, non può ricavarſi con queſto metodo più breve, non avendoſi quì mai riguardo alla ſeconda parte $\frac{I}{H}$, dall' ultima delle quali ſeconde parti dipende quella; ma conviene adoprare il metodo più lungo, tirando innanzi la tavola fino al fine finchè ſieno eſauriti tutti que' fattori $p-qz$, che non avevano de' compagni; o pure per ricavare nel terzo di tali caſi quella par-

parte intera, conviene, concepire de' fattori di N della forma $p-qz$, ne' quali $p=1$, $q=0$, della quale cosa si dirà più in appresso.

XXXII. Ma l'intrigo della parte intera si potrà sempre evitare, facendo prima la divisione di M per N, finchè si arrivi a un residuo, che abbia la potenza di z meno alta, che N, onde non possa più dividersi. Imperocchè allora la proposta frazione prima d'ogni risoluzione si ridurrà a due parti una intera, e l'altra frazione legitima, che non conterrà più nulla d'intero.

XXXIII. Parimente se vi saranno più fattori della forma $p-qz$ simili, o il fattore $(p-qz)^n$, le frazioni, che si appartengono ad esso, potranno ricavarsi col metodo, che si darà quì nel caso terzo.

XXXIV. Caso 3. Abbia N più fattori $p-qz$ simili, o il fattore $(p-qz)^n$; onde sia $N=(p-qz)^n Z$.

XXXV. Sarà $\frac{M}{N}=\frac{M}{(p-qz)\times(p-qz)^{n-1}Z}$. Se questa frazione si confronti con $\frac{L}{(p-qz)KH}=\frac{G}{(p-qz)K}+\frac{I}{KH}$, sarà $K=(p-qz)^{n-1}$; $H=Z$, G, che è $=\frac{L}{H}$, posto $\frac{p}{q}$ in cambio di z, sarà $=\frac{M}{Z}$, posto lo stesso, $=A$; $(p-qz)K=(p-qz)^n$. Quindi la prima frazione $\frac{G}{(p-qz)K}$ diverrà $\frac{A}{(p-qz)^n}$, essendo $A=\frac{M}{Z}$, posto $\frac{p}{q}$ in cambio di z: e si avrà $I=\frac{L-GH}{p-qz}=\frac{M-AZ}{p-qz}$, il quale se si ponga $=P$, sarà la seconda frazione $\frac{I}{KH}=\frac{P}{(p-qz)^{n-1}Z}=\frac{P}{(p-qz)\times(p-qz)^{n-2}Z}$.

XXXVI. Se questa di nuovo si confronti con $\frac{L}{(p-qz)KH}=\frac{G}{(p-qz)K}$

$= \frac{G}{(p-qz)K} + \frac{I}{KH}$, si aurà $L = P$, $K = (p-qz)^{n-2}$, $H = Z$. d' onde si ricaveranno altre due parti, delle quali la prima sarà $\frac{B}{(p-qz)^{n-1}}$, e così in poi, finchè si arrivi al denominatore $(p-qz)^{n-(n-1)} = p-qz$, esaurito già totalmente il denominatore $(p-qz)^n$, e ricavate da esso parti numero n, delle quali saranno i numeratori costanti, e i denominatori $(p-qz)^n$, $(p-qz)^{n-1}$, $(p-qz)^{n-2}$ &c. Ma questo progresso comparirà meglio nella tavola seguente.

Da risolvere.	Valori			da confrontare		Risoluti
$\frac{L}{(p-qz)KH}$	L	K	H	$G = \frac{L}{H}$ posto	$I = \frac{LGH}{p-qz}$	$\frac{G}{(p-qz)K} + \frac{I}{KH}$
$\frac{M}{(p-qz)^n Z}$	M	$(p-qz)^{n-1}$	Z	$A = \frac{M}{Z}$ e 1	$P = \frac{MAZ}{p-qz}$	$\frac{A}{(p-qz)^n} + \frac{P}{(p-qz)^{n-1}Z}$
$\frac{P}{(p-qz)^{n-1}Z}$	P	$(p-qz)^{n-2}$	Z	$B = \frac{P}{Z}$ in	$Q = \frac{P-BZ}{p-qz}$	$\frac{B}{(p-qz)^{n-1}} + \frac{Q}{(p-qz)^{n-2}Z}$
$\frac{Q}{(p-qz)^{n-2}Z}$	Q	$(p-qz)^{n-3}$	Z	$C = \frac{Q}{Z}$ cambio	$R = \frac{Q-CZ}{p-qz}$	$\frac{C}{(p-qz)^{n-2}} + \frac{R}{(p-qz)^{n-3}Z}$
$\frac{R}{(p-qz)^{n-3}Z}$	R	$(p-qz)^{n-4}$	Z	$D = \frac{R}{Z}$ di z	$S = \frac{R-DZ}{p-qz}$	$\frac{D}{(p-qz)^{n-3}} + \frac{S}{(p-qz)^{n-4}Z}$

XXXVII. Nella prima colonna vi è la frazione da risolvere, nell'ultima la frazione istessa risoluta in due, nella seconda, terza, e quarta i valori, che corrispondono alla quantità cercata G, e la sostituzione $\frac{p}{q}$ in cambio di z necessaria per ritrovarla, nella penultima il valore corrispondente ad I, il quale coi valori corrispondenti a KH dà la nuova frazione da mettere nella prima colonna per fare la nuova risoluzione.

XXXVIII. Ora i valori, che corrispondono a G, e I nella colonna quinta, e penultima contengono quella stessa regola d' Eulero, che da principio si è proposta, e la prima

parte dell' ultima colonna dà quelle medeſime frazioni $\frac{A}{(p-qz)^n} + \frac{B}{(p-qz)^{n-1}} + \frac{C}{(p-qz)^{n-2}}$ &c., le quali ha date lo ſteſſo Eulero.

XXXIX. Eſtratte tutte queſte frazioni, ſi poſſono dopo da quell' ultima ſeconda parte dell' ultima colonna, in cui finalmente rimarrà il ſolo Z per denominatore, ricavare le nuove frazioni col metodo del caſo ſecondo, ſe nello ſteſſo Z vi ſaranno nuovi fattori della forma $p-qz$ diverſi da quelli, e da tutti gli altri, e col metodo del caſo terzo, ſe vi ſaranno altri della forma $(p-qz)^n$ diverſi da quel di prima.

XL. Ma qui ancora ciaſcuna di ſomiglianti frazioni ſi potrà cavare imediatamente dalla ſteſſa formola $\frac{M}{N}$ col metodo eſpreſſo nel ſecondo caſo. Imperocchè ſia l' ultima frazione dell' ultima colonna $\frac{X}{Z}$, e o le nuove frazioni ſi eſtraggano dalla frazione $\frac{X}{Z}$, o dalla $\frac{M}{N}$, verranno affatto gli ſteſſi valori, coſa che ſi dimoſtra così.

XLI. Si debba eſtrarre la frazione corriſpondente a un fattore dello ſteſſo Z, che ſia $(a-bz)^m$. Si dourà porre $\frac{a}{b}$ in cambio di z, fatta la quale ſoſtituzione ſvanirà Z in tutti quei valori P, $\mathfrak{Q}$, R, S della colonna penultima, giacchè il ſuo fattore $a-bz$, fatta una tale ſoſtituzione ſvaniſce. Sarà dunque ivi $P=\frac{M}{p-qz}$, $\mathfrak{Q}=\frac{P}{p-qz}=\frac{M}{(p-qz)^2}$, $R=\frac{\mathfrak{Q}}{p-qz}=\frac{M}{(p-qz)^3}$, e così in poi; e però finalmente $X=\frac{M}{(p-qz)^n}$. Quindi $\frac{X}{Z}=\frac{M}{(p-qz)^n Z}$, cioè quella prima frazione $\frac{M}{N}$. Dunque ſarà lo ſteſſo, il cavare le frazioni appartenenti ad $(a-bz)^m$ immediatamente dalla

dalla frazione $\frac{M}{N}$ avanti di eſtrarre quelli, che appartengono a $(p-qz)^n$, e il cavarle dalla frazione $\frac{X}{Z}$ dopo eſtratte quelle.

XLII. In queſto modo rimane al fine accuratiſſimamente dimoſtrata l'una, e l'altra regola d'Eulero propoſta al principio. Ridotta la frazione $\frac{M}{N}$, quando non fuſſe legitima, ad una legitima colla diviſione di M per N, ſe nello ſteſſo N vi ſaranno ſoli fattori della forma $p-qz$, o $(p-qz)^n$, la frazione iſteſſa ſi ridurrà in tante frazioni, che avranno il numeratore coſtante, e il denominatore $p-qz$, o $(p-qz)^n$, $(p-qz)^{n-1}$ &c. col metodo del ſecondo, e terzo caſo, ſenza che altro più vi rimanga.

XLIII. Che ſe ne pur ſi voglia ridurre a leggittima la frazione illegittima colla diviſione di M per N, ſi potrà col medeſimo metodo addirittura da $\frac{M}{N}$ cavare quella ſteſſa parte intera, o quelle parti intere, ſe ve ne ſaranno più, conſiderando nello ſteſſo N altrettanti fattori della forma $p-qz$, nei quali $p=1$, $q=0$, e però $p-qz=1$, di quante unità la maſſima potenza di z in M ſupera la maſſima in N con una di più; o ſe la maſſima potenza di z in M ſarà $=r$, in $N=f$, e ſi ponga $r-f=t$, conſiderando $N=(1-0z)^{t+1}Z$, e cavando col metodo eſpoſto le frazioni corriſpondenti a $\frac{G}{p-qz}$, cioè a $\frac{G}{1}=G$, dove ſarà $Z=N$, $K=1$ per eſſere $1-0z=1$, e l'operazione fattta nella tavola del caſo terzo darà lo ſteſſo, che ſe ſi faceſſe col metodo della tavola del caſo ſecondo, conſiderando tutti i valori $1-0z$ come tra ſe diverſi. Imperocchè ritrovato qualunque G, ſarà dopo tanto $\frac{I}{KH}$, quan-

$\frac{I}{H}=\frac{I}{N}$, ed $I=\frac{L-GH}{p-qz}=L-GN$.

XLIV. Ma gli ſteſſi valori G non verranno coſtanti. Imperocche dove nel valore $\frac{L}{H}$, o in queſto caſo $\frac{M}{N}$ ſi pone $\frac{p}{q}$ in cambio di z; ſi dovrà porre $\frac{1}{0}$ valore infinito; onde ſvaniranno tutti i termini di M ed N, toltine quelli ne' quali ſi trovano le maſſime di menſioni di z, e diviſo il termine, che rimarrà in M per quello, che rimarrà in N, colla quale diviſione il valore di z ſi deprimerà a una minore potenza, ſi avrà il valore di G, che ancora involgerà z, e ſarà $1 = \frac{M - GN}{p - qz} = M - GN$, la quale ſottrazione eliderà il termine più alto dello ſteſſo M, depreſſo il quale ripetendo l'operazione col riſolvere di nuovo $\frac{1}{N}$ coll' ajuto di un nuovo $1 - oz$, ſi arriverrà alla frazione legitima, e l'ultimo valore di G ſolamente reſterà coſtante.

XLV. Si potrebbe illuſtrar cogli eſempj queſta eſtrazione delle parti intere, come tutto il rimanente; ma tali eſempj da ſe medeſimi facilmente ſi formeranno coloro, che ſono in queſte materie abbaſtanza verſati.

XLVI. Queſto metodo viene propoſto da Eulero per que' caſi ne' quali N poſſa dividerſi in fattori ſemplici della forma $p - qz$. Ma il medeſimo può addattarſi a tutti quei caſi, ne' quali N ſi può dividere in fattori della forma $rq - 2pqz + qqzz$. Per dimoſtrare ciò, ſi ponga $qqzz - 2pqz + rq = o$, cioè $zz = \frac{2p}{q} z - \frac{r}{q}$; d' onde ſi ricava $z = \frac{p + \sqrt{(pp - rq)}}{q}$, i quali due valori ſaranno reali, ſe rq ſarà negativo; e ſe eſſo ſarà poſitivo, ſaranno reali, o imaginarj, ſecondo che rq ſarà maggiore, o non maggiore di pp. Si ponga in ambedue i caſi $\sqrt{(pp - rq)} = u$, e ſarà $z = \frac{p + u}{q}$. Quindi $zz - \frac{2pz}{q} + \frac{r}{q}$ avrà due diviſori $+ \frac{qz - p + u}{q}$, e $\frac{qz - p - u}{q}$, e $qqzz - 2pqz + rq$ avrà due

due divisori $qz - p + u$, e $qz - p - u$, cioè $-u + p - qz$, e $u + p - qz$.

XLVII. Sarà dunque $\frac{M}{N} = \frac{M}{(qq\,zz - 2pq\,z + rq)\,Z} = \frac{M}{(-u + p - qz) \times (+u + p - qz)}\,Z$. Quindi si ricaveranno due frazioni $\frac{A}{-u + p - qz}$, e $\frac{B}{+u + p - qz}$, fatti $A = \frac{M}{(u + p - qz)\,Z}$, posto $\frac{-u + p}{q}$ in cambio di z, e $B = \frac{M}{(-u + p - qz)\,Z}$, posto $\frac{u + p}{q}$ in cambio di z. Fatta una tale sostituzione, dovunque si incontrerà la potenza pari della quantità u, essa sempre sarà reale, e razionale; giacchè essendo $u = \sqrt[m]{(pp - rq)}$, sarà $u^{2} = pp - rq$, ed $u^{2m} = (pp - rq)$

XLVIII. Sostituito da per tutto per u^{2m} il valore $(pp - rq)^{m}$, tuttociò che moltiplica u nel valore A, si dica P, il resto si dica Q, e sarà $A = Q + Pu$. Giacchè nel determinare il valore B tutto il resto è affatto comune al valore d' A, e solo l' u si muta in $-u$; necessariamente sarà $B = Q - Pu$, e le due frazioni saranno $\frac{Q + Pu}{u + p - qz} + \frac{Q - Pu}{-u + p - qz}$, o posto $p - qz = x$, saranno $\frac{Q + Pu}{u + x}$, e $\frac{Q - Pu}{-u + x}$. La somma di esse due frazioni sarà questa $\frac{-Qu + Qx - Puu + Pxu + Qu + Qx - Puu - Pxu}{-uu + xx}$ i termini, ne' quali u è semplice, si distruggono, e rimane $\frac{2Qx - 2Puu}{-uu + xx}$, o sostituiti per x, xx, uu, i valori $p - qz, pp - 2qz + qq\,zz, pp - rq$, si avrà $\frac{2Qp - 2Qq\,z - 2Ppp + 2Prq}{qqzz - 2pqz + rq}$, o pu-

o pure se si ponga $2\mathfrak{Q}p - 2Ppp + 2Prq = C$, e $2\mathfrak{Q}q = D$, sarà $\frac{C - Dz}{qqzz - 2pqz + rq}$, dove i valori C, D, sono valori costanti liberi dalla irrazionalità, e dalla imaginarietà, e simile è la dimostrazione anche pe 'l caso in cui N abbia un fattore $(qqzz - 2pqz + rq)^n$, nel quale caso parimente ridotto esso a due fattori semplici, ritrovate tutte le frazioni parziali, e congiunte queste a due a due in modo, che non vi sia altra differenza, che il valore di u positivo in una, e negativo nell' altra, e viceversa, necessariamente tutti quei termini, che conterranno qualunque potenza spari u con un segno, avranno i compagni col segno opposto; e però necessariamente tutte le potenze spari di u si elideranno, rimanendo le sole potenze pari, che non contengono ne l' irrazionalità, ne l' imaginarietà.

XLIX. In questo modo le regole d' Eulero si estendono in modo, che servono anche per i fattori trinomiali. Ma non è quì luogo d' andar dietro a queste cose, e d' illustrare ogni parte con apportar degli esempj.

L. Sanno quelli, che sono versati nel calcolo, quanto sia grande l' uso di questa risoluzione nel calcolo integrale. Coll' ajuto di essa l' integrazione di qualunque formola $\frac{Mdz}{N}$ si riduce alla quadratura del cerchio, e dell' Iperbola, o si integra accuratamente, purche M, ed N sieno funzioni intere, e razionali di z, ed N possa dividersi in fattori binomiali della forma $(p - qz)^n$, o trinomiali della forma $rq - 2pqz + qqzz$, o ciò, che torna lo stesso, $r - 2pz + qzz$.

LI. La divisione di qualunque funzione in somiglianti fattori generale non l'abbiamo ancora. Questa materia l'anno scorso la trattò egregiamunte in un opuscolo il Dottissimo P. Le Seur, in cui espose gli altrui ritrovati, e ne aggiunse de' suoi, dimostrando, che tutti i polinomj fino all' ottinomio, incluso esso stesso, si possono risolvere in somiglianti fattori reali, e che se si potranno risolvere i polinomj espositi da' numeri della progressione dupla 8, 16, 32, 64 &c. accresciutidi un' unità, si potranno coll'ajuto di questi risolvere tutti gli altri. La risoluzione poi si fà almeno coll'ajuto delle geometriche costruzioni.

LII. La

LII. La ſteſſa materia in queſto medeſimo ſecondo capo l'ha trattata Eulero, dove dopo di avere propoſto al n. 29: *Factores ſimplices functionis cujuſcumque integræ Z ipſius z reperiuntur, ſi functio Z nihilo æqualis ponatur, atque ex hac æquatione omnes ipſius z radices inveſtigentur; ſingulæ enim ipſius z radices dabunt totidem factores ſimplices functionis Z*, e dopo di avere al num. 30 inferito così: *Factores ſimplices ergo erunt vel reales, vel imaginarij, & ſi functio Z habeat factores imaginarios, eorum numerus ſemper erit par*, e al n. 31: *Si fuerit Q productum reale ex 4 factoribus ſimplicibus imaginarijs, tum idem productum Q reſolvi poterit in duos factores duplices reales*, coſe, che da gran tempo erano ben cognite, finalmente al num. 32 dice così: *Si functio integra Z ipſius z quotunque habeat factores ſimplices imaginarios, bini ſemper ita conjungi poſſunt, ut eorum productum fiat reale*. Ma queſta propoſizione non la dimoſtra; giacchè l'inferiſce ſolo dal riuſcire la coſa, quando dette radici imaginarie ſono due, e quando ſono quatro, e dall'eſſere ſempre il loro numero pari: le quali coſe avendo propoſte, aggiunge: *Quanquam autem eundem demonſtrandi modum ad altiores poteſtates extendere non licet; tamen extra dubium videtur eſſe poſitum, eandem proprietatem in quotcumque factores competere ita, ut ſemper loco* 2n *factorum ſimplicium imaginariorum induci queant* n *factores duplices reales*. Quindi ſubito generalmente inferiſce. *Hinc omnis functio integra ipſius z reſolvi poterit in factores reales vel ſimplices, vel duplices. Quod quamvis non ſummo rigore ſit demonſtratum, tamen ejus veritas in ſequentibus magis corroborabitur, ubi hujus generis functiones* $a+bz^n$, $a+bz^n+cz^{2n}$, $a+bz^n+cz^{2n}+dz^{3n}$ *&c. actu in ejuſmodi factores reales reſolventur*.

LIII. Quì egli accenna il capo 9, in cui trattando della ricerca de' fattori trinomiali, porta veramente un elegantiſſimo metodo per una tale ricerca, dal quale metodo anche da ſe medeſimo ne diſcende il tanto celebre teorema del Cotes, che determina i fattori trinomali della funzione $a^n \pm z^n$ colla ſezione della circonferenza del cerchio in parti uguali numero n; ma non và inanzi oltre al ſeſtinomio della forma $a+bz^n+cz^{2n}+dz^{3n}+ez^{4n}+fz^{5n}$, la riſoluzione del quale, e degli inferiori ad eſſo era gia cognita da gran tempo. E quantunque eſſo proponga de' metodi ingegnoſiſſimi, e ſpeditiſſimi tanto

to per queſti polinomj, quanto per gli altri, onde preſſo la Republica Letteraria ſi è fatto un grandiſſimo merito; ad ogni modo non dimoſtrando egli, che i medeſimi debbano riuſcire di là dal ſeſtinonio, queſta ſola induzione non mi muove a ſottoſcrivermi a quello, che aggiunge: *Quare ſi nullum dubium manſiſſet circa hujuſmodi reſolutionem omnium functionum integrarum, hoc nunc fere penitus tollitur*. A me certamente non viene ritolto il dubio non ſolo da una induzione così ſcarſa, ma ne pure da quella tanto più ampia, con cui in queſta ricerca è ito tanto più in là di Eulero il ſopralodato P. Le Seur; come la ſteſſa al medeſimo ſuo dottiſſimo Autore non lo ritolſe.

LIV. Da tutte queſte coſe manifeſtamente ſi ricava, che non ſi è ritrovato fin' ora un metodo generale per queſta riſoluzione. Per averla co' diviſori ſemplici ſi richiederebbero due coſe: In primo logo che data qualunque equazione, ſi poteſſe aſſegnare il valore analitico di tutte le ſue radici, quantunque imaginario, almeno coll'ajuto di qualche coſtruzione geometrica, che deſſe i valori reali da moltiplicare coll'imaginario $\sqrt{-1}$: Indi, che ſi dimoſtraſſe, poterſi ſempre tutti i fattori ſemplici imaginarj congiungere in maniera a due a due, che formino fattori trinomiali reali. L'una e l'altra di tali coſe, come poſſa generalmente ottenerſi, non l'ho trofin'ora in alcun luogo. La ſeconda Eulero, come ſi è veduto quì ſopra, la ricava ſolamente da una induzione, che non ha certamente forza per dimoſtrare, e queſta ancora ſi ſcarſa. La prima, con una nulla meno ſcarſa induzione l'ho pur veduta avvanzata altrove da Eulero iſteſſo, coſe, che piutoſto confermano la difficoltà dell'impreſa. So, che per queſta impreſa medeſima travagliava ultimamente il dottiſſimo Padre Jacquier, uomo tanto eſercitato nel calcolo, avendo meſſi da parte de' materiali. Venendone a capo, farà certamente coſa nulla meno, per l'importanza di un tale ritrovamento, vantaggioſa agli altri, che glorioſa a ſe medeſimo per queſta iſteſſa difficoltà di un impreſa da tanti altri fin'ora tentata inutilmente.

DELLE OVALI CARTESIANE



NUOVI ISTROMENTI
PER LA
DESCRIZIONE DI DIVERSE CURVE ANTICHE E MODERNE

E di molte altre, che ſervir poſſono alla ſpeculazione de' Geometri, ed all' uſo de' Pratici.

COL PROGETTO
DI DUE NUOVE MACCHINE PER LA NAUTICA
ED UNA PER LA MECCANICA,

E con alcune Oſſervazioni ſopra de' Poligoni rettilinei regolari

DEL CONTE GIAMBATISTA SUARDI
BRESCIANO.



BIBLIOTECA NAZIONALE
1872

IN BRESCIA: MDCCLII.
Dalle Stampe di GIAN-MARIA RIZZARDI.
CON LICENZA DE SUPERIORI.

Lettera 16. Marzo 1748. ſcrittami dal Chiariſs. P. Ruggiero Boſcovich della Compagnia di Gesù in propoſito delle *Ovali Carteſiane*.

PROBLEMA.

DUe eſtremità di un filo (Fig. 1, 2, 3, Tav. 9.) *ſieno fiſſe una in* P *ſul piano della carta, e l'altra ſullo ſtilo mobile* M, *in modo che lo ſteſſo filo più lungo ſi avvolga intorno allo ſteſſo ſtilo* M *e paſſi fino a un pivoletto pur fiſſato nella carta in un punto* F, *intorno a cui ſi avvolga, tornando allo ſtilo* M. *Girato ora lo ſtilo* M *in modo, che ſempre tenga teſo il filo, ſi cerca la natura della Curva che deſcriverà.*

Il filo in PM *ſarà ſemplice, ed in* MF *raddoppiato. Onde la proprietà eſſenziale della Curva ſarà, che da due fochi* P, F *menate a qualunque ſuo punto* M *due rette, la ſomma della prima inſieme col doppio della ſeconda ſia eguale ad una lunghezza coſtante, cioè alla lunghezza del filo.*

Fatto centro in P *coll'apertura della lunghezza del filo ſia il circolo* DHC, *che incontri in* D, C *la retta menata per* PF, *e prodotta la* PM *fino al medeſimo circolo in* H, *dovrà eſſere* MH *il doppio di* MF. *Quindi ſi vede che queſta Curva è un caſo particolare di un altro aſſai più generale, in cui ſia* FM *ad* MH *in data ragione. Si potrà queſto caſo generale eſprimer anche così: Dato un punto* F *comunque, e un cerchio* DHC *qualunque trovar la natura di una Curva tale, che tirata da qualunque ſuo punto* M *una retta* MF, *al dato punto* F, *e un'altra* MH *perpendicolare alla periferia del dato circolo, ſia la prima alla ſeconda in data ragione.*

In queſt'aria ſi vede ſubito la relazione, che queſte Curve hanno colle ſezioni Coniche. Nelle ſezioni Coniche vi è una retta direttrice tale, che tirata da qualunque punto della Curva una retta a un fuoco, ed un'altra alla direttrice, ſia la prima alla ſe-

ſeconda in data ragione, la qnale ſe ſia ragione di minore diſeguaglianza ſi avrà l' Eliſſe, *ſe di eguaglianza ſi avrà la* Parabola, *ſe di maggiore diſeguaglianza ſi avrà l'* Iperbola. *Sicchè queſte Curve differiſcono dalle ſezioni Coniche col avere per direttrice una periferia circolare in cambio di una retta. Se la direttrice di quelle ſi avvolge in un circolo, qnelle ſi mutano in queſte, e all'oppoſto ſe il circolo di queſte diviene una retta, queſte divengono ſezioni Coniche. Anzi di più ſi vede, che le ſezioni Coniche ſono un caſo particolare di queſte Curve più generali. Baſta in queſte far, che il centro* P *vada all'infinito, e queſto caſo particolare dà ſubito le ſezioni Coniche; ed è coſa graziosa il vedere come in queſto modo anche l'* Eliſſe *è una di queſte Curve, la quale buttandoſi il circolo in una retta divien* Parabola. *Se la ragion data ſia d'eguaglianza ſarà* FM *eguale ad* MH *e però la ſomma di* PM, MF *eguale alla* Coſtante PH *e la Curva verrà* Eliſſe. *Se il circolo diviene una retta, va il centro* P *all'infinito, e l'* Eliſſe *ſi muta in* Parabola. *Onde l'*Eliſſe *ſi muta in* Parabola, *e la* Parabola *in* Eliſſe *anche col ſolo conſiderare, che la direttrice divenga retta dall'eſſere circolare, o ſi avvolga in circolo dall'eſſer retta.*

Di qui ſi vede, che il trattare di queſte Curve porta aſſai più che il trattare delle ſezioni Coniche, eſſendovi dentro tutte qnelle in un ſol caſo particolare, e infinite di più. E così ogni Curva è un argomento d'innumerabili ricerche, e ſi vede quanto è limitata la noſtra mente, quanto povera e cecа la noſtra Geometria. Coſa poi ſarebbe, ſe per direttrice ſi pigliaſſe qualunque altra Curva? Quanto più creſcerebbe il numero delle Curve, e quanto più fecondo ſarebbe il caſo? e ſe qualunque funzione di MF *a qualunque di* MH *doveſſe aſſere un qualunque rapporto eſpoſto comunque, qnanto più in là ſi andarebbe?*

Io qui ſolo mi reſtringerò a darne la coſtruzione geometrica per punti, e a tirar le tangenti. Darò l'equazione

ne

ne caverò alcuni Corollarj, distinguerò alcuni casi, e mostrerò, che in alcuni vengono alcune Curve particolari già cognite.

Si prenda PE *a* PC *nella data ragione, e col centro* P *coll' apertura* PE *si faccia un circolo, che incontri la* DC *in* G,E. *Da qualunque punto* H *del circolo* DHC *pel centro* P *si tiri una retta indefinita, e un' altra pel punto* F. *Se questa seconda incontra il circolo* GE *in qualche punto* I, i, *si tirino le due rette* PI, Pi; *indi da* F *due parallele* FM, Fm *alle medesime, e se queste incontreranno la* HP *in* M, m, *saranno i due punti* M, m *alla Curva cercata. Imperocchè sarà* FM *ad* MH, *come* IP *a* PH, *cioè come* PE *a* PC *in ragion data, e la stessa è la dimostrazione per* m.

E' chiaro, che rispetto al punto H *non vi saranno altri punti, che i così determinati, perchè dovendo essere* PE *a* PC, *come* FM *ad* MH, *come* IP *a* PH, *ed essendo* PH *eguale a* PC, *sarà* PI *eguale a* PE, *e però* I *nel circolo descritto col raggio* PE. *Onde se si concepirà girare la* PH *intorno a* P, *descrivendo* H *tutta la circonferenza del circolo, e facendosi sempre la stessa costruzione; i punti* M, m *descriveranno tutta la Curva cercata senza lasciarne fuori alcun punto. Inoltre non potendo la retta* HF *incontrar il circolo in più di due punti; per conto del punto* H *non vi potranno essere più di due intercezioni della retta* HP *sulla curva. Ma come la stessa retta prodotta divien di nuovo perpendicolare al circolo dalla parte opposta; potranno esservi due altri punti, le perpendicolari de' quali si terminino a quest' altra estremità. Che se la retta* HF *sarà tangente del circolo* GIE *concorrendo i due punti* I, i *in un solo; sarà ancora la* HP *tangente della Curva, la qual cosa potrà accadere quando il punto* F *non sia dentro al circolo* GIE, *come nelle* Figure 2. e 3., *e se la retta* HF *non incontrerà il circolo* GIE, *nella retta* HP *non vi sarà alcun punto alla Curva per conto del punto* H.

Dall' essere i due semicircoli di qua e di là dalla DC *affatto eguali e simili, si vede che essa dividerà la Curva*

in

in due parti eguali e ſimili, e ſarà un aſſe, il quale incontrerà la Curva ne' punti AB, ab *dati. Mentre deve eſſere* FB *a* BC, FA *ad* AD, Fb *a* bc, *e* Fa *ad* aC, *come* FE *ad* FC *in ragione data.*

Ora in due maniere principalmente ſi poſſono variare queſte Curve: Prima, mantenendoſi la ragion data di PE *a* PC, *e variandoſi la poſizione del punto* F *riſpetto al circolo* GIE, *ed eſſendo or dentro detto circolo, come nella* Fig. 1., *or nella periferia, come nella ſeconda, ora fuor del circolo, come nella terza. La ſeconda variandoſi la ragion ſteſſa.*

Le prime variazioni ſono delineate nelle 3. *figure colla ragion di uno a due. Qualunque ſia la ragione, nel primo caſo ſempre la retta* HF *incontrerà il circolo* GIE *in due punti. Onde ſempre ſi trovaranno due punti* M, m. *Anzi perchè i due punti* I, i *giaceranno di qua e di là da* F, *anche i due* M, m *giaceranno di qua e di là da* P; *e però uno de' due, come* M *verſo* H, *e l'altro come* m *dalla parte oppoſta. Quindi la ſomma di* PM *e di* MH, *che alla* MF *ſta in data ragione, ſarà eguale alla coſtante* PH, *ma delle* Pm, mH *lo ſarà ſolamente la differenza; o pur anche la ſomma, ſe la* Pm, *che va verſo la parte oppoſta di* PM, *ſi conſideri, come negativa; giacchè la ſomma di un negativo porta ſottrazione. Quindi nel girare la* PH, *e il punto* H, *i punti* M, m *deſcrivono due perimetri di Curva, ciaſcun de' quali, dopo l'intero giro di* H, *torna a ſe ſteſſo: ma il ſolo deſcritto da* M *ſarà quello, che deſcriverà lo ſtilo nel caſo propoſto.*

Solo nel caſo che la ragion data ſia ragione d' egualità, il punto i *va in* H, *e diventando* FM, HP *parallele, il punto* m *va all' infinito, e non vi è più: onde nel caſo che la Curva deſcritta dal punto* M *diventi* Eliſſe *Conica, il ramo compagno deſcritto dal punto* m *va in infinito e non vi è più: e nel caſo in cui il punto* F *vada in* P, *rimane data tanto la ragione di* PM *ad* MH, *quanto la ragione di* Pm *ad* mH, *giacchè rimangono le* FM, Fm *eguali alle* PM,

PM, Pm. *Quindi rimangono date le* PM, Pm, *e i due rami divengono due circoli: e ſimili trasformazioni varie vi ſono ne' caſi ſeguenti ancora.*

Nel ſecondo caſo in cui il punto F *cade in* E *nella circonferenza del ſecondo circolo, tirate le* HP, HF, *la ſeconda incontrerà il circolo in* F, *e in* I *generalmente; onde uno dei punti della Curva anderà ſempre in* P, *e vi ſarà generalmente un altro* M. *Se per* F *ſi tiri* VFu *perpendicolare all'aſſe. Queſta ſarà tangente del circolo* GIF, *e però tanto* VP, *quanto* uP *ſaranno tangenti della Curva in* P; *talmente che girando* H *da* C *fino ad* V, *girerà* I *per il ſemicircolo* GIE, *e il punto* M *deſcriverà un mezzo nodo* BMP, *quindi andando* H *in* h *per l'arco* VhD, *anderà* I *in* i *per il ſemicircolo* FIG, *e il punto* m *deſcriverà l'arco* bma, *e ſeguitando* h *per* Du *prima, indi per* uC, *ſi deſcriverà il reſto* aPB, *ſcorrendo l'*I *il circolo un' altra volta. Così verrà una Curva che ſegherà ſe ſteſſa in* P, *ed avrà un nodo, deſcrivendoſi il nodo nel giro di* H *per* uCV, *e in un' intera revoluzione di* I *pel circolo* GIE, *e il reſto nel giro di* h *per* VDu, *e in un altro giro di* i *per lo ſteſſo circolo.*

Nel terzo caſo tirate per F *le due tangenti* VZu, Nzn *al circolo* GIE; *tutti i punti* H2 *preſi nell' arco* Vn, *che ſta nello ſteſſo angolo* VFn, *in cui il circolo* GIE, *ſerviranno per trovare due punti per ciaſcuno al ramo* A M2 m2 aA; *tutti i punti preſi nel* NHiu *ſerviranno per trovare due altri punti per uno al ramo* BMi mi b; *giacchè le rette da eſſi tirate per* F *ſempre urteranno in due punti del circolo* GIE. *Per l'oppoſta ragione è manifeſto, che i punti degli archi* NV, nu *non ſerviranno. Le rette poi* PN, Pu *toccheranno in qualche luogo in* X, *e in* x *il ramo* BMi B, *e le rette* VP, nP *toccheranno in qualche luogo* S, ſ *il ramo* A M2 aA; *e coll' ajuto de' punti* VN, un, *e della ſoluzione generale ſi troveranno i contatti.*

Per

Per trovare cosa accaderà a vertici degli assi AB, ab, *basta vedere come i medesimi si determinino. Si trovano* A, e B *segando* FD *ed* FC *in ragione di* AE *ad* AC, *sicchè il punto* B *starà da* F *verso* P, *e verso la parte contraria, secondo che il punto* F *starà fuori del circolo* DHC, *o dentro, il quale secondo caso mostrano tutte trè le figure. Il punto* A *starà verso la parte contraria di* F *rispetto a* P, *o in* P, *o verso* F, *secondo che sarà il punto* F *dentro al circolo* GIE, *come nella* fig. 1.; *o nella sua circonferenza come nella* fig. 2.; *o fuora come nella* fig. 3. *Imperocchè essendo* FA *ad* AD, *come* PE *a* PD, *dovrà il punto* A *segare la* FD *in una ragione maggiore, eguale, o minore della ragione di* FP *a* PD, *secondo che sarà* PE *maggiore, eguale, o minore di* PF, *e però giacere di là da* P, *in* P, *o più vicino a* F. *Pigliandosi* a *fuori della* FD *in modo, che sia* Fa *ad* aD *in ragione di* PE *a* PC, *se sarà* PE *minore di* PC *giacerà rispetto ad* F *dalla parte opposta di* P; *se sarà* PE *eguale a* PC, *andarà* a *all' infinito; se maggiore, dovrà cadere nella* FD *prodotta dalla parte di* D. *Dovendosi pigliare* b *in modo che stia fuori della* FC, *e sia* Fb *a* bc *nella stessa ragione; il punto* b *giacerà da* F *verso* P, *anderà all' infinito, ò caderà di là da* C, *verso dove ora nella figura cade l'*a, *secondo che sarà parimente la* PE *minore, eguale, o maggiore della* PC; *e nel primo caso espresso dalle figure caderà di là da* P *rispetto ad* F, *in* P, *o verso* F, *secondo che la ragione di* Fb *a* bC *sarà maggiore, eguale, o minore della raggione di* FP *a* PC, *cioè secondo che la* PE, *sarà maggiore di* PF, *come lo è nel primo caso della* fig. 1.; *o eguale come nel secondo nella* fig. 2.; *o minore come nel terzo nella* fig. 3.

Quindi nella fig. 1. *stando fermi i due circoli, e stando* F *in* P, *i due rami sono circoli anch' essi. Camminando* F *verso* E, *si muta la loro forma, e i punti* bA, *si accostano a* P, *e fra loro; e i punti* B, a *se ne scostano, e si scostano fra di se; ma* B *si accosta ad* F, *ed* a *se ne scosta. Nell' atto che il*

il punto F *arriva in* E *ſi muta la figura prima nella ſeconda. I punti* bA *vanno in* P; *e i due rami formano una curva continua, che ſi ſega, dove quei ſi attaccano; dovendo a tal fine nella* fig. 1. *in* A *creſcere la curvità all' infinito prima dell' attacco, e in* b *rientrare la Curva in dentro con ſteſſo contrario, giacchè amendue non potendo mutare la direzione per ſalto in* A, *e in* b, *devono fare da ambe le parti colla tangente lo ſteſſo angolo, e aver la tangente comune, che eſſendo perpendicolare all' aſſe quando erano circoli, ſi deve eſſer mantenuta tale; onde in* A, *e in* b *deve ſempre neceſſariamente eſſere la curva perpendicolare all' aſſe; ma per non finire per ſalto nella punta* b, *nel momento in cui già ivi l'arco di un ramo ſi continua coll' arco dell' altro, onde già fa l'angolo obliquo coll' altro arco ſuo, deve eſſere creſciuta la curvità nella* fig. 1. *nella punta* A *aſſotigliata verſo* b, *e nella* b *aſſotigliata in dentro verſo* A *per tutti i gradi fino all' attacco, e al rompimento e mutazione di continuazione, che ſi fa nell' arrivare il punto* F *in* E.

Paſsando il punto F *di là da* E *fuor del circolo, ſi ſtacca di nuovo l' un ramo dall' altro, e la* fig. 2. *va nella* 3.ª, *ma il punto* b *già ha paſsato l'*A, *e non appartengono più i punti* A, B *al ramo iſteſso quantunque in* A *ſi ſegbi la* FD, *e in* B *la* FC, *come prima, in data ragione di* PE *a* PC. *Ma in quell' attacco della* fig. 2. *ſi ſono cambiati i vertici, eſsendo paſsato* b *nel ramo di* B, *e* A *nel ramo di* a; *come appunto anche le due interſezioni* M, m *regolate dallo ſteſso punto* H *appartengono ambedue allo ſteſſo ramo, dove nella* fig. 1. *appartenevano uno per ramo. Che ſe così camminando* F *arriva in* C, *ſi uniſcono all' ora i punti* FBC *inſieme, anzi annullandoſi l' arco* Nu, *va in* F *in un punto tutto il ramo* BMi mi bxB. *Indi paſsando* F *più oltre, rimane ad ogni modo il* B *fra* F, *e* C, *e però* F *di là da* B *ancora paſsandolo, mentre paſsa* C, *ed entrando* B *nello ſpazio* FP, *all' oppoſto a* C *paſsa dove prima era* B, *e ogni punto* M *verſo la parte contra-*

traria di prima, capovoltandoſi tutto il ramo, nel quale in quel caſo rimane ogni Mi, mi *fuori del circolo, e le* H Mi, H mi *negative; onde la differenza di* FM, MH *viene allora eguale al filo, e non ha luogo la deſcrizione della Curva coi fili. Vanno di poi creſcendo amendue i rami, e coll' andare* F *all' infinito ſi perdono anch' eſſi nell' infinito.*

Tornando indietro F *verſo* E *nella* fig. 3., *i punti* VN, un *ſi vanno accoſtando impiccolendoſi gli archi inutili* VN, un; *finchè all' arrivo di* F *in* E *ſi riducono le* Vu, Nn *alla ſola* VFu *della* fig. 2. *e rientrando* F *nel ſuo circolo nella* fig. 1. *ogni tangente menata per* P *ſvaniſce; onde* 4. *rette menate dal centro* P *toccano le Curve nel caſo terzo,* 2. *nel caſo ſecondo, e niuna nel primo.*

Tenendo ora fermo il punto F *vada mutandoſi il ſolo punto* E. *Se eſſo nella* fig. 3. *ſi uniſce a* P, *amendue i rami vanno in un punto ſolo in* F, *perchè annullandoſi la ragione di* Fm, *a* MN, *e ſtringendoſi l' angolo* NFu, *e* nFV *all' infinito, ſi annulla ogni* FM1, FM2. *Camminando* E *verſo* C *creſcono amendue i rami, finchè arrivando* E *in* F *ſi uniſcono nella* fig. 2. *Paſſando oltre il punto* E, *ſi va nella* fig. 1., *dove accoſtandoſi* E *verſo* C, *e andando la ragion data verſo l' egualità; vanno le rette* PA, FB *accoſtandoſi all' eguaglianza, e la forma del ramo* AMB *alla forma di un'* eliſſe. *E intanto i punti* ab, *e tutto il ſecondo ramo ſi ſcoſtano alle infinito. All' arrivo di* E *in* C, *diviene il raggio interiore una vera* eliſſe; *ſvaniſce l' eſteriore, nè vi è più. Che ſi il punto* E *va fuora di là da* C, *e la ragione diviene di maggiore diſeguaglianza, i vertici* a, *e* b *mutano le parti andando* a *di là da* D, *e* b *di qua da* C, *con un capovoltarſi molto ordinario nelle trasformazioni de' luoghi geometrici. Anzi allora ogni punto* m *va dalla parte di* H *nella* PH *prodotta. Andando innanzi* E *all' infinito, ſi ſcemano la* MH, *e la* mH (*che già ſi trova fuor del circolo dalla parte di* H) *all' infinito; e però amendue i rami ſi accoſtano all' infinito*

al

al circolo, in cui vanno a terminare quando il raggio CE *diviene infinito.*

Ma ſe queſte mutazioni della ragione ſi facciano collo ſcemare il raggio PC, *ſuccede lo ſteſſo, cioè nell' accoſtarſi* C *ad* E *va il ramo eſteriore in* eliſſe *nell' arrivo di* C *in* E. *Indi torna il ramo eſteriore dall' infinito, ma capovoltato, e all' arrivo di* C *in* F, *va in* F *anche il* B; *e ſcemando ſempre più il raggio* PC, *ſi ſcema il ramo* AMB, *e all' arrivo di* C *in* P *vanno in* P *i punti* AB, *e tutto il ramo tanto interiore, quanto eſteriore; giacchè la ragione di* FM *ad* MH, *cioè in quel caſo ad* MP, *e di* FM *ad* mH, *cioè ad* mP *dovrà eſſere infinita, e però le* PM, Pm *nulle.*

Ora è tempo di dar un' occhiata a una elegantiſſima maniera di determinar le tangenti. Si faccia l' angolo MFR, *o* mFr *verſo* H *eguale ad* FHM, *e ſi tiri per* M *la retta* SMT *perpendicolare alla* FR, *che ſarà la tangente, e allo ſteſſo modo* mts *perpendicolare alla* Fr.

Per dimoſtrar queſto metodo, e non intrigar la figura ſi è cavata parte di eſſa fig. 1. *a fianco a man dritta. Sieno* MV *due punti infinitamente vicini del perimetro della Curva, e co' centri* FP *ſieno gli archetti* VX, VY, *che taglieranno la* MY *incremento della* PM *andata in* PV, *e decremento della* MH *andata in* Vh, *e la* MX *decremento della* FM *andata in* FV; *e per eſſere* FV *ad* Vh, *come* FM *ad* MH, *ſarà anche levando proporzionali da proporzionali* MX *ad* MY *nella ſteſſa ragione di* FM *ad* MH. *Ora gli archetti* VX, VY *ſcemando all' infinito, ſi potranno prendere per linee rette perpendicolari alle rette* FM, PM; *onde ſe inoltre ſi tiri* FT *perpendicolare alla retta* MV *prodotta, la quale incontri la* PM *in* R, *ſarà il quadrilineo* FXVT *per gli angoli* X, *e* T *retti in un circolo, e il quadrilineo* RYVT *parimente in un circolo per gli angoli* T, *e* Y *retti. Quindi ſaranno i rettangoli* FMX, RMY *eguali ciaſcuno a* TMV, *e però anche fra loro; onde ſarà* MR *ad* MF, *come* MX *ad* MY, *cioè*

come

come FM *ad* MH; *e però i triangoli* RMF, FMH *ſimili, e l'angolo* RFM *eguale all'angolo* FHM, *la qual coſa ſi verificarà accuratamente, quando i punti* V *ed* M *coincidano, e la* MT *divenga una tangente. La dimoſtrazione pel punto* m *è la ſteſſa.*

Quindi ſi vede, che anche non avendo il circolo DHC, *ma la ſola Curva, e quella ragion data; baſta produrre* PM *in* R *in modo, che ſia* MR *ad* MF *in quella ragion data, e tirata* FR, *menare una perpendicolare alla medeſima, che ſarà la tangente cercata.*

Si vede inoltre, che in tutti que' vertici dell'aſſe, che non ſaranno in P, *come lo è il vertice della attaccatura* Ab *della* fig. 2.: *ſempre le tangenti ſaranno perpendicolari all'aſſe. Benchè ſempre la* MR *caderà ſull'aſſe; e però la* FR *coinciderà coll'aſſe, e converrà che la tangente ſia perpendicolare all'aſſe medeſimo. L'unico caſo, in cui la dimoſtrazione generale non cammina è quando il punto* M *va in* P, *il che può accadere nella* fig. 2.; *perchè allora non andando il punto* M *fuori di* P *nell'aſſe, può la* PH, *e però la* FR *avere qualunque direzione, e conviene trovar quella, in cui* PM *ſvaniſce andando* M *in* P, *il che accade quando l'*H *vada in* V, *o in* u, *dove anche con queſto metodo ſi troverebbe la tangente, che già ſi è trovata di ſopra eſſere la ſteſſa* PV, Pu; *coſa che anche di qua facilmente ſi ricavarebbe.*

Finalmente ſi noti che, ſe la ragion data fuſſe ragion di egualità, ſarebbe il triangolo FMR *iſoſcele, e la tangente ſegarebbe per mezzo l'angolo* FMR, *come accade nella* eliſſe conica.

Quando la ragione di FM *ad* MH *è di unità a numero, che ſia* n, *come lo è nel caſo de' fili; i punti* M *ſi trovano più facilmente così. Preſe* (Fig. 1. Tav. 9.) PC, PD *eguali alla lunghezza del filo, diviſa la* FC, *e la* FD *in parti* n + 1, *ſi piglino* FB, *ed* FA *verſo* C, *e* D *eguali ad una*

di

di dette parti. Indi diviſe le ſteſſe in parti n − 1, *ſi piglino* Fb, Fa *verſo le parti oppoſte eguali a una di eſſe: così ſi troveranno i vertici; mentre ſarà* FB *a* BC, *e* FA *ad* AD, *come pure* Fb *a* bC, *ed* Fa *ad* aD, *come* i *ad* n. *Poi preſa* FO *eguale alla lunghezza del filo, e fatto centro in* F *con qualunque apertura, che ſtia in mezzo tra la* FA, *e la* FB, *ſi faccia un arco di cerchio verſo* M, *indi la medeſima apertura ſi traſporti da* F *verſo* O *numero di volte* n, *finchè ſi arrivi a qualche punto* Q; *ſi prenda* OQ, *e col centro in* P *con detta apertura* OQ *ſi faccia l' interſezione coll' arco di prima in* M, *e così ſi troveranno ſempre due punti* M *di qua, e di là dell' aſſe molto accuratamente. Lo ſteſſo ſi farà per li punti* m *pigliando le aperture* Fm *medie fra* Fb, Fa, *e arrivando in* q. *La dimoſtrazione è tanto facile che ſi vede da ſe.*

Paſſando ora a determinare l' equazione, il metodo è facile. Tirata ML (Fig. 1. Tav. 9.) *perpendicolare all' aſſe ſi ponga* $PE = n$, $PC = m$, $PF = a$, $PL = x$, $LM = y$, $PM = \sqrt{xx + yy} = z$. *Sarà per la* 13. *del lib. II. di Euclide.* $FMq. = FPq + PMq - 2\,FP \times PL = aa + zz - 2ax$. *Onde facendo come* $n.m :: FM = \sqrt{aa + zz - 2ax}$. $MH = \frac{m}{n}\sqrt{aa + zz - 2ax}$, *ſi avrà* $PM + MH = z + \frac{m}{n}\sqrt{aa + zz - 2ax} = PH = m$. *Quindi* $m - z = \frac{m}{n}\sqrt{aa + zz - 2ax}$, *e però* $mm - 2mz + zz = \frac{mmaa}{nn} + \frac{mmzz}{nn} - \frac{2mmax}{nn}$; *cioè ripulita queſta equazione* $(mm - nn)\,zz - 2mmax + 2nnmz + mm\,aa - nn\,mm = 0$. *In queſta ſoſtituendo per* zz *il ſuo valore* $xx + yy$, *traſponendo* $2nnmz$, *indi quadrando, e riſoſtituendo per* zz *il valor ſuo, viene l' equazione per* x, *e* y, *che verrà di quarto grado. Onde ſi vede, che queſte ſono Curve di terzo ordine.*

Ma

Ma intanto giova prima contemplarla alquanto così con z. *Se ſia* m = n, *ſvaniſce* (mm − nn) zz, *e reſta il tutto diviſibile per* m, *rimanendo ſolo* − 2max + 2nnz + m (aa − nn) = o. *D'onde ſi cava* 2mnz = m (nn − aa) + 2amx, *e di qui, quadrando viene l'equazione all'* eliſſe, *dopo di avere ſoſtituito per* zz *il ſuo valore* xx + yy.

Se ſarà a = n, *che è il caſo della* fig. 2., *ſvanirà l'ultimo termine* mmaa − mmnn, *e ſi avrà* (mm − nn) zz − 2mmax + nnmz = o. *Ora di qui ſi cava, che queſta Curva è la ſteſſa, che la* Concoide, *in cui la baſe ſia un circolo, e il polo nella circonferenza. Imperocchè ſarà* (mm − nn) zz = 2mmax − 2nnmz. *Onde* $z = \frac{2mmn}{mm-nn} \times \frac{x}{z} - \frac{2nnm}{mm-nn}$. *Poſto queſto ſi pigli* $PZ = \frac{2mmn}{mm-nn}$, *e ſi faccia attorno a un tal diametro un circolo, che dalla* PM *venga incontrato in* X. *Sarà per l'angolo* PXZ *retto,* PM = z. PL = x :: $PZ = \frac{2mmn}{mm-nn}$. $PX = \frac{2mmn}{mm-nn} \times \frac{x}{z}$. *Onde eſſendo tutta* PX − XM = PM = z, *ſarà* $XM = \frac{2nnm}{mm-nn}$. *Dunque è dato il diametro* AZ *di un circolo, e da qualunque* PX *levata una* XM *coſtante, ſi trova il punto* M, *che ſarà a una concoide circolare, che avrà per baſe un circolo, e per polo un punto nella ſua circonferenza. La dimoſtrazione vale anche per* m *chiamando* Pm = − z. *Che ſe eſſa ſi chiamaſſe* + z *ſi avrebbe* $mb + bh = z + m = \frac{m}{n}\sqrt{nn + zz - 2nx}$, *e però rifacendo il calcolo ſi trovarebbe* $z = \frac{2mmn}{mm-nn} \times \frac{x}{z} + \frac{2nnm}{mm-nn}$; *e poſto lo ſteſſo diametro* $PZ = \frac{2mmn}{mm-nn}$; *ſi avrebbe la linea* Xm *preſa in fuora eguale al valor medeſimo* $\frac{2nnm}{mm-nn}$.

Da

Da queſta rifleſſione naſce un modo aſſai più facile per trovare queſto nuovo circolo, e deſcriver la Curva. Trovato il punto B, *ed* a, *come ſopra, ſi ſegbi la* Ba *in mezzo in* Z, *e col diametro* PZ *ſi faccia un circolo; indi ſi giri una riga* PMX *attorno a* P *pigliando ſempre il punto* M *da* X *verſo* P, *e un altro in fuora coll' apertura* BZ, *e ſarà fatto. Si noti ſolo, che eſſendo il diametro* $PZ = \frac{2mmn}{mm-nn}$, *e la* $ZB = \frac{2nnmm}{mm-nn}$ *ſarà anche* PZ.ZB :: m.n. *Inoltre eſſendo* $PB = \frac{2mmn-2nnm}{mm-nn}$, $Pa = \frac{2mmn+2nnm}{mm-nn}$ *ſarà quella* $= \frac{2mn}{m+n}$, *e queſta* $= \frac{2mn}{m-n}$; *onde ſaranno* AB. Aa :: m−n . m+n, *coſa che anche direttamente ſi moſtra con facilità.*

Se nella equazione generale $(mm-nn)zz-2mmax+2nnmz+mmaa-mmnn = o$ *divenga* $a = o$, *indi* $a = m$, *a infinito, o ſe* m, *o* n *ſi mutino dal zero all' infinito; ſi avranno tutte le vicende, e le trasformazioni vedute di ſopra. Dall' equazione* $(mm-nn)zz-2mmax+annmz+mmaa-mmnn = o$ *generale, ſi ricavano facilmente i vertici degli aſſi. Si ponga prima* $x = z$, *indi* $x = -z$, *e ſi avranno i caſi ne' quali le* AL, AM *ſi eguagliano, cioè in cui il punto* M *va nell' aſſe. Si avranno due equazioni* $(mm-nn)zz-2mmaz+2nnmz+mmaa-mmnn = o$, *ed* $(mm-nn)zz+2mmaz+2nnmz+mmaa-mmnn = o$, *e dividendo per* $mm-nn$ *ſi avrà* $zz + \frac{2nnm+2mma}{mm-nn}z + \frac{mm}{mm-nn}(aa-nn) = o$; *dalle quali ſi poſſono ricavare i quattro valori cercati di* z, *che colla geometria ſemplice più facilmente ſi ſono ricavati.*

Prima di pulire l' equazione generale ſi avverta, che ſe ſi cerchi la curva, in cui dati due numeri hi *qualunque interi o rotti, razionali o irrazionali ſia* $h \times PM + i \times MF$ *eguale*

le a una coſtante; dividendo per h *ſi avrà* $PM + \frac{i}{h} MF = \frac{e}{h}$. *Onde fatto* $\frac{i}{h} = \frac{m}{n}$, $\frac{e}{h} = m$, *ſarà* $PM + \frac{m}{n} MF = m$ *; onde torna lo ſteſſo caſo.*

Per pulire poi l'equazione dai z, *ſi dica* $mm - nn = rr$, $aa - nn = cc$, *e in cambio di* $(mm - nn)zz - 2mmax + 2nnmz + mm(aa - nn) = o$, *ſi avrà* $rrzz - 2mmax + 2nnmz + mmcc = o$, *e traſponendo* $2nnmz$, *ſi avrà* $rrzz - 2mmax + mmcc = -2nnmz$, *e però quadrando.*

$r^4z^4 - 4r^2m^2axz^2 + 2m^2r^2c^2z^2 + 4m^4a^2x^2 - 4m^4c^2ax + m^4c^4 = 4n^4m^2z^2$, *e quindi traſponendo* $r^4z^4 - 4r^2m^2axz^2 + (2m^2c^2r^2 - 4n^4m^2)z^2 + 4m^4a^2x^2 - 4m^4c^2ax + m^4c^4 = o$. *Si faccia* $2m^2c^2r^2 - 4n^4m^2 = t^6$, *e verrà* $r^4z^4 - 4r^2m^2axz^2 + t^6z^2 + 4m^4a^2x^2 - 4m^4c^2ax + m^4c^4 = o$. *Soſtituendo ora* $x^2 + y^2$ *per* z^2, *ſi avrà* $r^4x^4 + 2r^4x^2y^2 + r^4y^4 - 4m^2r^2ax^3 - 4m^2r^2axy^2 + t^6x^2 + t^6y^2 + 4m^4a^2x^2 - 4m^4a^2cx + m^4c^4 = o$, *e dividendo per* r^4 *verrà finalmente l'equazione pulita come ſegue:*

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - \frac{4m^2a}{r^2}x^3 - \frac{4m^2a}{r^2}xy^2 + \frac{t^6}{r^4}x^2 + \frac{t^6}{r^4}y^2 + \frac{4m^4a^2}{r^4}x^2 - \frac{4m^2c^2a}{r^4}x + \frac{m^4c^4}{r^4} = o.$$

Da queſta col fare $y = o$ *ſi troverebbero i vertici degli aſſi in un' equazione di quarto grado, che ſarebbe diviſibile in quattro di primo. Da queſta le tangenti; coſe che ſi ſono trovate più facilmente colla Geometria. Da queſta finalmente i fleſſi contrarj, e tutto quello che appartiene alla Curva. Ma baſta ſin qui di queſta ricerca.*

Aggiunta ſulla moltiplicità de' caſi.

Se ſi cerca il numero di tutti i caſi principali di queſte Curve quando il PC *non va all' infinito, eſſi ſono* 35, *che ſi riducono propriamente a* 29 *per la totale coincidenza di* 6

con altri tre; e per vedere queſte variazioni, vi vorrebbero almeno 29 figure diverſe.

Non conſiderato ancora il punto F, *e ſtando fermo* C, *può il punto* E *ſtare primo in* P; *ſecondo tra* P *e* C; *terzo in* C; *quarto dopo* C; *quinto all' infinito. Intanto il punto* F *può ſtare primo in* P; *ſecondo tra* P *ed* E; *terzo tra* E *e* C; *quarto in* E; *quinto in* C; *ſeſto dopo* C; *ſettimo all' infinito. Queſti ſono ſette caſi per ogni caſo delli primi cinque, onde ſarebbero* 35. *Ma nel primo caſo di* E, *i primi tre di* F *ſono gl' iſteſſi, trovandoſi in eſſo ſempre* F *in* P. *Nel terzo caſo di* E, *il terzo, quarto, quinto di* F *ſono gli ſteſſi, trovandoſi in eſſi* F *in* C; *nel quinto caſo di* E *gli ultimi tre caſi di* F *ſono gl' iſteſſi, trovandoſi in eſſi* F *ſempre all' infinito. Così rimangono* 6 *di meno, e però* 29.

Se va all' infinito P, *e non* C, *vi ſono tutti i caſi delle ſezioni coniche. Se va all' infinito* C, *e non* P, *vi ſono tre caſi di* E, *che può eſſere in* P, *in una diſtanza finita, e all' infinito. Per queſti tre caſi, vi ſono nel primo: tre di* F *in* P, *in una diſtanza finita, e all' infinito; nel ſecondo cinque, cioè in* P, *prima di* E, *in* E, *dopo* E, *all' infinito; nel terzo caſo tre, cioè in* P, *in una diſtanza finita, all' infinito. E però altri* 11.

Se C *ſtia in* P, *vi ſono altri tre caſi di* E, *cioè in* P, *in una diſtanza finita, all' infinito. E per eſſi altri* 11 *di* F.

Dunque tutti i caſi inſieme ſi riducono a $29+11+11=51$. *Oltre a tutti quelli che appartengono alle ſezioni coniche riportate alla direttrice.*

Ognuno di queſti caſi ha qualche coſa di notabile, e in tutti vi ſono delle ſuddiviſioni d' innumerabili caſi nati dai particolari rapporti delle tre linee PF, PE, PC, *non contenendoſi negli eſpoſti, che il ſolo eccederſi, annullarſi, infinitarſi, ſenza conſiderare le infinite diverſe ragioni nel caſo degli eccеſſi finiti.*

Let-

Altra Lettera 27. Aprile 1748. ſcrittami dal Medeſimo ſullo ſteſſo ſoggetto.

Giacchè quelle quattro bagatelle, che io le ſcriſſi intorno alla Curva da Lei propoſtami conſiderata nella ſua generalità, hanno avuto dell' incontro preſſo V. S. Illma non voglio laſciare di avanzarle un' altra notizia intorno alle medeſime. Benchè le mie occupazioni non mi permettono queſta volta di diffondermi più in lungo, nè di far altro che accennarla. Quella contiene tutte le curve conſiderate dal Carteſio nella ſua Geometria ſul fine del lib. 2., per le refrazioni, e la coſtruzione delle quali il Newton generalmente abbraccia nella propoſizione 97. del libro primo de' ſuoi principj, e delle quali parla nel Corollario primo. Anzi la coſtruzione generale del Newton coincide a diritura colla nozion generale della Curva, che ho data, e ſi può facilmente ridurre a quella coſtruzione, che ho meſſa immediatamente avanti all' equazione.

Il Newton trova (Fig. 5. Tav. 8.) *che acciò i raggi partiti dal punto* A *vadano ad unirſi nel punto* B *dopo la refrazione nella ſuperficie generata da una Curva* CDE, *che ſi cerca, ſi può prendere il punto* C *ad arbitrio, indi preſa pure* CN *verſo* B *ad arbitrio, e* CM, *che deve eſſere incremento della* AC *a* CN *decremento della* BC *nella ragion data del ſeno d' incidenza al ſeno di refrazione, co' centri* A *e* B, *cogli intervalli* AM, BN *ſi determinarà il punto* D, *che ſarà alla Curva cercata.*

Ora ſe ſi prende CH *verſo* B, *a* CB *nella ſteſſa ragion data, e col centro* A *coll' apertura* AH *ſi faccia un circolo* HI, *che incontri in* D *la* AD *prodotta, ſarà ancora* BD *a* DI *in ragion data, cioè in quella di* BC *a* BH, *o del ſeno di refrazione al ſeno d' incidenza. Giacchè eſſendo* BC *a* CH, *e* CN *a* CM *in detta ragione, col togliere proporzionali reſterà*

anche

anche BN *ad* MH *nella ſteſſa ragione. Onde eſſendo* BD *eguale a* BN, *e per le* AH, AI, *ed* AM, AD *eguali, anche la* DI *eguale a* MH. *Sarà nella ſteſſa ragion data anche* BD *a* DI.

Sicchè Ella qui vede, che rimangon i punti A,C,B,D,H,I *di queſta figura gli ſteſſi, che nella* fig. 3. Tav. 9. *delle traſmeſſe a Lei nella mia ultima lettera i punti* P,b,F,mi,C,Hi. *Vede inoltre che ogni volta che il ſeno d' incidenza al ſeno di refrazione ſtarà come numero a numero, ſi potrà la Curva deſcriver co' fili. Così nel vetro dall' aria il ſeno d' incidenza al ſeno di refrazione, è come* 3 *a* 2. *Se una eſtremità del filo* (1) *ſi ferma in* F (Fig. 4. T. 8.), *indi ſi piega preſſo allo ſtilo* Mi, *e poi ſi avvolge d' intorno ad un pivolo* P, *quindi vada in* V, *e poi ſi avvolga d' intorno al pivolo* F, *e poi finalmente coll' altra eſtremità vada a metter capo in* Mi, *con lo ſtilo* M *ſi deſcriverà la Curva* Mb *cercata.*

Perchè ſi vede chiaro, che poſta PMi = z, MiF = u, *tutto il filo* = a, *ſarà* 2z + 3u = a; *e però* 2dz + 3du = 0, *onde* 2dz = — 3du; *e* dz. — du :: 3. 2. *Onde* (Fig. 5.) *eſſendo nata la* CM *da tutti i* dz *incrementi della* AD (*che è* PM *della* fig. 4.), *e* CN *da tutti i* — du *decrementi della* BD (*che è* MF fig. 4.) *ſarà ancora* (Fig. 5.) CM. CH :: 3. 2, *come il ſeno d' incidenza al ſeno dell' angolo rifratto.*

Generalmente baſterà fare, che il filo in MF *ſia radoppiato tante volte, quanto eſprime il numero del ſeno d' incidenza, e in* MP *quanto eſprime il numero del ſeno di refrazione, e ſempre ſi avrà la Curva cercata.*

Qui non ſi vede, che uſo abbiano le altre Curve della coſtruzione generale, che le mandai; ma baſterà accennare queſto ſolo, che ſi avranno in eſſe tutti i caſi, ne' quali i raggi porta-

(1) Si avverte, che queſta tale diſpoſizione di filo (*Fig.* 4. *T.* 8.) non è del P. Boſcovich, ma è quella medeſima, che propongo io nel mio teſto, e che non per altro ho qui ſoſtituita alla ſua, ſe non perchè parmi, che il filo ordinato così rieſca più agile, e libero a muoverſi.

portati con direzioni, che paſſano per un punto, o ſia che da quello partano, o che a quello vadano, urtando in una ſuperficie generata dalla revoluzione di una Curva intorno a un aſſe, e ivi o paſſando oltre, o tornando indietro, ma in modo che il ſeno dell' angolo d' incidenza al ſeno dell' angolo refratto, e dell' angolo di rifleſſione ſia in data ragione, debbano avere direzioni che paſſano per un punto, o andando verſo quello, o fugendone. Ed ogni volta che la normale ſegherà l' angolo, che le rette PM, MF *delle* Figure 1.2.3.T.9. *della mia ultima formano verſo la* PF, *e che è l' interno del triangolo* PMF, *ſempre ſi avrà il caſo della rifleſſione; quando poi detto angolo ſarà ſegato dalla tangente, ſi avrà il caſo della refrazione. Benchè il caſo di una rifleſſione fatta con quella legge non eſiſte in natura; eſſendo nella rifleſſione della luce il ſeno dell' incidenza eguale al ſeno di rifleſſione, e negli altri corpi non perfettamente elaſtici, le tangenti di detti angoli ſono in data ragione, e non i ſeni.*

ARTICOLO TERZO.

Altre Ovali deſcritte col filo in altra maniera.

QUanto più fuori delle menti degli uomini fu la deſcrizione organica di Curve, che raſſomigliaſſero ad una ſezione d'uovo, altrettanto crebbe in me la voglia di recarvele, ſuggerendo nuove vie, onde detta deſcrizione ſi conſeguiſca. Mettendo adunque ſoltanto (*Fig.* 8. *Tav.* 8.) un altro pivolo E per dirittura a quelli già meſſi in P, ed F, ſecondo la ſituazione che ſortiſce riſpetto a quelli, naſcono nuove Curve. E quando la diſtanza EF ſia eguale ad una quinta parte incirca della diſtanza FP, ed il filo fiſſo in P movendoſi, ſdruccioli d'intorno ai due pivoli F ed E, vengono dallo ſtilo M, ovvero *m* deſcritte altre Ovali, purche la porzione FM non eguagli la porzione FP,

Fig. 1.

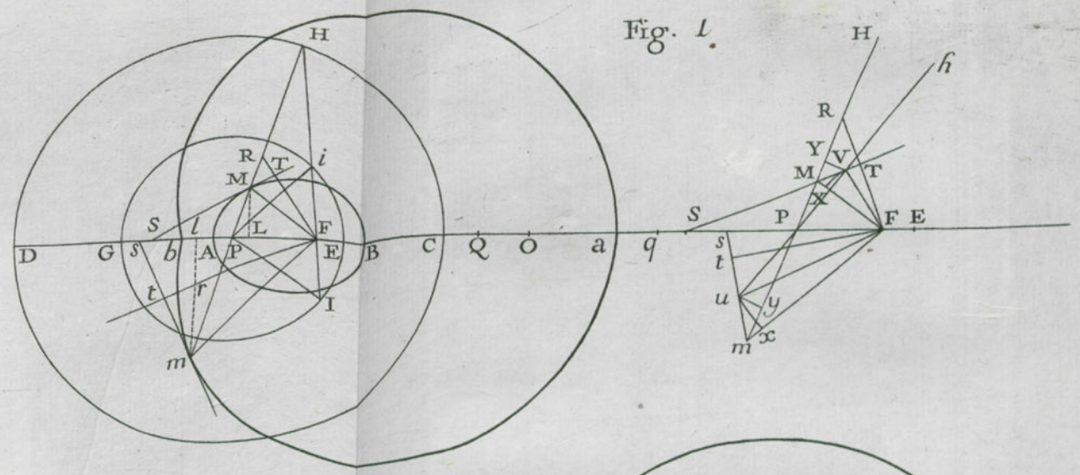


Fig. 2

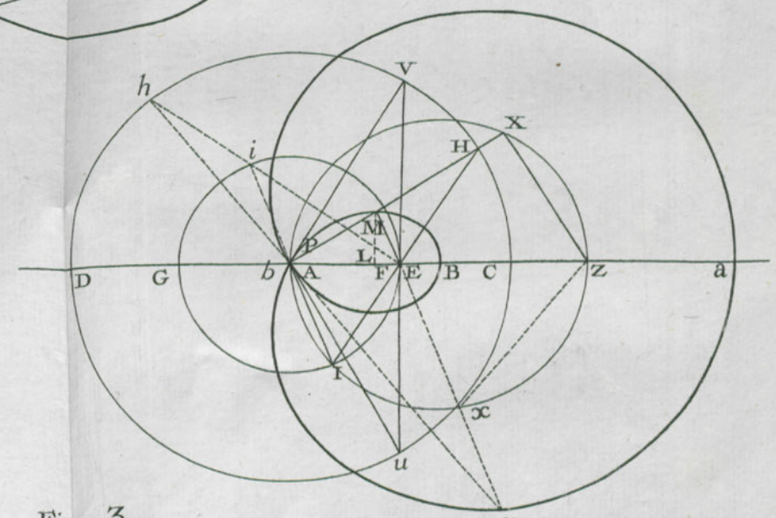
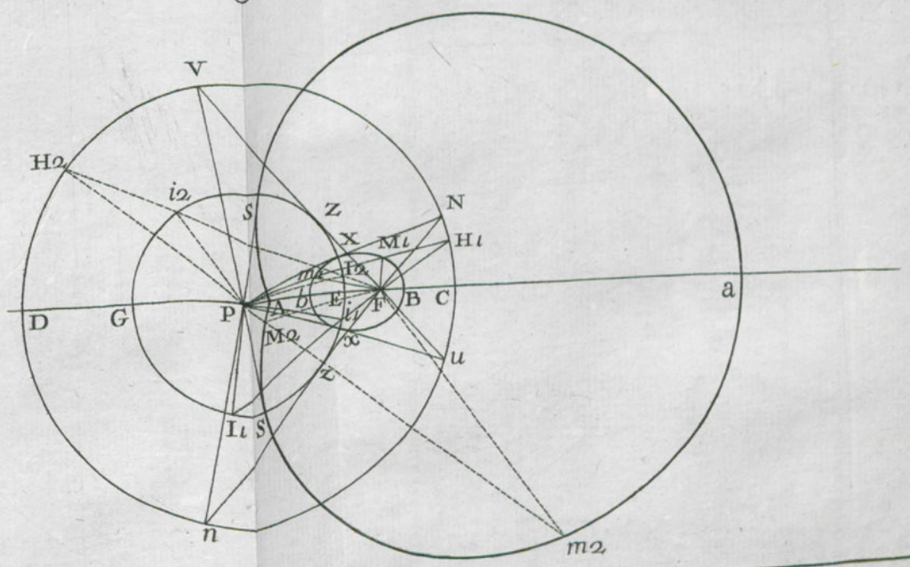


Fig. 3





AGGIUNTA DI DUE MEMORIE

1. METODO DI EVITARE I LOGARITMI NEGATIVI

APPENDICE. SU I LOGARITMI DELLE QUANTITÀ NEGATIVE

2. METODO DI ALZARE UN INFINITINOMIO

A QUALUNQUE POTENZA INDEFINITA

DELLE

PROGRESSIONI E SERIE

LIBRI DUE

DEL P. FRANCESCO LUCCO

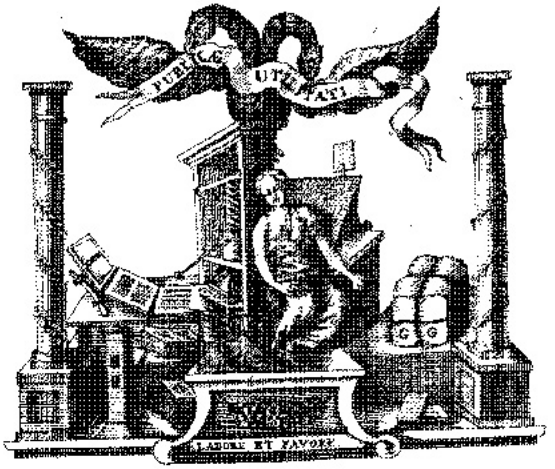
della Compagnia di Gesù

COLL' AGGIUNTA

DI DUE MEMORIE

DEL P. RUGGIERO GIUSEPPE BOSCOVICH

della medesima Compagnia.



IN [illegible] MDCCLXVII.
Appresso Giuseppe Valcazzi [illegible] tampatore.
Con licenza de' Superiori, e Privilegio.

AGGIUNTA

DI DUE MEMORIE

DEL PADRE

RUGGIERO GIUSEPPE BOSCOVICH

DELLA COMPAGNIA DI GESU'

PUBBLICO PROFESSORE DI MATEMATICA
NELLA REGIA UNIVERSITA' DI PAVIA.

MEMORIA PRIMA.

Metodo di evitare i logaritmi negativi.

1. IN tutte le forme de' logaritmi, che ſono in uſo, come in quelli delle tavole comuni, e negli iperbolici, il logaritmo di ogni frazione è negativo, la quale coſa diſturba il calcolo, eſſendo moleſta la ſottrazione delle mantiſſe formate da varie figure decimali, e convenendo nelle ſomme ſommar da ſe i poſitivi, indi da ſe i negativi, e poi ſottrarre la ſomma minore dalla maggiore, triplicandoſi così in certa maniera il calcolo. Quindi torna bene l'avere qualche metodo da evitare i logaritmi negativi, come già da varj anni ſi è cominciato a praticare, e vi vogliono delle regole ſicure, e facili per non errare nella pratica.

2. Si otterrà facilmente queſto fine, ſe al logaritmo di qualunque frazione ſe ne ſoſtituiſca un altro, il quale naſca da un' aggiunta, che ſe gli fa, ſenza, che queſta aggiunta turbi il calcolo, ove ſi badi a quello, che ſi è aggiunto per tenerne conto al luogo debito.

3. Due ſorti di frazioni diſtingueremo: La prima ſorte ſarà della forma decimale, in cui dopo la virgola diviſoria, o venga immediatamente una delle 9 figure ſignificanti, o vi ſieno degli zeri, e chiameremo n il numero totale delle figure decimali, N l'intero eſpreſſo dalle medeſime preſe ſenza la virgola diviſoria: tanto nella frazione 0,752, quanto nella 0,00752 ſarà $N=752$; ma nella prima $n=3$, nella ſeconda $=5$. La ſeconda ſorte di frazioni ſarà della forma $\frac{1}{B}$, o B ſia un intero, o un rotto decimale; benchè in queſto ſecondo caſo facilmente ſi riduce alla forma $\frac{C}{B}$; mentre ſe $B=\frac{N}{(10)^n}$, ſarà $\frac{1}{B}=\frac{(10)^n}{N}$;

ma

ma noi ſempre la conſidereremo ſotto la forma, in cui il numeratore ſia $= 1$.

4. In ordine alle eſpreſſioni decimali noterò qui particolarmente quello, che per altro è coſa cognita, e appartiene generalmente anche agli interi. *La ſola mantiſſa determina le figure del numero corriſpondente ad un logaritmo, e viceverſa: la caratteriſtica determina il ſito della virgola diviſoria riſpetto ad eſſe, e ne viene determinata.* Se la caratteriſtica ſarà r, dipende tutto dal valore della formola $r - 1$. Se queſta è $= 0$, eſſendo $r = -1$, le figure vanno ſubito dopo la virgola, ſenza zeri immediati dopo di eſſa: ſe contiene un numero negativo coll' eſſere r negativo maggiore dell' unità, vi vogliono dopo la virgola immediati tanti zeri, quante unità eſſa eſprime: ſe contiene un valor poſitivo, altrettante di quelle figure ſi devono pigliar per l' intero, ſupplendo con degli zeri al fine, ſe non baſtano, o mettendo le reſidue dopo la virgola per decimali, ſe avvanzano.

5. Se ſi cerca la corriſpondenza delle figure colla mantiſſa, conviene andare al fin della tavola, e cercarla fra que' numeri, che abbiano il maſſimo numero di figure, a cui ſi ſtendono eſſe tavole, ove o ſi troverà eſatta, o ſi potrà cercare più proſſima col metodo uſato delle differenze proporzionali, o anche delle interpolazioni. Siccome il logaritmo di un numero A ſi ſcrive lA, la ſola mantiſſa ſi può qui dinotare per pA.

6. Ora pel noſtro fine di evitare i logaritmi negativi aggiungeremo qui in amendue queſte ſorti di frazioni al logaritmo volgare il 10, baſtando queſto, come è facile a vedere, per tutte quelle, che non ſono minori di $\frac{1}{(10)^{10}}$: le minori non ſogliono occorrere nell' uſo ordinario, e quando occorrano per qualche caſo ſtraordinario, daremo il metodo di evitare anche allora i logaritmi negativi. Il logaritmo così accreſciuto lo chiameremo *gran logaritmo*, eſprimendolo per LA.

7. Con-

7. Considereremo ancora il complemento logaritmico di un numero, il quale si forma, sottraendo dal 9 tutte le precedenti figure del suo logaritmo, e l'ultima dal 10, ciocchè si fa facilmente, pigliando immediatamente dalle tavole invece delle figure ivi notate il complemento di quelle al 9 di questa al 10. Questo complemento logaritmico lo dinoteremo per $l'A$.

8. Dalle posizioni fatte, facilmente si ricavano le seguenti formole: 1.° $l'A = 10 - lA$, 2.° $lA = 10 - l'A$, 3.° $LA = 10 + lA$, 4.° $lA = -10 + LA$, 5.° $L\frac{1}{A} = l'A$, 6.° $L\frac{1}{A} (= l'A) = n + l'N$, ove sia $A = \frac{N}{(10)^n}$.

La prima nasce dalla definizione del complemento logaritmico (n. 7.): La seconda vien dalla prima trasponendo: La terza dalla definizione del gran logaritmo (n. 6.): La quarta dalla terza pur trasponendo: La quinta dalla 3, e 1 così: $L\frac{1}{A} = 10 + l\frac{1}{A} = 10 - lA = l'A$: La sesta dalla prima così. Essendo $A = \frac{N}{(10)^n}$, farà $lA = -n + lN$, e $l'A = 10 + n - lN = n + l'N$.

9. Si ha inoltre, che *la mantissa del gran logaritmo è la stessa, che del volgare;* giacchè nella formola 3. si muta la sola caratteristica coll' aggiunta di 10.

Per la caratteristica r la formola farà $r - 9$. Se farà $r - 9 = 0$, cioè $r = 9$; sarà per la quarta formola la caratteristica di $lA = 9 - 10 = -1$, caso, in cui (n. 4.) tutte le figure dovute alla mantissa vanno subito dopo la virgola senza zeri. *Quindi, se* $r - 9 = \pm t$, *sarà* t *il numero delle figure intere avanti alla virgola, o degli zeri immediati dopo di essa.*

10. Dalle cose dimostrate si ricavano le seguenti tre regole fondamentali.

I. *Il complemento logaritmico di un numero intero, ſi ha pigliando nelle tavole comuni il complemento di ogni figura precedente del ſuo logaritmo al* 9, *e dell'ultima al* 10, *e per un numero decimale di* n *figure, baſta il pigliare i complementi ſuddetti pel logaritmo del numero eſpreſſo dalle ſteſſe figure, e aggiungere* n *alla caratteriſtica.*

II. *Per avere il gran logaritmo di una frazione, che abbia l'unità per numeratore, ſi pigli il complemento logaritmico del ſuo denominatore.*

III. *Per avere il gran logaritmo di una frazione decimale, ſi pigli la mantiſſa del numero intero eſpreſſo dalle ſue figure colla caratteriſtica* 9, *o ſe ha un numero* t *di zeri immediati dopo la virgola,* $9-t$.

Della prima la prima parte ſi ha dalla definizione del complemento aritmetico, la ſeconda parte dalla formola ſeſta: La ſeconda regola è contenuta nella formola quinta: La terza nella ſeſta.

11. Paſſando alle potenze, e radici: Se A eſprime una frazione, o dell' una, o dell' altra ſorte, ſi avrà

$$L A^m = -10(m-1) + m L A.$$

Imperocchè $L A^m = 10 + l A^m = 10 + m l A =$ (formola 3.) $10 - 10m + m L A = -10(m-1) + m L A$.

12. Se invece di una potenza intera ſi abbia una radice m, baſterà mettere $\frac{1}{m}$ invece di m. Quindi

$$L A^{\frac{1}{m}} = -10\left(\tfrac{1}{m} - 1\right) + \tfrac{1}{m} L A = \frac{10(m-1) + L A}{m}.$$

Ne naſcono altre due regole

IV. *Per avere il gran logaritmo di una potenza* m *di una frazione, ſi moltiplichi per* m *il ſuo gran logaritmo, e ſi levi dalla ſua caratteriſtica* $10(m-1)$.

V. *Per*

V. *Per averlo di una radice* m, *ſi aggiunga alla caratteriſtica del ſuo gran logaritmo* $10(m-1)$, *indi il tutto ſi divida per* m.

13. Metteremo qui gli eſempj corriſpondenti alle regole.

$m=3$ $A=\frac{1}{752}$ $A=\frac{1}{0.00752}$ $n=5$ $A=0,00752$ $t=2$

$l\,752=2,87622$ $l'\,752=7,12378$ $p\,752=0,87622$

$n=5$ $9-t=7$

$LA=l'\,752=7,12378$ $LA=12,12378$ $LA=7,87622$

3	3	3
21,37134	36,37134	23,62866
−20	−20	−20
$LA^3=1,37134$	$LA^3\ 16,37134$	$LA^3\ 3,62866$
$LA=7,12378$	12,12378	7,87622
20	20	20
27,12378 | 3	32,12378 | 3	27,87622 | 3
$\frac{1}{3}LA^3=9,04126$	$\frac{1}{3}LA^3=10,70793$	$\frac{1}{3}LA^3=9,29207$

14. Vi ſia ora un valore $A=\frac{BCDA\ldots\text{ec.}}{MNP\ldots\text{ec.}}$, e ſi cerchi LA.

Si avrà $LA=10+lA=10+lB+lC$ ec. $-lM-lN$ ec. In queſta formola ſe tra' fattori B, C, D ec. vi ſono de' rotti, ſi avranno i logaritmi negativi, e i logaritmi di M, N ec. dovendoſi ſottrarre, vengono a turbare, come ſe foſſero negativi. Quindi ſervendoſi della 4., e 6. formola del num. 8., e conſiderando i diviſori, come fattori della forma $\frac{1}{M}$, ſe ſia m il numero di tutte le quantità, converrà dalla ſomma di tutti i gran logaritmi levare $10m$, e aggiungervi 10. Così ſi avrà

$LA=-10(m-1)+LB+LC+LD$ ec. $+l'M+lN+l'P$ ec.

15. Pel fine, che ſi ricerca, non occorre pigliare i gran logaritmi de' fattori interi del numeratore, per poi ſottrarli nel $-10(m-1)$; ma baſta pigliarli ne' ſoli fattori frazionarj, o ſieno decimali del numeratore, o naſcano dalla unità diviſa per ogni fattore del denominatore. Si avrà la ſeguente regola.

VI. *Per avere il gran logaritmo di una formola ſemplice, che abbia nel numeratore fattori decimali* m, *e nel denominatore fattori qualunque* n, *ſi piglino i logaritmi volgari di tutti gli interi del numeratore, i gran logaritmi delli decimali di eſſo, e i complementi logaritmici de' fattori del denominatore, e fattane la ſomma, ſi levi dalla ſua caratteriſtica* $10(m+n-1)$.

$$A = \frac{2347 \times 358 \times 0,275 \times 0,00752}{37 \times 249 \times 00153} \quad m = 2,\ n = 3$$

l 2347	$= 3,37051$		
l 358	$= 2,55388$		
L 0,275	$= 9,43933$		
L 0,00752	$= 7,87622$		
l' 37	$= 8,43180$		
l' 249	$= 7,61320$		
l' 0,0153	$= 8,18469$		
	$45,58963$	$0,58963 = p\,3887$	
$-10(m+n-1) =$	-40	$5-9 = -4$	
LA	$= 5,58963$	$A = 0,00003887$	(n. 9.)

16. Se vi foſſero ſtate delle potenze de' rotti, o delle radici; ſi ſarebbero trovati i loro gran logaritmi colle regole 5, e 6, e ſi ſarebbero adoprati al modo ſteſſo.

17. La ſottrazione, che ſi è fatta qui nella caratteriſtica, eſſendo di un corto numero di diecine, ſi poteva fare ſenza ſcriverla, levando via nel portar le diecine per la ſomma quel-

le

le 4.; che corrispondevano alle 5. frazioni, e così si usa realmente. Si usa anche, senza adoprare il segno L, di mettere il segno l, e scrivere non il logaritmo volgare, ma l'accresciuto di una diecina, che io ho qui chiamato gran logaritmo. Dove vi sono i divisori, io sono pur solito, come ho fatto qui, per evitare la sottrazione de' loro logaritmi, servirmi de' complementi logaritmici, evitandosi così la sottrazione di una mantissa dall' altra, la qual cosa può farsi ogni volta, che occorra di dover sottrarre qualche logaritmo: in questo caso non può scriversi nell' esempio proposto senza falsità $l\ 37 = 8,43180$, ma, o conviene dare un segno al complemento logaritmico, come ho fatto, mettendo un l' accentato, o conviene scrivere $l\ \frac{1}{37}$, se invece di l' si vuole scrivere l.

18. Basta dunque, comunque uno voglia scrivere, (benchè per le diverse cose sia meglio adoprar diversi segni), basta, dico, badar a *prendere i logaritmi volgari de' fattori interi del numeratore, i logaritmi accresciuti di 10 de' rotti decimali, i complementi logaritmici de' fattori del denominatore, accrescendo, se questi son decimali, i complementi dell' intero da essi espresso, nelle caratteristiche di tante unità, quante sono in tutto le figure di ciascuno, indi nel far la somma levare tante diecine, da quelle, che si porterebbero indietro, quante conviene, scrivendo il residuo. Per avere il logaritmo volgare bisognerebbe levarne tante, quanti sono stati in tutto i fattori frazionarj del numeratore, e i fattori qualunque del denominatore, e allora se la caratteristica rimane* r, *le figure avranno interi avanti alla virgola, o zeri dopo di essa* r — 1 (n. 4.), *secondo che sarà positivo, o negativo un tal valore, rimanendo le cose nello stato della teoria comune de' logaritmi.*

19. *Se ciò non si può, perchè il numero delle diecine sia maggiore*, (come lo sarebbe nel proposto esempio, in cui si portavano 4. diecine, che ânno dato il 45. nella caratteristica, e per avere

il

il logaritmo volgare ſe ne ſarebbero dovuti levare 5, per li 5 fra rotti nel numeratore, e fattori nel denominatore) *allora vanno levate diecine una meno* (come ſi è fatto qui, levandone 4), *rimane quello, che abbiamo chiamato gran logaritmo, che dà il numero cercato, dando colla mantiſſa le figure, e determinando la ſede della virgola colla formola* $r-9$ (n. 9.). Qui nell' eſempio poſto al n. 15. ſi è così trovato di fianco il numero A, in cui eſſendo $r-9=5-9=-4$, ſi ſono meſſi dopo la virgola 4. zeri, pigliando 0, 00003887 pel valore cercato di A.

20. Può darſi il caſo, che non ſi poſſano ſottrarre neppure tante diecine una meno, come ſarebbe ſeguito qui, ſe la ſomma delle caratteriſtiche foſſe ſtata 35, o 25. In tal caſo non ſi farebbe evitato un negativo, e converrebbe, ſe non ſi uſa altro artificio, mutar anche la mantiſſa, ed avere un logaritmo negativo col ſottrarre all' oppoſto la trovata ſomma da 40, 00000. Ciò accaderebbe per la troppa piccolezza del numero corriſpondente al logaritmo, a cui non arriva la forza del 10 aggiunto (n. 6.). Vi è però un artificio facile ivi promeſſo per evitare anche allora la ſottrazione delle mantiſſe. *Baſta levare quante diecine ſi può, e mettere innanzi alla caratteriſtica col ſegno negativo quelle diecine di più, che non ſi ſono ſottratte; indi nel numero alli zeri dati da* $r-9$ *aggiungere altrettante diecine di zeri.* Imperocchè ſe quel reſiduo ſi dica r', e le diecine non ſottratte ſieno t; farà l'intero $r=r'-t$, onde $r-9$ avrà -10 di più del ſemplice $r'-t$.

21. Se foſſe venuta la ſomma 25, 58963; non potendoſi levare 4 diecine, ſi ſarebbe potuto ſcrivere $-20+5$, 58963, e il numero A, invece di avere zeri 4, ne avrebbe dovuti avere 24. Al modo ſteſſo nel primo eſempio del n. 13., ſe ſi foſſe cercata la ottava potenza di $A=\frac{1}{752}$, moltiplicando $LA=7$, 12378 per 8, ſi ſarebbe avuto 56, 99024, e ſi ſarebbe dovuto

ſottrarre 70. Conveniva ſcrivere — 20 + 6, 99024, e dove al $L A^1 = 1, 37134$ corriſpondeva $A^2 = 0, 000000002351$ con otto zeri per eſſere $1 - 9 = -8$, per A^3 vi ſarebbero voluti dopo la linea zeri 23 prima di 9778, per eſſere $6 - 9 = -3$, e $-20 - 3 = -23$.

22. Lo ſteſſo anderebbe praticato in ogni altra congiuntura, in cui per le regole ſuddette veniſſe nella caratteriſtica un numero maggiore da doverſi ſottrarre da un minore: o converrebbe tener a mente il numero delle diecine, che non ſi ſono potute ſottrarre, o per non dimenticarſene, anderebbero piuttoſto ſegnate innanzi col ſegno negativo; ma queſto ripiego non ſarà mai neceſſario, fuori che ove occorrano frazioni minori delle eſpreſſe da una figura, che ſia la decima dopo la virgola, cioè di $\frac{1}{10000000000}$.

23. L'aggiunta, che ſi è fatta di 10 al logaritmo volgare di un numero per mutarlo in un altro, che ſi è qui chiamato gran logaritmo, ſe ſi faceſſe a tutti i logaritmi delle tavole comuni, ſi avrebbero nuove tavole di una forma di logaritmi ricavata da una idea di eſſi più generale. Comunque una progreſſione geometrica ſi combini con un' aritmetica, ſi ponno i termini di queſta chiamare logaritmi de' termini corriſpondenti di quella, ed eſſi pure avranno la proprietà, che i logaritmi di 4. termini geometricamente proporzionali ſono aritmeticamente proporzionali; onde datine i primi tre, ſi troverebbe il logaritmo del quarto col ſottrarre il logaritmo del primo dalla ſomma de' logaritmi degli altri due. Di queſta natura ſarebbero i logaritmi di quelle nuove tavole; giacchè un' aggiunta di un termine coſtante a tutti i termini di una progreſſione aritmetica non ne turba nè la natura, nè la ragion comune, e ſolo traſporta più indietro il limite tra i poſitivi, e i negativi.

Ma ove all' 1 non corriſponda nella progreſſione aritmetica lo

zero,

zero, non si ha la formola $l\,ab = l\,a + l\,b$, da cui ne vengono le altre tre $l\frac{a}{b} = l\,a - l\,b$, $l\,a^m = m\,l\,a$, $l\,a^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}\,l\,a$. Tutte sarebbero alterate dal logaritmo dell' unità, che converrebbe aggiungere, o sottrarre una, o più volte; giacchè essendo $1 . a :: b . \frac{ab}{1} = ab$, sarebbe $l\,ab = l\,a + l\,b - l\,1$. Per questo si è combinato ne' logaritmi, che sono in uso, l' 1 collo zero, acciò come quello non altera le quantità nella moltiplicazione, o divisione, così questo non le alteri nella somma, o sottrazione.

24. Questo è un gran vantaggio, per l'uso grande, di cui sono que' teoremi; ma è inseparabile dallo svantaggio di avere negativi, o i logaritmi di tutte le frazioni, o (se si volessero positivi i logaritmi di queste col combinare una progressione aritmetica crescente con una geometrica decrescente) i logaritmi degli interi; mentre all' opposto ove il logaritmo dell' unità è molto grande, rimangono positivi i logaritmi di tutte le frazioni, che non abbiano un denominatore maggiore di quel logaritmo dell' unità, che nel caso nostro viene ad essere quel 10, che si è aggiunto a tutti i logaritmi volgari delle tavole comuni per farli divenire gran logaritmi, e coll' ajuto loro evitare i negativi in tutte le frazioni non minori di $\frac{1}{(10)^{10}}$.

25. Il disturbo, che recavano i logaritmi negativi, fu riconosciuto fino dal principio della loro invenzione, riuscendo essi molto incomodi particolarmente nella Trigonometria, in cui vengono in uso i logaritmi delle funzioni degli archi, e nelle tavole vi si mettono quelli de' seni, e delle tangenti. Desiderandosi di prendere l'unità pel raggio del circolo, o sia pel seno tutto, venivano a riuscire frazioni semplici tutti i seni, e tutte le tangenti fino a' 45. gradi, che sono minori dell' unità, rimanendo maggiori dell' unità tutte le altre tangenti; ed essendo

pur

pur maggiori dell' unità tutte quante le secanti : quindi venivano ad essere negativi i logaritmi di tutti i seni, e della metà delle tangenti, rimanendo positivi tutti quelli dell' altra metà di tangenti, e tutti quelli delle secanti.

26. Vi fu, chi riflettendo all' essere più frequente l'uso de seni, oltrechè le tangenti, e secanti si ânno dipendentemente da essi, per essere al raggio $= 1$ tang. $A = \frac{sin.\ A}{cos.\ A}$, e sec. $A = \frac{1}{cos\ A}$, credette fosse cosa opportuna il combinar appunto una delle due progressioni decrescente coll' altra crescente, per avere positivi tutti i logaritmi de' seni, e ne pubblicò le tavole. Ma oltrechè vi era un qualche imbarazzo nella costituzione de' logaritmi per i seni, contrarj a quella de' numeri esprimenti i lati de' triangoli piani, e di altri valori, a' quali si passava oltre nel calcolo (benchè per altro questo era senza grande conseguenza negli usi ordinarj, ne' quali entrano i soli rapporti tra i seni, e il raggio), non si otteneva il fine pienamente, venendo sempre negativi i logaritmi della metà delle tangenti ricavate da' seni, e i logaritmi di tutte le secanti.

27. Quindi fu communemente abbracciato l'altro partito, di abbandonare l'unità pel valore del raggio, e concepirlo diviso in un gran numero di parti, sostituendo così a quell' unità più grande, un' unità più piccola, dalla quale ripetuta molte volte fosse formata quella, e in queste unità furono trovati, ed espressi tutti i seni, tangenti, e secanti naturali, e furono inseriti nelle tavole. Bastava fare il raggio $=$ 100000 per avere espresso co' numeri interi il seno anche di un minuto secondo, che allora viene ad essere $= 48,5$; ma per abbondare si è fatto nelle tavole più comuni $=$ 10000000, onde anche un terzo ha il seno espresso con un intero venendo $= 8$.

28. Così anche i logaritmi de' seni degli angoli piccolissimi venivano ad essere positivi, rimanendo negativi quelli soli, che

appartengono ad angoli comunemente disprezzati per la eccessiva loro piccolezza: ma il logaritmo del raggio riusciva incomodo, venendo ad essere = 7, 000 ec., numero non così comodo ad aggiungere, e levare nelle occasioni richieste dalla multiplicazione, e divisione pel raggio. Quindi per li logaritmi de' seni si concepì il raggio diviso in un numero di parti espresso da un' unità con 10 zeri, venendo così ad essere il logaritmo di esso raggio = 10. 000 ec., benchè insieme si lasciò nelle stesse tavole diviso per li seni naturali in parti 10000000, senza che queste due unità diverse turbassero il calcolo, sì perchè i seni al raggio $(10)^7$, si riducono a que' del $(10)^{10}$ col solo aggiungere 3 zeri al fine, sì, e molto più, perchè le ragioni de' seni fra se, e al raggio, le quali sole per l'ordinario vengono considerate, rimangono le medesime, con qualunque unità si misurino, ed esprimano.

29. Questa sorte di logaritmi de' seni al raggio $(10)^{10}$, rispetto a' logaritmi de' seni al raggio = 1, sono appunto lo stesso, che i nostri gran logaritmi rispetto a' logaritmi volgari; giacchè anche qui diviene = 10 il nuovo logaritmo di quella, che prima era un' unità maggiore, ed ora è divenuto un numero grosso di unità minori, ogni seno viene espresso col numero, con cui sarebbe stato espresso essendo il raggio = 1, ma moltiplicato per $(10)^{10}$, ed ogni logaritmo uguale al logaritmo di quella ipotesi accresciuto di 10 unità nella sua caratteristica.

30. Questo è stato l'unico rimedio adoprato per un pezzo per evitare nella Trigonometria i logaritmi negativi, e anche per questo si soleva introdurre nelle formolette, che per l'ordinario erano semplici, e corte, e nelle proporzioni l'espressione del raggio fatto = R, per poter tener conto del suo logaritmo, e aggiungerlo, o sottrarlo. Ma cominciato a introdursi in questi ultimi tempi l'uso delle formole assai più complicate, e più frequentemente adoprate nella Trigonometria, e in tutta l'Astro-

no-

nomía, anzi l'uſo de' ſeni, e tangenti anche più generalmente nella Geometría per le proprietà delle curve, e nella ſublime analiſi per le integrazioni, ſi è tornato in eſſe a conſiderare il raggio = 1, per riſparmiare la ſua eſpreſſione, e rendere tanto più ſemplici le formole, col renderle meno caricate di ſimboli, ritenendo per altro le eſpreſſioni logaritmiche così, come ſi trovano nelle tavole comuni. Quindi realmente nelle medeſime tavole ſi trovano per la ſerie naturale de' numeri i logaritmi volgari, e nelle tavole de' logaritmi, de' ſeni, e tangenti, (i quali logaritmi ſi chiamano anche ſeni, e tangenti artificiali) i logaritmi volgari de' ſeni computati al raggio = $(10)^{10}$, ma che ſono que', che qui abbiamo chiamati gran logaritmi per li ſeni computati al raggio = 1, richiedendo l'uſo di eſſi l'avvertenza al numero delle volte, che va nelle formole ſteſſe conſiderata l'ommiſſione della eſpreſſione del raggio, la quale coſa non è difficile ad averſi, attela l'omogeneità, che riſpetto alle eſpreſſioni de' ſeni, e tangenti, e del raggio, devono introdurvi le proporzioni, per le quali ſole eſſi entrano nelle medeſime formole.

31. Introdotto già l'uſo di conſiderare il raggio = 1, e di ſervirſi delle tavole comuni per li logaritmi de' ſeni, ſi è ito innanzi ad aggiungere una diecina di unità a' logaritmi delle altre frazioni, per evitare in eſſe ancora i logaritmi negativi; ed io qui ripigliando la coſa da' ſuoi principj, ho date le regole generali, le quali ſono ſemplici, e piane, e ſerviranno per evitare ſempre i logaritmi negativi di tutte le frazioni non minori di $\frac{1}{(10)^{10}}$, anzi per evitare ogni ſottrazione di qualunque logaritmo, e anche nelle frazioni minori ſenza alcun logaritmo negativo, evitar ſempre ogni ſottrazion di mantiſſa, e rimediare con una pratica ſemplicíſſima a qualunque inconveniente, che poſſa occorrere ancora nelle caratteriſtiche.

APPENDICE

Su i Logaritmi delle quantità negative.

32. Avendo parlato nella preſente Memoria de' logaritmi negativi, era troppo naturale il trattare ancora de' logaritmi delle quantità negative, ſu i quali ſi moſſe già la controverſia tra il Leibniz, e il Bernoulli, come ſi vede nel loro Commercio epiſtolico al tomo 2. della pag. 269., ſoſtenendo il primo, che eſſi erano immaginari, e che la logaritmica aveva un ſolo ramo ſopra l'aſſe, e il ſecondo, che erano reali, e uguali a' logaritmi delle medeſime quantità preſe poſitivamente, avendo la ſteſſa curva due rami infiniti ſopra, e ſotto l'aſſe uniti fra loro colla continuità geometrica. A queſto fine, mentre già ſi ſtampava queſt' Opera avevo ſtudiata a fondo tutta la materia all' idea di aggiungere per modo di appendice l'eſame di eſſa, e il mio ſentimento diſteſo. Nello ſtendere l'appendice mi è creſciuta fra le mani la materia in modo, che veniva ad eſſere, come ſuol dirſi, molto maggiore la giunta della derrata. Quindi ho giudicato di fare una Memoria a parte ſu queſto argomento, che ho già diſteſa, e pubblicherò altrove.

33. Intanto per chi vorrà iſtruirſi di queſta controverſia dirò qui, quali ſono i documenti, che mi ſono capitati in mano, appartenenti ad eſſa. Si rinnovò la queſtione nel 1746., e 1747. fra il d'Alembert, e l'Eulero, per via di lettere, che a mia notizia non ânno veduta ancora la pubblica luce, ſtando il primo pel Bernoulli, e il ſecondo pel Leibniz. Uſcì in conſeguenza nel 1751. nel tomo di Berlino pel 1749. una Memoria dell' Eulero, che non fa menzione di quel ſuo carteggio col d'Alembert, in cui crede di avere ſopita per ſempre la controverſia coll' avere trovato, che ogni quantità ha infiniti logaritmi, i quali per le negative ſieno tutti immaginarj, per le poſitive lo

ſieno

ſieno tutti fuori di uno ſolo reale: con queſto ritrovato, crede di conciliare tutte le difficoltà, dandola così vinta al Leibniz.

34. Non ſi acquietò il d'Alembert a queſta deciſione, e non ſolo non credette dimoſtrata la ſentenza dell' Eulero, ma credette all' oppoſto di poter egli validamente ſoſtenere l'opinione contraria dei Bernoulli, e pubblicò nel 1761. nel primo tomo de' ſuoi Opuſcoli una Memoria a queſto fine, in cui parla delle ſuddette ſue lettere, e riſponde a tutti gli argomenti, e difficoltà dell' Eulero.

35. Intanto nelle Memorie di Berlino del 1755. il Walmeſley aveva inſerita una Memoria ſullo ſteſſo argomento, in cui dimoſtra le ſteſſe formole dell' Eulero, ma inſiſte ſulla inutilità della queſtione, perſuaſo col Leibniz, che i ſegni non entrando ne' rapporti, non vi ſia vera proporzione tra i poſitivi, e negativi come tali, e in conſeguenza, che è coſa inutile il penſare a' logaritmi, che dovrebbero miſurare queſti rapporti.

36. Nelle Memorie di Torino vi è nel primo tomo uſcito l'anno 1759. una Memoria ſu queſto del Sig. Cav. di Foncenex, in cui ſoſtiene coll' Eulero la ſentenza del Leibniz, e dimoſtra con un terzo metodo le ſteſſe formole dello ſteſſo Eulero, ma nel ſecondo tomo per l'anno 1760., e 1761. ve n'è un' altra, in cui dopo veduta la Memoria del d'Alembert, rimane contro di lui nella parte aritmetica della queſtione, ma muta parere in ordine alla continuità de' due rami della logaritmica, quale crede di dimoſtrare con un ſuo nuovo argomento ivi prodotto.

37. Nella Enciclopedia vi è l'articolo *logaritmo* ſteſo dal d'Alembert molti anni prima, ma pubblicato nell' anno ſcorſo 1766., nel quale ſoſtiene la ſteſſa ſua opinione, accennando alcune ragioni, e rimettendoſi ad alcuni de' ſuddetti monumenti, parte de' quali ivi nomina. Inclina al fine a credere, che vi ſia dentro della lite di voce.

38. Finalmente vi è anche qualche coſa ſu queſto argomento

to ne' 12. Commentarj del P. Scarella pubblicati l'anno ſcorſo 1766. nel Commentario 4. dal num. 36., trattandone per occaſione dell'uſo, che ne viene nel volere determinare il movimento di un punto attratto ad un centro con alcune leggi di forze.

39. Io ſono perſuaſo, che tutte le difficoltà, e contraddizioni naſcano appunto dalla oſcurità, e mancanza di preciſione delle idee attaccate ad alcuni nomi da' moderni Matematici; onde ne naſcano tante liti fra loro, mentre la pacifica Geometría de' Greci n'è priva affatto. Tali ſono a mio giudizio le idee delle quantità immaginarie, che ſono aſſurde, dell' infinito aſſoluto, che mena prima a de' miſterj, indi a degli aſſurdi, come ho fatto vedere nel terzo tomo de' miei Elementi, quelle degli infinitamente piccoli mal concepiti da alcuni, e però trattati in modo da incorrere in errori; benchè di queſti, e degli indefinitamente grandi ſi poſſano avere delle idee preciſe, e delle leggi ſicure per bene adoprarli, come ho fatto vedere molti anni addietro nella mia Diſſertazione *de natura, & uſu infinitorum, & infinite parvorum*. Idee incerte pure, e confuſe, credo, che ſi abbiano della natura delle quantità negative, ſulla quale ancora ſi litiga, e molto più della idea di multiplicazione, e diviſione fatta per una quantità negativa, e dell' idea di rapporto, o proporzione geometrica, ove queſta parola ſi applichi alle quantità negative, e poſitive meſcolate inſieme: o così pure non è netta l'idea delle potenze delle quantità negative, che ne dipende, e nelle quali naſcono de' grandi imbarazzi, maſſime ove l'eſponente ſia indefinito.

40. Sopra ogni altra coſa la lite della parte geometrica, credo, che naſca dall' eſſere affatto vaga, e indeterminata l'idea della continuità geometrica preſa in generale. Per le curve algebraiche vi è almeno un criterio di tale continuità nella ſemplicità della equazione della curva, irriſolubile in due, dalla multiplicazione delle quali ella naſca, donde ſe ne potrebbe ca-

vare

vare una precisa definizione di nome, pigliandola nel senso, in cui si adopra da' Geometri in questi casi.

41. Converrà però badar bene di non mescolarvi dopo delle idee attaccate dalla lingua comune alla parola continuità; mentre così si troveranno appartenenti ad una stessa curva continua più rami anche finiti, e separati l'uno dall'altro in modo, che mai non si incontrino, come ve ne sono due nella concoide di base circolare, ove il polo sia preso dovunque tra il centro, e la circonferenza, esprimendosi la natura di amendue questi rami da un'unica equazione indivisibile di sesto grado. Allora non sarà il perimetro intero unito con una sola linea non interrotta in modo, che da un suo punto a qualunque altro si possa giugnere con un cammino continuato nel senso della lingua non geometrica, ma comune.

42. Ma per le curve transcendenti non vi è nè definizione netta, nè criterio universalmente accettato, e tale, che applicato alle curve in generale non faccia in qualche caso a calci coll'altro delle curve algebraiche, onde se ne deduca insieme l'esservi, e il non esservi continuità.

43. Io svolgo a pieno tutto questo nella Memoria suddetta, e mostro, che parlando condizionatamente, si può sostenere quello, che uno vuole. Ma in modo particolare fo vedere, in che cosa consista il nodo principale, e l'origine di tutte le contraddizioni, nelle quali si urta, nella parte analitica. Esso nodo consiste nella combinazione delle seguenti due regole comuni.

I. *I segni conformi nella multiplicazione rendono il* $+$, *i difformi il* $-$.

II. *Quando una quantità si concepisca indeterminatamente in modo, che si accosti ad un' altra oltre ogni limite, si attribuisce a questa quel valore, a cui oltre ogni limite si è accostato il valore trovato per quella.*

44. La prima di queste regole determinando i valori di $x = a^r$ nelle diverse supposizioni di r, forma il nodo in vigore del seguente teorema, che si concepisce facilmente, ma che io rigorosamente dimostro.

Dato un qualunque valore r, ſi può trovare una frazione, che ne ſia o maggiore, o minore, come uno vuole, che ne differiſca di una quantità minore di qualunque dato b comunque piccola, e che abbia il ſuo numeratore, e denominatore, come uno vuole, o amendue ſpari, o amendue anche imparimente pari, o ſpari quel de' due, che ſi vuole, e l'altro pari.

45. Finiſco la mia ricerca con un' avvertenza eſſenziale, ed è, che tutta queſta lite non intereſſa punto l'uſo comune de' logaritmi in Trigonometría, ed Aſtronomía, pel quale ſono ſtati iſtituiti, cioè di facilitare con ſicurezza il calcolo numerico col ſoſtituire le ſomme, e ſottrazioni alle multiplicazioni, e diviſioni con quello, che ne dipende per le potenze. Se ſi trova la formola $\frac{abc}{mn} - \frac{d^2 e^3}{f^4 g}$, ſi faccia $\frac{abc}{mn} = r$, $\frac{d^2 e^3}{f^4 g} = t$. Indi ſi trovi tanto l'$r$, quanto il t numeri poſitivi coll'ajuto de' logaritmi, pigliando $lr = la + lb + lc - lm - ln$, e $lt = 2ld + 3le - 4lf - lg$, e poi ſi pigli $r - t$, che ſi avrà l'intento ſenza alcun pericolo di errore, e ſenza che vi abbiano menoma difficoltà i difenſori di amendue le ſentenze, la lite de' quali riſguarda principaliſſimamente de' punti puramente ſpecolativi.

46. Non per queſto ſtimo, come penſano alcuni, inutile il trattare di una tale queſtione, perchè ſerve per acquiſtare per iſtrada una quantità di notizie intereſſanti, e ſchiarire un gran numero di idee.

MEMORIA SECONDA.

Metodo di alzare un infinitinomio a qualunque potenza indefinita.

1. Sia l'infinitinomio $a + bx + cx^2 + dx^3$ ec. da alzarsi alla potenza m. Essa potenza avrà infiniti membri, il primo de' quali sarà a^m, e i seguenti avranno le potenze x, x^2, x^3 ec. con de' coefficienti numerici, e letterali. Tutti i termini di qualunque membro corrispondenti a qualunque potenza x^n si troveranno facilmente coll' ajuto di una preparazione generale per tutti.

2. Si scriva in una riga la serie naturale de' numeri, e sotto di essi in un' altra si mettano le lettere b, c, d ec., che nel dato infinitinomio sono loro compagne nelle potenze di x espresse da essi numeri.

1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 ec.
b . c . d . e . f . g . h . i . k . l ec.

3. Fatta questa preparazione generale, se ne faccia una particolare per i termini corrispondenti alla potenza x^n, scrivendo in tante righe tutti i modi, ne' quali il numero n può essere composto di numeri interi, ove si comprendono anche le semplici unità, e lo stesso n parte totale di se medesimo. Ciò si farà facilmente scrivendo nella prima riga tante unità, nella seconda un binario colle unità residue, indi due binarj, e così in poi: esauriti i binarj si metta un ternario colle unità, indi co' binarj, e unità, e poi si passi a più ternarj, indi al quaternario, e a più quaternarj colle combinazioni precedenti del residuo, e al modo istesso si vada innanzi alle parti maggiori. L'esempio, che si ha qui sotto, farà schiarire il metodo.

4. Ora il membro cercato avrà tanti termini, quanti saranno i modi suddetti di comporre il numero n, determinando ciascuno di essi modi il suo termine, che nell' esempio medesimo

gli ſtarà accanto di fianco. Baſterà oſſervare le regole ſeguenti:

I. Per numeratore del coefficiente numerico ſi piglino tanti termini della progreſſione $m \cdot m-1 \cdot m-2$ ec., quante ſono le parti componenti.

II. Per denominatore ſi piglino altrettanti termini della ſerie naturale 1 , 2 . 3 ec., la quale però ſi ricominci ſempre da capo dall' 1, ovunque ſi muta la groſſezza della parte.

III. Per coefficiente letterale ſi metta prima a alzato alla potenza m meno il numero delle parti, indi le lettere b, c, d ec. compagne di eſſe parti nella preparazione generale; onde ſe una parte ſarà ripetuta più volte, ſi metterà la lettera compagna coll' eſponente, che eſprima il numero di quelle parti uguali.

Eſempio $n = 6$

1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 $\quad \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4 \cdot m-5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} a^{m-5} b^6$

2 . 1 . 1 . 1 . 1 $\quad \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-5} b^4 c$

2 . 2 . 1 . 1 $\quad \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} a^{m-4} b^2 c^2$

2 . 2 . 2 $\quad \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} c^3$

3 . 1 . 1 . 1 $\quad \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-4} b^3 d$

3 . 2 . 1 $\quad \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 1 \cdot 1} a^{m-3} b c d$

3 . 3 $\quad \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2} d^2$

4 . 1 . 1 $\quad \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 1 \cdot 2} a^{m-3} b^2 e$

4 . 2 $\quad \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 1} a^{m-2} c e$

5 . 1 $\quad \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 1} a^{m-2} b f$

6. $\quad \frac{m}{1} a^{m-1} g$

5. Il primo termine ha nel numeratore 6. termini della progreſſione $m \cdot m-1$ ec., perchè 6. ſono le parti 1 . 1 . ec., le quali eſſendo tutte uguali, il denominatore ha 6. termini della ſerie 1 . 2 . 3 . ec. continuata. Le 6. parti danno anche a^{m-5}, le quali tutte corriſpondendo al b, ſi ha b^6.

6. Nel terzo termine ſi ânno nel numeratore 4. termini coll' a^{m-4}, per eſſer 4. le parti, e come eſſe dopo la ſeconda paſſano da 2 all' 1, ſi ha nel denominatore 1 . 2 . 1 . 2, ripigliando da capo la ſerie : b^2 c^2 ſono compagne delle parti 1 . 1 . 2 . 2 :

7. Nel ſeſto termine le tre parti 3 . 2 . 1 ſono tutte diverſe, e però il denominatore torna ſempre da capo coll' 1 . 1 . 1 .

8. La dimoſtrazione di queſto metodo dipende dalle leggi delle combinazioni. Per alzare l'infinitinomio dato alle potenze ſuperiori, conviene andarlo multiplicando per ſe medeſimo. Come le lettere a, b, c ec. ſi trovano tutte di una ſola dimenſione in eſſo, è coſa manifeſta, che nel quadrato ſaranno tutte combinate a binarj, nella terza potenza a ternarj, e così in poi; onde il coefficiente letterale dovrà in ogni termine avere dimenſioni m, ed è coſa chiara, che il primo termine ſempre conterrà il ſolo valore a, onde ſarà a^m.

9. Negli altri colle lettere b, c, d ec. vi verrà x alzato alle potenze loro compagne; onde in ogni termine la potenza x ſarà la ſomma di tutti i numeri compagni di dette lettere. Quindi dovendovi eſſere tutte le loro poſſibili combinazioni,

giacchè tutte ſi moltiplicano per tutte; la potenza n qualunque dovrà avere i termini corriſpondenti a tutti i modi, ne' quali il numero n può eſſere formato da' numeri 1.2.3 ec., e in eſſi le lettere compagne delle parti componenti, le quali coll'a dovendo empire le dimenſioni m, dovrà l'a per eſponente avere m meno il numero di dette parti.

10. Così rimane dimoſtrata la 3. regola: le prime due ſi dimoſtrano in queſt' altro modo. Il coefficiente numerico deve eſprimere il numero di tutte le combinazioni poſſibili dello ſteſſo numero m di lettere a, b, c, d ec. ripetute, quanto porta l'eſponente di ciaſcuna. Quindi per trovare il coefficiente numerico, baſterà il trovare un tale numero di combinazioni. Ciò ſi farà nel ſeguente lemma, e ſuoi corollarj.

11. Lemma. Se debba collocarſi un numero m di termini a, b, c ec. mutati i loro ſiti comunque, e ſi cerchi il numero di tutte le combinazioni poſſibili; ſi conſideri, che poſto il primo comunque, ſi potrà mettere il ſecondo in due ſiti, cioè innanzi, o dopo: il terzo in 3, cioè innanzi al primo, dopo di eſſo, e dopo il ſecondo; e così ſempre in poi ogni termine nuovo in un ſito di più, cioè innanzi al primo de' già collocati, o dopo di eſſo, e dopo qualunque de' ſeguenti. Quindi il numero di tutte le combinazioni ſarà il prodotto della ſerie $1.2.3\ldots.m$.

12. Corol. 1. Se vi ſia fra eſſi termini un numero r di termini, che non debbano mutarſi fra loro, ma tenendo eſſi lo ſteſſo ordine ſcambievole, debbano ſolamente mutarſi gli altri tutti tanto riſpetto a ſe ſteſſi, quanto interponendoſi comunque fra quelli; il numero delle combinazioni ſi avrà dividendo la ſerie $1.2.3\ldots.m$ per la ſerie $1.2.3\ldots.n$.

13. Imperocchè per avere l'intero numero delle combinazioni, per ogni combinazione degli altri termini, converrebbe inoltre, tenuti eſſi immobili a' loro poſti, mutare fra loro in

tutte

tutte le maniere poſſibili que' termini, che non ſi mutavano, le quali maniere pel lemma ſono $1.2.3....n$, e il numero di quelle multiplicato pel numero di queſte darebbe il numero intero $1.2.3....m$. Quindi queſto diviſo per $1.2.3....n$ darà il numero cercato.

14. Corol. 2. Se il numero di tutti i termini ſia m, e il numero di quelli, che mantengono il ſuo ordine ſcambievole ſenza mutarſi ſia $n = m - r$, il numero di tutte le altre combinazioni ſarà il prodotto del numero r di termini della ſerie $m.m-1.m-2$ ec.

15. Imperocchè $\frac{1.2.3...m-r.m-(r-1)...m-2.m-1.m}{1.2.3...m-r} = m.m-1.m-2...m-(r-1)$, dove vi è dopo il primo termine un numero di termini $r-1$, e però includendo lo ſteſſo primo, ſe ne ha il numero r.

16. Corol. 3. Se vi ſaranno inoltre altre ſomme di termini, che non ſi debbano mutar fra loro, e in una il loro numero ſia t, in un' altra u ec.; il numero delle combinazioni ſi dovrà per la ſteſſa ragione ſcemare ancora, dividendolo pel prodotto de' termini $1.2.3...t.1.2.3...u$ ec.

17. Quindi in quel caſo il numero delle combinazioni ſarà $\frac{m.m-1.m-2....m-(r-1)}{1.2.3...t.1.2.3...u}$ ec.

18. Poſte queſte regole delle combinazioni, ſi vedrà ſubito la dimoſtrazione della prima, e ſeconda regola propoſta pel coefficiente numerico.

19. Se nel fare la multiplicazione ſucceſſiva, richieſta per l'elevazione del dato infinitinomio, ſi mette ſempre la nuova lettera multiplicante avanti a tutte quelle, che già ſi trovano ne' termini della potenza precedente, i quali devono multiplicarſi; è coſa manifeſta, che tutti i valori diſſimili verranno meſcolati fra loro in tutte le maniere poſſibili, e combinati co-

mu-

munque colli ſimili ; ma li ſimili ſaranno aggiunti a ſe ſteſſi, e a quelli in tal maniera , che non abbiano fra loro , ſe non un ordine unico. Verrà tanto il bc , quando il c ſi multiplica per b, quanto il cb, quando il b ſi multiplica per c; così pure verranno tutti i terni bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb , quando per qualunque delle 3. lettere ſi multiplica l'uno , e l'altro de' ſeguenti due ambi delle altre due. Ma il b^2 verrà ſolo una volta , quando il b ſi multiplica per b, e il b^3 , quando per b ſi multiplica il b^2 .

20. Quindi ſe ſia r il numero delle parti uguali , che devono dare il termine, onde vi debba eſſere a^{m-r}, cioè un numero $m-r$ di termini ſimili a, e tutti gli altri ſieno diſſimili; ſarà pel Corol. 2. il numero di combinazioni uguale al prodotto di un numero r di termini della progreſſione m . $m-1$. $m-2$ ec., conforme alla prima regola , che dà il numeratore del coefficiente numerico. Ma ſe vi ſaranno inoltre altri termini b, c, d ec. ſimili corriſpondenti a delle parti uguali componenti il numero n, converrà inoltre dare per diviſore numerico altrettante ſerie 1 . 2 . 3 ec., quante ſono le ſpecie di eſſe parti uguali , continuando ciaſcuna ſerie per tanti termini , quante ſono eſſe in ogni ſpecie. Queſte ſerie coll'unità meſſa per l'analogia in luogo di ogni parte ſolitaria , danno appunto il denominatore preſcritto nella regola ſeconda .

21. Corol. 1. E' coſa facile a vedere, che ove la potenza m ſia un numero determinato poſitivo intero , ſi ſcemerà la fatica di molto ; giacchè dovranno rigettarſi tutti i modi di comporre il numero n, che abbiano numero di parti maggior di m; mentre in cili modi ſi avrebbe nel numeratore $m-m=0$: poſto poi negli altri per m il ſuo numero , ſi eliderebbero varj numeratori da' denominatori , e il calcolo diverrebbe aſſai più ſemplice .

22. Se nell' eſempio propoſto ſi cercaſſe la potenza terza;

fatto

fatto $m = 3$, e rigettati tutti i modi, che ânno più di 3. parti, ſi rigetterebbero i modi 1, 2, 3, 5, e gli altri darebbero $\frac{3.2.1}{1.2.3} = 1$, $\frac{3.2.1}{1.1.1} = 6$, $\frac{3.2}{1.2} = 3$, $\frac{3.2.1}{1.1.2} = 3$, $\frac{3.2}{1.1} = 6$, $\frac{3.2}{1.1} = 6$, $\frac{3}{1} = 3$. Quindi il membro ſettimo della terza potenza, ommeſſo anche l'a, ove ſono 3 le parti per l'$a^{3-3} = a^0 = 1$, ſarebbe $(c^3 + 6bcd + 3ad^2 + 3b^2e + 6aae + 6abf + 3a^2g)x^6$.

23. Corol. 2. Se l'infinitinomio non ha il primo termine mancante di x, il valore a ſarà $= 0$. Quindi ſaranno $= 0$ tutti i termini, ne' quali eſſo vi entra, cioè tutti i termini, che ânno numero di parti corriſpondenti minor di r: onde mancheranno tutti i membri appartenenti alle potenze di x minori di m. Sarà meglio in queſto caſo conſiderare l'infinitinomio ridotto a queſta forma $ax + bx^2 + cx^3$ ec. $= x(a + bx + cx^2$ ec.); onde elevato $a + bx + cx^2$ ec., e moltiplicato ogni termine per x^m, ſi avrà l'intento.

24. Corol. 3. Se nell' infinitinomio manca qualche potenza di x, nella formola generale $a + bx + cx^2$ ec. ſarà $= 0$ la lettera, che corriſponde a quella potenza: e però anderanno rigettati tutti que' modi di comporre il numero n, che avranno qualche parte eſprimente quella potenza.

25. Corol. 4. Quindi ſe in cambio dell'infinitinomio ſi avrà un polinomio; baſterà ritenere que' modi ſoli, ne' quali non vi è parte alcuna, che non corriſponda a qualche eſponente di que' del polinomio medeſimo.

26. Corol. 5. Se un polinomio finito ſi dovrà elevare a una potenza eſpreſſa da un numero intero poſitivo; la formola darà un numero finito di termini, e ſe la potenza la più alta di x ſarà r; il membro ultimo avrà x^{mr} divenendo $= 0$ qualunque mem-

membro posteriore. Imperocchè in esso dovrebbe essere $n > mr$; onde se n si divida anche in parti uguali m; ogni parte sarà $\frac{n}{m} > r$: e però molto più, se si divida in un numero minore di parti o uguali, o disuguali, qualche parte sarà maggiore di r: quindi essa non si troverà tra gli esponenti del dato polinomio; onde quel modo di comporre il numero n dovrà rigettarsi pel Corol. 4.

27. Scolio. Converrebbe ora determinare il numero de' diversi modi, ne' quali si può comporre un dato numero da' numeri interi. Questo argomento lo tratta a lungo l'Eulero nella Introduzione *in Analysim Infinitorum* al tomo 1. capo 16., ove riduce il problema alla evoluzione della frazione $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$ ec. in una serie ricorrente della forma $1 + Ax + Bx^2 \ldots + Px^n$. Fa vedere, che ogni coefficiente P mostra in quanti modi il suo compagno n possa formarsi colla addizione de' numeri interi, e ne forma la seguente tavola

1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 . 11 . 12 . 13 . 14 .
1 . 2 . 3 . 5 . 7 . 11 . 15 . 22 . 30 . 42 . 56 . 77 . 101 . 135 .

15 . 16 . 17 . 18 . 19 . 20 . 21 . 22 . 23 . 24
176 . 231 . 297 . 385 . 490 . 627 . 792 . 1002 . 1250 . 1575 .

28. Ogni numero, che sta sotto, mostra in quanti modi si possa comporre il numero, che sta sopra. Vi si vede, che pel num. 6. vi sono modi 11., quanti appunto se ne sono trovati nell'esempio proposto. Vi si scorge poi facilmente, quanto vada innanzi questo numero ne' numeri maggiori, e però quanto orribile sia la farragine de' termini, che devono nascere ne' membri un poco avvanzati. Il membro ventesimo quinto, che corrif-

risponde all' x^{14} ha già più di un migliaro, e mezzo di termini. Almeno col metodo qui proposto questi, ancora si troverebbero da se senza la tanto più immensa farragine della somma di tutti i precedenti, e ciascuno di essi si avrebbe con un metodo tanto semplice, e generale.

29. Scolio 2. Questo metodo io l'ho già pubblicato nel giornale de' Letterati di Roma fino dall' anno 1747., ove in una di due susseguenti Memorie delle Riflessioni, che vi ho aggiunte, ne ho anche fatto il confronto con quello del Moivre. Ma qui l'ho dimostrato con metodo assai più semplice, e diretto, che ho ricavato dalla natura stessa dell' oggetto, prendendolo dalle formole delle combinazioni, che vi devono entrare. Succede quasi sempre anche in Geometria, e nel calcolo, che le vie più dirittе, e più semplici per arrivare ad un termine nascosto sono le ultime a discuoprirsi.

IL FINE.

		ERRORI	CORREZIONI.
pag. 3.	lin. 3.	le quantirà	quantità
	22.	$a + abx$	$a + abx$
	26. 27.	dalle dimenſioni	delle dimenſioni
6.	20.	per l'apporſi	per l'opporſi
25.	ult.	o che	
28.	11.	$\frac{a \quad c}{b \quad d}$	$\frac{a}{b} \quad \frac{c}{d}$
66.	ult.	ptoblema	problema
71.	26.	10.°	8.°
103.	4.	t	

Si incontrerà di tanto in tanto qualch'altro errore ſimile a queſti, ma perciò aſſai facile ad avvertirſi dal lettore. Dopo le prime pagine, la reviſione è ſtata ben ſollecita, ed eſatta; certi errori però, che dipendono dalla più forte, o più debole preſſione del torchio, ſono ſtati inevitabili, ma non già ſparſi in tutte le copie. A cagione d'eſempio in varie copie ſi vedrà alla pag 21. ſegnata leggermente la ſinceta, che ſepara l'a dal b, in altre ſi troverà chiaramente impreſſa, ed in altre ſarà affatto ſvanita.

Nell' Aggiunta pag.	244.	lin. 12.	00253	·0, 0153
		24.	— 20	— r
		25.	$r' - r$	$r' - 9$
	247.	4.	linea	virgola
	252.	11.	all'	coll'
	254.	23.	o così	così

EPISTOLAE DUO

STEPLING-BOSCOVICH



EPISTOLA LXIII.

Clariſſimi Stepling ad Virum Clariſſimum P. Rogerium Boscovich S. I. Philoſophum et Mathematicum in paucis Excellentem.

Argumentum. Ex lectione operum Reuerendi Patris Rogerii Boſcovich in Collegio Romano Matheſeos Profeſſoris orta ſunt Steplingo nonnulla dubia Geometrica, quae ſibi ab Autore ipſo eximi cupit. Petit ſecum communicari repertum gradus Meridiani magnitudinem.

Reuerende in Chriſto Pater!

Patere, Vir Litteratiſſime, vt quamvis incognitus, dubiorum quorundam Geometricorum ſolutionem ex Te requiram, quem hiſce in rebus ex viſis lectisque tot praeclaris ſpecimini-bus, quae erudito orbi palam feciſti, ſcio eſſe verſatiſſimum; et decebat ſane id non ab alio, quam a Te poſtulare, vt qui Tuis ex operibus, ceu quibus-

dam

dam riuis fors meo vitio turbatam hauſi, ad ipſum recurram fontem, ex quo puriores ſemper bibuntur aquae.

Primum eſt: aequationes altiores imparis gradus poſſe oriri ex conditionibus Problematis prorſus impoſſibilis (cur enim non?) igitur harum aequationum radices omnes erunt impoſſibiles; cum tamen communis doctrina ſit, radices imaginarias nonniſi numero pari adeſſe, ſi quae adſunt. Haec animo agitanti ſubiit cogitatio: nunquam vi formae (et ſi abſtracte conſiderentur) quam habent aequationes altiores imparis gradus, omnes earum radices eſſe impoſſibiles, ſeu problema, quod exprimit, eſſe penitus impoſſibile; putem potius ex materia in caſu particulari oriri hanc omnimodam impoſſibilitatem. An ſic quidem recte cogito? cupio a Te edoceri. Alterum eſt plane id, quod ipſus dixeras in Tua acutiſſima diſſertatione de locorum continuitate; ſcilicet: peripheriam circuli, cui ſit diameter infinitus, abire in rectam; ſed ante tranſire deberet circulus ſucceſ-

ſiue

siue crescens per omnes intermedias curuaturas, donec ad minimam, quae est recta, perueniat. Igitur et per curuaturas parabolarum omnis generis, exempli gratia parabolarum cubicarum, biquadraticarum etc. etc. et tamen manifeste euincitur: angulum contactus, quem recta cum parabolis altioribus efficit, esse infinities atque infinite infinities respectiue minorem omni angulo contactus circuli cum recta. Oro, quis Tuus de his sensus? non refugio per Te instrui imo, vt qui maxime, opto. Ad haec gratiae loco ponam, si mecum communicare velis, quantam cum Reuerendo Patre Christophoro Maire (quem humillime veneror) gradus Meridiani terrestris magnitudinem inueneritis, et si quae alia, (plurima fuisse non dubito) obseruando comperistis ad excolendam Physicam pertinentia. Plane futurum confido, vt accuratam operationum Vestrarum descriptionem vtilitati publicae exponatis; sed quo tempore, quibusue typis, quaeso, me certiorem facias. Denique, vt etiam imposterum ad Te

meas

meas dare liceat, faue, et me beneuolentiae Tuae, sacraeque ad aras memoriae commendatum habe. Pragae, 18. April. 1755.

Ios. Stepling S. I.

EPI-

EPISTOLA LXIV.

Viri Clariſſimi Reuerendi Patris Rogerii Boſcovich S. I. ad Clariſſimum Stepling.

Argumentum. Excuſat ſuam in reſpondendo tarditatem. Tum ex ordine ſatisfacit omnibus, quae a Steplingo quaerebantur.

Reuerende in Chriſto Pater!

Ignoſcas, rogo, Vir humaniſſime, quod aliquamdiu diſtulerim reſponſum ad litteras, quas ad me dediſti 18 Aprilis. Eae me quidem inuenerunt occupatiſſimum, cum praeter quotidianas et publicae, et plurium priuatarum ſcholarum curas, inſtarem editioni recentioris cuiusdam philoſophiae a Benedicto Stoy, ciue meo, et amiciſſimo verſibus traditae, cui ego et adnotationes quasdam, et enucleationes adieci ſub ipſis verſibus, ac ad calcem tomi cuiusuis, quatuor enim continetur tomis, quorum primus prodiit per hosce dies; quaedam, quae mihi ſupplementa appellare libuit, in quibus et

et Metaphyſicae meditationes meae, et Geometricae demonſtrationes continentur. Illud autem confide, vbi totum opus prodierit, praecipua quaeque, quae ad philoſophiae ſanioris curſum requiruntur, et ſatis declarata et accuratiſſime demonſtrata, et quidem breui ac expedita methodo propoſita, haberi debere omnia. Habebuntur autem in primis quaecunque Newtonus in coeleſti Mechanica, et in Optica inuenit, ac meum etiam quoddam Phyſicae Generalis Syſtema poſtremo tomo paulo vberius pertractatum ac declaratum prodibit. Priore autem hoc tomo adſunt omnia, quae et ad compoſitionem pertinent motuum ac virium, adeoque ad motus acceleratos et retardatos, ad motus in curuis lineis quibuscunque per vires quascunque in ſpatio non reſiſtente cum vniuerſa virium centralium theoria, tum quae Galilaeus inuenit de grauitate, quae Hugenius de Cycloide et alia eiusmodi ſane multa, vt et quaeſtio de viribus viuis aliquanto diligentius pertractata. Cum autem editionem vrgerem, cum ad errores typographi corrigendos et redigendos in catalo-

talogum ad libri calcem apponendum, vniuersum opus diligenter perlegerem semel atque iterum, vix quidquam temporis supererat, quod in alios vsus converterem. Eo autem labore vbi defunctus sum, nihil antiquius habui, quam vt humanissimis responderem litteris Tuis.

Primum autem illud mihi proponis: *aequationes altiores imparis gradus posse oriri ex conditionibus problematis impossibilis*, quae tamen aliquam possibilem radicem habent semper, cum radices imaginariae nonnisi binae haberi possint. Vtro ego quidem agnosco illud: quamuis aequationem gradus imparis debere habere radicem realem saltem vnam, et radices imaginarias in aequatione quacunque non posse esse nisi binas. Vtrumque ego, ni fallor, satis perspicue et accurate demonstraui in elementis meis tomo secundo, illud quidem numero 451. hoc autem numero 452. at illud omnino nego: posse aequationem gradus imparis obuenire ex conditionibus problematis prorsus impossibilis, siquidem illa aequatio ipsas illas exprimat conditiones, quae pro-

problema impossibile reddunt. Oppositum reuerentia Vestra nequaquam probat, sed tantummodo addit: *cur enim non?* Respondeo: ob id ipsum, quod aequatio possibilem, non impossibilem valorem exhibet. Analytica nimirum methodus, si rite instituatur, sive geometrica sit, sive algebraica, inquirit in id, quod praestandum est, vt habeatur propositum. Si in eorum, quae praestanda sunt, complexo deueniatur ad aliquid, quod praestari omnino potest, habebitur eo praestito propositum; siquidem in eo continebatur, quidquid praestandum erat ad id habendum, et poterit semper per regressum haberi synthesis post rite constitutam analysin, qua synthesi a postremo illo praestando ad propositum illud primum redeamus.

Idcirco autem adieci illud: *siquidem illa aequatio ipsas illas exprimat conditiones, quae problema impossibile reddunt.* Fieri enim potest, vt illae omittantur, vel per oscitantiam analystae, vel ex ipsa problematis natura. Omitto prioris causae exempla, quae analysta satis cautus facile vitat, bina apponam

secundi generis ex Geometria desumta. In Geometria duo consideranda sunt: magnitudo linearum, atque positio. Quod pertinet ad magnitudinem, Algebra exprimit; quod ad positionem exprimere omnino non potest, sed tantummodo si ex positione ipsa quaedam magnitudinum relationes consequantur, illis vtitur, quae fere desumuntur ab aequalitate quadrati basis cum quadratis laterum in triangulis similibus. Si ea relatio, quae ex data positione oritur in magnitudine possibilis sit, ipsa autem positio impossibilis, ad aequationem deuenitur habentem radices reales, licet problema illud geometricum sit impossibile. En bina exempla e simpliciſſimis aequationibus deriuata:

In triangulo (Fig. VI.) ABC datis lateribus AC, CB, et basi AB, in quam demittatur perpendiculum CD, quaeratur segmentum AD. Sint AC=a, CB=b, AB=c, AD=x, et erit DB=c—x, adeoque $CD^2 = AC^2 - AD^2 = a^2 - x^2$, et $CB^2 = CD^2 + DB^2$, siue $b^2 = a^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2 = a^2 + c^2 - 2cx$. Nimirum $2cx = a^2 + c^2 - b^2$, et $x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$

Hic

Hic valor est semper possibilis, vt ex aequatione primi gradus nimirum impari debuit prouenire, et quidem negativus aequalis nihilo, vel positiuus prout b^2 fuerit $>$, $=$, vel $<$ quam a^2+c^2. Et tamen in primo et tertio casu problema impossibile saepe euadit. Sit enim, vt alia omittam, AB maior, quam AC+CB, patet triangulum eiusmodi tribus lineis construi non posse. Sit $a=2$, $b=3$, $c=6$; erit in superiore calculo $x=\frac{4+36-9}{12}$ $=\frac{31}{12}=2\frac{7}{12}$. Radix habetur, problema est impossibile. Nam ex natura trianguli illud eruimus esse $b^2=a^2+c^2-2cx$, siue magnitudinem AD esse eiusmodi, vt ducta in duplam AB exhibeat differentiam quadrati CB a summa quadratorum AC, AB. Huiusmodi quantitas possibilis est, quaecunque fuerint tres illae magnitudines AB, BC, AC, quae si in triangulo exprimi possint, eiusmodi relationem habebunt ad magnitudinem AD, non autem, si eiusmodi magnitudinem habeant, in triangulum componi pote-

runt, ad quod nimirum requiritur praeterea illud, vt bina latera simul tertio minora non sint, quod illa aequatio nequaquam expressit.

En aliud exemplum in aequatione gradus secundi: in anguli (Fig. VII.) DAB recti latere AD dentur puncta C, D, et quaeratur in altero latere AB punctum E, ita, vt DE ad CE habeat rationem datam m ad n. Sit AD = a, BC = b, DE = x. Erit $AE = x^2 - a^2$. $CE^2 = AE^2 + AC^2 = x^2 - a^2 + b^2$; quare $m^2 : n^2 = x^2 : x^2 - a^2 + b^2$. Siue $m^2x^2 - m^2a^2 + m^2b^2 = n^2x^2$. Nimirum $m^2x^2 - n^2x^2 = m^2a^2 - m^2b$, et $x = \pm m r \left(\frac{a^2 - b^2}{m^2 - n^2}\right)$.

Si, vt figura exhibet, fuerit AD maior, quam AC, binae aequationis radices erunt reales, vel imaginariae, prout ratio m ad n fuerit maioris vel minoris inaequalitatis; erit enim $a^2 - b^2$ quantitas positiua, $m^2 - n^2$ positiua vel negatiua prout fuerit $m > $ vel $< n$. Videtur igitur in priore casu problema sem-

per

per possibile; et tamen si valor $x = m\,r\left(\frac{a^2-b^2}{m^2-n^2}\right)$ fuerit minor quam DA, impossibile est punctum E cum quaesita conditione inuenire, vt nimirum DE pertingat ad latus anguli recti.

Fieri posse, vt is valor sit minor, quam DA, facile patet. Sit enim AD = 10, AC = 8, m = 5, n = 3. erit $m\,r\left(\frac{a^2-b^2}{m^2-n^2}\right) = 5r\left(\frac{100-64}{25-9}\right) = 5r\frac{36}{16}$ $= 5 \times \frac{6}{4} = \frac{30}{4} = 7\frac{1}{2} < 10$. Nimirum DE minor quam DA. Nec difficile est definire impossibilitatis limitem generaliter. Cum enim debeat esse $m\,r\left(\frac{a^2-b^2}{m^2-n^2}\right) < a$, erit $m^2a^2 - m^2b^2 < m^2a^2 - n^2a^2$, siue $m^2b^2 > n^2a^2$, et $mb > na$, nimirum ratio m ad n maior, quam a ad b, quo casu semper habebitur impossibilitas, quam illa aequatio non exhibet.

Id autem idcirco accidit, quod aequatio expressit solam hanc magnitudinum re-

lationem, quod nimirum binarum quantitatum quaesitarum D E, C E quadrata aeque inter se differant, ac binarum A D, A C datarum quadrata, ipsae autem inter se datam rationem habeant. Prima conditio habetur semper, vbi angulus D A E sit rectus, et binae quantitates quaesitae ad idem punctum E terminentur ex datis punctis D, C, sed non viciſſim, quotiescunque habetur illa conditio, possunt rectae inuentae collocari eo pacto.

Ea pertinent ad applicationem Algebrae ad Geometriam, quam ego quinto complectar tomo, vbi diligenter notandum illud: in pura Algebra semper, si rite procedas, inter propositionem praecedentem, ex qua sequens infertur per aequationem, additionem, subtractionem, multiplicationem, diuisionemque, et ipsam sequentem, quae infertur, haberi connexionem mutuam, adeoque regressum; in Geometria vero, vbi positio etiam intercedat, non semper mutuam esse connexionem ipsam. Generaliter data differentia quadratorum binarum rectarum, et ratione ipsarum, il-

lae

lae rectae semper inueniri possunt, dummodo sit data maioris inaequalitatis, vbi recta quaesita, quae maius quadratum habere debet, ponatur priore loco; sed non semper poterunt binae quantitates datae, et binae cum iis conditionibus inventae disponi in angulo recto.

Innuit id ipsum reuerentia Vestra, cum dicit: *ex materia potius in casu particulari oriri hanc totalem impossibilitatem.* Sed nunquam illud concesserim, aequationem, quae aliquod problema exprimat, posse habere radicem realem, licet problema sit impossibile. Tum enim illa aequatio problema ipsum nequaquam exprimet, sed partem problematis tantummodo possibilem omnino, parte, quae impossibilitatem inuoluit, penitus praetermissa, si aequatio radicem possibilem habet, cuiuscunque sit formae illud, quod ipsa exprimit, possibile semper erit. Noster erit error, non aequationis, si, quod ipsa vt possibile exhibet censeamus esse id, quod nobis fuerat propositum, cum re vera non id ipsum fuerit, sed aliquid non omnes ipsius conditiones exhauriens, possibilibus assumtis, impossibi-

libus, quae exprimi simul nequaquam poterant, praetermissis.

Quoniam aliquantum longior mihi euasit epistola, quam putarem, reliqua, quae supersunt, huic separatae pagellae addenda sunt. Petit reuerentia Vestra, quid sentiam de curuaturis, per quas curuatura arcus circularis transire debeat, antequam radio in infinitum aucto in rectam abeat circulus ipse. Cum enim, vt ego ipse affirmaui, debeat transire per intermedias omnes curuaturas, videtur consequi, vt transire debeat etiam per curuaturas parabolarum omnis generis, vt cubicarum, biquadraticarum etc. cum tamen euidenter euincatur: angulum contactus, quem recta continet cum parabolis altioribus esse infinities, et infinite infinities minorem respectiue omni angulo contactus circuli cum recta.

Dico igitur, vbi affirmo arcus circularis curuaturam transire per curuaturas omnes intermedias vsque ad rectam, cuius quidem curuaturam, non ego quidem minimam dixerim, vt reuerentia Vestra appel-

appellat, ſed nullam potius, me loqui de circularibus curuaturis, non vero de aliis aliorum generum. Et quidem mos inualuit apud Geometras, vt reliquarum curuarum curuatura aeſtimetur a curuatura circuli oſculatoris, ſiue eius circuli, cuius arcus ad arcum curuae accedit magis, quam arcus circuli alterius cuiusuis, ita vt inter ipſum, et arcum curuae nullus alius circularis arcus duci poſſit, licet nulla ne minima quidem ſui parte congruant, ſed in vnico tantummodo puncto oſculi coeant, in quo tangentem communem habent, et aliquando ſe mutuo ibidem contingunt, arcu curuae iacente vtrinque vel intra circulum, vel extra, aliquando ſecant mutuo, vt de circulis conicas ſectiones oſculantibus accurate demonſtraui per finitam Geometriam elementorum meorum Tomo III. num. 503. ſi in hoc ſenſu curuaturae nomen aſſumatur per definitionem, et menſura curuaturae ponatur reciproca radii circuli oſculatoris itidem per definitionem nominis; ita iis parabolis altioribus, quae angulum contactus habent quouis angulo contactus

circularis minorem, curuatura erit = o, ſiue nulla, vt in linea recta; in aliis, quorum angulus contactus quouis circulari eſt minor, cenſenda erit curuatura infinita, quae denominationes ex illa arbitraria nominis definitione profluent. Nam in parabolis ſublimioribus, in quibus $x = y^m$, exprimente x abſciſſam y ordinatam tangenti parallelam, vbi ſemper m debet vnitatem excedere; ſi ſit $m < 2$, habetur angulus contactus maior quouis circulari, radio oſculatoris circuli euaneſcente; ſi $m = 2$, habetur angulus medius inter circulares in Apolloniana nimirum parabola, et quidem in infinitum proximus angulo circuli habentis pro diametro vnitatem, qui eſt oſculator; ſi $m > 2$, habetur angulus quouis circulari minor.

Ceterum vbi aucto circuli radio curvatura circularis minuitur, arcus ipſius, dum abit demum in rectam, non ſolum non congruit vnquam cum eiusmodi parabolis ſublimioribus, ſed ne cum Apollonianis quidem parabolis, quae circulos maiores praecedentibus habent oſculatores,

latores, nec cum aliis infinities infinitis curuarum generibus, quae eosdem illos circulos oſculatores habent. Nulla enim curua cum alia curua arcu continuo vtcunque minimo congruit, ſed curuae ſe in punctis quibusdam interſecare poſſunt, vel tangere, ita tamen, vt inter bina quaevis eiusmodi puncta arcus ſemper aliquis interiaceat continuus non congruens, quod quidem de Algebraicis curuis admodum facile demonſtratur accuratiſſime. Quam ob rem arcus circuli perpetuo creſcentis nunquam accurate congruit cum arcu illo curuae cuiusuis, ſed vtcunque minor ſit circulus circulo oſculatore, arcus ipſius iacet tam intra oſculatoris arcum, quam intra arcus omnium curuarum eum circulum pro oſculatore habentium, quarum aliquae circa oſculum vtrinque iacent intra, aliquae vtrinque extra, aliquae hinc intra, et inde extra. Vtcunque autem is circulus ſit maior circulo oſculatore, eius arcus vtrinque circa oſculum iacet extra arcum circuli oſculatoris, et extra curuas omnes, quas is oſculatur, quod quidem ego in ipſo illo tertio elementorum meorum

tomo

tomo demonſtraui de circulis eiusmodi reſpectu conicarum ſectionum, et curvis omnibus eſt generale.

Id quidem accidit etiam in recta arcus circularis, quae ſi ad radium circuli inclinetur in angulo vtcunque parum minore recto, immergitur intra circulum, aucto illo angulo accedit ad tangentem, decreſcente illa parte, quae immergitur, et in ipſam demum tangentem abit, quin vnquam congruat cum arcu circulari. Eodem prorſus pacto circuli arcus oſculatore minoris ex inſcripto tranſit ad circumſcriptum, quin vnquam congruat cum arcu curuae alterius cuiuscunque, et pariter in rectam abit, quin vnquam abeat in curuarum arcus circulum oſculatorem habentium infinitum, et angulum contactus quouis circulari minorem. Hinc ſi nomine curuaturae intelligatur forma illa ipſa curuarum diuerſam a circulo naturam habentium, vt parabolarum gradus cuiuscunque, circulus, dum augetur radius in infinitum, ita curuaturas omnes aliarum curuarum tranſibit, vt in eas abeat nunquam.

Id

Id quidem videtur tabum quendam in Geometriam inducere, cum angulus contactus e minore fiat maior, vel vice versa, quin vnquam aequalis euadat, vt angulus acutus in vulgari Geometria, dum in rectum abit e minori respectu anguli, quem continet peripheria cum radio euadit maior, quin vnquam aequalis fiat. Quod Tacquetum nostrum vsque adeo absterruit, vt angulum dixerit non esse quantitatem, nec, quod omnes semper Geometrae affirmarunt, angulum angulo maiorem agnouerit, aut minorem, vel aequalem, sed dissimilem, vel similem. At ego quidem non video, quid in eo vsque adeo mirandum sit, cum anguli diuersi generis linearum diversae naturae, ac speciei sint ita, vt possit in iis excessus haberi, vel defectus altero intra alterum incluso, quin vlla habeatur aequalitas; impedita nimirum tam immediata congruentia, quam congruentia per commune aliquid additum, vel ablatum, quae duae solae aequalitatis ideae habentur in Geometria. Atque hoc quidem pacto perspectam iam esse mentem meam arbitror, quam reveren-

verentia Veſtra expoſcebat; in quo quidem ſi quid eſt, quod redarguendum iudicet, gratiſſimum mihi erit, ſi per litteras ſignificauerit.

Poſtremo loco petebat reuerentia Veſtra ſcire noſtram dimenſionem gradus terreſtris. Nos ab Vrbe Roma, cuius latitudo eſt 41°, 54′, in Boream dimenſi ſumus gradus duos, et minuta decem quam proxime. Subductis calculis inuenimus gradum medium aliquanto minorem, quam qui Gallicis graduum menſuris reſpondeat, quod ego quidem expectabam, et tribuendum cenſeo aberrationi penduli attracti in additamentum illud materiae, quae ab vtroque mari Appenninum verſus per totam Italiam protenſum quam longa eſt, perpetuo aſſurgit. Reuerendus Pater, Chriſtophorus Maire, iam calculos ſubduxit, quos ego nunc temporis recognoſco. Ante anni huius exitum prodibit, et breuis noſtrarum menſurarum epilogus ab ipſo conſcriptus, et meum opus aliquanto operoſius, in quo et inſtrumenta, quibus vſi ſumus, deſcribam, et de telluris

ris figura verba faciam, vbi omnia satis certo constiterint, cum reuerentia Vestra communicabo. Interea, vt mei ad aram sit memor, vehementer rogo. Romae, 7 Iunii, 1755.

Rogerius Ioſ. Boscovich.
S. I.

EPI-